

Elemente allmählich Ordnung und Classe der Complexfläche erniedrigen, bis die Fläche zuletzt von der zweiten Ordnung und Classe wird.

Wir können behufs einer weiteren Eintheilung der Complexflächen unterscheiden, ob die feste gerade Linie d dem gegebenen Complex angehört oder nicht; ferner, ob die Singularitäten, welche die Complexfläche besitzt, also ihre singulären Ebenen und Punkte, ihre Doppelpunkte und Doppelsebenen, reell oder imaginär sind. Allein es ist hier nicht der Ort, in ein grösseres Detail bei der Classification der Complexflächen einzugehen. Wir beschränken uns darauf, nur das erste und wesentlichste Eintheilungs-Princip: die Beziehung der festen geraden Linie d zu der Fläche Φ , in Anwendung zu bringen.

344. Wir erhalten so die nachstehende Eintheilung der Flächen eines gegebenen Complexes des zweiten Grades in sieben Arten.*) Diese Arten sind nicht einander coordinirt. Vielmehr umfasst eine jede vorhergehende einzelne der folgenden als Grenzfälle.

I.

Die gerade Linie d ist beliebig angenommen.

In dem sechsten Paragraphen des vorletzten Abschnitts haben wir diesen Fall, den wir als den allgemeinen der Complexflächen bezeichnen, einer eingehenden Discussion unterworfen, und die gegenseitige Lage der Singularitäten der Fläche untersucht. Wir haben dort insbesondere unter der Annahme reeller Singularitäten eine lineare Construction für die Fläche gefunden, die nur dann durch eine Construction vom zweiten Grade ersetzt werden muss, wenn die gegebene gerade Linie d selbst eine Complex-Linie ist. Als hier in Betracht kommend heben wir hervor, einmal dass die gerade Linie d ein Doppelstrahl und eine Doppelaxe der Fläche ist, dann, dass die vier singulären Strahlen und vier singulären Axen der Fläche bezüglich einfache Strahlen, nullfache Axen und nullfache Strahlen, einfache Axen derselben sind. Ordnung und Classe der Fläche sind beide die vierte. Die Zahl der willkürlichen Constanten, von denen eine solche Fläche abhängt, ist siebenzehn.

II.

Die gerade Linie d berührt die Fläche Φ .

Zwei der vier singulären Punkte fallen in den Berührungspunkt, zwei der vier singulären Ebenen fallen in die bezügliche Tangential-Ebene zusammen.

*) Es ist leicht, aus demselben Princip noch weitere Unterabtheilungen herzuleiten, auf die wir aber hier nicht eingehen.

Die zugehörigen beiden singulären Strahlen und singulären Axen fallen in dieselbe gerade Linie zusammen: diejenige singuläre Linie, welche in dem Complexe dem Berührungspunct der Fläche Φ mit der geraden Linie d und der Tangential-Ebene in demselben zugeordnet ist. Diese Linie wird eine Doppellinie der Fläche, in dem Sinne, dass sie sowohl ein Doppelstrahl als eine Doppelsexe derselben ist. Die Complexfläche besitzt zwei sich schneidende Doppellinien. Die Beziehung der beiden Doppellinien zu der Fläche ist nicht dieselbe. Es wird die Fläche von einer jeden durch d hindurchgelegten Ebene in einer Curve der zweiten Classe geschnitten und ein jeder auf d angenommener Punct ist der Mittelpunct eines Umhüllungs-Kegels der zweiten Ordnung. Für die zweite Doppellinie vertauschen sich die Worte Ordnung und Classe.

Die Complexflächen, welche wir betrachten, sind, wie in dem allgemeinen Falle, von der vierten Ordnung und Classe. Die Zahl der willkürlichen Constanten, von welchen sie abhängen, hat sich auf sechszehn erniedrigt.

III.

Die gerade Linie d ist eine Doppeltangente der Fläche Φ .

Die vier singulären Ebenen und vier singulären Puncte der Complexfläche fallen paarweise zusammen. An Stelle der vier singulären Strahlen und vier singulären Axen der Fläche treten zwei Doppellinien derselben. Die Fläche enthält drei Doppellinien, von denen eine (d) die anderen beiden schneidet. Wenn wir durch eine der letzteren beiden eine Ebene hindurchlegen, so schneidet dieselbe die Complexfläche in einer Curve zweiter Ordnung, welche auf der anderen einen Doppelpunct hat, und die sich also in das System zweier geraden Linien aufgelöst hat. Die Complexfläche ist eine Linienfläche geworden. Ordnung und Classe derselben sind die vierte geblieben. Ihre Constanten-Anzahl beträgt fünfzehn.

IV.

Die gerade Linie d liegt in einer Doppelsebene der Fläche Φ .

Von den vier singulären Ebenen der Complexfläche fallen zwei in die Doppelsebene zusammen, während die anderen beiden eine beliebige Richtung haben. Die vier singulären Puncte fallen paarweise zusammen in die beiden Durchschnitts-Puncte der geraden Linie d mit demjenigen Kegelschnitt, nach