

die übrigen Größen der Gleichung, welche unendlich kleine Größen erster Ordnung sind. Es ist demnach

$$dM = Q dx \text{ und, wie oben behauptet, } Q = \frac{dM}{dx}, \dots 40.$$

Wird $Q = 0$, so ist auch $\frac{dM}{dx} = 0$, also M ein Maximum. Hieraus folgt, daß das Moment für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null ist.

Für die Berechnung auf Biegung beanspruchter Balken ist es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerschnitte von der Kraftebene geschnitten werden. Wenn, wie meistens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerschnitte in Hauptachsen schneidet (siehe Art. 59, S. 39), so ergeben sich für die Spannung sehr einfache Formeln. Nach Früherem ist jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn also z. B. die Querschnitte die in Fig. 79 dargestellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ , senkrecht zur Bildebene geht, so ist die obige Voraussetzung erfüllt.

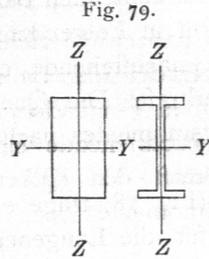


Fig. 79.

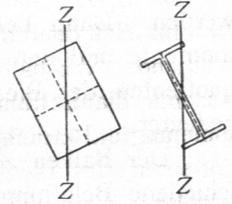


Fig. 80.

Wesentlich verwickelter ist die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptachsen schneidet; dieser Fall wird durch Fig. 80 veranschaulicht, in welcher die Querschnitte lothrecht belasteter Dachpfetten vorgeführt sind.

**a) Axiale Biegungsspannungen,
wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte in Hauptachsen schneidet.**

86.
Axiale Biegungs-
spannung.

Unter der Einwirkung des Biegemomentes entstehen in den einzelnen Querschnitten des Balkens an den verschiedenen Stellen Spannungen; dieselben dürfen gewisse durch die Natur des Materials vorgeschriebene Grenzen nicht überschreiten, wenn die Construction sicher sein soll; es ist daher die Kenntniß dieser Spannungen nothwendig. Zur Ermittlung derselben möge der Betrachtung ein ursprünglich gerades Balkenstück von der Länge dx (Fig. 81) zu Grunde gelegt werden; AB fällt in die Axe des Balkens. Bei der Biegung erleidet dasselbe Formänderungen, und es werden im Allgemeinen die vor der Biegung durch A und B gelegten Querschnitte nach denselben nicht mehr eben sein; CD möge sich in $C_1 D_1$ (Fig. 82) geändert haben. Die ursprüngliche Länge von CD war dx ; die jetzige Länge ist $C_1 D_1 = dx + \Delta dx$; mithin ist die Verlängerung in Folge der Biegung Δdx (welche Verlängerung sowohl positiv, wie negativ sein kann). Das Verlängerungsverhältniß an dieser Stelle ist demnach

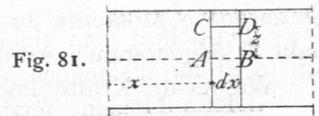


Fig. 81.

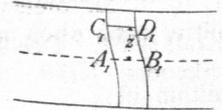


Fig. 82.

$$\frac{\Delta dx}{dx}$$

Wird die an dieser Stelle für die Flächeneinheit des Querschnittes herrschende Spannung mit N und der Elasticitäts-Modul des Materials mit E bezeichnet, so ist nach Gleichung 30 das Verlängerungsverhältniß

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{E}, \text{ also } N = E \frac{\Delta dx}{dx}$$

Da E bekannt ist, so ist auch N bekannt, falls $\frac{\Delta dx}{dx}$ gefunden ist. Man macht nun die Annahme, daß das Verlängerungsverhältniß an den verschiedenen Stellen

des Querschnittes dem Abstände z von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes normal zur Kräfteebene gelegten Axe YY (Fig. 83) proportional ist, und zwar der ersten Potenz dieses Abstandes. Allgemein wird also stattfinden, wenn α und β zwei noch zu bestimmende Constanten sind,

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \alpha + \beta z.$$

Demnach ist

$$N = E \frac{\Delta dx}{dx} = E(\alpha + \beta z).$$

Da E , α , β für den ganzen Querschnitt constant sind, so sind auch die Producte $E\alpha$ und $E\beta$ constant. Es sei $E\alpha = a$ und $E\beta = b$; alsdann wird

$$N = a + bz. \dots \dots \dots 41.$$

Für die Bestimmung der beiden Werthe a und b stehen zwei Gleichungen zur Verfügung. Betrachtet man den Balkentheil links von dem untersuchten Querschnitte II (Fig. 83), so muß derselbe unter der Einwirkung aller an ihm wirkenden Kräfte, der äußeren und der inneren, im Gleichgewichte sein (siehe Art. 4, S. 6). Auf diesen Theil wirken aber:

1) Außere Kräfte, deren Mittelkraft Q ist; letztere hat in Bezug auf den Querschnitt II nach Vorstehendem das Biegemoment $M = Qz$.

2) Innere Kräfte, d. h. die axialen Spannungen im Querschnitt II ; für ein Flächentheilchen vom Inhalt df sind dieselben Ndf ; für den ganzen Querschnitt ist deren Summe einzuführen, d. h. allgemein $\int Ndf$, wobei die Integration über den ganzen Querschnitt auszuführen ist. Die in den Querschnitt fallenden Spannungen kommen bei der nachstehenden Untersuchung nicht in Betracht.

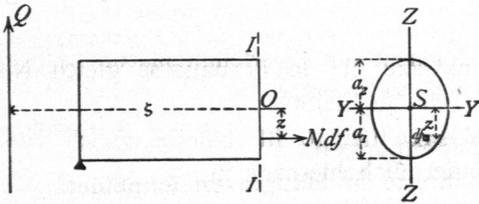
Das Gleichgewicht des Balkenstückes verlangt nun, daß die algebraische Summe der wagrechten Kräfte gleich Null sei und daß die algebraische Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene, als welcher der Punkt O angenommen werden soll, ebenfalls gleich Null sei.

Wagrechte Kräfte sind außer den axialen Spannungen nicht vorhanden; die Summe der letzteren ist $\int Ndf$. Es wird also, wenn man die Ordinaten nach unten positiv, nach oben negativ annimmt,

$$\int_{-a_2}^{+a_1} Ndf = 0.$$

Das Moment der äußeren Kräfte ist $M = Qz$; jede Spannung Ndf hat in Bezug auf O das Moment $Nzdf$. Das gesammte Moment aller dieser Spannungen ist also $\int_{-a_2}^{+a_1} Nzdf$; da die Integration über den ganzen Querschnitt auszudehnen ist, so sind für z die Grenzen $-a_2$ und $+a_1$. Die Bedingungsgleichungen heißen demnach:

Fig. 83.



$$\int_{-a_2}^{+a_1} N df = 0 \quad \text{und} \quad M - \int_{-a_2}^{+a_1} N z df = 0.$$

Führt man für N den Werth aus Gleichung 41 ein, so wird

$$\int_{-a_2}^{+a_1} (a + bz) df = 0 \quad \text{und} \quad M - \int_{-a_2}^{+a_1} (a + bz) z df = 0.$$

Da a und b constant sind, können sie vor die Integralzeichen gesetzt werden. Man erhält zunächst für die erste Gleichung

$$a \int_{-a_2}^{+a_1} df + b \int_{-a_2}^{+a_1} z df = 0.$$

Nun ist $\int_{-a_2}^{+a_1} df = F$, wenn F den Flächeninhalt des ganzen Querschnittes bedeutet;

$\int_{-a_2}^{+a_1} z df$ ist nach Art. 30 (S. 24) das statische Moment der Querschnittsfläche bezogen

auf die Axe YY . Da YY eine Schwerpunktsaxe ist, so ist dasselbe gleich Null. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so bleibt

$$a F = 0, \quad \text{woraus} \quad a = 0 \quad \text{folgt.}$$

Die zweite der obigen Gleichungen ändert sich hiernach in

$$M - b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df = 0.$$

$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df$ ist aber nach Art. 46 (S. 32) das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Axe YY ; dasselbe soll hier kurz mit \mathcal{F} bezeichnet werden, so daß stattfindet:

$$\mathcal{F} = \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df;$$

alsdann wird

$$M = b \mathcal{F} \quad \text{und} \quad b = \frac{M}{\mathcal{F}}.$$

Nunmehr ist der Werth der axialen Biegungsspannung N durch Einsetzung der für a und b gefundenen Werthe in die Gleichung 41 leicht zu ermitteln; man erhält

$$N = \frac{M}{\mathcal{F}} z. \quad \dots \dots \dots 42.$$

87.
Neutrale Axe
oder
Nulllinie.

Für alle Theile desselben Querschnittes haben bei einer gegebenen bestimmten Belastung sowohl M (das Biegemoment oder das Moment der an der einen Seite des Querschnittes wirkenden äußeren Kräfte bezogen auf die wagrechte Schweraxe desselben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment \mathcal{F} , welches nur von der Form und Größe der Querschnittsfläche abhängt, denselben Werth. Demnach ist

nach Gleichung 42 die axiale Spannung N an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes nur mit dem Abstände z derselben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querschnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden also gleich stark beansprucht. Trägt man die in den verschiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialspannungen derart graphisch auf, daß man die z als Abscissen, die zugehörigen N als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Linie der Gleichung $N = \frac{M}{\mathcal{F}} z$. Diese Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen N und z nur in der ersten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $N = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten ist die Axialspannung gleich Null.

An diesen Stellen ist also auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieselben lassen sich aus der Gleichung ermitteln

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{E}, \text{ folglich } \Delta dx = \frac{N}{E} dx = 0.$$

Man nennt die Faserficht, in welcher durch die Biegung weder eine Verlängerung, noch eine Verkürzung bewirkt wird, die neutrale Faserficht, und die Axe YY , welche alle Punkte des Querschnittes enthält, in denen die Axialspannung gleich Null ist, die neutrale Axe oder Nulllinie.

Hiermit ist der Satz bewiesen: Bei einem geraden wagrechten Balken, dessen Querschnitte durch die Kräfteebene in Hauptaxen geschnitten werden, fällt, wenn nur lothrechte Kräfte wirken, in jedem Querschnitt die neutrale Axe mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zusammen.

Aus Gleichung 42 folgt ferner, daß N desto größer ist, je größer z ist, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt ist. Die größten Werthe von N finden also in den am weitesten entfernten Punkten statt. Es seien die Abstände der am weitesten nach oben und unten von der Neutralen entfernten Punkte (Fig. 83) bezw. $+a_1$ und $-a_2$; alsdann ist

$$N_{max} = + \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad N_{min} = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \dots \quad 43.$$

Die Gleichungen 43 werden benutzt, um die Größe und Form des Querschnittes an den verschiedenen Stellen des Balkens zu bestimmen. Bedeutet M das größte für einen Querschnitt mögliche Moment, so ist die größte in diesem Querschnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckspannung aus den Gleichungen 43 zu ermitteln. Ist für das betreffende Material und den vorliegenden Fall die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes K' , bezw. $-K''$ (für Zug, bezw. Druck), so darf höchstens stattfinden:

$$N_{max} = K' \quad \text{und} \quad N_{min} = -K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querschnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_1, \quad -K'' = -\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geschrieben werden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad \dots \quad 44.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 44 sind bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verschiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen

83.
Größte
Beanspruchung.

der zulässigen Beanspruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' sind ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 53 u. 54) bekannt. Sollen also an den meist beanspruchten Stellen der Querschnitte die zulässigen Beanspruchungen K' und K'' nicht überschritten werden, so sind $\frac{\mathcal{F}}{a_1}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2}$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen 44 erfüllt sind. \mathcal{F} , a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und GröÙe der Querschnittsfläche ab; man kann daher durch passende Anordnung des Querschnittes diese Bedingung erfüllen.

89.
Widerstands-
moment.

Für den Quotienten $\frac{\mathcal{F}}{a}$ hat man eine besondere Bezeichnung: das Widerstandsmoment eingeführt. Hierin bedeutet a den größeren von den beiden Werthen a_1 und a_2 , ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Es möge noch bemerkt werden, daß die größten Werthe der axialen Spannungen N nicht ohne Weiteres die überhaupt wirkenden Maximalspannungen sind. In den meisten Fällen aber ist die größte Spannung entweder gleich dem größten Werth der axialen Spannung oder doch so wenig von demselben verschieden, daß der letztere Werth unbedenklich als größter Werth der Spannung überhaupt eingeführt werden kann.

90.
Querschnitts-
bestimmung.

Die Querschnitte der auf Biegung beanspruchten Balken werden mittels der beiden Gleichungen 44 bestimmt, indem für M der größtmögliche Werth des Biegemomentes für den betreffenden Querschnitt, für K' und K'' die bezüglichen Werthe aus den Tabellen auf S. 53 u. 54 eingeführt werden. Eine günstige Anordnung wird es sein, wenn gleichzeitig in den am meisten gezogenen und gedrückten Punkten des Querschnittes die zulässigen größten Beanspruchungen auf Zug und Druck eintreten.

91.
Stäbe aus
Schmiedeeisen
und Stahl.

Für Schmiedeeisen und Stahl sind die zulässigen Zug-, bezw. Druckbeanspruchungen (absolut genommen) einander nahezu gleich, so daß für die Querschnittsbildung in den Gleichungen 44 $K' = K''$ zu setzen ist. Es ergibt sich alsdann

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querschnittsform für Stäbe aus Schmiedeeisen und Stahl, welche auf Biegeelasticität beansprucht werden, ist so zu wählen, daß die am meisten gezogenen, bezw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, daß also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

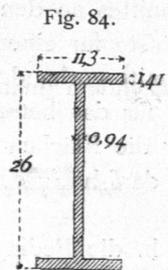
Beispiel. Das Maximalmoment in einem schmiedeeisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 53 ist für Schmiedeeisen $K' = K'' = K = 700$ kg für 1 qcm, also

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« (Fig. 84) hat ein Trägheitsmoment $\mathcal{F} = 5798$; ferner ist $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach

$\frac{\mathcal{F}}{a} = 446$, so daß dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

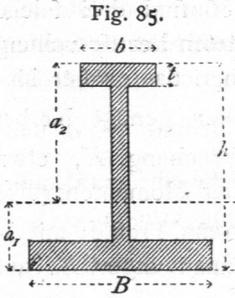


92.
Stäbe
aus
Gusseisen.

Für Gusseisen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so groß, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 53), also $K'' = 2 K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2 a_1.$$

Nun ist die ganze Höhe des Querschnittes $h = a_1 + a_2 = 3 a_1$, woraus $a_1 = \frac{h}{3}$.



Daraus folgt die Regel: Die Querschnitte der gußeisernen Balken (Fig. 85) sind so anzuordnen, daß der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gesamthöhe des Querschnittes von der am meisten gezogenen Faser entfernt liegt. Befinden sich also die gezogenen Fasern, wie meistens, unten, die gedrückten Fasern oben, so soll der Schwerpunkt im Abstände $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querschnittes liegen.

Die auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entsprechend, mit rechteckigem Querschnitt hergestellt; der Schwerpunkt des Querschnittes liegt also in halber Höhe h , und es ist $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und es ist aus der Tabelle auf S. 53 der kleinere der beiden Werthe, welche als zulässige Zug-, bezw. Druckbeanspruchung angegeben sind, einzuführen. Wenn dieser Werth K genannt wird, so ist

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K}$$

Beispiel. Es sei etwa $M = 180\,000$ kgcm; alsdann muß für kieferne Balken stattfinden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180\,000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 ist

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}$$

Im vorliegenden Falle muß also sein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18\,000.$$

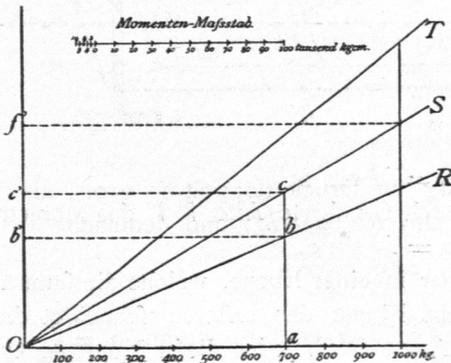
Ist $b = \frac{3}{4} h$, so wird $\frac{3}{4} h^3 = 18\,000$ und $h = \sqrt[3]{24\,000} = \text{rot. } 29 \text{ cm}$, folglich $b = 22 \text{ cm}$.

Bei den schmiedeeisernen Walzbalken I- und E-förmigen Querschnittes, welche im Handel in ganz bestimmten Kalibern erhältlich sind, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur sehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querschnittsbildung ist

$$M = K \frac{\mathcal{F}}{a}$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querschnitt, also bekanntem

Fig. 86.



Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a}$, eine größere oder geringere Beanspruchung K als zulässig einführt, kann man ihn für ein größeres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abscissen, die zugehörigen Werthe $\frac{K \mathcal{F}}{a} = M$ als Ordinaten auf, so ergibt sich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa OR (Fig. 86), die durch den Coordinatenanfang O geht und die Größe der Momente angibt, welche dieses Kaliber bei

93-
Stäbe
aus
Holz.

94.
Querschnitts-
bestimmung
mittels
graphischer
Tafel.

den verschiedenen Beanspruchungen K ertragen kann. In Fig. 86 sind drei solche Linien OR , OS , OT angegeben. Bei einer als zulässig erachteten Beanspruchung $K = 700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, so lange das grösste Moment nicht grösser als $\overline{ab} = O'b'$ ist; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $\overline{ac} = Oc'$. Wird eine grössere Beanspruchung K , etwa $K = 1000$ kg, zugelassen, so genügt der Balken OS bis zu einer Momentengrösse $\overline{Of'}$. Auf der neben stehenden Tafel sind für die »Deutschen Normal-Profile« mit I- und C-Form die Linien gezogen; auf der Abscissenaxe sind die Spannungen K , auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125 000 kgcm aufzunehmen ist, so würde das I-Eisen Nr. 20 dieses mit einer grössten Beanspruchung $K = 580$ kg ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanspruchung von 765 kg, Nr. 16 mit einer Spannung von 1060 kg. Wäre vorgeschrieben, dass K nicht grösser sein solle, als 700 kg, so würde das Kaliber zu wählen sein, welches zunächst über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700$ kg gehörige Ordinate den Werth $M = 125 000$ kgcm hat. Die Verwendung dieser graphischen Tafel ist sonach sehr bequem.

b) Axiale Biegungsspannungen, wenn die Kräftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptachsen schneidet.

95.
Axiale
Biegungs-
spannungen.

Auf den Querschnitt II in Fig. 87a wirke das Biegemoment $M = Q\zeta$; Fig. 87b giebt die Vorderansicht des Querschnittes; die Kräftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 87a zusammen, geht durch die Balkenaxe und ist die XZ -Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptachsen des Querschnittes, so kann nach bekannten Gesetzen der Statik das in der XZ -Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU - und XV -Ebene wirken; das erstere ist alsdann $M_u = M \sin \alpha$, das letztere $M_v = M \cos \alpha$. Diese Zerlegung, so wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die isometrische Ansicht in Fig. 87c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerschnitt angenommen ist. Q zerlegt sich im Punkte A in $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erstere Kraft hat in Bezug auf die durch O , den Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

$$Q \cos \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \cos \alpha = M \cos \alpha;$$

die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q \sin \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

Jedes dieser beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die sämtlichen Querschnitte in Hauptachsen schneidet; die Ebene des ersteren schneidet die Querschnitte in VV , die des letzteren in den Axen UU ; jedes dieser Momente er-

Fig. 87.

