

beschäftigen soll, d. h. derjenigen, für deren Auftreten unter den vielen möglichen Stützlinien die größte Wahrscheinlichkeit besteht.

Die wirkliche Stützlinie. Aus den vorhergehenden Betrachtungen §. 20. haben sich die Bedingungen ergeben, denen die Stützlinie eines Gewölbes genügen muß, welche dem Zustande des Gleichgewichtes entspricht. Wenn eine diese Bedingungen erfüllende Stützlinie sich nicht zeichnen läßt, so ist es sicher, daß das betreffende Gewölbe nicht stabil sein kann und einstürzen muß. Wenn sich dagegen eine Stützlinie der verlangten Art angeben läßt, so liegt kein Grund vor, ein Einstürzen des Gewölbes zu befürchten, denn zum Gleichgewichte ist es nur erforderlich, daß der dieser Stützlinie zukommende Horizontalschub H von den Widerlagern ausgeübt werde, was immer möglich ist, wenn diese Widerlager selbst hinreichend fest sind, worüber in einem folgenden Paragraphen eine nähere Untersuchung angestellt werden soll. Es würde demzufolge das Gewölbe auch noch stabil sein, wenn nur eine einzige Stützlinie von den verlangten Eigenschaften sich angeben ließe, doch würde dieser Zustand ein Grenzzustand sein, welchen aufzuheben die geringste Aenderung der Stützlinie im Stande wäre, wie sie etwa durch zufällige Aenderung der Belastung, insbesondere durch eine unsymmetrische Vertheilung derselben sich einstellt. Bei stabilen Gewölben wird dieser Fall einer einzigen nur möglichen Stützlinie nicht vorkommen, man wird bei ihnen vielmehr eine große, ja unendlich große Anzahl von Stützlinien innerhalb des Kerns einzeichnen können, welche sich nach §. 18 entweder durch die Höhenlage des Scheitelangriffes A , oder durch die Größe des Horizontalschubes H , oder nach beiden Hinsichten von einander unterscheiden. Es ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Stützlinien dem Gleichgewichtszustande entspricht, denn für jede ist die zugehörige Horizontalkraft H im Stande, das Rutschen oder Gleiten unbeschadet der Festigkeit des Materials zu verhüten. Die Frage, welche von diesen unendlich vielen möglichen Stützlinien in Wirklichkeit dem belasteten Gewölbe zukommt, ist demnach eine unbestimmte, welche mit Sicherheit zu bestimmen, man nur würde hoffen können, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe gehörig berücksichtigt werden könnten, in ähnlicher Art etwa, wie man über die Auflagerdrucke und Anspannungen eines auf drei oder mehr Stützen ruhenden continuirlichen Balkens nur durch Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse Aufschluß erlangen kann. Einer derartigen auf die Elasticitätslehre begründeten Lösung der Frage ist man zwar in der neuesten Zeit durch die vortrefflichen Arbeiten von Winkler, Steiner *), Culmann, Föppel **)

*) Förster'sche Bauztg. 1874 und 1878.

**) Theorie der Gewölbe von A. Föppel. Leipzig 1880.

und Anderen näher getreten, doch muß man zur Zeit auf eine Anwendung dieser Theorie wegen der ungenügenden Kenntniß der Preßbarkeit des Materials und wegen der Schwierigkeiten der Rechnung verzichten, und man hat sich damit zu begnügen, gewisse Grenzen festzusetzen, innerhalb deren die wirkliche Stützlinie jedenfalls nur liegen kann, und höchstens zu ermitteln, welche Stützlinie in bestimmtem Falle die wahrscheinlichste sein wird.

Zunächst ist es ersichtlich, daß unter den vielen, durch die Größe des Horizontalschubes H unterschiedenen Stützlinien, welche sich im Innern eines stabilen Gewölbes angeben lassen, eine vorhanden ist, welcher der kleinste Werth von H zukommt, während einer anderen das Maximum von H entspricht. Diese beiden Stützlinien vom kleinsten und bezw. größten Schube sind, wie sich durch einfache Betrachtungen ergibt, dadurch charakterisirt, daß sie mit jeder der beiden Wölbflächen je einen Punkt gemein haben müssen, wobei es gleichgültig ist, ob dieser gemeinsame Punkt in der Scheitel- oder Kämpferfuge, also in $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ liegt, oder ein Berührungspunkt zwischen dem Scheitel A und dem Widerlager B ist. In Fig. 56 und 57 sind zwei solche Stützlinien durch $A C_1 C_2 B$ dargestellt,

Fig. 56.

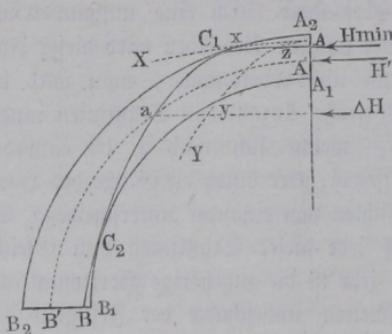
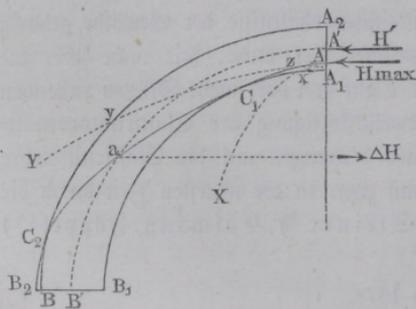


Fig. 57.



und man erkennt leicht, daß die Stützlinie in Fig. 56, bei welcher in der Richtung vom Scheitel A aus nach dem Widerlager B hin zuerst die äußere und dann die innere Wölbung getroffen wird, einem Minimum der Schubkraft entspricht, während die Stützlinie, Fig. 57, dem Maximum von H zukommt, sobald vom Scheitel aus zuerst die innere, und dann die äußere Wölbung von der Stützlinie berührt wird. Um dies zu beweisen, kann man zunächst bemerken, daß in Fig. 56 überhaupt keine ganz in das Gewölbe fallende Stützlinie möglich sein kann, deren Scheitelangriff höher als A , also zwischen A und A_2 gelegen ist. Denn würde hierfür die Horizontalkraft ebenso groß, oder größer sein als diejenige für $A C_1 C_2 B$, so müßte nach dem Früheren diese Stützlinie irgendwo

zwischen A_2 und C_1 etwa bei x durch die äußere Wölbung heraustreten, wie die punktirte Linie X zeigt. Man könnte zwar durch einen geringeren Werth von H in diesem Falle die Stützlinie soweit senken, daß sie nicht aus der äußeren Wölbfläche $A_1 C_1$ heraustritt, vielmehr die Stützlinie AB zwischen A und C_1 in einem Punkte, etwa in z schneidet, dann würde aber diese Linie zY , da sie nur diesen einen Punkt z mit AB gemeinsam haben kann, auf ihrem weiteren Verlaufe irgendwo bei y die innere Wölbfläche durchschneiden. Daraus folgt, daß überhaupt oberhalb von A der Angriffspunkt einer möglichen Stützfläche nicht liegen kann. Dagegen kann man unterhalb A , etwa in A' eine Stützlinie beginnen lassen, welche die Stützlinie AB in einem beliebigen Punkte wie a schneidet, sobald man den Horizontaldruck H' dieser Linie um eine durch a gehende Componente ΔH größer annimmt, als der Schub H der Linie AB ist, und diese Linie $A'aB'$ wird, vorausgesetzt, daß die Vergrößerung ΔH der Schubkraft gewisse Grenzen nicht überschreitet, auch zwischen a und dem Widerlager B ganz innerhalb des Gewölbes verbleiben können. Hieraus geht hervor, daß sich außer der Stützlinie AB , deren Schub H ist, nur solche andere Stützlinien in dem Gewölbe angeben lassen, deren Horizontalschub H' größer ist als H , d. h. die Linie AB in Fig. 56 entspricht dem kleinsten Schube H_{min} .

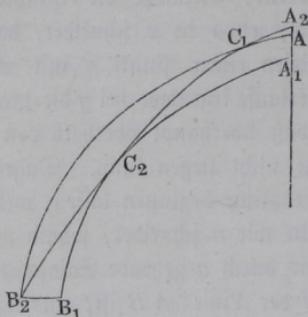
In ähnlicher Weise findet sich, daß in Fig. 57 keine Stützlinie möglich ist, deren Angriffspunkt zwischen A und A_1 gelegen ist, da dieselbe entweder wie die Linie X die innere Wölbfläche bei x durchstößt, wenn ihre Schubkraft ebenso groß oder kleiner als die von AB angenommen wird, oder wie die Linie Y durch die äußere Leibung bei y hindurchgeht, wenn bei einer größeren Schubkraft ein Durchschneiden der Stützlinie AB in z stattfindet. Daher sind hier nur Stützlinien wie $A'B'$ möglich von denen jede einer Schubkraft H' angehört, die aus H in A und der entgegengesetzt gerichteten Componente ΔH in a sich zusammensetzt, also kleiner ist als H .

Die Linie AB in Fig. 57 ist daher die Stützlinie des größten Schubes H_{max} . Wie schon erwähnt, kann in beiden Fällen der Punkt C_1 auch mit A_2 oder A_1 , und der Punkt C_2 mit B_1 oder B_2 zusammen treffen, in welchem letzteren Falle die Stützlinie auch die Wölbflächen in B_1 oder B_2 schneiden kann, anstatt sie zu berühren.

Aus dem Vorhergehenden folgt sogleich, daß, wenn in einem Gewölbe eine Stützlinie sich zeichnen läßt, welche wie $A C_1 C_2 B_2$, Fig. 58, mit einer der Wölbflächen etwa der äußeren $A_2 B_2$ zwei Punkte C_1 und B_2 gemein hat, und die andere Leibung in einem zwischenliegenden Punkte C_2 berührt, also das Gewölbe zweimal durchkreuzt, diese Linie, da sie zugleich dem größten wie dem kleinsten Schube entspricht, offenbar die einzige überhaupt mögliche Stützlinie für das Gewölbe ist. Das Gewölbe würde in diesem Falle im Grenzstande sich befinden, und man hätte, ganz abgesehen

von der Widerstandsfähigkeit des Materials, die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern, wenn man eine gewisse Stabilität erlangen wollte.

Fig. 58.



Wie nun bereits oben bemerkt worden, ist von vornherein nicht anzugeben, welche von den unendlich vielen Stützlinien, die zwischen den beiden Grenzlinien des kleinsten und größten Druckes angegeben werden können, die wirkliche ist. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, hat man wohl verschiedene Hypothesen gemacht, und es ist in dieser Beziehung von Moseley *) ein Gesetz ausgesprochen, welches unter dem Namen des Principes vom kleinsten Widerstande bekannt geworden ist. Nach diesem Principe, dessen Beweis an der unten angezeigten Stelle sowie in dem schon oben erwähnten Werke von Scheffler **) nachgesehen werden kann, hätte man bei einem Gewölbe, wenn dasselbe aus einem vollkommen starren und nicht zusammendrückbaren Material bestehen würde, als wirkliche Stützlinie diejenige vom kleinsten Horizontaldrucke anzusehen.

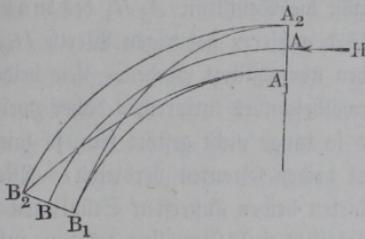
Anmerkung. Das erwähnte Princip des kleinsten Widerstandes, wie es von Scheffler definirt wird, läßt sich in der Hauptsache etwa folgendermaßen aussprechen. Denkt man sich ein System fester Körper, die nur durch Berührung ihrer Oberflächen mit einander in Verbindung stehen, unter Einfluß äußerer Kräfte sich gegen einzelne feste, widerstehende Punkte stützend, und zerlegt man die Resultirende Q aller äußeren Kräfte in lauter parallele Componenten q , die durch jene widerstehenden Punkte gehen, so müssen, wenn jene Punkte nicht fähig sind, in der Richtung dieser Componenten zu widerstehen, noch gewisse zu Q senkrechte Seitenkräfte p in jenen Punkten rege werden, welche unter sich für das ganze System im Gleichgewichte sind, und von denen jede einzelne zusammen mit der in diesem Punkte wirkenden Componente q eine Mittelkraft w von der Art giebt, daß sie von dem festen Stützpunkte aufgenommen werden kann. Von den unendlich vielen möglichen Systemen der Seitenkräfte p hat nun dem gedachten Principe gemäß nur dasjenige in der Wirklichkeit Anspruch auf Existenz, bei welchem sämmtliche auf der Richtung der resultirenden Kraft Q senkrechte Seitenkräfte p gleichzeitig den möglich kleinsten Werth annehmen. In dem vorliegenden Falle ist also unter der Mittelkraft der äußeren Kräfte das Gewicht Q einer Gewölbhälfte sammt ihrer Belastung zu verstehen, während die gedachten Seitenkräfte p durch die in der Scheitelfuge und am Kämpfer auftretende horizontale Schubkraft H dargestellt sind, welche dem angeführten Gesetze zufolge daher H_{min} sein soll.

*) S. Moseley, Philosophical Magazine, October 1833.

**) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eif. Brücken 1857.

Man hätte sich hiernach den Zustand der Gewölbe etwa in folgender Weise zu verdeutlichen. Es sei $A_1 A_2 B_1 B_2$, Fig. 59, die Hälfte eines zunächst aus

Fig. 59.



absolut unpreßbarem Materiale bestehenden Gewölbes, welches noch durch das beim Baue erforderliche Lehrgerüst unterstützt ist, so daß angenommen werden muß, daß im Scheitel $A_1 A_2$ überhaupt noch keine Schubkraft zwischen den beiden Gewölbehälften vorhanden ist. Denkt man sich nun das unterstützende Lehrgerüst weggenommen, so würde die zunächst noch nicht durch eine Horizontalkraft

gestützte Gewölbehälfte ihrem Bestreben, zu fallen, Genüge leisten, wenn nicht gleichzeitig mit diesem Bestreben eine gewisse Horizontalkraft in der Scheitelfuge $A_1 A_2$ von der rechtsseitigen Gewölbehälfte ausgeübt würde, welche einen hinreichend großen Werth H hat, um das Gewölbe am Einstürzen zu hindern. Hierbei wird man sich vorstellen müssen, daß diese Horizontalkraft nicht momentan und gewissermaßen sprungweise von dem Werthe 0 auf H sich erhebt, sondern es wird eine gewisse, wenn auch unmessbar kleine Zeit vergehen, während welcher die Schubkraft in schneller Aufeinanderfolge alle Werthe von 0 bis zu dem erforderlichen Werthe H durchläuft. Wenn dabei die Schubkraft bei dieser Zunahme den Werth H_{min} erreicht hat, welcher gerade genügt, um das Gleichgewicht herzustellen, so fällt nunmehr gerade wegen dieses alsdann bestehenden Gleichgewichts jeder Grund fort, weshalb eine noch weiter gehende Vergrößerung von H über H_{min} hinaus stattfinden sollte, und man muß daher annehmen, daß das Gewölbe unter Einfluß seiner Belastung in demjenigen Zustande sich befindet, welchem die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes zukommt.

Die hier auftretende Schubkraft H ist eine passive oder, wie sie auch wohl genannt wird, latente Kraft, welche stets nur genau in dem Betrage ersteht, in welchem sie gefordert wird. Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn H eine von außen auf das Gewölbe ausgeübte active Kraft ist, wie sie etwa durch den Schub eines benachbarten Gewölbes ausgeübt, und durch die rechtsseitige Gewölbehälfte auf die Scheitelfuge $A_1 A_2$ übertragen wird. Wenn in diesem Falle die Kraft H den Betrag H_{min} überschreitet, so kann das Gleichgewicht unter Beibehaltung der Stützlinie $A_2 B_1$ nicht mehr bestehen, es würde alsdann, wenn die vergrößerte Schubkraft wirklich in A_2 angriffe, das Gewölbe nach oben übergekippt werden. Da aber das Gewölbe im Scheitel und im Widerlager nicht in den Punkten $A_2 B_1$, sondern in den Flächen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gestützt wird, so muß man annehmen, daß bei

der gedachten Vergrößerung der Schubkraft H die Angriffspunkte von A_2 und B_1 aus in das Innere des Gewölbes hineinrücken können, so daß die Stützlinie wie etwa AB in dem Maße flacher wird, wie die Vergrößerung von H es erfordert. Als letzter Grenzzustand, für welchen gerade noch das Gleichgewicht bestehen kann, gilt demgemäß die Stützlinie A_1B_2 des maximalen Schubes, und erst, wenn H den hierzu gehörigen Werth H_{max} überschreitet, wird das Gewölbe nach oben übergestürzt werden. Die beiden Stützlinien des kleinsten und größten Gewölbeschubes entsprechen daher zweien Grenzzuständen, und die Stabilität wird so lange nicht gestört sein, so lange die zugehörige Stützlinie zwischen diesen beiden Grenzen verbleibt. Man könnte daher die Entfernung zwischen diesen beiden äußersten Stützlinien in gewissem Sinne als ein Maß für die Stabilität eines Gewölbes ansehen, insofern die mögliche Veränderlichkeit der Stützlinie mit jener Entfernung zwischen A_1B_2 und A_2B_1 wächst und zu Null wird, sobald, wie in Fig. 58, die Stützlinie des kleinsten gleichzeitig diejenige des größten Gewölbeschubes, also die einzige überhaupt mögliche Stützlinie ist.

Da nun in Wirklichkeit das Material der Gewölbe niemals wie im Vorstehenden zunächst vorausgesetzt wurde, vollkommen starr und unpreßbar ist, so kann die wahre Stützlinie auch niemals durch die Kanten der Steine gehen, sondern muß sich wegen deren Zusammendrückung in gewissem Grade mehr in das Innere des Gewölbes hineinziehen. Scheffler nimmt an, daß an den Stellen, wo die Stützlinie des kleinsten Schubes die äußere oder innere Gewölbläche trifft, auch die stärkste Zusammendrückung der Wölbesteine in der Nähe der betreffenden äußeren und inneren Kante liegen wird, d. h. daß die wahre Stützlinie, welche bei unpreßbarem Material mit der Stützlinie vom kleinsten Schub wirklich zusammentreffen würde, bei preßbarem Material sich dieser Linie möglichst zu nähern strebt. Ferner wird von demselben angeführt, daß Beobachtungen an ausgeführten Bauten aus Granit, hartem Kalk- und Sandstein zeigen, daß die Stützlinie dabei fast genau die eigentliche Kante des Fugenschnittes erreiche. Nach dieser Voraussetzung darf man keine gleichmäßige Vertheilung des Druckes über die ganze Fugenfläche bei allen Steinen annehmen, da dies offenbar nur bei einer solchen Fuge der Fall sein kann, welche von der Stützlinie in ihrer Mitte getroffen wird. Letzteres wird aber selbst bei einem Gewölbe, für welches die Mittellinie als eine mögliche Stützlinie construirt ist (s. §. 19), nicht in allen Fugen der Fall sein, wenn die wirkliche Stützlinie sich derjenigen vom kleinsten Schube möglichst zu nähern strebt. In diesem Falle muß selbstverständlich die spezifische Pressung des Materials in den Fugen um so größer ausfallen, je weiter sich in ihnen die wahre Stützlinie von der Mittellinie des Gewölbes entfernt.

Unter Zugrundelegung dieser Voraussetzung, welche vielfach gemacht

wird, hat man die Prüfung eines Gewölbes in der Weise vorzunehmen, daß man die Begrenzungen des Kerns (s. §. 19) einzeichnet, und diejenige Stützlinie auffucht, welche ganz innerhalb dieses Kerns verbleibend, dem kleinsten Horizontalschube entspricht, d. h. einen Punkt mit der äußeren und einen tiefer liegenden Punkt mit der inneren Begrenzung dieses Kerns gemeinsam hat. Diese Stützlinie hat man dann als die wirkliche zu betrachten und ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität und Widerstandsfähigkeit nicht als genügend stark anzusehen, wenn sich eine solche Stützlinie von der verlangten Eigenschaft innerhalb des Kerns nicht angeben läßt. Diese Untersuchung soll im nächsten Paragraphen durchgeführt werden.

Ueber die Beschaffenheit der in einem Gewölbe auftretenden wirklichen Stützlinie sind auch andere Behauptungen aufgestellt worden, so u. A. von Culmann*). Derselbe spricht den Satz aus: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie eines Gewölbes, welche sich der Aze desselben in der Art am meisten nähert, daß der Druck in den am stärksten comprimierten Fugenkanten ein Minimum ist.“

Es kann bemerkt werden, daß die so charakterisirte Stützlinie nicht sowohl dem Minimum des Horizontalschubes H , sondern der relativ kleinsten Pressung, also der günstigsten Anstrengung des Materials entspricht. Demgemäß würde z. B. für ein Gewölbe, das so construirt ist, daß seine Aze oder Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, diese Mittellinie auch die wirkliche Stützlinie sein, denn die Bedingung der kleinsten specifischen Pressung eines Querschnitts wird bei einer gleichmäßigen Druckvertheilung d. h. also dann erfüllt sein, wenn die resultirende Druckkraft durch die Mitte des Querschnitts geht. Culmann giebt übrigens an, daß, da die Auffuchung der gedachten Stützlinie von der relativ kleinsten Pressung zu umständlich sei, man gewöhnlich das oben angeedeutete Verfahren anwenden werde, zu untersuchen, ob sich innerhalb des Kerns eine Stützlinie einzeichnen läßt.

Ist dies der Fall, so ist damit auch der Beweis geliefert, daß es außer dieser Stützlinie noch eine günstigere geben müsse, nämlich die als wirkliche angegebene, welche sich der Mittellinie des Gewölbes noch mehr nähern wird.

Prüfung der Gewölbe. Um ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabi- §. 21.
lität auf graphischem Wege zu prüfen, zeichnet man zu dem Gewölbe zunächst die Belastungslinie, indem man, wie oben angegeben, sämtliche darauf ruhenden Lasten durch Mauerkörper von dem specifischen Gewichte des Gewölbmaterials ersetzt und gleichmäßig über die ganze Gewölbbreite in der Azenrichtung vertheilt denkt. Diese gleichmäßige Vertheilung nach der Azenrichtung gilt auch insbesondere bei den Brücken für die Brustmauern, welche die Brückenbahn beiderseits begrenzen. Zunächst soll im Folgenden, wie bisher immer eine symmetrische Belastung des Gewölbes vorausgesetzt

*) S. dessen „Graphische Statik“. 1. Auflage, 1866.