

$$\frac{M_{IV}}{a} = \frac{7P}{2} \cdot 4 - P(1 + 2 + 3) = 8P.$$

Construirt man für die gegebenen Lasten und den Polabstand a ein Seilpolygon, so geben die den einzelnen Knotenpunkten entsprechenden lothrechten Höhen des Seilpolygons (von der Schlußlinie $\alpha\beta$ aus gemessen) die Werthe von $\frac{M}{a}$. In

Fig. 184 ist $y_I = \frac{M_I}{a}$, $y_{II} = \frac{M_{II}}{a}$ etc.

Um nicht weit über die Zeichnung fallende Kraftpolygone zu erhalten, ist in Fig. 184 bei Construction der schraffirten Kraftpolygone überall $\frac{M_D}{2a}$ aufgetragen; der für den Kräftezug gewählte Maßstab ist $1\text{ mm} = 1\text{ Tonne}$; es müssen demnach die Spannungen, welche sich in den schraffirten Kraftpolygonen ergeben, auf einem doppelt so großen Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem also $1\text{ mm} = 2\text{ Tonnen}$ bedeutet.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

176.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.

a) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte II (Fig. 185) wirkenden Kräfte Q . Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ist F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und es ist das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt $M = Q \cdot \eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 208.$$

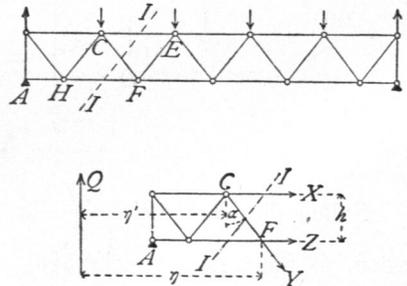
In gleicher Weise ergibt sich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ist,

$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 209.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vgl. Art. 85, S. 59), so folgt aus den Gleichungen 208 u. 209: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derselben Belastung wie M_{max} stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet größte Beanspruchung bei derjenigen Belastung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das größte Moment bei voller Belastung statt; sämmtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei voller Belastung am meisten beansprucht.

a) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers vertheilte Belastung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit g für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daß alle Belastungen

Fig. 185.

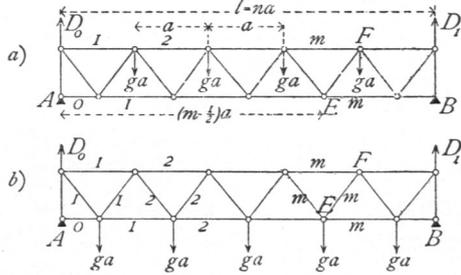


durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau stets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte sei a (Fig. 186), die

Fig. 186.

Felderzahl des Trägers n , mithin $l = n a$. Jeder Mittenknotenpunkt ist mit $g a$ belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 186a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck



$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist E der Momentenpunkt und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) g a \left(\frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right);$$

$$M = \frac{g a^2}{2} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right]. \dots \dots \dots 210.$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung ist F der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0 m a - (m - 1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \dots \dots \dots 211.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 186b), so ist

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \text{ und } Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m). \quad 212.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge gleichmäßig vertheilter Nutzlast finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennt man die gleichmäßig vertheilte Nutzlast für die Längeneinheit p , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die für den Knotenpunkt gleich $p a$ ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Man erhält also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 186a)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m), \quad 213.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 186b)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m). \quad 214.$$

c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellaften P_1, P_2 (Fig. 187) sind in die allgemeinen Gleichungen 208 u. 209 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

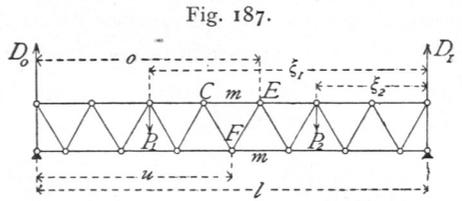


Fig. 187.

177.
Berechnung
d. Gitterstabs-
spannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei Q die Mittelkraft aller links vom Schnitte II (Fig. 188) wirkenden äußeren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen nach rechts fallenden Diagonale Y , so muß, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

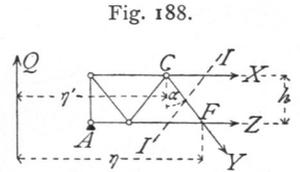


Fig. 188.

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \text{ woraus } Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 215.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 189) ist

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \text{ woraus } Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta} \dots \dots \dots 216.$$

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 186a)

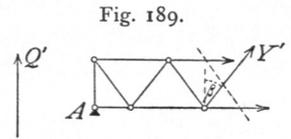


Fig. 189.

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n - 1) \frac{g a}{2} - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1),$$

sonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 1); \dots \dots \dots 217.$$

für den m -ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1), \text{ daher } Y'_m^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2 m + 1) \dots \dots \dots 218.$$

Aus den Gleichungen 217 u. 218 für Y_m^g und Y'_m^g folgt leicht: Bei gleichmäÙig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 186 b), so ist für die m -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 2), \dots \dots \dots 219.$$

für die m -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2 m) \dots \dots \dots 220.$$

Das Gesetz, dafs bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier gültig.

$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2}\right) \frac{r p a}{2 l} = \frac{p}{2 l} \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derfelbe Werth ergibt sich für den vollwandigen Träger in Fig. 190, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2 l} \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlast belasteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belastung den größten Zug, bezw. größten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher nach Gleichung 215

$$Y_{max} = \frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 221.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 191

$$D_0 = \frac{p \left(l - x - \frac{a}{2}\right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right];$$

$$Q_{x min} = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x\right) = -\frac{p}{2 l} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

und

$$Y_{min} = -\frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 222.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2 l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right], \quad 223.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2 l \cos \beta} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 224.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 192), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit $p a$ eingeführt wird) Q_{max} , bezw. Q_{min} eben so groß, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Last p für die Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlast belasteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2 l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p (l - x)^2}{2 l}.$$

x bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Fig. 191.

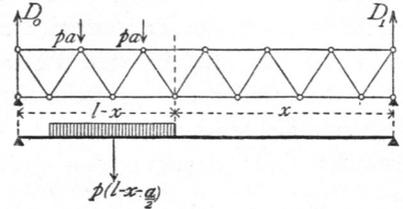
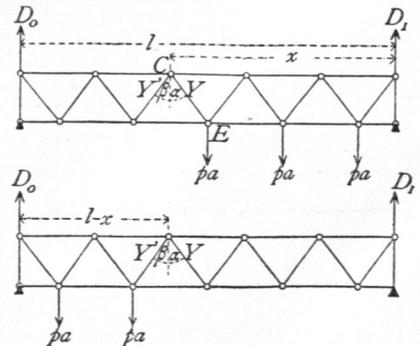


Fig. 192.



Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2 l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2 l \cos \alpha}, \quad \dots \quad 225.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2 l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p (l-x)^2}{2 l \cos \beta} \quad \dots \quad 226.$$

Die zusammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belaftung p für die Längeneinheit, so sind die unter α für Eigengewichtsbelaftung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen g die Größe p eingeführt wird.

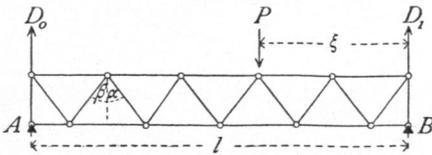
b) Wird endlich der Träger durch Einzellasten beansprucht (Fig. 193), so erzeugt die Last P im Abstände ξ von B den Stützdruck $D_0 = \frac{P \xi}{l}$. In sämtlichen

rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}$;

in sämtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P \xi}{l \cos \beta}$.

Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$,

Fig. 193.



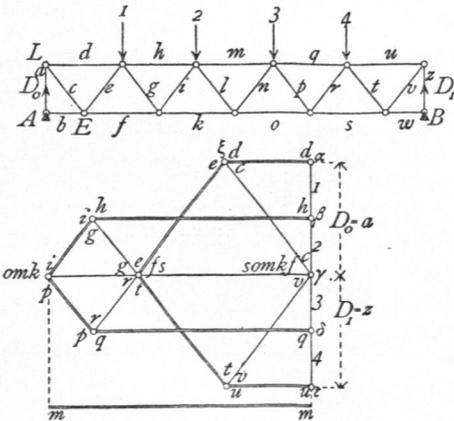
mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$, für

die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die

Regel: Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Setzt man zunächst eine gleichmäßig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bzw. volle Nutzlast) voraus, so macht es für das Verfahren keinen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 194)

Fig. 194.



die Belaftung $g a$, bzw. $p a$ wirkt, so empfiehlt sich für die Ermittlung der Spannungen die Vieleckmethode, weil dieselbe sämtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt.

Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden sind, trägt man alle äußeren Kräfte $1, 2, 3, 4, D_1$ und D_0 in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es sei $\alpha \beta = 1, \beta \gamma = 2, \gamma \delta = 3, \delta \varepsilon = 4$; nun trägt man an ε (den Endpunkt von 4) $D_1 = \varepsilon \gamma$ und $D_0 = \gamma \alpha$. Damit schließt sich das Kraftpolygon der äußeren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von A aus. In A wirken D_0, a und b ; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergibt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d . Bei der Zerlegung von $a (= \gamma \alpha)$ ist zu beachten, daß die Parallele zum Randstabe d durch den

178.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Punkt im Kraftpolygon gehen muß, der zwischen D_0 und r liegt, d. h. durch α . Man erhält $\alpha \xi = d$ und $\xi \gamma = c$. (Nach Art. 174, S. 151 ist d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, so wirken da selbst ($b = 0$) c , e und f ; bekannt ist $c = \gamma \xi$. Demnach sind e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randstab f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen muß, welcher zwischen D_1 und D_0 liegt, da der Randstab f im System sich zwischen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f . (Da c , wie oben gefunden, Zug ist, erhält e Druck, f Zug.) Geht man so weiter, so ergibt sich der in Fig. 194 gezeichnete Kräfteplan. In demselben sind die Druckspannungen durch doppelte, die Zugspannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ist Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugspannungen zusammen und ist deshalb besonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabspannungen sind stets durch diejenigen Buchstaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im System führen. Die Spannungen b , l , n , w werden gleich Null.

Um die größten in den Gitterstäben durch die Nutzlasten erzeugten Zug-, bezw. Druckspannungen zu bestimmen, beachte man, daß $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$, $Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos \alpha}$, $Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta}$ und $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$ ist.

Wenn die Lasten $p a$ an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächst gelegenen Knotenpunkte der belasteten Gurtung von diesen um eine ganze Feldweite a abliegen, so ist

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Die graphische Darstellung von Q_{max} ergibt eine Parabel (Fig. 195 a).

Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p a^2}{8l}$; für $x = l$

wird $Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l}{2} - \frac{p a^2}{8l}$. Q_{max}

wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ist die Curve in Fig. 195 a construiert.

Hier sind diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von Q_{max} einzuführen, welche den Fußpunkten der betreffenden Diagonalen entsprechen. Für die Diagonale CE ergibt sich mn als Werth von Q_{max} . Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie no giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$; denn es ist

$$\frac{no}{\cos \alpha} = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}.$$

Nach Gleichung 223 ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$, also nr der größte Druck in der rechts steigenden

Diagonale EF .

Es ist ferner

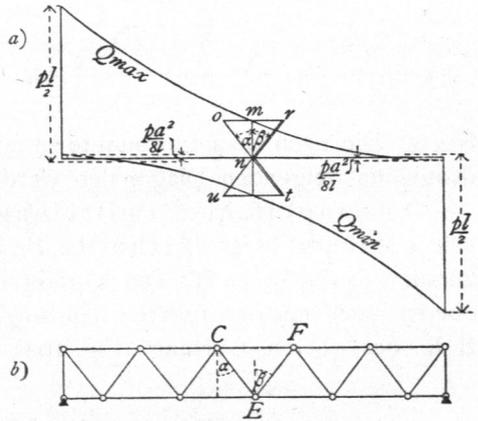
$$Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Wird die Differenz $l-x = \xi$ gesetzt, so ergibt sich, daß die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{p a^2}{8l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = -\frac{p l}{2} + \frac{p a^2}{8l}$.

Man erhält die in Fig. 195 a gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt , für die rechts steigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ist.

Fig. 195.



Greifen die Laften an der unteren Gurtung an oder allgemein, find die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächft den Auflagern von diesen um je eine halbe Feldweite entfernt, fo ergibt die Verzeichnung der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 177 (S. 160) unten stehende Parabeln (Fig. 196 a).

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in CE ist cd ; der Maximaldruck in CF ist cf ; der Maximaldruck in CE ist cv ; der Maximalzug in CF ist cw .

Fig. 196.

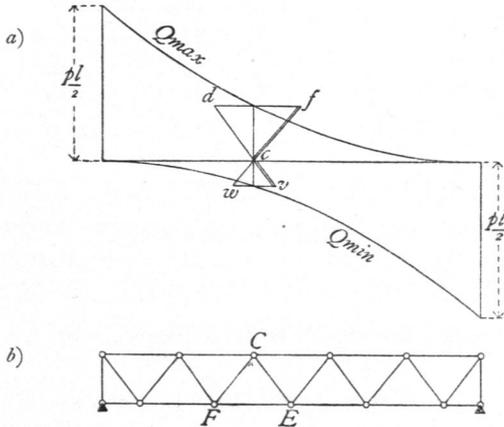
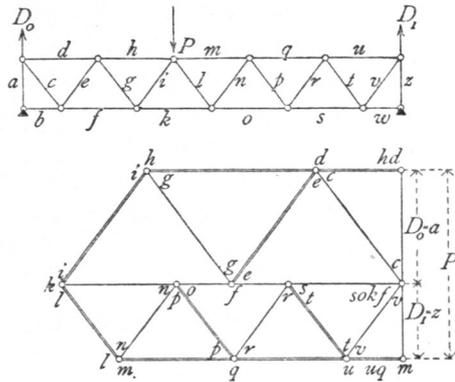


Fig. 197.



Für eine Einzellaft wird die Ermittlung der Spannungen bequem mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 197 gefchehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

δ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 176 (S. 156) werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Druck; durch die ungünstigste Nutzlast erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen sowohl Zug, wie Druck. Wenn der grösste Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlast entsteht, kleiner ist, als der Zug durch Eigengewicht, so erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ist der Zug in Folge des Eigengewichtes meistens viel grösser, als der grösste Druck durch Nutzlast, und es werden daher diese Diagonalen meistens nur gezogen. Eben so ergibt sich, das die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu ansteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen sowohl gezogen, wie gedrückt.

179.
Art
der Stab-
beanspruchung.

3) Parallelträger mit Diagonalen und Verticalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belastung wird genau so, wie in Art. 176 (S. 156), wenn M das Biegemoment für den zu einem oberen Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt, M' das Biegemoment für den zu einem unteren Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

180.
Berechnung
d. Gurtungs-
spannungen.