

Wollte man sich die Aufgabe stellen, dieses Pendel zu einem astatischen zu machen, so hätte man den Mittelpunkt der Kugel so zu führen, daß  $h$  für alle Lagen der Kugel constant wäre. Unter  $h$  ist dabei die Axenprojection

Fig. 766.

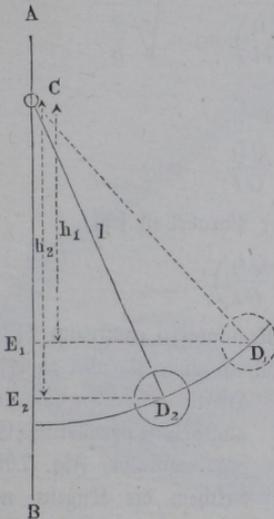
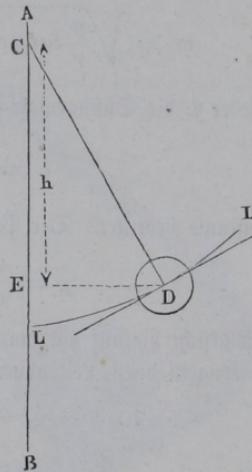


Fig. 767.



des Pendelarmes zwischen der Kugelmitte und der Spindel  $AB$  zu verstehen. Denkt man sich nun die Kugel, anstatt an dem festen Punkte  $C$  hängend, auf einer gewissen Leitcurve  $LL$ , Fig. 767, geführt, so wird die Wirkung des früheren festen Aufhängepunktes  $C$  nunmehr durch die in  $D$  zur Curve normale Reaction  $DC$  ersetzt. Es gilt daher dieselbe Rechnung, wie sie in §. 195 für das Centrifugalpendel angeführt wurde, und man hat wie dort die

Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ , wenn  $h = CE$  die Subnormale der

Leitcurve  $L$  bedeutet. Soll nun  $\omega$  für alle Stellungen der Kugel constant sein, so muß es auch die Subnormale  $CE$  sein, woraus sich ergibt, daß die

Leitcurve  $L$  eine Parabel zur Axc  $AB$  und dem Parameter  $\frac{2g}{\omega^2}$  sein muß,

da der Parameter gleich der doppelten Subnormale ist. Umgekehrt ist für eine parabolische Leitbahn zum Parameter  $p$  die erforderliche Winkel-

geschwindigkeit der Spindel  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{p}}$ .

Die Parabel ist für den Watt'schen und Porter'schen Regulator nur so lange die astatische Curve, als der Winkel  $\beta$ , welchen die Hülsenstangen

mit der Aze bilden, fortwährend gleich Null ist, denn für diesen Fall geht die allgemeine Gleichung des vorigen Paragraphen

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan \alpha + \frac{Q}{G} \frac{l_1}{l} (\tan \alpha + \tan \beta)$$

über in

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \tan \alpha \left(1 + \frac{Q l_1}{G l}\right)} = c \sqrt{\frac{g}{h}},$$

wenn wieder  $h$  die Subnormale und

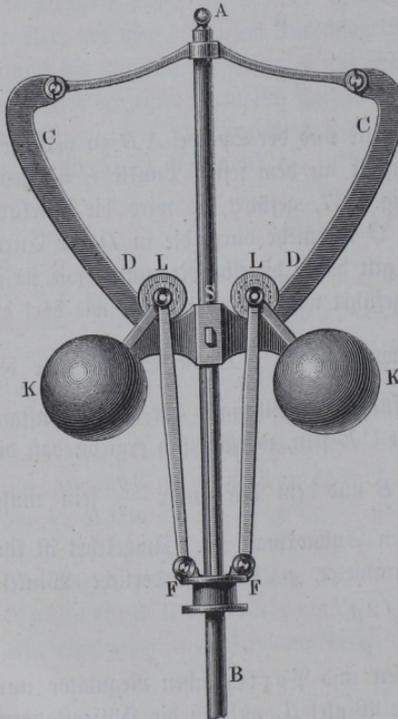
$$c = \sqrt{1 + \frac{Q l_1}{G l}}$$

eine Constante bedeutet. Der Parameter der Parabel ist jetzt

$$p = \frac{2g}{\omega^2} \left(1 + \frac{Q l_1}{G l}\right).$$

Mit Rücksicht hierauf hat man astatische Regulatoren construirt, bei denen man die Kugeln durch Leitbahnen zwingt, sich in einer Parabel zu bewegen.

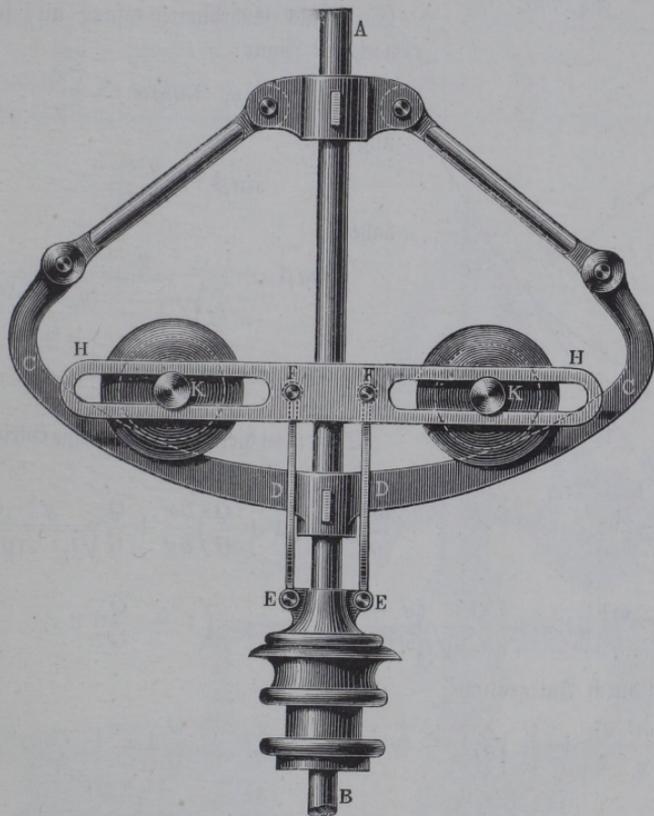
Fig. 768.



Hierher gehört der von Franke angegebene parabolische Centrifugalregulator, Fig. 768, bei welchem die Kugeln mittelst Stangen an Rollen  $L$  hängen, welche auf den mit der Aze  $AB$  fest verbundenen Leitbahnen  $CD$  geführt sind. Die Gestalt dieser Leitbahnen ist dabei nach einer Aequidistanten derjenigen Parabel zu bestimmen, in welcher die Schwerpunkte der Kugeln sich bewegen sollen. Die Hülsenstangen  $LF$  sind hierbei an die Zapfen der Rollen  $L$  angehängt, und es ergibt sich daher nach dem Obigen, daß dieser Regulator nicht genau astatisch ist, weil die Hülsenstangen der Aze nicht parallel bleiben. Auch verursacht die excentrische Wirkung der Centrifugalkraft der Kugeln hier

eine Vergrößerung der schädlichen Widerstände an den Laufrollen *L*. Besser ist daher die Construction von Garnett, Fig. 769, bei welcher die Hülse *E* durch die Stangen *EF* mit einer horizontalen Schleife *H* auf jeder Seite versehen ist, in deren Schlitzen die vorstehenden Zapfen *K* der Kugeln ge-

Fig. 769.



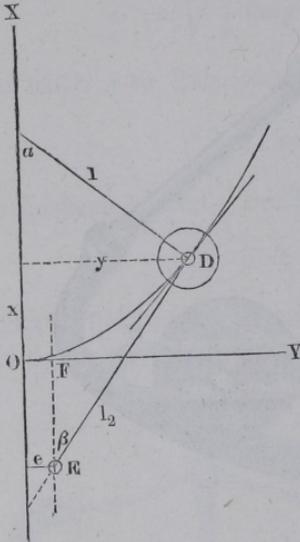
führt sind. Die Leitbahnen *CD* sind auch hier in dem Abstände des Rollenhalbmessers äquidistant zu der betreffenden Parabel anzuordnen. Doch haben auch diese Regulatoren sich wenig Anwendung verschaffen können, hauptsächlich wegen der Uebelstände, mit denen die astatischen Regulatoren überhaupt behaftet sind (siehe weiter unten).

Wollte man die allgemeine astatische Curve ermitteln, d. h. diejenige, auf welcher die Kugelmittelpunkte geführt werden müßten, wenn die Hülfsstangen *DE*, Fig. 770 (a. f. S.), wegen ihrer endlichen Länge mit der Axe den veränderlichen Winkel  $DEF = \beta$  bilden, so hätte man auf die allgemeine Gleichung des §. 195

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan \alpha + \frac{Q}{G} \frac{l_1}{l} (\tan \alpha + \tan \beta)$$

zurückzugehen. Setzt man hierin  $l_1 = l$  für den Fall, daß die Hülsenstangen in den Kugelmitteln angreifen, und nimmt man die Regulatoraxe als X-Axe und den tiefsten Punkt O der betreffenden Curve als Coordinatenanfang an, so ist

Fig. 770.



nach der Figur:

$$r = y, \quad \tan \alpha = \frac{\partial x}{\partial y}$$

und

$$\sin \beta = \frac{y - e}{l_2},$$

daher

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{y - e}{l_2 \sqrt{1 - \frac{(y - e)^2}{l_2^2}}} \\ &= \frac{y - e}{\sqrt{l_2^2 - (y - e)^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{\omega^2}{g} y = \left(1 + \frac{Q}{G}\right) \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{Q}{G} \frac{y - e}{\sqrt{l_2^2 - (y - e)^2}}$$

oder

$$\frac{\omega^2}{g} y \partial y - \frac{Q}{G} \frac{(y - e) \partial y}{\sqrt{l_2^2 - (y - e)^2}} = \left(1 + \frac{Q}{G}\right) \partial x,$$

woraus durch Integration

$$\frac{\omega^2 y^2}{g} + \frac{Q}{G} \sqrt{l_2^2 - (y - e)^2} = \left(1 + \frac{Q}{G}\right) x + Const$$

folgt.

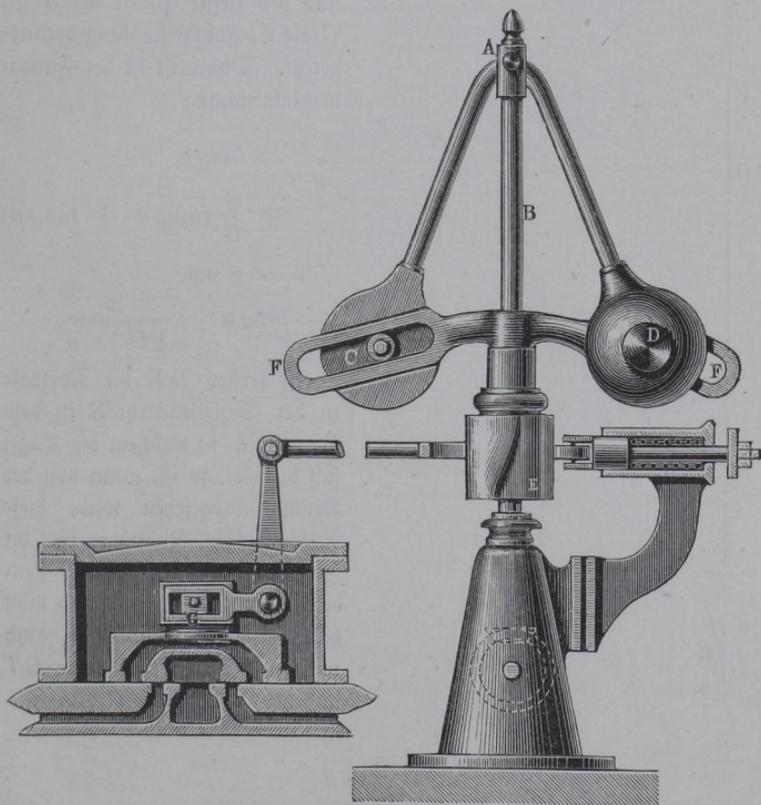
Die Constante bestimmt sich mit Rücksicht darauf, daß für  $x = 0$  auch  $y = 0$  ist, zu  $Const = \frac{Q}{G} \sqrt{l_2^2 - e^2}$ .

§. 198. Bei den hier besprochenen Einrichtungen erreicht man die Astasie des Regulators dadurch, daß man die Pendelaufhängung der Kugel durch die Führung der letzteren auf einer Curvenschiene ersetzt, welche so gestaltet ist, daß die Richtung ihrer Reaction gegen die Kugel in jeder Stellung derselben unter einem solchen Winkel  $\alpha$  gegen die Axe geneigt ist, daß der Gleichung

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan \alpha + \frac{Q}{G} \frac{l_1}{l} (\tan \alpha + \tan \beta)$$

durch eine constante Geschwindigkeit  $\omega$  genügt wird. Aus dieser Gleichung ersieht sich nun, daß man diese Bedingung auch bei einer Pendelaufhängung der Kugel wie bei dem Watt'schen Regulator erfüllen kann, wenn man dem Winkel  $\beta$ , unter welchem die Zugkraft der Hülse gegen die Aze geneigt ist, in jeder Lage die jener Gleichung entsprechende Größe giebt. Man darf dann die Hülse nicht mehr durch Lenker mit den Kugeln verbinden, sondern man hat eine Curvenschleife von geeigneter Form anzuwenden, an deren auf- und absteigender Bewegung die Hülse Theil nimmt. Ein solcher Regulator ist von Werner ausgeführt\*) und durch Fig. 771 veranschaulicht. Hier-

Fig. 771.

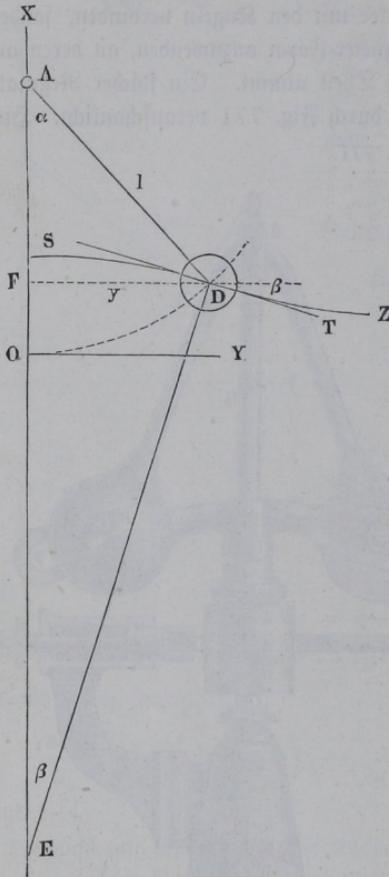


bei sind die Pendelarmer  $AD$  central an der Aze  $AB$  aufgehängt und die Kugeln geschlitzt, um eine Curvenschleife  $FF$  durch sich treten zu lassen, in deren Schlitzen jede Kugel mit einer innerlich angebrachten Rolle  $C$  sich führt.

\*) S. Zeitschr. deutsch. Ingen. 1868, S. 489.

Direct mit dieser auf der Aze verschiebbaren Schleife *F* ist die Hülse *E* verbunden, welche als ein conoidischer Körper ausgebildet ist, der durch seine Höhenlage die längere oder kürzere Dauer der Eröffnung des Expansionsventils *G*, und damit den Füllungsgrad der Dampfmaschine regelt (siehe hierüber Theil II, Dampfmaschinen).

Fig. 772.



Um die Gestalt dieser Curve zu bestimmen, sei Fig. 772 die Aze des Regulators als *X*-Aze und der tiefste Punkt der Kugel *O* als Koordinatenanfang vorausgesetzt. Dann ist in der Fundamentalgleichung

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \operatorname{tang} \alpha + \frac{Q}{G} (\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta)$$

$$r = y \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Ist ferner *DE* die Normale zu der Schleifencurve *S* in dem Punkte *D*, in welchem die Kugel sich befindet, so ist, wenn von der Reibung abgesehen wird, diese Normale die Richtung für die Zugkraft der Hülse auf das Pendel, daher  $\angle OED = \beta$ , und man hat, da dieser Winkel  $\beta$  auch zwischen der Curventangente *DT* und der *Y*-Aze wiederkehrt:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\partial x}{\partial y}.$$

Mit diesen Werthen geht die Grundgleichung über in:

$$\frac{\omega^2 y}{g} = \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}} \left(1 + \frac{Q}{G}\right) + \frac{Q}{G} \frac{\partial x}{\partial y},$$

oder

$$\frac{\omega^2}{g} y \partial y - \left(1 + \frac{Q}{G}\right) \frac{y \partial y}{\sqrt{l^2 - y^2}} = \frac{Q}{G} \partial x,$$

woraus durch Integration

$$\frac{\omega^2}{2g} y^2 + \left(1 + \frac{Q}{G}\right) \sqrt{l^2 - y^2} = \frac{Q}{G} x + \text{Const folgt.}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß  $x$  in der Aze ein Maximum, und in einem anderen Punkte  $Z$  ein Minimum wird, und daß zwischen beiden Stellen ein Wendepunkt liegt.

Was die Anwendbarkeit der astatischen Regulatoren überhaupt anbelangt, so ist von Reuleaux zuerst\*) darauf aufmerksam gemacht worden, daß dieselben nur für directe Uebertragung geeignet sein können, d. h. für solche Anordnung des Stellzeuges, bei welcher die Hülsenverschiebung direct zur Verstellung der Admissionsvorrichtung verwendet wird. Denkt man sich nämlich einen astatischen Regulator mit einer indirect wirkenden Uebertragungsvorrichtung verbunden, derart also, daß die auf- oder absteigende Bewegung der Hülse durch Einschaltung eines Wendetrieibes eine selbständig rotirende Welle zum Schließen oder Oeffnen der Admissionsvorrichtung veranlaßt, so muß daraus ein sehr unruhiger Gang der Maschine resultiren. Wenn nämlich die Maschine ihre normalmäßige Geschwindigkeit  $\omega$ , bei welcher der Regulator seine mittlere Stellung inne hat, also das Wendetriebe ausgerückt hält, vergrößert, so wird, sobald die Geschwindigkeit den durch die Reibungswiderstände bedingten Betrag  $\omega'$  erlangt hat, der Regulator steigen und das untere Wechselrad einrücken, worauf durch ein theilweises Verschließen der Admissionsklappe die Geschwindigkeit der Maschine ermäßigt wird. Der Regulator hält nun aber das Wendetriebe auch noch eingerückt, wenn die Geschwindigkeit auf den normalen Betrag  $\omega$  zurückgeführt ist, da er vermöge seiner Astatie bei dieser Geschwindigkeit in jeder Stellung im Gleichgewichte verharrt. Es findet daher auch dann noch ein weiteres Schließen des Dampfventils statt, welches so lange andauert, bis die Geschwindigkeit auf den Betrag  $\omega''$  herabgesunken ist. Erst in diesem Augenblicke fängt der Regulator an zu sinken und wird so lange abfallen, bis das obere Wechselrad eingerückt ist, worauf derselbe Vorgang sich in der entgegengesetzten Art wiederholt. Der Regulator wird daher in fortwährendem Schwingen verbleiben, auch wenn die Ungleichförmigkeit des Arbeitswiderstandes einen Grund hierzu nicht abgiebt. Ist der bei einer indirecten Uebertragung angewendete Regulator dagegen statisch, so wird er zwar bei Eintritt der Geschwindigkeit  $\omega'$  ebenfalls steigen und das Wechseletriebe einrücken, da er aber in der höheren Stellung sich nur bei einer größeren Geschwindigkeit erhalten kann, als  $\omega$  ist, so wird er diese Stellung schon wieder zu verlassen streben, sobald die Geschwindigkeit sich dem normalmäßigen Betrage  $\omega$  wieder nähert und ein

\*) Zeitschr. deutsch. Ingen. 1869, S. 165.

Einrücken des oberen Wechslrades wird im Allgemeinen erst eintreten, wenn durch überwiegende Arbeitswiderstände die Geschwindigkeit unter den Werth  $\omega''$  herabsinken sollte.

Hieraus folgt, daß die astatischen Regulatoren nur für directe Uebertragung brauchbar sein können. Aber auch in diesem Falle hat sich bei der Anwendung astatischer Regulatoren vielfach ein unruhiger Gang der Maschine als Uebelstand gezeigt. Die Ursache hiervon ist hauptsächlich in der Wirkung der Massen der den Regulator zusammensetzenden Theile zu suchen. Wenn nämlich die normale Geschwindigkeit  $\omega$  der Maschine einer Aenderung ausgesetzt ist, so wird die Hülse in Bewegung gerathen, sobald die Geschwindigkeit den von den schädlichen Widerständen abhängigen Betrag  $\omega'$  oder  $\omega''$  erreicht hat. Mit Eintritt dieser Bewegung der Hülse ist aber das Gleichgewicht der auf den Regulator wirkenden Kräfte nicht hergestellt, insbesondere deswegen nicht, weil die Reibungswiderstände der Ruhe, durch welche  $\omega'$  und  $\omega''$  bestimmt werden, einen größeren Betrag zu haben pflegen, als diejenigen der Bewegung. Die Hülse und die mit ihr verbundenen Theile sind in Folge dessen bei der auf- oder absteigenden Bewegung einer gewissen Beschleunigung ausgesetzt, derzufolge sie, auch nachdem die Normalgeschwindigkeit wieder hergestellt ist, nicht zum Stillstande gelangen, sondern sich unter dem Einflusse der aufgenommenen lebendigen Kraft noch weiter bewegen. Dadurch wird die Geschwindigkeit der Maschine ferner in demselben Sinne verändert. Nachdem diese lebendige Kraft gänzlich aufgebraucht ist, wird daher sofort eine Rückwärtsbewegung der Hülse eintreten, und es müssen hierdurch Schwingungen in dem Spiele des Regulators entstehen, welche als Ursache des so häufig beobachteten unruhigen Ganges der Maschine anzusehen sind. Auch die statischen Regulatoren zeigen dieses Verhalten, wenn auch in geringerem Grade, und zwar um so weniger, je statischer sie sind.

Man hat sich vielfach bemüht, diesem Mangel der Regulatoren dadurch zu begegnen, daß man selbige mit einem sogenannten Katarakte versehen hat, d. h. mit einem künstlichen Widerstande, welcher der beschleunigten Bewegung der Hülse entgegentritt. Meistens besteht dieser Katarakt aus einem Kolben *K*, Fig. 773, welcher in einem beiderseits geschlossenen Cylinder *Z* verschiebbar ist und an der Bewegung der Hülse direct oder indirect Theil zu nehmen gezwungen ist. Hierbei wird die in dem Cylinder enthaltene Flüssigkeit oder Luft durch ein Rohr, welches die Räume zu beiden Seiten des Kolbens verbindet, verdrängt, wobei der durch die Stellung des Hahnes *H* beliebig zu regulirende Widerstand der Flüssigkeit eine besänftigende Wirkung auf das zu schnelle Ausschlagen des Regulators ausübt, ohne einem langsam erfolgenden Ausschlage ein wesentliches Hinderniß entgegenzusetzen. Als hemmende Flüssigkeit pflegt man bei solchen Katarakten Wasser, Del oder Glycerin, noch besser aber Luft zu verwenden, und man bildet öfter das mit der Hülse

verbundene Gegengewicht  $Q$  direct zu einem Hohlcylinder aus, dessen Kolben auf der Regulatoraxe befestigt ist\*).

Um die schädliche Kolbenreibung der gewöhnlichen Katarakte, welche die

Fig. 773.

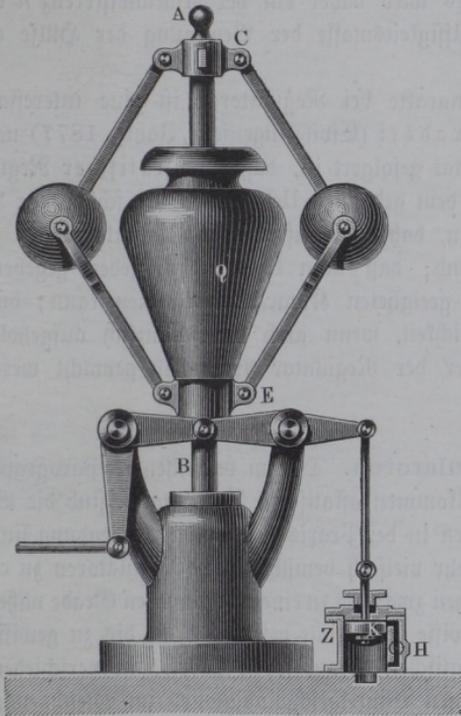
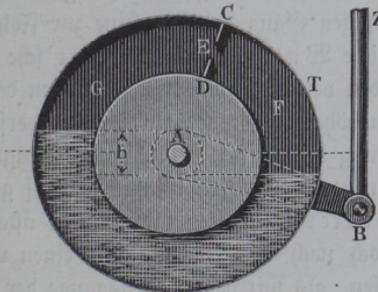


Fig. 774.



Empfindlichkeit des Regulators vermindert, zu umgehen, ist ein eigenthümlicher Katarakt von Buß\*\*) angegeben, bei welchem unter Einwirkung eines Luftquantums das Gewicht einer gewissen Wassermenge die überstürzende Wirkung des Regulators hemmt. Dieser Apparat besteht aus einer ringförmigen Trommel  $T$ , Fig. 774, welche um ihre Axe  $A$  drehbar, mit Hilfe des Hebels  $AB$  und einer Zugstange  $Z$  so mit der Hülse des Regulators in Verbindung steht, daß eine auf- oder absteigende Bewegung der Hülse eine Oscillation der Trommel  $T$  nach der einen oder anderen Richtung hervorruft. Die Trommel  $T$  ist zur Hälfte mit einer Flüssigkeit gefüllt, und der darüber befindliche Luftraum durch eine Scheidewand  $CD$  durchsetzt, welche durch eine kleine Oeffnung  $E$  die Luft zu beiden Seiten in Verbindung erhält. Es ist daraus klar, wie bei einer langsamen Bewegung der Trommel das Niveau der Flüssig-

\*) Zeitschr. deutsch. Ingen. 1874, S. 138, Katarakt von Werner.

\*\*) Siehe Civil-Ingenieur 1872, S. 25.

feit in beiden Abtheilungen nur wenig verschieden sein wird, da hierbei die Luft genügend schnell durch die Oeffnung  $E$  aus einer Abtheilung in die andere strömen kann. Bei einer schnellen Bewegung der Trommel aber wird das Niveau der Flüssigkeit in der einen Abtheilung  $F$  tiefer stehen als in der anderen  $G$ , und es wird daher ein der Niveaudifferenz  $h$  entsprechendes Gewicht einer Flüssigkeitsmasse der Bewegung der Hülse entgegenwirken.

Ueber die Wirkung der Katarakte bei Regulatoren ist eine interessante Untersuchung von Wischnegradski (Civil-Ingenieur, Jahrg. 1877) nachzulesen, aus welcher das Resultat gefolgert ist, daß ein astatischer Regulator durch keinen Katarakt von dem gedachten Uebelstande der schädlichen Beweglichkeit befreit werden kann, daher die astatischen Regulatoren an sich als unbrauchbar anzusehen sind; daß man dagegen für jeden gegebenen statischen Regulator einen geeigneten Katarakt bestimmen kann, durch welchen jene schädliche Beweglichkeit, wenn auch nicht gänzlich aufgehoben, so doch beschränkt und daher der Regulator brauchbar gemacht werden kann.

§. 199. Pseudoastatische Regulatoren. Die im vorstehenden Paragraphen erwähnten Uebelstände der vollkommen astatischen Regulatoren sind die Veranlassung gewesen, daß dieselben in der Praxis nur wenig Anwendung finden konnten. Man hat sich vielmehr vielfach bemüht, solche Regulatoren zu construiren, welche sich den astatischen zwar bis zu einem bestimmten Grade nähern, dabei aber doch noch eine gewisse Stabilität besitzen, d. h. bis zu gewissem Grade die Eigenschaft der statischen Regulatoren haben, in verschiedenen Hülfsstellungen bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten im Gleichgewichte zu sein. Es wurde schon im Vorstehenden angeführt, daß gerade vermöge dieser Eigenschaft die statischen Regulatoren weniger dem sogenannten Springen ausgesetzt sind, welches durch die Trägheitswirkung der Massen entsteht und einen sehr unregelmäßigen Gang der Maschine zur Folge hat. Andererseits konnte der ursprüngliche Watt'sche und Porter'sche Regulator aber nicht genügen, da die den verschiedenen Kugelstellungen desselben entsprechenden Geschwindigkeiten in höherem Grade von einander verschieden sind, als dies mit der guten Wirkung der meisten Maschinen verträglich ist. Die Bestrebungen sind daher in neuerer Zeit hauptsächlich darauf gerichtet gewesen, den Watt'schen oder Porter'schen Regulator einem astatischen möglichst zu nähern, ihm aber doch noch mit Rücksicht auf einen ruhigen Gang so viel Stabilität zu belassen, als mit dem Arbeitsgange der zu betreibenden Maschinen verträglich ist. Derartige angenähert astatische Regulatoren pflegt man meist unter der Bezeichnung der pseudoastatischen Regulatoren zusammenzufassen.

Wie groß die Verschiedenheit der Winkelgeschwindigkeiten des Watt'schen und Porter'schen Regulators in den beiden äußersten Pendelstellungen ist, lehrt die allgemeine Gleichung des §. 195:

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan \alpha + \frac{Q}{G} \frac{l_1}{l} (\tan \alpha + \tan \beta).$$

Für rhombische Aufhängung, d. h. für  $\alpha = \beta$ , geht diese Gleichung über in

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan \alpha \left( 1 + \frac{Q}{G} \frac{2l_1}{l} \right)$$

oder

$$\omega = C \sqrt{\frac{g}{r \cot \alpha}} = C \sqrt{\frac{g}{h}},$$

wenn die für eine bestimmte Ausführung constante Größe

$$C = \sqrt{1 + \frac{Q}{G} \frac{2l_1}{l}}$$

mit  $C$  bezeichnet wird, und man unter  $h$  wieder die Projection des Pendelarmes zwischen Axe und Kugelmittle auf die Axe versteht. Diese Projection  $AE$ , Fig. 775, drückt sich aus durch

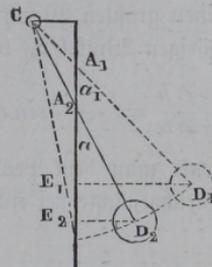
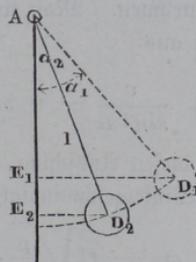
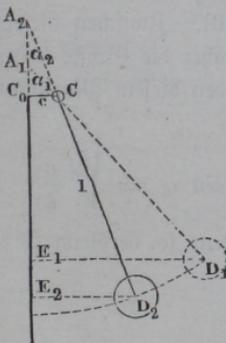
$$h = l \cos \alpha + c \cot \alpha,$$

wenn wieder  $\alpha$  den Ausschlagswinkel des Pendelarmes von der Länge  $CD = l$  und  $c = CC_0$  die Excentricität des Aufhängepunktes bezeichnet.

Fig. 775.

Fig. 776.

Fig. 777.



Die beiden den äußersten Ausschlagswinkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  entsprechenden äußersten Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  verhalten sich daher zu einander

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{l \cos \alpha_2 + c \cot \alpha_2}{l \cos \alpha_1 + c \cot \alpha_1}}.$$

Nimmt man z. B. für einen Watt'schen Regulator passend  $\alpha_1 = 40^\circ$  und  $\alpha_2 = 20^\circ$  an, so erhält man, wenn  $c = 0,1l$  gewählt wird, das Geschwindigkeitsverhältniß

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\cos 20^\circ + 0,1 \cotg 20^\circ}{\cos 40^\circ + 0,1 \cotg 40^\circ}} = 1,17,$$

welches Verhältniß für fast alle Maschinen zu große Geschwindigkeitsdifferenzen ergibt.

Aus der Figur erkennt man, wie bei der Bewegung des Pendelarmes  $CD$  die Axenprojection  $AE$  an beiden Seiten bei  $A$  und  $E$  einer gleichzeitigen Veränderung in demselben Sinne ausgesetzt ist. Man kann die Veränderung auf der einen Seite bei  $A$  dadurch aufheben, daß man  $c = 0$  macht, d. h. das Pendel central in der Axe aufhängt, Fig. 776 (a. v. S.), aber es bleibt dann immer noch die Veränderung am unteren Ende, und man behält immer noch für das Verhältniß der Grenzgeschwindigkeiten den Werth

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{l \cos \alpha_2}{l \cos \alpha_1}} = \sqrt{\frac{\cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}} = 1,11,$$

welcher Betrag ebenfalls noch zu groß ist.

Nimmt man  $c$  noch kleiner als Null an, d. h. legt man den Aufhängepunkt auf die entgegengesetzte Seite der Axe, Fig. 777 (a. v. S.), so hat man die Höhe

$$h = l \cos \alpha - c \cotg \alpha$$

zu setzen, und man ersieht hieraus, daß  $h$  zu Null wird nicht nur für  $\alpha = 90^\circ$ , sondern auch für  $l \cos \alpha = c \cotg \alpha$ , oder für  $\sin \alpha = \frac{c}{l}$ , d. h. wenn die Kugelmittle  $D$  in die Axe  $AB$  hineinfällt. Zwischen dieser und der horizontalen Stellung des Pendelarmes muß daher die Größe  $h$  irgendwo einen größten Werth annehmen. Man findet den diesem Maximum  $h_0$  zugehörigen Winkel  $\alpha_0$  leicht aus

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -l \sin \alpha + \frac{c}{\sin^2 \alpha} = 0 \text{ durch } \sin \alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{l}}.$$

Denkt man dem Pendel diesen Ausschlag gegeben, so verbleibt es dabei im Gleichgewichte bei einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_0 = C \sqrt{\frac{g}{h_0}}.$$

Da nun die Größe  $h$  zu beiden Seiten dieser Stellung kleiner ist, so gehört auch zu jeder anderen Stellung eine größere Geschwindigkeit der Axe zur Erhaltung des Gleichgewichtes. Wird daher der Ausschlag  $\alpha_0$  vergrößert, so verhält sich das Pendel ähnlich wie diejenigen der Fig. 775 und 776, d. h.