

Chapitre II.

Problèmes. — Applications.

186. Premier problème fondamental. *Etant données les projections obliques d'une droite, construire les projections obliques des traces de cette droite sur P_1 et P_2 .* (Voir §§ 152 et 153).

Applications.

187. Problème I. *Par un point situé sur la trace T_0 d'un plan T , mener une droite parallèle à la trace T_{10} .*

Solution (Ep. 124). Le point a donné sur T_0 est un point de P_2 , donc a_0 est sur T_0 et a_0 sur l'axe de projection.

La droite demandée devant être parallèle à la trace T_1 , et par suite à P_1 , aura ses deux projections e_0 et e'_0 parallèles entre elles et à T_{10} (157).

188. Problème II. *Par une droite donnée, mener un plan normal à P_1 , puis un plan normal à P_2 .*

I. Plan normal à P_1 (Ep. 125). Le plan demandé aura sa trace T_0 normale à l'axe. Cette trace doit passer par la trace a_0 de la droite. La trace T_{10} du plan devant passer par la trace b'_0 de la droite et rencontrer T_0 sur l'axe, se confondra avec la projection d' de la droite.

Remarque. d' est, en effet, la trace sur P_1 du plan demandé.

II. Plan normal à P_2 (Ep. 126). La trace T_{10} passera par la trace de même nom b'_0 de la droite et sera parallèle à la fuyante.

La trace T_0 est déterminée par le point m et par la trace a_0 de la droite.

189. Problème III. *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.*

Solution. Si la droite est dans un plan donné, les projections obliques des traces de la droite sont situées sur les traces obliques de même nom du plan.

190. Problème IV. *Vérifier si un point donné est situé dans un plan donné.*

Solution (Ep. 127). Par le point donné a , on mène une droite parallèle à la trace T_0 du plan donné T , donc à une droite de ce plan. Si la projection oblique de la trace de cette droite sur P_1 se trouve sur la trace T_{10} du plan, la droite et par suite le point a sont dans le plan donné.

191. Problème V. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

Solution. Par un point pris dans le plan, on mène une droite parallèle à la droite donnée. Celle-ci sera parallèle au plan si la parallèle se trouve dans le plan.

Solution graphique (Ep. 128). Prenons un point a sur la trace T_0 du plan et, par ce point, menons la droite parallèle à e . Nous construirons la trace b'_0 de cette droite auxiliaire; si b'_0 est sur T_{10} , la droite auxiliaire est dans le plan T et la droite donnée e sera parallèle à ce plan.

192. Problème VI. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution (Ep. 129). On construit les projections obliques des traces de chacune des deux droites données d et f .

Le plan demandé devant passer par ces deux droites, les traces T_0 et T_{10} de ce plan passeront par les projections obliques des traces de même nom des deux droites.

Vérification. Les traces T_0 et T_{10} du plan obtenu se coupent sur l'axe.

193. Problème VII. *Mener un plan par deux droites qui se coupent et dont l'une est parallèle à P_1 et l'autre au plan de figure P_2 .*

Solution (Ep. 130). On déterminera, comme dans le problème précédent, les projections obliques des traces de chacune des deux droites. Les traces du plan passeront par les projections obliques des traces de même nom.

Dans ce cas particulier, la droite e parallèle à P_1 n'a qu'une seule trace, sa trace a_0 sur P_2 ; la droite f parallèle à P_2 n'a qu'une trace également, sa trace b'_0 sur P_1 .

La trace T_{10} passera donc par b'_0 et sera parallèle à e'_0 , puisque la droite e du plan T est parallèle à P_1 . La trace T_0 passera par a_0 et par le point de rencontre S de la trace T_{10} avec l'axe.

Vérification. Comme la droite f du plan T est parallèle à P_2 , la trace T_0 de T sur P_2 doit être parallèle à la projection f_0 de f sur P_2 .

194. Problème VIII. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Solution (Ep. 131). On détermine les projections obliques des traces de chacune des deux droites parallèles. Les traces du plan passeront par les projections obliques des traces de même nom des droites.

Vérification. Les deux traces T_0 et T_{10} ainsi déterminées se coupent sur l'axe.

195. Problème IX. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

Solution. Par les points m et n , on fait passer une droite; par les points m et p , on fait passer également une droite. Ces deux droites se coupent en m et déterminent un plan dont on construira les traces.

2^{me} Solution. On joint les deux points m et n par une droite; par p , on mène une droite parallèle à mn , ces deux droites mn et mp déterminent le plan.

196. Problème X. *Par un point et une droite, faire passer un plan.*

Solution. Par le point, on mène une droite parallèle à la droite donnée; les deux droites déterminent le plan.

197. Problème XI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Solution. Par un point de la première droite, on mène une droite parallèle à la deuxième. Ces deux droites déterminent le plan.

198. Problème XII. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à l'axe de projection.*

Solution. Les traces T_0 et T_{10} du plan demandé sont parallèles à l'axe et passeront par les traces de même nom de la droite donnée.

199. Problème XIII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données e et f .*

Solution. Par le point donné, on mène une droite parallèle à f et une autre parallèle à e . Ces deux droites se coupent au point donné et déterminent le plan demandé (192).

200. Problème XIV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Solution (Ep. 132). Par le point donné m , on mène une droite parallèle à une droite du plan donné. Le plan demandé contiendra cette droite; ses traces sont parallèles aux traces de même nom du premier plan et passeront respectivement par les projections obliques des traces de même nom de la droite.

Dans l'épure, nous avons pris pour droite auxiliaire une droite parallèle à la trace T_0 du plan donné. Cette droite n'a qu'une trace V_0 par laquelle passera la trace S_{10} parallèle à T_{10} . La trace S_0 sera parallèle à T_0 et rencontrera S_{10} sur l'axe de projection.

201. Problème XV. *Etant donnés un plan et l'une des projections obliques d'une droite située dans ce plan, construire l'autre projection de cette droite.*

1° On donne la projection e_0 de la droite e (Ep. 133).

Solution. La trace a_0 de la droite sur P_2 se trouve sur la trace T_0 du plan. La projection e'_0 de la droite passera par la projection oblique de la trace V_0 , située sur T_{10} , et par le pied de la normale abaissée de a_0 sur l'axe (152).

2° On donne un plan T et la projection e'_0 de la droite (Ep. 134).

Solution. On prolonge e'_0 jusqu'à l'axe. La normale élevée en ce point à l'axe rencontre T_0 au point a_0 , trace de e sur P_2 . Comme la trace V_0 de la droite est située sur e_0 , on n'a qu'à unir a_0 et V_0 pour avoir e_0 .

202. Problème XVI. *Etant donné un plan et la projection m_0 d'un point m situé dans ce plan, construire la projection m'_0 de ce point.*

Solution (Ep. 135). Par m_0 , on mène une droite parallèle à T_0 . Cette droite auxiliaire sera la projection oblique e_0 sur P_2 d'une droite e du plan T , parallèle à T_0 et menée par m . La projection e'_0 de cette droite sera parallèle à l'axe et devra passer par le point de rencontre v'_0 de e_0 sur T_{10} , projection oblique de la trace de la droite auxiliaire e sur P_1 .

La projection m'_0 demandée sera sur e'_0 et sur la normale abaissée du point m_0 sur l'axe de projection.

203. Deuxième problème fondamental. *Etant données la trace d'une droite sur P_2 ainsi que la projection oblique de sa trace sur P_1 , construire les projections obliques de cette droite.*

Solution (Ep. 136). On sait (151) que la trace a_0 , aussi bien que la projection v'_0 de la trace v' , se trouvent sur la projection e'_0 de la droite demandée.

La projection e_0 passera par v'_0 et par le pied de la perpendiculaire abaissée de a_0 sur l'axe.

204 Troisième problème fondamental. *Construire les projections obliques de la droite d'intersection de deux plans.*

Solution (Ep. 137). La trace a_0 sur P_2 de la droite d'intersection e de deux plans T et S se trouvera à l'intersection des deux traces T_0 et S_0 .

La projection oblique v'_0 de la trace de e sur P_1 se trouvera au point d'intersection des projections obliques T_{10} et S_{10} des traces des deux plans sur P_1 .

Etant données actuellement les projections obliques des traces de la droite e , celle-ci se construira à l'aide du problème précédent.

Cas particulier facile. Si l'un des deux plans est parallèle à la directrice, il n'aura qu'une trace-double qui sera la projection oblique de la droite d'intersection des deux plans sur P_2 .

Cas embarrassants. Si l'on ne possède pas les traces obliques des deux plans ou de l'un d'eux ou bien si, tout en les possédant, on ne peut s'en servir, la solution générale précédente devient embarrassante.

Dans un tel cas, on se sert de la solution suivante :

On coupe chacun des deux plans par une série de plans auxiliaires parallèles, qui donnent *facilement* leur intersection avec chacun des plans proposés.

Un premier de ces plans coupera le premier plan proposé S suivant une droite e , et le plan T suivant la droite f . Les deux droites f et e situées dans le même plan sécant se coupent et donnent un point x de la droite d'intersection des deux plans T et S.

Un deuxième plan sécant donnera un deuxième point y de cette droite etc.

Cette droite est donc déterminée ; plus on prendra de plans sécants auxiliaires, plus on aura de points tels que x, y, z , etc. dont l'ensemble constitue la droite demandée.

Applications.

205. Problème XVII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un autre plan parallèle à la directrice.*

Solution (Ep. 138). Le plan T parallèle à la directrice n'a qu'une trace-double S_1, T, T_1 . Cette trace sera aussi la projection oblique e_0 de la droite d'intersection des deux plans. La projection e'_0 passera par a'_0 et b'_0 .

206. Problème XVIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un autre plan parallèle à la directrice et normal au plan P_1 .*

Solution (Ep. 139). Le plan parallèle à la directrice et normal à P_1 a sa trace-double normale à l'axe de projection. Les deux projections de la droite d'intersection des deux plans se confondent avec cette trace-double.

207. Problème XIX. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan parallèle à la directrice et normal au plan P_2 .*

Solution (Ep. 140). La trace-double du plan T parallèle à la directrice et normal à P_2 est parallèle à la fuyante. Elle sera la projection oblique e_0 de la droite d'intersection des deux plans. La projection e'_0 se détermine comme au § 204.

208. Problème XX. *Construire l'intersection d'un plan avec un plan parallèle à la directrice et à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 141). La trace-double du plan parallèle à la directrice et à l'axe est parallèle à l'axe, et se confondra avec la projection oblique e_0 de la droite d'intersection des deux plans. La projection e'_0 se construira comme au § 204.

209. Problème XXI. *Construire la droite d'intersection d'un plan quelconque avec un plan parallèle à P_1 .*

Solution (Ep. 142). La droite d'intersection e des deux plans sera parallèle à P_1 et à la trace T_1 du plan T. Les deux projections e_0 et e'_0 sont donc parallèles à T_{10} ; e_0 passera par a_0 .

210. Problème XXII. *Construire la droite d'intersection d'un plan quelconque avec un plan parallèle à P_2 .*

Solution (Ep. 143). Le plan V, parallèle à P_2 est un plan de front; il coupe le plan T suivant une ligne de front f parallèle à T_0 . La projection oblique f_0 de cette droite sera parallèle à T_0 et passera par v_0 . La projection oblique f'_0 passera également par v_0 et se confondra avec V_{10} , parallèle à l'axe de projection.

211. Problème XXIII. *Construire l'intersection de deux plans T et S dont les traces obliques T_{10} et S_{10} sont parallèles.*

Solution (Ep. 144). La droite d'intersection des deux plans sera parallèle à P_1 et par suite aux traces T_1 et S_1 des deux plans.

Les deux projections obliques e_0 et e'_0 de la droite d'intersection e seront parallèles à S_{10} et T_{10} , projections obliques sur P_2 des traces T_1 et S_1 . La projection e_0 de e passera par a_0 et la projection e'_0 par m .

212. Problème XXIV. *Construire l'intersection de deux plans dont les traces sur P_2 sont parallèles.*

Solution (Ep. 145). La droite d'intersection e sera parallèle aux traces sur P_2 ; sa projection e_0 sera parallèle aux traces T_0 et S_0 , sa projection e'_0 sera parallèle à l'axe et les deux projections passeront par v_0 , projection oblique sur P_2 de la trace de e sur P_1 .

213. Problème XXV. *Construire la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires à P_1 .*

Solution (Ep. 146). La ligne d'intersection e , ligne de front des deux plans, et une droite normale à P_1 ; sa projection e'_o se réduit à un point, le point de rencontre v_o des deux traces S_{1o} et T_{1o} .

214. Problème XXVI. *Construire la droite d'intersection de deux plans sans faire usage des points de rencontre des traces.*

Solution (Ep. 147). On coupe (204) les deux plans T et S par une série de plans parallèles à P_1 . Chacun de ces plans H, M, N, etc. coupera chacun des deux plans S et T suivant une droite, l'une parallèle à la trace S_1 l'autre à T_1 .

Le point de rencontre n des deux droites ainsi fournies par H sera un point de la droite d'intersection des deux plans donnés. Le plan M donnera à son tour un point p de cette droite, etc.

Vérifications. 1. Chaque point n, p , etc. aura ses deux projections obliques sur une normale à l'axe de projection.

2. Ces points n, p , etc. sont en ligne droite.

3. Cette droite, suffisamment prolongée, aura ses deux projections obliques qui concourent au point de rencontre v_o des traces T_{1o} et S_{1o} des deux plans.

4. Les points de rencontre a_o et v_o des traces de même nom des deux plans sont les projections obliques des traces de la droite d'intersection.

Deuxième solution. Au lieu de couper les deux plans par une série de plans parallèles à P_1 on peut se servir d'une série de plans de front (210).

215. Problème XXVII. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont les traces se coupent toutes en un même point de l'axe de projection.*

Solution dans l'espace. On coupe les deux plans S et T par une série de plans de front (210).

Solution graphique (Ep. 148). Le plan de front F coupe le plan S suivant la ligne de front f , et le plan T suivant la ligne de front d . Les deux droites d et f se coupent au point b de la ligne d'intersection des deux plans. Le plan de front F' donnera les deux

lignes de front g et c lesquelles, en se coupant, fournissent le point a de la droite d'intersection des plans S et T etc.

Vérifications. 1. Les points a, b , etc. auront leurs projections obliques a_o et a'_o , b_o et b'_o , etc. réunies par une normale à l'axe.

2. Ces points a_o, b_o , etc. d'un côté, et a'_o , et b'_o de l'autre côté sont en ligne droite avec le point M , donc les deux projections obliques de cette ligne $a_o b_o$ etc. et $a'_o b'_o$ etc. concourent en M sur l'axe.

216. Problème XXVIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan quelconque avec un plan parallèle à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 149). Un plan T parallèle à l'axe a ses deux traces obliques T_o et T_{1o} parallèles à l'axe.

Le problème ne diffère pas du problème fondamental.

La droite d'intersection d a les points de rencontre a_o et b'_o des traces V_o et T_o et des traces V_{1o} et T_{1o} pour projections obliques de ses traces.

217. Problème XXIX. *Construire la droite d'intersection de deux plans parallèles à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 150). Les deux plans T et S parallèles à l'axe ont leurs traces parallèles à cet axe et se coupent suivant une droite parallèle à cette ligne.

On coupe les deux plans par un plan quelconque V .

On obtiendra (216) deux droites d'intersection situées dans le plan V et se coupant au point m .

C'est par ce point que passera la droite d'intersection d des deux plans T et S .

218. Quatrième problème fondamental. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan.*

Solution dans l'espace. Par la droite donnée d , on fait passer un plan quelconque T . Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite, et le point de rencontre de cette droite avec la droite d est le point où d perce le plan V .

Solution graphique. (Ep. 151). Le plan auxiliaire T aura ses

traces obliques qui passeront par les projections obliques des traces de même nom de la droite.

Vérification. Les deux projections obliques r_o et r'_o du point obtenu se trouvent sur une normale à l'axe de projection.

Remarque. *Cas faciles.* Le problème se simplifie si le plan auxiliaire est normal à P_1 ou à P_2 .

Premier cas. *Le plan auxiliaire mené par la droite donnée est normal à P_1 .*

Solution (Ep. 152). La trace T_{1o} coïncidera avec d'_o et la trace T_o est normale à l'axe de projection.

La droite d'intersection des plans V et T a une de ses projections qui se confond avec d'_o ; l'autre projection passe par les points a_o et b'_o , points de rencontre des traces de même nom des deux plans.

Deuxième cas. *Le plan auxiliaire mené par la droite donnée est normal à P_2 .*

Solution (Ep. 153). La trace T_{1o} de ce plan passera par b'_o et sera parallèle à la direction de la fuyante. La trace T_o passera par a_o et rencontrera la trace T_{1o} sur l'axe.

La droite d'intersection des deux plans T et V rencontrera la droite d au point r , point de rencontre de d avec V.

Applications.

219. Problème XXXI. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan normal à P_1 .*

Solution (Ep. 154). Par la droite d , on mène un plan perpendiculaire à P_1 .

On construit l'intersection de ce plan avec le plan proposé (213). Le point de rencontre m de cette droite avec d sera le point de rencontre de d avec le plan proposé.

Remarque. Les constructions graphiques que nécessite ce problème nous montrent qu'il est inutile de faire passer le plan auxiliaire par la droite donnée. Il suffit, en effet, pour trouver le point m ,

de prolonger la trace V_{10} du plan donné jusqu'à la rencontre de la projection oblique d'_0 de la droite, le point m'_0 ainsi obtenu est une des deux projections obliques de m . L'autre projection m_0 se trouve sur d_0 .

220. Problème XXXII. *Construire l'intersection d'un plan perpendiculaire à P_1 avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans construire les traces de ce plan.*

Solution (Ep. 155). On construit le point de rencontre de chacune des deux droites données d et e avec le plan proposé V .

Les deux points de rencontre donnent la droite suivant laquelle les deux plans proposés se coupent.

221. Problème XXXIII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par les deux droites qui se coupent sans chercher les traces de ce plan.*

Solution (Ep. 156). Par la droite donnée f , on fera passer un plan normal à P_1 . On construira le point de rencontre de ce plan avec chacune des deux droites d et e qui constituent le plan donné (220). Ces deux points n et s déterminent la droite suivant laquelle le plan auxiliaire coupe le plan proposé. Le point de rencontre x de la droite ns avec la droite d est le point où cette droite perce le plan.

222. Problème XXXIV. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan de front.*

Solution (Ep. 157). Le plan de front F rencontre la droite donnée d en un point a , dont la projection oblique a'_0 doit évidemment se trouver sur d'_0 et sur l'unique trace F_{10} du plan de front.

223. Problème XXXV. *Construire la droite d'intersection de deux plans représentés chacun par deux droites qui se coupent sans construire les traces de ces plans.*

Solution. On coupe les deux plans par une série de plans de front. Chacun de ces plans coupera chacune des droites en un point (222) et par suite chacun des plans proposés suivant une droite.

Les points de rencontre de ces droites fournies par un même plan de front appartiennent à la ligne d'intersection des deux plans.

Solution graphique (Ep. 157). Le plan de front F coupe le plan déterminé par les deux droites e et d suivant la droite hi , et le

plan des deux droites f et g suivant la droite lm . Les deux droites hi et lm se coupent au point x de la ligne d'intersection des deux plans.

Le plan de front G donne le point y , etc.

Ces points déterminent la droite d'intersection des deux plans et doivent par conséquent être en ligne droite.

224. Problème XXXVI. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par le point donné a et par l'une des droites d , on mène un plan.

Par le point a et par la droite e , on mène un plan.

La droite d'intersection de ces deux plans sera la droite demandée.

Solution graphique (Ep. 158). Pour mener un plan par a et par la droite d , on mène par a une parallèle à d . De même, le plan qui passe par a et par e se trouvera déterminé par e et par une parallèle à cette droite menée par a .

Les deux plans ainsi déterminés se coupent suivant une droite que l'on construit en coupant par une série de plans de front (223).

Vérifications. La droite obtenue doit rencontrer chacune des deux droites données. Il faut donc que, pour chacun de ces deux points de rencontre V et W , les projections obliques soient sur une normale à l'axe.

225. Problème XXXVII. *Parallèlement à une droite donnée, mener une droite qui rencontre deux autres droites quelconques non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par la première droite, on mène un plan parallèle à la droite donnée; par la seconde droite, on mène également un plan parallèle à la droite donnée.

Ces deux plans se rencontrent suivant la droite demandée.

Vérifications. Cette droite est parallèle à la droite donnée et doit rencontrer chacune des deux autres droites données.
