

wandt worden (§. 224). So finden denn dieselben Anwendung auf allen Gebieten des Maschinenwesens, auch wenn man den Begriff desselben ausdehnen will auf die subtilen Erzeugnisse des Präzisionsmechanikers (wie z. B. die Atwood'sche Fallmaschine und Amsler's Planimeter zeigen), ja auch über die Grenzen des Maschinenwesens hinaus bei den feinsten wie gewöhnlichsten Fuhrwerken, bis herab zu den Möbeln, wo leichte gelegentliche Beweglichkeit auf der Unterlage der einzig übriggebliebene Zweck ist.

---

### Siebzehntes Kapitel.

## Z A H N R Ä D E R.

### §. 199.

#### Anordnung der Zahnräder.

Die gegenseitige Lage der geometrischen Achsen der Zahnräder wirkt auf deren allgemeine Form mehr oder weniger bestimmend ein, nicht so entscheidend indessen als bei den Reibungsrädern. Denn die geometrischen Gebilde, welche bei den Reibungsrädern als aufeinander rollend erkannt wurden, kommen hier nur theoretisch, nicht in wirklicher körperlicher Ausführung in Betracht; sie heissen die Grundkörper der Zahnräder.

Die Zahnräder für parallele Achsen heissen gerade Räder, Stirnräder; ihre Grundkörper sind Cylinder. Die Räder für winklige Achsen heissen Winkelräder; ihre Grundkörper sind Kegel, wonach die Räder auch Kegelräder heissen. Für geschränkte Achsen werden die Grundkörper der Räder Hyperboloide, wonach auch die Räder selbst häufig benannt werden. Die Zahnkanten werden in vielen Fällen schraubenförmig statt gerade gestaltet; hiernach werden die betreffenden Räder dann Schraubenräder genannt. Andere Zahngestaltungen sind nicht ausgeschlossen, aber nicht gebräuchlich.

Soll die Uebertragung der Bewegung ohne Aenderung des Bewegungsgesetzes oder „gleichförmig“ stattfinden, so werden die erwähnten Grundkörper (Cylinder, Kegel, Hyperboloide) Dreh-

körper; die Räder heissen dann runde Räder, während sie im Gegensatz dazu unrunde genannt werden, wenn die Grundkörper wegen der geforderten ungleichförmigen Bewegungsübertragung eine andere als Drehkörpergestalt erhalten müssen. In dem Nachstehenden werden nur die runden Räder behandelt.

## A. Die Verzahnung der Stirnräder.

### §. 200.

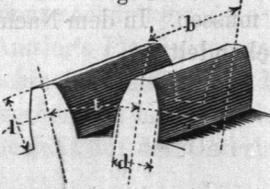
#### Allgemeines über die Zähne der Stirnräder.

Die Zahnformen der Stirnräder können so gewählt werden, dass alle Räder von gleicher Theilung richtig miteinander arbeiten. Räder von diesen Zahnform-Eigenschaften heissen Satzräder, diejenigen Räder hingegen, welchen diese Eigenschaften fehlen, Einzelräder.

In jedem Paar von runden Rädern heissen zwei den verschiedenen Rädern angehörige, aus den Radmittelpunkten in Normalebenen beschriebene Kreise, welche in jedem Augenblick gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben, Verhältnisskreise. Die berührenden Verhältnisskreise eines cylindrischen Stirnräderpaares heissen dessen Theilkreise. Auf ihnen wird die Zahntheilung, d. i. die Entfernung der Mittelebenen zweier benachbarten Zähne abgetragen. Hier soll vorerst nur von den geradzahnigen Stirnrädern die Rede sein.

Die Zähne derselben werden prismatisch geformt; dabei heissen die Grundflächen der Zahnprismen die Endflächen der Zähne, der über den Theilkreiscylinder hervorragende Theil des Zahnes der Zahnkopf, der andere Theil der Zahnfuß, die obere Fläche des Zahnkopfes ist der Zahnscheitel, die untere des Zahnfußes die Sohle oder Wurzel des Zahnes; der Raum zwischen zwei benachbarten Zähnen heisst die Zahnlücke, die Sohlfläche der Lücke der Radboden. Die Flächen, welche die Zahnsohle mit dem Zahnscheitel verbinden, heissen die Zahnflanken; in ihrer Formgebung insbesondere besteht das, was man die Verzahnung der Räder nennt.

Beim Stirnrad nennt man ferner Zahnlänge,  $l$  Fig. 569, den Abstand von Zahnsohle und Scheitel, Zahnbreite,  $b$ , den Abstand der Endflächen des Zahnes, Zahndicke,  $d$ , die Länge des zwischen die Zahnflanken fallenden Theilkreisbogens, und Lückenweite endlich die Länge des in die Lücke fallenden Bogens des Theilkreises. In-



Zähne kleiner als die Fusslänge, entstehen die Flanken- und Scheitelspielräume zwischen den Zähnen.

Man gibt beinahe ausnahmslos allen Zähnen an einem und demselben Rade dieselbe Zahndicke und dieselbe Lückenweite, also auch Theilung, sodass man irgend einen Zahn des einen Rades in jede Lücke des anderen eingreifen lassen kann. Daraus folgt aber, dass wenn die Zähne nur so geformt sind, dass sie in den Lücken genügenden Raum finden, das umgekehrte Verhältniss der Zahlen  $n$  und  $n_1$  der gleichzeitigen ganzen Umläufe gleich dem direkten Verhältniss der Zähnezahlen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{Z}_1$  ist, d. h.:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1} \dots \dots \dots (186)$$

Dieser Satz gilt für runde wie für unrunde Räder. Er gilt selbst auch dann, wenn man die Zähne an verschiedenen Umfängen der Räder verschieden dick machen wollte, wofern nur dafür gesorgt wird, dass in jede Zahnücke des kleineren Rades, während dasselbe eine ganze Umdrehung vollzieht, ein Zahn des anderen Rades tritt. Wird die unter dieser Voraussetzung ermittelte Zahl der Vorsprünge und Lücken am Umfange eines Zahnrades dessen Zähnezahl genannt, so drückt der vorstehende Satz das Grundgesetz der Bewegungsübertragung durch Zahnräder aus. Es liegt diesem Gesetz nicht sowohl eine feinere geometrische Betrachtung, als der unausweichliche Bewegungszwang der Konstruktionstheile zu Grunde. Das Gesetz gilt daher selbst von den ursprünglichsten Zahnradübertragungen, die u. a. im Orient seit Jahrtausenden im Gebrauch sind, und bei denen von einer anderen Gestaltung der Zähne keine Rede ist; als dass sie genügend grosse und haltbare Holzpflocke sind.

Die Zahnflankenformen dürfen dem Grundgesetz nicht widersprechen. Bei runden Rädern, d. h. denjenigen für gleichförmige Bewegungsübertragung, heisst dies, dass das Verhältniss der Winkel-

geschwindigkeiten, d. i. dasjenige der Differenzialien der gleichzeitig durchlaufenen Drehwinkel  $\omega_1$  und  $\omega$ , dem Verhältniss  $3 : 3_1$  gleichzusetzen ist und keiner anderen Konstanten gleichgesetzt werden darf. Die Zahnflanken, als diejenigen Flächen, von welchen das Verhältniss  $d\omega_1 : d\omega$  abhängt, sind hiernach einzurichten.

Bei der Anfertigung der Zahnräder muss den Zahnformen besondere Sorgfalt gewidmet werden. Am allerwichtigsten ist hierbei, auf die Genauigkeit der Theilung sein Augenmerk zu richten; Fehler in den Zahnflanken sind lange nicht so störend, als Fehler in der Theilung. Die Benutzung der Theilmaschinen resp. Räder-schneidemaschinen zur Zahnräderfertigung erhöht daher die Zuverlässigkeit der gelieferten Räder auf jeden Fall. Die Anwendung solcher Maschinen verbreitet sich bei uns jetzt erfreulicher Weise mehr und mehr. Unterstützt wird die Räderfabrikation jetzt auch sehr durch die Räderformmaschine\*), welche sehr schöne Resultate liefert. Die Wechselräder der Drehbänke sollte man eigentlich nicht anders als mit Maschinentheilung anwenden, da die Fehler der bloss gegossenen Räder bei jeder zu schneidenden Schraube sich nachtheilig merkbar machen. Noch schlimmer wirken diese Fehler, wenn man Schraubenräder (siehe unten §. 221) auf solchen Bänken schneiden will. Der sanfte stossfreie Gang, der bei diesen Rädern sonst leicht zu erzielen ist, wird durch die Fehler wieder sehr beeinträchtigt. Bei der Wahl der Zahnform, welche in einer Maschinenbauanstalt durchweg oder für jede bestimmte Klasse von Rädern einzeln gebraucht werden soll, empfiehlt es sich, alle Umstände sehr genau zu erwägen, ehe man sich für eine bestimmte Annahme entschliesst, da von derselben so vieles abhängt. Im Folgenden sind deshalb Anhalt- und Beurtheilungspunkte mancherlei Art gegeben.

### §. 201.

#### Theilkreishalbmesser. Peripheriemaasstab.

Bei einer Theilung  $t$  und einer Zähnezahl  $3$  eines runden Rades hat man für den Theilkreishalbmesser  $R$ :

$$\frac{R}{t} = \frac{3}{2\pi} = 0,15916 \, 3 \dots \dots \dots (187)$$

\*) In starkem Gebrauch in der Berlin-Anhaltischen Maschinenfabrik in Berlin und der Maschinenbauanstalt von Briegleb Hansen u. Co. in Gotha.

weshalb gemäss Formel (186) auch:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{n_1}{n} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (188)$$

Der Halbmesser, welchen man mittelst Formel (187) erhält, ist wegen der Zahl  $\pi$  stets irrational, so dass  $R$  bei abgerundeter Grösse der Theilung immer einen Bruch bei sich führen wird. Zur Erleichterung der bezüglichen Rechnung dient indessen die nachstehende Tabelle. Will man die Irrationalität von  $R$  vermeiden, so wähle man die Stufen der Theilungen nicht nach Millimetern, Linien etc., sondern nach einfachen Bruchtheilen oder Vielfachen des  $\pi$ fachen der Maasseinheit, ein Verfahren, welches in manchen Maschinenbauanstalten gebräuchlich ist. Geht  $t$  durch  $\pi$  Maasseinheiten einfach auf, so liefert die obige Gleichung den rationalen Ausdruck:

$$R = \frac{3}{2} \left( \frac{t}{\pi} \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (189)$$

Der Quotient  $t:\pi$  heisst auch wohl die Stichzahl des Rades.

*Hat z. B. ein 24zähmiges Rad eine Theilung von  $6 \times 3,14 \dots$  Millimeter, so wird nach (187) sein Theilkreishalbmesser  $R = (24:2) \cdot 6 = 72$  mm; hat ein (nach englischem Maass konstruirtes) Rad eine Theilung von  $3 \times 3,14 \dots$  Sechzehntelzoll oder die Stichzahl 3 bei 30 Zähnen, so wird sein Theilkreishalbmesser  $R$  nach (189)  $= (30:2) \cdot 3 = 45$  Sechzehntelzoll.*

Für das Auftragen der Theilungen und ihrer Bruchtheile bedient man sich sehr bequem des Peripherie-Maasstabes\*). Derselbe wird für Metermaass erhalten, indem man die eine Seite eines (prismatischen, hölzernen oder metallenen) Maasstabes in 314 Millimeter und deren Hälften eintheilt, und auf der gegenüberstehenden Seite diese Länge in 100 Theile und deren Hälften getheilt aufträgt. Gleichnumerirte Längen auf beiden Seiten verhalten sich dann wie  $1:\pi$ . Der Maasstab dient auch bequem zur Streckung von Kreisen und deren Bögen.

Im Folgenden werden nun beide Methoden berücksichtigt, nämlich die, welche die Theilung nach dem gewöhnlichen Maasssystem und rational, also die Halbmesser irrational ausführt, und die, welche die Theilung rational in Einheiten des Peripherie-maasstabes (Peripheriemillimeter, -Zoll u. s. w.), und damit die

\*) Derartige Maasstäbe, welche ich vor Jahren in den Uebungen im Maschinen-Konstruiren im Zürcher Polytechnikum einführte, haben auf meine Veranlassung sehr schön gefertigt und halten vorrätzig die Herren Optiker Ernst (Schifflande) und Ulrich (Münsterplatz) in Zürich,

Halbmesser ebenfalls rational, aber im gewöhnlichen Maasssystem, macht. Die hier folgende Tabelle ist nicht zu verwechseln mit der Donkin'schen \*), nach dem Ausdruck  $r : t = 1 : 2 \sin(180^\circ : 3)$ , welche den Halbmesser eines Kreises liefert, der ein regelmässiges Vieleck von 3 Seiten von der Länge  $t$  umschreibt. Dieser letztere Halbmesser ist namentlich bei kleinem 3 verschieden vom Radius  $R$  im obigen und gewöhnlichen Sinne. Die Verwechslung beider hat schon manchmal fehlerhafte Ausführungen hervorgerufen.

## §. 202.

Tabelle über die Theilkreishalbmesser.

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	0,159	0,318	0,477	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,59	1,75	1,91	2,07	2,23	2,39	2,55	2,71	2,86	3,02
20	3,18	3,34	3,50	3,66	3,82	3,98	4,14	4,30	4,46	4,62
30	4,77	4,93	5,09	5,25	5,41	5,57	5,73	5,89	6,05	6,21
40	6,37	6,53	6,68	6,84	7,00	7,16	7,32	7,48	7,64	7,80
50	7,96	8,12	8,28	8,44	8,59	8,75	8,91	9,07	9,23	9,39
60	9,55	9,71	9,87	10,03	10,19	10,35	10,50	10,66	10,82	10,98
70	11,14	11,30	11,46	11,62	11,78	11,94	12,10	12,25	12,41	12,57
80	12,73	12,89	13,05	13,21	13,37	13,53	13,69	13,85	14,01	14,16
90	14,32	14,48	14,64	14,80	14,96	15,12	15,28	15,44	15,60	15,76
100	15,92	16,07	16,23	16,39	16,55	16,71	16,87	17,03	17,19	17,35
110	17,51	17,67	17,83	17,98	18,14	18,30	18,46	18,62	18,78	18,94
120	19,10	19,26	19,42	19,58	19,73	19,89	20,05	20,21	20,37	20,53
130	20,69	20,85	21,01	21,17	21,33	21,49	21,65	21,80	21,96	22,12
140	22,28	22,44	22,60	22,76	22,92	23,08	23,24	23,40	23,55	23,71
150	23,87	24,03	24,19	24,35	24,51	24,67	24,83	24,99	25,15	25,31
160	25,46	25,62	25,78	25,94	26,10	26,26	26,42	26,58	26,74	26,90
170	27,06	27,21	27,37	27,53	27,69	27,85	28,01	28,17	28,33	28,49
180	28,65	28,81	28,97	29,13	29,28	29,44	29,60	29,76	29,92	30,08
190	30,24	30,40	30,56	30,72	30,88	31,04	31,19	31,35	31,51	31,67
200	31,83	31,99	32,15	32,31	32,47	32,63	32,79	32,95	33,10	33,26
210	33,42	33,58	33,74	33,90	34,06	34,22	34,38	34,54	34,70	34,85
220	35,01	35,17	35,33	35,49	35,65	35,81	35,97	36,13	36,29	36,45
230	36,61	36,76	36,92	37,08	37,24	37,40	37,56	37,72	37,88	38,04
240	38,20	38,36	38,51	38,67	38,83	38,99	39,15	39,31	39,47	30,63
250	39,79	39,95	40,11	40,27	40,42	40,58	40,74	40,90	41,06	41,22
260	41,38	41,54	41,70	41,86	42,02	42,18	42,34	42,49	42,65	42,81
270	42,97	43,13	43,29	43,45	43,61	43,77	43,93	44,09	44,25	44,40
280	44,56	44,72	44,88	45,04	45,20	45,36	45,52	45,68	45,84	46,00
290	46,15	46,31	46,47	46,63	47,79	46,95	47,11	47,27	47,43	47,59

\*) Siehe u. a. Salzenberg's Vorträge S. 93.

## Erste Benutzungsart der vorstehenden Tabelle.

*Beispiel.* Ein Rad soll 63 Zähne und 30 mm Theilung erhalten, welchen Halbmesser erhält sein Theilkreis? — Nach Zeile 7 Spalte 5 ist hier  $R : t = 10,03$ , also  $R = 10,03 \cdot t = 10,03 \cdot 30 = 300,9$  mm, abzurunden auf 301 mm. Wäre die Theilung 30 Sechzehntelzoll gewesen, so würde  $R = 301$  Sechzehntel geworden sein.

**Zweite Benutzungsart.** Die Tabelle erleichtert auch das Auffinden der Zähnezahl, welche man einem Rad von bekannter (berechneter) Theilung und gegebenem (noch abrundbarem) Theilkreishalbmesser zu geben hat.

*Beispiel.* Welche Zähnezahl erhält ein Rad von 1000 mm Theilkreishalbmesser bei 40 mm Theilung? — Es ist hier  $R : t = 1000 : 40 = 25$ . Fast genau entspricht diesem Werth die Zahl 24,99 in Spalte 9 Zeile 16, und erhält demnach das Rad  $150 + 7 = 157$  Zähne. Der Halbmesser wäre streng genommen zu verkleinern auf  $24,99 \cdot 40 = 999,6$  mm, was aber einen vernachlässigbaren Unterschied liefert.

**Dritte Benutzungsart.** Bei gegebenem Halbmesser und gegebener Zähnezahl die Theilung eines Rades zu suchen.

*Beispiel.* Gegeben  $R = 400$ ,  $z = 54$ . Dem Werthe  $z = 54$  entspricht nach Spalte 6 Zeile 6 der Quotient  $R : t = 8,59$ . Man hat demnach hier zu nehmen:  $t = R : 8,59 = 400 : 8,59 = 46,56$  mm.

Wird die Zahnkopflänge  $= 0,3t$  gemacht, vergl. §. 207 ff., so ist der Kopfkreishalbmesser  $R' = R \pm 0,3t$ . Mit Hülfe der Tabelle erhält man hiernach das Verhältniss  $R' : t$ , wenn man für ein aussenverzahntes Rad zum Tabellenwerth 0,3 zuzählt, für ein Hohlräder 0,3 von demselben abzieht.

## §. 203.

## Allgemeine Verzahnung.

In einem Stirnräderpaare liegen zusammenarbeitende Zahnurrisse in einem Lothschnitt zu den Radachsen, und geschieht deshalb die Verzeichnung und Auftragung der Zahnformen in einem solchen Schnitte. Die sogenannte allgemeine Verzahnung lehrt, wie bei gegebenem Zahnprofil des einen Rades dasjenige für das eingreifende Rad bei der Forderung gleichförmiger Bewegungübertragung zu bestimmen ist.

**I. Erstes Verfahren des Verfassers.** Fig. 570. Zahnprofil  $a S b c$  gegeben und Theilkreis  $T$  des Rades  $O$  gewählt, damit der Theilkreis  $T_1$  des Rades  $O_1$  gegeben; gesucht wird die Zahnkurve  $a_1 S \dots$  des Rades  $O_1$ . Lege die gegebene Kurve so, dass ihr Theilkreispunkt  $S$  in die Centrale  $OO_1$  fällt, so ist  $S$  gleichzeitig ein Punkt des gesuchten Zahnprofils. Um einen zweiten Punkt  $a_1$  zu finden, der mit  $a$  zusammentreffen soll, ziehe  $a_1$  normal zur gege-

benen Kurve in  $a$ , mache Bogen  $S1' = \text{Bogen } S1$ , sodann die Strecke  $1s_1 = \text{der Strecke } S1'$ , und  $Ss_1 = 1'1$ , schlage sodann aus  $S$  einen Kreisbogen mit  $s_1a$  und aus  $1'$  einen solchen mit  $1a$ , so ist der Schnittpunkt  $a_1$  der gesuchte Kurvenpunkt. Solche

Fig. 570.

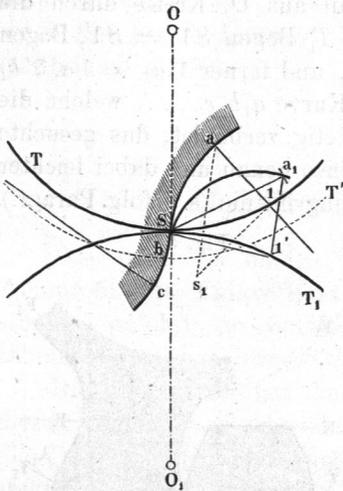
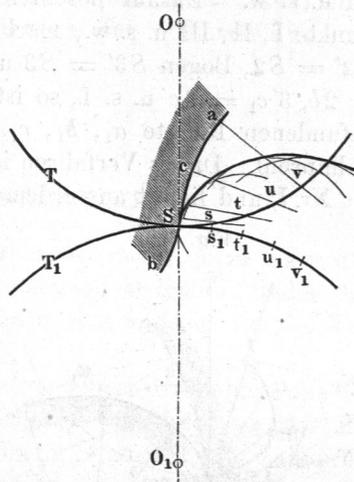


Fig. 571.



Profilpunkte, welche wie  $c$  so gelegen sind, dass ihre Normale den zugehörigen Theilkreis nicht trifft, sind für den gegebenen Theilkreis nicht benutzbar; um sie dazu zu machen, müsste man die Theilkreise  $T$  und  $T_1$  verlegen (hier vergrössern). Die gefundene Kurve kann Spitzen, Schleifen, überhaupt unausführbare Formen erhalten, ohne deshalb geometrisch unrichtig zu werden.

**II. Abgekürztes Verfahren (Poncelet), Fig. 571.** Man suche auf dem Theilkreis  $T_1$  die Punkte  $s_1, t_1, u_1, v_1 \dots$  auf, welche mit den Punkten  $s, t, u, v \dots$  des gegebenen Kreises  $T$  zusammentreffen, beschreibe aus  $s_1, t_1, u_1$  u. s. w. mit den Längen der Normalen zur gegebenen Zahnkurve  $va, uc$  u. s. w. Bögen, und führe berührend an dieselben eine stetige Kurve, so ist diese das gesuchte Zahnprofil. Die Punkte  $s, t, u, v \dots$  sollen in kleinen Abständen gewählt werden. — Trägt man in beiden Verfahrensarten von den Punkten  $s_1, t_1, u_1 \dots$  die Länge der Normalen  $va, uc$  u. s. w. rückwärts statt vorwärts auf, so erhält man die Hohlradverzahnung (innere Verzahnung) für das Rad  $O_1 T_1$ .

**III. Zweites Verfahren des Verfassers.** Fig. 572 (a. f. S.). Zahnprofil  $abcSde$  gegeben und zugehöriger Theilkreis  $T$  gewählt, damit der Theilkreis  $T_1$  gegeben. Man ziehe die Normalen  $a1, b2$



schreibe mit den erhaltenen Zirkelöffnungen aus  $1', 2', 3' \dots$  Kreise, so hüllen diese die Kopfbahn  $a a_1 g \dots$ , das sogenannte theoretische Profil des Zahnfusses, ein, an welches tangierend das wirkliche Profil  $a_1 f_1$  des Zahnfusses so angelegt wird, dass es in den Fusskreis  $F_1$  übergeht. Das genannte theoretische Profil ist eine verlängerte oder verkürzte cyklische Kurve (s. §. 205), hier, wo  $T$  eine gerade Linie ist (Zahnstange), eine verkürzte Evolvente (s. übrigens §. 209).

## §. 204

## Ueber den Zahneingriff.

Das dritte der obigen Verfahren hat neben dem gesuchten Zahnprofil die Eingrifflinie\*) zusammenarbeitender Räder bestimmen gelehrt; an dieselbe knüpfen sich folgende für die Verzahnungstheorie wichtige Sätze.

Die Eingrifflinie hat den Theilkreispunkt des Zahnprofils mit diesem gemein, und schneidet dasselbe rechtwinklig, so dass also die Tangente  $NN$  der Eingrifflinie in  $S$  normal zum Zahnprofil steht. Jedem Eingriffpunkt entspricht eine Zahnberührung, und demnach ein Berührungspunkt auf jedem der Theilkreise, so dem Eingriffpunkte  $II$  der Punkt  $2$  auf  $T$ ,  $2'$  auf  $T_1$ ; es heisse der Theilkreisbogen zwischen dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie und dem einen Eingriffpunkte entsprechenden Berührungspunkte der Theilkreise der Wälzungsbogen zu dem betreffenden Eingriffpunkte. So ist  $S2$  der Wälzungsbogen auf  $T$  zum Punkte  $II$ , Bogen  $S2'$  der auf  $T_1$  zu demselben Eingriffpunkte.

Die Summe der Wälzungsbogen zu den äussersten Eingriffpunkten (Bogen  $1S + S5$  oder Bogen  $1'S + S5'$ ) heisst der Eingriffbogen, seine Länge in Theilungen ausgedrückt die Eingriffdauer des betrachteten Zahneingriffes, welche hiernach leicht graphisch zu bestimmen ist. Dieselbe hängt von der Länge der Eingriffstrecke, d. i. des benutzten Stückes der Eingrifflinie ab. Da nun aber der Zahnfuss wegen des Ansatzes an den Radboden sowohl, als wegen des Durchlassens des Gegenzahnkopfes über den Kopfkreis des Gegenrades hinaus verlängert werden muss, so sind es bei unseren gewöhnlichen Rädern die Kopfkreise  $K$  und  $K_1$ , welche die Eingriffstrecke (V-I) begrenzen.

\*) In Moll und Reuleaux's Konstruktionslehre für den Maschinenbau zum erstenmal behandelt.

Für ein Rad gibt es zu einem gegebenen Zahnprofile bei bekanntem Theilkreis nur eine Eingrifflinie, und zu einer gegebenen Eingrifflinie nur ein richtiges Zahnprofil. Dieses letztere ist nur in dem Falle aus der Eingrifflinie bestimmbar, wenn im voraus die Wälzungsbogen zu den einzelnen Punkten der Eingrifflinie bekannt sind. Ist aber dieser Zusammenhang gegeben, so kann das entsprechende Zahnprofil konstruirt werden. Diese Aufgabe ist es, welche das obige Verfahren, von einem gegebenen Zahnprofil ausgehend, löst.

Bei den cykloidischen Verzahnungen ist der Wälzungsbogen gleich der Eingriffstrecke, und deshalb sind diese Verzahnungen besonders einfach hinsichtlich ihrer geometrischen Eigenschaften.

Bei richtig zusammenarbeitenden Zahnrädern sind die Eingrifflinien kongruent und die Wälzungsbogen zu homologen Eingriffpunkten gleich lang. Unter Einhaltung dieser Bedingung können beliebig viele Räder zu einem gegebenen hinzukonstruirt werden. Solche Räder sind unter der weiteren Bedingung Satzräder (s. §. 200), dass die allen gemeinschaftliche Eingrifflinie so geformt ist, dass sie durch den Theilkreis sowohl, als durch den Radius zu ihrem Theilkreispunkt in zwei kongruente Stücke zerlegt wird.

Bei allen Satzräderverzahnungen sind deshalb bei der Zahnstange die Zahnprofilstücke über und unter dem Theilkreise kongruent.

Der Strahl, welcher von dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie aus nach irgend einem Eingriffpunkte gezogen wird (z. B. SI in Fig. 572), gibt die Richtung und den Angriffpunkt des Zahndruckes für den betreffenden Eingriffpunkt an.

#### §. 205.

### Die cyklischen Kurven.

Zur Erzielung der Satzräderverzahnungen, oder überhaupt solcher Verzahnungen, deren geometrische Eigenschaften man allgemein vorausbestimmen will, eignen sich am besten die Kreisrollungs- oder cyklischen Kurven. Wenn ein Kreis auf einem anderen, mit dem er in derselben Ebene liegt, ohne Gleitung rollt, so beschreibt jeder Punkt in einem seiner Radien eine solche Kurve, welche eine gemeine, verlängerte oder verkürzte Cykloide

heisst, je nachdem der beschreibende Punkt auf dem Umfang des rollenden Kreises liegt, oder durch eine Verlängerung oder durch eine Verkürzung des Halbmessers des rollenden Kreises zu erreichen ist.

Der ruhende Kreis ist der Grundkreis der Kurve, sein Halbmesser werde hier mit  $R$  bezeichnet; der rollende Kreis heisst der Wälzkreis oder Radkreis und habe den Halbmesser  $r$ ; der dem beschreibenden Punkt diametral gegenüberliegende Punkt des Radkreises werde der Gegenpunkt des Kurvenpunktes genannt. Bezeichnet man nun den Halbmesser desjenigen der beiden Kreise, welcher den anderen mit seiner Innenseite berührt, als negativ, den anderen als positiv, so lassen sich zunächst die fünf Arten der cyklischen Kurven, welche sich durch Veränderung von  $R$  und  $r$  ergeben, wie folgt zusammenstellen.

Grundkreis	Radkreis	Entstehende Kurve
$+ R$	$+ r$	Aufradlinie oder Epicykloide
$+ \infty$	$+ r$	Radlinie schlechthin oder Orthocykloide*)
$- R$	$+ r$	Inradlinie oder Hypocykloide
$+ R$	$\pm \infty$	Fadenlinie oder Kreisevolvente
$+ R$	$- r$	Umrادlinie oder Pericykloide

Bei allen fünf Arten gelten sodann die beiden folgenden Sätze:

1. Die Normale zu einem Kurvenelement geht durch den zugehörigen Berührungspunkt der Erzeugungskreise.

2. Der Krümmungsmittelpunkt zu einem Element der Kurve ist der Durchschnitt der Normalen mit der Geraden, welche den Gegenpunkt mit dem Mittelpunkt des Grundkreises verbindet. Bei den verlängerten und verkürzten Kurven liegt der Gegenpunkt auf dem verlängerten Radius zum Kurvenelement und der durch den Berührungspunkt gezogenen Senkrechten zur Normale.

Auf dem ersteren Satze beruht die vorzügliche Anwendbarkeit der cyklischen Kurven zur Verzahnung; auf den zweiten lassen

\*) So schlug der Verfasser statt „Cykloide“ vor, weil dieser letztere Name zur Bezeichnung des ganzen Kurvengeschlechtes dient.

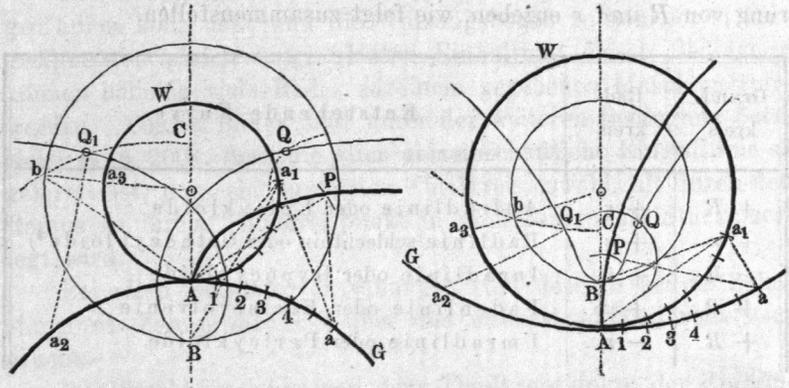
sich vortrefflich die Ersetzungen der cykloidischen Zahnkurven durch Kreisbögen stützen.

§. 206.

### Verzeichnung der cyklischen Kurven.

I. Genaues Verfahren. Fig. 574.  $G$  Grundkreis,  $W$  Radkreis,  $A$  Anfangspunkt der Kurve. Trage von  $A$  aus auf  $G$  und  $W$  nach derselben Seite kleine gleichlange Bogenstücke auf, und es seien nun  $a$  und  $a_1$  zwei zusammengehörige Theilpunkte. Be-

Fig. 574.



schreibe aus  $A$  mit dem Abstand  $a a_1$  einen Bogen, und aus  $a$  mit der Sehne  $A a_1$  ebenfalls einen Bogen, so schneidet letzterer den ersteren in einem Punkte  $P$  der gesuchten Kurve. Dieses Verfahren, welches in Fig. 574 nur für Auf- und Inradlinie angewandt ist, gilt für alle fünf Arten der cyklischen Kurven.

II. Abgekürztes Verfahren. Beschreibe aus den Theilpunkten  $1, 2, 3, a, \dots$  mit den zugehörigen, von  $A$  aus gemessenen Sehnen des Radkreises Kreisbogen, so berühren diese sämmtlich die gesuchte Kurve und können, bei recht kleiner Theilung  $A - 1, 1 - 2 \dots$  zur Verzeichnung derselben dienen.

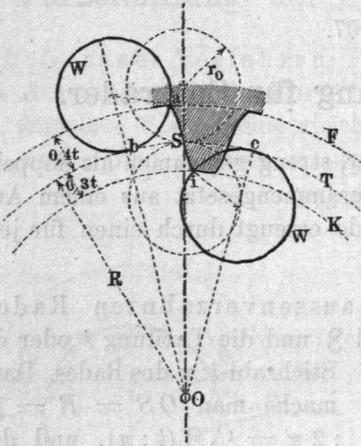
Für die in  $B$  anfangende verlängerte oder verkürzte Kurve bestimme zuerst  $P$  (wobei es nicht nöthig ist, die gemeine Kurve selbst zu verzeichnen), beschreibe dann aus  $a$  mit  $a_1 B$  einen Bogen, und aus  $P$  einen solchen mit  $AB$ , so schneiden die beiden Bogen einander in einem Punkte  $Q$  der gesuchten Kurve.



oder Saumleiste (s. §. 228) gibt. Der Scheitelspielraum wird  $\frac{1}{10}t$ , der Flankenspielraum  $\frac{1}{20}t$ .

II. Verzahnung eines Hohlrades, Fig. 576. Das Hohlrad ist in den Zahnformen, abgesehen von der Rücksicht auf die

Fig. 576.



Spielräume, die genaue Hohlform des gleichgrossen aussenverzahnten Rades. —  $R$  Theilkreishalbmesser,  $K$  Kopfkreis, um  $0,3t$  von  $T$  nach innen abstehend,  $F$  Fusskreis, um  $0,4t$  von  $T$  nach aussen abstehend.  $r_0 = 0,875t = 2,75(t : \pi)$ , Zahndicke =  $\frac{19}{40}t$ .  $Sa$  Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von  $W$  auf  $T$ ,  $Si$  Inradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von  $W$  in  $T$ .

Bei der Zahnstange ist  $R = \infty$ .  $Sa$  und  $Si$  werden dann kongruente Bögen der gemeinen Orthocykloide (Fig. 573).

Die Eingrifflinie fällt bei der vorliegenden Verzahnung mit den Radkreisen zusammen; der Eingriffbogen ist zudem hier gleich der Eingriffstrecke, nämlich = Bogen  $ba$  + dem entsprechenden Bogen  $b_1a_1$  am eingreifenden Rade, wenn beide aussenverzahnt, und + der Bogenstrecke  $ci$  am Hohlrade, wenn ein solches in das Vollrad eingreift. Die Eingriffdauer  $\varepsilon$  schwankt zwischen 1,22 und 1,60.

## §. 208.

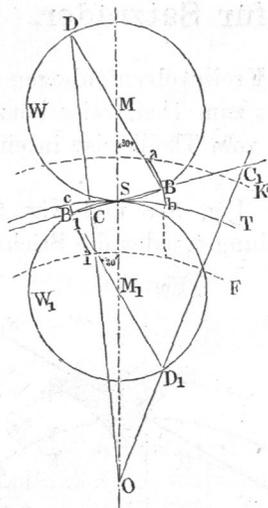
## Radlinien - Kreisverzahnung.

Als Ersatzbögen werden zwei Stücke von Krümmungskreisen passend gelegener Elemente der Radlinienbögen benutzt (vergl. §. 205).

Fig. 577. Verzeichne den Theilkreis  $T$  und die Kopf- und Fusskreise  $K$  und  $F$  in der bekannten Weise, sowie aus den Mittelpunkten  $M$  und  $M_1$  die Radkreise  $W$  und  $W_1$ , die einander und den Theilkreis in  $S$  berühren. Ziehe nun die Durchmesser  $BMD$  und  $B_1M_1D_1$  so, dass  $\angle BMS = \angle B_1M_1S = 30^\circ$ ;

verbinde  $B$  mit  $B_1$  durch die verlängerte Gerade  $C_1 B S B_1$ , und ziehe durch die Gegenpunkte  $D$  und  $D_1$  die Geraden  $OD$  und  $OD_1 C_1$ , so liefern deren Schnitte  $C$  und  $C_1$  mit der Geraden  $B_1 C S C_1$

Fig. 577.



die gesuchten Krümmungsmittelpunkte zu den Ersatzbögen  $aBb$  und  $cB_1i$ . Durch  $C$  und  $C_1$  lege nun aus  $O$  beschriebene Mittelpunktkreise, und rücke die Bögen  $aBb$  und  $cB_1i$  zum Zahnprofil zusammen.

Durch Rechnung findet man die Krümmungshalbmesser  $\varrho$  aus den folgenden Formeln:

$$\frac{\varrho}{t} = 0,45 \frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \text{ und } \frac{\varrho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)}$$

$$= 1,42 \frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \quad \dots \quad (190)$$

Die Pluszeichen liefern die Krümmungshalbmesser  $CB$  für die Aufradlinienbögen ( $\varrho_a$ ), die Minuszeichen die Krümmungshalbmesser  $C_1 B_1$  für die Inradlinienbögen ( $\varrho_i$ ). Am Radboden wird der Zahnfuß in bekannter Weise mit einer Abrundung angesetzt.

1. *Beispiel.* Gegeben  $\mathfrak{z} = 63$ ,  $t = 30$ , so ist der Krümmungshalbmesser  $\varrho_a$  für die Ersatzbögen der Aufradlinien:  $\varrho_a = 30 \cdot 0,45 \cdot (126 + 11) : (63 + 11) = 30 \cdot 0,45 \cdot (137 : 74) = 0,833 \cdot 30 =$  sehr nahe 25 mm, und der Krümmungshalbmesser  $\varrho_i$  für die inneren Bögen:  $\varrho_i = 30 \cdot 0,45 \cdot (126 - 11) : (63 - 11) = 30 \cdot 0,45 \cdot 115 : 52 = 30 \cdot 0,995 =$  sehr nahe 30 mm.

2. *Beispiel.* Gegeben  $\mathfrak{z} = 11$ ,  $t : \pi = 10$ . Hier wird:  $\varrho_a = 10 \cdot 1,42 \cdot 33 : 32 = 42,6 : 2 = 21,3$  mm (nicht etwa Theile des Peripheriemaaßstabes). Sodann hat man  $\varrho_i = 10 \cdot 1,42 \cdot (11 : 0) = \infty$ , d. h. die Fußflanke wird geradlinig und radial.

3. *Beispiel.* Gegeben  $\mathfrak{z} = 7$ ,  $t = 50$ . Hier wird  $\varrho_a = 50 \cdot 0,45 \cdot (14 + 11) : (7 + 11) = 50 \cdot 0,45 \cdot (25 : 18) = 31$ , 2 oder abgerundet 31 mm. Für den inneren Bogen erhält man:  $\varrho_a = 50 \cdot 0,45 \cdot (14 - 11) : (7 - 11) = 50 \cdot 0,45 \cdot \frac{3}{4} = -50 \cdot 0,45 \cdot 0,3375 =$  nahe  $-17$  mm. Die Fußflanke wird also unterkrümmt. Sie wird in der in §. 203, Fig. 573 angegebenen Weise in den Radboden übergeführt.

Bemerkung. Bei den Zähnezahlen unter 15 thut man wohl, statt der Kreisverzahnung die genaue Methode (§. 207) anzuwenden, indem sonst die Vernachlässigungen einen merkbaren Einfluss auf den Gang der ausgeführten Zahnräder üben.

## §. 209.

## Evolventenverzahnung für Satzräder.

Das Zahnprofil wird durch einen Kreisevolventenbogen gebildet, welcher durch Abwicklung eines zum Theilkreise konzentrischen Grundkreises erzeugt wird, der zum Theilkreise in einem festen Verhältniss steht.

Aeusserere und innere Verzahnung, Fig. 578 und Fig. 579. Gegeben die Zähnezah  $\mathfrak{Z}$  und die Theilung  $t$ , oder die Stichzahl

Fig. 578.

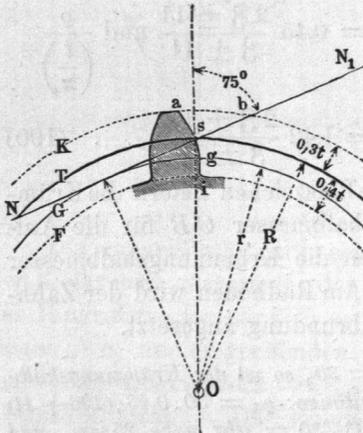
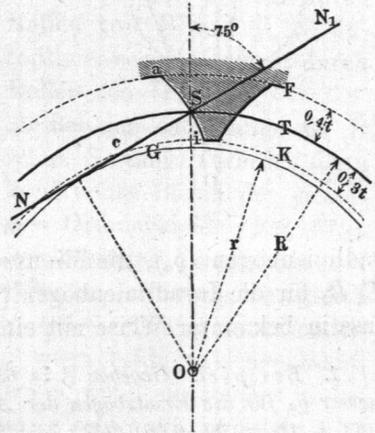


Fig. 579.



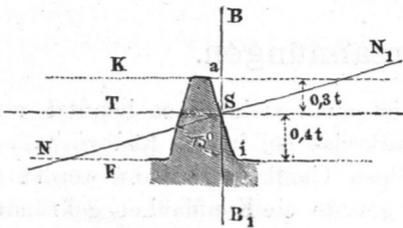
$t : \pi$  des zu verzahnenden Rades. Mache  $OS = R = \mathfrak{Z}t : 2\pi = \frac{1}{2} \mathfrak{Z} (t : \pi)$  und verzeichne die Kopf- und Fusskreise  $K$  und  $F$  in den Abständen  $f = 0,4t$ ,  $k = 0,3t$  vom Theilkreis, sowie die Zahndicke mit  $\frac{19}{40}t$ . Ziehe hierauf die Gerade  $NSN_1$  unter  $75^\circ$  gegen  $OS$  geneigt, so wird dieselbe den Grundkreis  $G$  vom Halbmesser  $r = 0,966 R = 0,154 \mathfrak{Z}t = 0,483 \mathfrak{Z} (t : \pi)$  berühren. Wickle nun die  $NS$  von  $S$  nach  $a$  vom Kreise  $G$  ab, und von  $S$  nach  $g$  auf den Kreis  $G$  auf, so ist die Bahn  $aSg$  des Punktes  $S$  der gesuchte Zahnuriss, welcher bei äusserer Verzahnung für die Zähnezahlen unter 55 durch ein radiales Stück  $gi$  zu verlängern und mit dem Radboden zu verbinden ist.

Eingriffslinie ist die Gerade  $NN_1$ ; die Eingriffstrecke setzt sich aus deren den Zahnköpfen zukommenden Abschnitten  $Sb$  und  $Sb_1$ , beim Hohlrade  $Sc$ , zusammen. Zur Ermittlung der Ein-

griffdauer  $\varepsilon$  hat man nur die Theilung  $t$  durch Radienziehung auf den Grundkreis  $r$  zurückzuführen und mit der so erhaltenen Grundkreistheilung oder Grundtheilung die Eingriffstrecke auszumessen. Bei zwei gleichgrossen Rädern von 14 Zähnen ist  $\varepsilon$  nur wenig  $> 1$ ; es schwankt überhaupt zwischen 1 und 2,5.

Zahnstange, Fig. 580.  $aSi$  gerade, unter  $75^\circ$  gegen den Theilkreis  $T$  geneigte Linie als Zahnprofil. Der Winkel von  $75^\circ$  ist durch Zusammenlegen der gebräuchlichen Winkelbrettchen von  $45^\circ$  und  $30^\circ$  leicht zu erhalten.

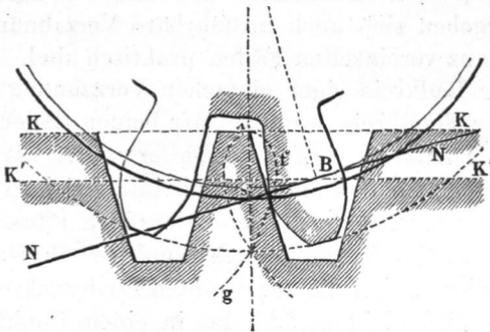
Fig. 580.



Bei den wenigzähligen Rädern liegt der Grundkreis im Zahnprofil nahe dem Theilkreis. Dies führt leicht einen störenden Fehler im Eingriff herbei. Ist nämlich

das Stück  $SB$  der Geraden  $NN_1$ , welches zwischen Theil- und Grundkreis liegt, kleiner als das vom Zahnkopf des eingreifenden Rades, siehe Fig. 581, so schneidet die Profilspitze  $a$  auf ihrer durch die Kurve  $afg$  angedeuteten Kopfbahn (vergl. Fig. 573) in

Fig. 581.



den Zahnfuss des anderen Rades ein. Soll dieser Fehler nicht eintreten, so darf die Zahnkopfbegrenzung, zu welcher der Punkt  $a$  gehört, nicht über die durch  $B$  gehende  $K'K'$  hinausgehen\*).

\*) Der Widerspruch, dass trotz der geometrischen Richtigkeit der Verzahnung doch der Eingriff falsch werden kann, ist nur scheinbar. Denn unter den gemachten Voraussetzungen hinsichtlich der Zahnkopflängen müsste die Zahnfussflanke an dem kleinen Rade statt von einfach bogen-

Bei der vorliegenden Satzräderverzahnung findet dies für Räder, welche in eine Zahnstange eingreifen, nur statt, wenn  $\beta \geq 28$ . Ein anderes Mittel, den falschen Eingriff zu vermeiden, besteht in einer entsprechend starken Abrundung der Zahnkante bei  $a$ ; dieselbe ist in der Praxis mehrfach im Gebrauch. Wegen einer wichtigen Anwendung der Evolventenverzahnung siehe §. 222.

### §. 210.

## Punktverzahnungen.

Die Radlinienverzahnung ist auch vielfach so benutzt worden, dass man die inneren Radkreise bei beiden Rädern halb so gross machte, wie die zugehörigen Theilkreise. Dann werden an beiden Rädern die Fussflanken gerade, die Kopfflanken gekrümmt. Solche Räder sind aber keine Satzräder, und daher für die gewöhnlichen Ausführungen des Maschinenbaues als unpraktisch zu verwerfen. Nur bei den Uhrmachern wird sich diese Verzahnungsmethode wahrscheinlich dauernd halten, weil sie ein bequemes Ausfeilen der Zahnlücken gestattet.

Steigert man den Durchmesser des Radkreises um einen Bruchtheil über den Halbmesser des umgebenden Theilkreises hinaus, so ergeben sich auch ausführbare Verzahnungen, welche aber nur in ganz vereinzelt Fällen praktisch sind.

Wird der Radkreis einer einfachen Verzahnung so gross gemacht, wie der Theilkreis des einen der beiden Räder, so ergeben sich für den Theilkreis, auf welchem er rollt, als Zahnprofile cyclische Kurven, für den anderen, mit ihm gleich grossen Theilkreis aber schrumpft das Zahnprofil in einen Punkt zusammen, weshalb man solche Verzahnungen Punktverzahnungen nennen kann. Unter diese fallen die sogenannten Triebstockverzahnungen. Bei denselben wird nicht sowohl das in einem Punkt zusammengegangene Zahnprofil, als vielmehr eine Aequidistante desselben ausgeführt, nämlich ein um den Punkt beschriebener Kreis.

---

förmiger Gestalt von einer  $\vee$  förmigen sein, nämlich aus zwei auf dem Grundkreis eine Spitze bildenden Evolventenbogen bestehen, von denen der eine in die Lücke fallen, also unausführbar sein würde. Es handelt sich also hier um einen der Fälle, welche in §. 203 bei I. angedeutet wurden: Auch die Ausführung der in obiger Figur gefundenen Fusskurve geht nicht an, da dieselbe ein Stück der richtigen Kurve wegschneidet.

Weiter unten sehen wir indessen den erwähnten Punkt selbst, einer Kante des Zahnes angehörig, in Benutzung gezogen.

Triebstockverzahnung für äusseren Eingriff. Fig. 582. Um den Punkt, in welchen das Zahnprofil am Rade  $R$  übergegangen ist, wird ein Kreis mit  $\frac{19}{80}t$  beschrieben, welcher das Profil des den Punkt umgebenden und vertretenden Triebstockes ist; das Zahnprofil am Rade  $R_1$  ist eine Parallele (oder Aequidistante) zu einer Aufradlinie  $Sa$ , erzeugt durch Wälzen des Kreises  $T$  auf  $T_1$ , Bogen  $Sb = ab$ ; Kreise vom Triebstockhalbmesser aus den Punkten von  $Sa$  beschrieben, hüllen das Zahnprofil  $cd$  ein;  $di$  viertelkreisförmiges Fussprofil. Die Eingriffslinie kann so bestimmt werden, als sie der Punkt  $S$  im Eingriff mit dem Epicykloidenbogen  $Sa$ . Sie fällt unter dieser Voraussetzung mit  $T$  zusammen; die Eingriffstrecke  $SI$  wird durch den Kopfkreis  $K_1'$  in  $I$  begrenzt, und ist gleich dem Eingriffsbogen, muss also  $> t$ , nicht kleiner als etwa  $1,1t$  sein. Hiernach richtet sich die Kopflänge  $k_1'$  und die daraus folgende  $k_1$ . Will man die wirkliche Eingriffslinie bestimmen, welche diejenige der Kurve  $dc$  mit dem Triebstockprofil ist, so verfähre man nach der bei III, §. 203 angegebenen Methode.

Fig. 582.

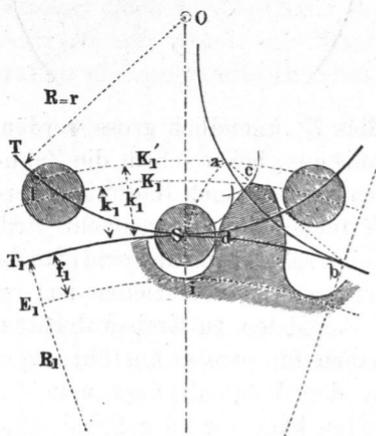


Fig. 583.

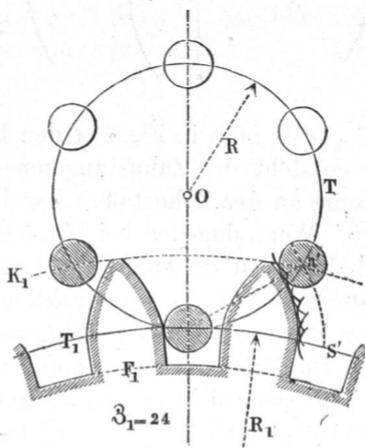


Fig. 583 zeigt ein Triebstockrädchen von sechs Zähnen im Eingriff mit einem 24 zähligen Rade. Die Stöcke im Getriebe oder „Trieb“ haben eine Dicke  $\doteq t/3$ . Die Fussflanken am 24er Rade sind geradlinig gemacht, um das Fräsen der Zähne und das Nachfeilen derselben zu erleichtern.

Triebstockverzahnung für inneren Eingriff. Fig. 584. Ganz ähnliches Verfahren wie vorhin. Das Zahnprofil  $cd$  ist eine Parallele zu der Inradlinie  $Si$ , erzeugt durch Wälzen von  $T$  in  $T_1$ , Bogen  $Sb = ib$ ;  $SI$  Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffbogen, also  $\geq 1,1t$  zu machen. Das Fussprofil  $da$  ist hier wiederum radial gemacht. In Fig. 585 sind die Triebstöcke an dem Hohlrade angebracht, Profil  $cd$  ist parallel zu der Umrادlinie  $Sa$ , erzeugt durch Wälzen von  $T$  um  $T_1$ ; Bogen  $Sb = ab$ ;  $SI$  Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffbogen, wie oben, und  $\geq 1,1t$  zu machen;  $di$  radiales Fussprofil.

Fig. 584.

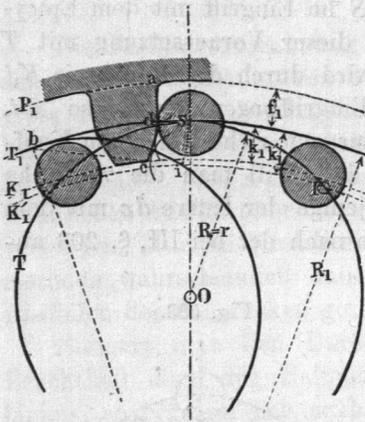
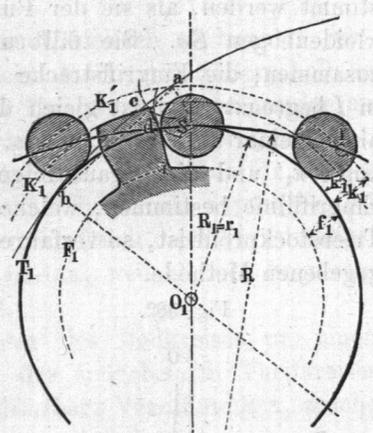


Fig. 585.

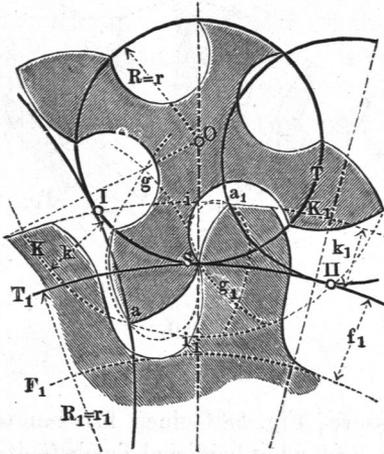


Lässt man in Fig. 584 den Radius  $R_1$  unendlich gross werden, so entsteht der Zahnstangenmechanismus, bei welchem die Zahnprofile an der Zahnstange Parallelen zu gemeinen Radlinien werden. Wenn dagegen bei Fig. 585  $R$  unendlich gross gemacht wird, erhält die entstehende Zahnstange eine sehr bequeme Form (Stockleiter), sodass die Konstruktion der ersteren vorzuziehen ist; an dem Rade werden die Zahnprofile Parallelen zu Kreisevolventen.

Die Triebstockverzahnungen haben für präzise Ausführungen, welche sich nicht oft wiederholen, den Vortheil, dass man die Triebstöcke so leicht genau herstellen kann (auf der Drehbank); die erwähnten leiterförmigen Zahnstangen, aus Schmiedeisen hergestellt, sind zudem sehr praktisch namentlich für Windwerke, welche dem Frost ausgesetzt sind, wie die an Schleusen, Drehbrücken, Drehthürme, an Sternwarten u. s. w. Die Stäbe können dabei aus unabgedrehtem, nur recht sauber gewalztem Rundeisen gemacht werden.

Doppelte Punktverzahnung. Fig. 586. Verbindet man zwei Punktverzahnungen miteinander, so erhält man eine Verzahnung, welche ein sehr tiefes Herabgehen der Zähnezahls des

Fig. 586.



einen Rades, also eine starke Uebersetzung bei kleinen Abmessungen der Räder gestattet. Hier sind beide Theilkreise zugleich Radkreise.  $Sa$  Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von  $T_1$  auf  $T$ , eingreifend auf der Strecke  $SI$  mit dem Punkte  $S$  des Rades  $T$ ;  $Sa_1$  Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von  $T$  auf  $T_1$ , eingreifend auf der Strecke  $SII$  mit dem Theilkreispunkte  $S$  des Rades  $T_1$ .  $Si$  Fussprofil, angelehnt an das theoretische Lückenprofil  $Sa_1g_1$  (siehe IV.

§. 203),  $Si_1$  Fussprofil des anderen Rades, ebenso an das theoretische Lückenprofil  $Sag$  gelehnt. — Unter Voraussetzung der Seitenscheiben ist das kleine Rad gut zu brauchen; Ausführungen ähnlicher Art zeigen die Wagenwinden oder sogenannten Domkräften und verwandte Hebezeuge.

§. 211.

Schildräder mit Punktverzahnung.

Man ist nicht gebunden, die Zahnprofile in unmittelbarer Nähe der Theilkreise anzubringen, sondern kann sie auch mehr oder weniger ausser- oder innerhalb verlegen. Thut man dies, so entstehen Verzahnungen, bei welchen die Zähne des einen Rades die des andern ganz oder fast ganz umlaufen, sodass ein Radboden nicht anzubringen ist. Solche Räder lassen sich konstruktiv so ausführen, dass man die Zähne seitlich von einer, etwa als Ebene gestalteten Wandfläche des Radkörpers vorspringen lässt, vergleichsweise wie die Buckel eines Schildes. Räder von dieser Bauart, welche auch bei den obigen Beispielen an-

wendbar sein würde, kann man Schildräder nennen\*). Punktverzahnung eignet meistens sich sehr gut für dieselben. Fig. 587

Fig. 587.

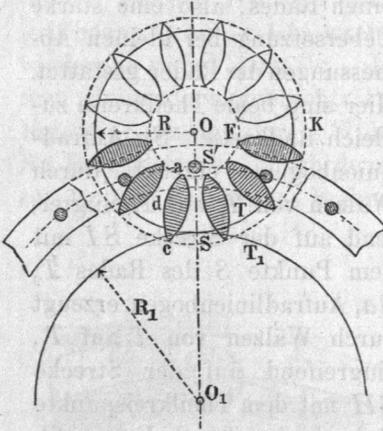
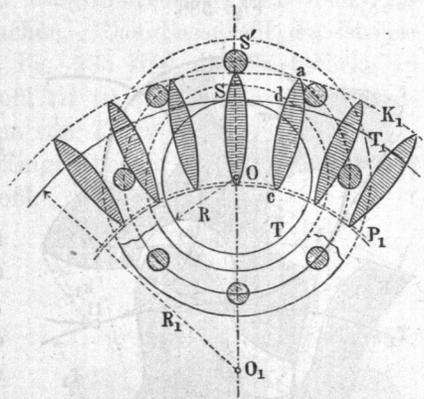
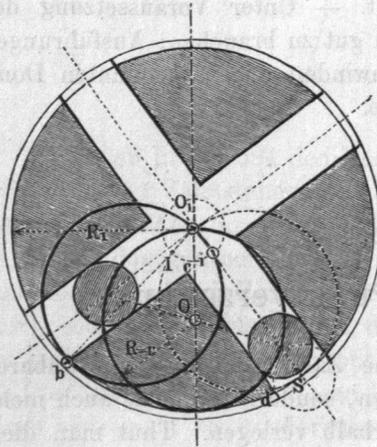


Fig. 588.



zeigt ein Schildräderpaar für äussere, Fig. 588 eines für innere Theilkreisrollung. Eines der beiden Räder hat beidemal Triebstöcke,

Fig. 589.



das andere bekommt als Zahnprofil im ersteren Falle Parallelen zu verlängerten Epicykloiden, im anderen Falle solche zu verlängerten Hypocykloiden. Ein bemerkenswerthes Schildräderpaar ist das in Fig. 589 dargestellte. Innerer Eingriff  $R = \frac{1}{2} R_1$ ,  $\mathfrak{Z} = 2$ ,  $\mathfrak{Z}_1 = 4$ ; an  $R$  die Triebstöcke. Die Flanken an  $R_1$  fallen ganz innerhalb des Theilkreises und werden Geraden, nämlich Parallelen zu der in eine Gerade übergegangenen Inradlinie  $Si\dots$  Eingriffbogen

beinahe  $2t$ , weil die Flanke an  $R_1$  sowohl einwärts als auswärts durchlaufen wird. Der Spielraum ist leicht auf Null zurückzuführen; die Zähne an  $R$  werden meist als Rollen ausgeführt. Das

\*) Die Bezeichnung *Scudi dentati*, verzahnte Schilde, findet sich für schildförmige Triebstockräder in Zonca's Teatro di Machine, Padua 1621.

grössere Rad kann wegen seiner Form ein Kreuzschleifenrad genannt werden.

Lässt man bei innerem Eingriff den Achsenabstand  $OO_1$  bestehen, die Halbmesser aber unbeschränkt wachsen, so gehen sie in unendliche Länge über und die Theilkreise entziehen sich der Verzeichnung. Die Räder erhalten gleiche Winkelgeschwindigkeit bei gleichem Drehungssinn. Sie lassen sich als Schildräder zur Ausführung bringen, wie Fig. 590 zeigt. Beide Räder erhalten Triebstockzähne, von denen die zusammenarbeitenden zur Summe ihrer

Fig. 590.

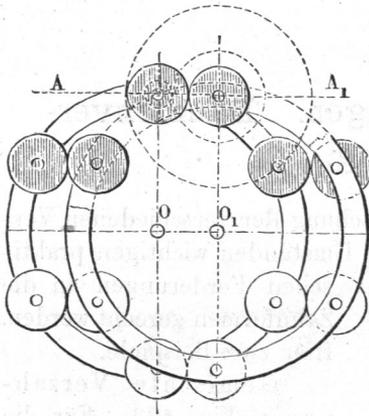
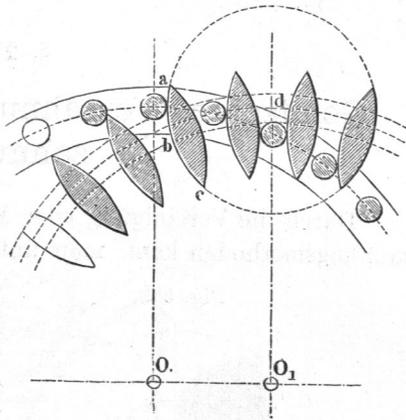
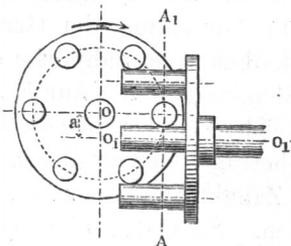


Fig. 591.



Halbmesser den Abstand  $OO_1$  haben. Hier sind die Halbmesser gleich gemacht, jedoch auch zwei Paare ungleicher Triebstöcke durch Punktirung angedeutet. Leicht ist es, die Räder als Rollen und spielfrei auszuführen. Dieselben kann man, da sich parallele Radien beider Räder stets parallel bleiben, Parallelräder nennen\*).

Fig. 592.



Eine zweite Form der Parallelräder zeigt Fig. 591.  $abc$  Kreisbogen, einem der vier Segmente des mit dem Halbmesser  $da$  beschriebenen Triebstockprofils am Rade  $O_1$  angehörig.

Wenn man die beiden Parallelräder aus Fig. 590 gegenseitig um die Achse  $AA_1$  verstellt, welche

\*) Die Räder und der Name für dieselben vom Verfasser vorgeschlagen, Berl. Verhandl. 1875, S. 294.

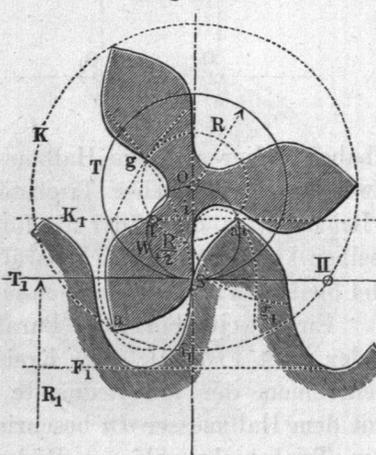
normal durch zwei benachbarte Triebstockachsen und parallel  $OO_1$  geführt wird, so bleibt der Eingriff richtig. In Fig. 592 (a. v. S.) sind zwei so bis zum rechten Winkel verstellte Parallelräder dargestellt. Ihre Achsen sind geschränkt, weshalb sie streng genommen weiter unten erst anzuführen sein würden. Dieses geschränkte Räderwerk ist bekannt\*), indess wenig angewandt; es eignet sich vielleicht recht gut für die Uebertragung der Uhrzeigerbewegung an Grossuhren, wenn die Zähnezahzahl 20 bis 24 gewählt wird.

## §. 212.

### Gemischte Verzahnungen. Daumenverzahnung.

Durch die Vereinigung oder Mischung der verschiedenen Verzahnungsmethoden kann man unter Umständen wichtigen praktischen Forderungen an die Zahnformen gerecht werden. Hier zwei Beispiele.

Fig. 593.



Gemischte Verzahnung, Fig. 593. Für die Anfertigung der vorhin genannten kleinen Trieblinge für Hebezeuge ist es sehr zweckmässig, wenn das Fussprofil nicht gar zu sehr unterschritten erscheint. Für diesen Zweck eignet sich die Anwendung der Geradflanken beim Zahnfusse des kleinen Rades. Zur Erzielung

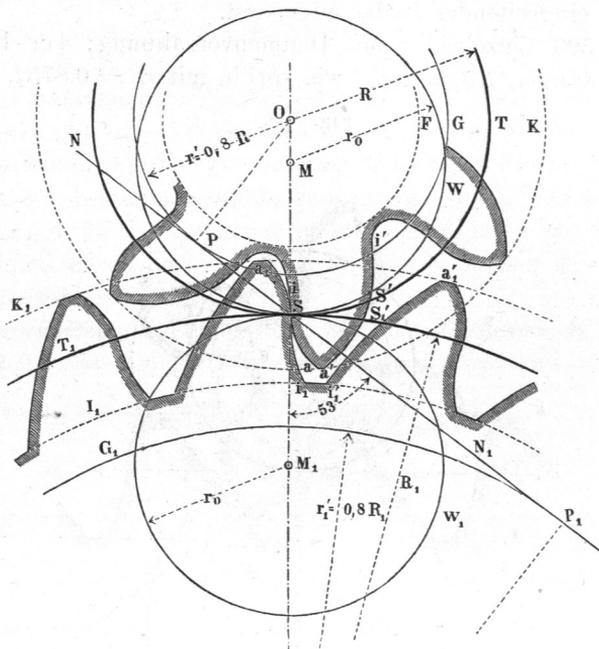
einer genügenden Eingriffdauer (welche hier bei dem Dreierad mit Zahnstange immer noch 1,15 beträgt) müssen dann freilich auch am eingreifenden Rade die Zahnkurven am Zahnkopf bis zu ihrem Durchschnitt geführt werden. Sa Fadenlinienbogen,

\*) Vergl. Tom Richard's Aide-mémoire (1848) I, S. 656, Willis, Principles of mechanisms (1851) S. 145, Laboulaye Cinématique (1854) S. 275.

erzeugt durch Wälzen des (hier geradlinigen) Theilrisses  $T_1$  der Zahnstange auf  $T$ ,  $S_i$  geradlinige radiale Fussflanke, erzeugt durch Wälzen des Kreises  $W$  vom Halbmesser  $\frac{1}{2}R$  in  $T$ ,  $S a_1 g_1$  theoretisches Profil der Lücke des Rades  $T$ .  $S a$  greift mit dem Punkte  $S$  der Zahnstange auf der Strecke  $SII$ .  $S a_1$  Radlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von  $W$  auf  $T_1$  greifend auf der Strecke  $SI$  mit der Fussflanke  $S_i$  des Rades  $T$ .

Daumenverzahnung. Durch Mischung der Radlinien- mit der Evolventenverzahnung, jede auf je einer der beiden Zahnflan-

Fig. 594.



ken angewandt, lässt sich dem Zahne ein für seine Festigkeit sehr günstiges Profil geben. Dasselbe ist für den Betrieb ebenfalls ganz günstig, wenn die Bewegungs-, beziehungsweise Kraftübertragung hauptsächlich in einem und demselben Drehungsinne stattfindet\*). Wegen der Form, welche die Zähne erhalten, kann

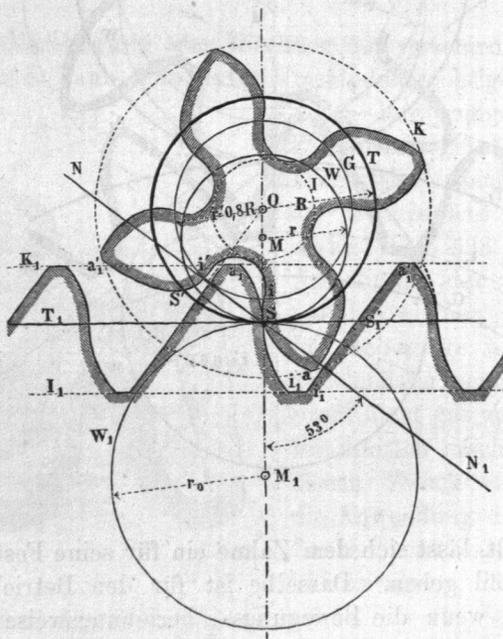
\*) Die vorliegende gemischte Verzahnung in dem hier vorgetragenen Sinne wurde schon 1851 von Willis vorgeschlagen; 1876 hat Gee sie wieder aufgenommen und in die Praxis einzuführen versucht; er wählte  $\alpha$  weit grösser, d. i. ungünstiger, als hier geschehen ist ( $68^\circ$ ).

man die Verzahnung Daumenverzahnung nennen. Die folgenden Verhältnisse sind so günstig gewählt, als es für die gewöhnlichen Fälle erreichbar erschien, und auch wohl ausreichend ist.

Fig. 594 (a. v. S.), Satzräder mit Daumenverzahnung.  $aSi$  und  $a_1S_1i_1$  nach Radlinien gestaltete Profile, die eigentlichen Druckprofile, gemäss den Regeln in §. 207, wobei  $r_0 = 0,875t$  oder  $2,75(t:\pi)$ .  $\alpha'S'i'$  und  $\alpha_1'S_1'i_1'$  Evolventenbogen zu den Grundkreisen  $r' = 0,8R$  und  $r_1' = 0,8R_1$ , wobei der Grundkreiswinkel  $= 53^\circ$  (strenger  $= 53^\circ 8'$ ) wird. Bei den Rädern mit weniger als 15 Zähnen werden, wie hier beim siebenzähligen Rade, die Fussflanken nach der in §. 203 gegebenen Methode den Kopfbahnen grösserer eingreifender Räder angepasst.

Fig. 595 Einzelräder mit Daumenverzahnung; 4er-Rad mit der Zahnstange.  $Sa$  und  $S_1i_1$  wie vorhin mit  $r_0 = 0,875t$ ,  $Si$  und

Fig. 595.



$Sa_1$  aber mit  $r = \frac{3}{4}R$  erzeugt; die Evolventenbogen wie vorhin mit dem Grundkreiswinkel  $53^\circ$  gefunden. An der Zahnstange werden die Rückenflanken wieder gerade Linien, als Evolventen von unendlich grossem Grundkreis; Neigung gegen den Theilriss  $53^\circ$ . Vergl. wegen der Anwendungen der Daumenverzahnung §. 226.

## §. 213.

**Zahnreibung bei den Stirnrädern.**

Die Reibung der Stirnradzähne hängt sehr wesentlich von der Verzahnungslinie ab und lässt sich aus Form, Ausdehnung und Lage der Eingriffkurve beurtheilen. Im Allgemeinen wächst die Reibung mit der Eingriffdauer  $\varepsilon$ . Wegen der Lage der Eingriffslinie führt  $\varepsilon$  einen Koeffizienten bei sich, welcher  $= \frac{1}{2}$  ist, wenn, wie durchschnittlich bei unserer Radlinienverzahnung, die Eingriffsbogen gleichmässig zu beiden Seiten der Centrale vertheilt sind; er ist  $= 1$ , wenn wie bei manchen Verzahnungen, z. B. den Triebstockverzahnungen, die Eingriffslinie ganz auf einer Seite der Centrale liegt; er kann  $= \frac{3}{4}$  gesetzt werden, wenn, wie bei der Evolventenverzahnung, die Vertheilung der Eingriffslinie die Mitte zwischen den beiden genannten Anordnungen hält. Von den Zähnezahlen hängt die Zahnreibung in starkem Maasse ab, indem sie proportional deren harmonischem Mittel ist, mithin mit wachsenden Zähnezahlen rasch abnimmt.

Beim Reibungskoeffizienten  $f$  und den Zähnezahlen  $z$  und  $z_1$  hat man für den Arbeitsverlust  $p_r$  durch die Zahnreibung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) bei der Radlinienverzahnung:} \\ p_r = \pi f \left( \frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{b) bei der Evolventenverzahnung:} \\ p_r = \pi f \left( \frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right)^{3/4} \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \text{c) bei der Triebstockverzahnung*):} \\ p_r = \pi f \left( \frac{1}{z} \pm \frac{1}{z_1} \right) \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (191)$$

Der Koeffizient  $f$  selbst ist auch bei gut eingefetteten Rädern nicht klein, da der Flächendruck in der Regel hoch ist; meistens passend ist  $f = 0,15$ , bei neuen und trocken gehenden Rädern indessen steigt  $f$  auf 0,20 bis 0,25 und höher. Das Minuszeichen in der Formel wird gebraucht, wenn ein Hohlrad ( $z_1$ ) im Paare vorkommt.

\*) Annähernd.

1. *Beispiel.* Bei einem Paare siebenzähliger Räder mit Radlinienverzahnung ist  $\varepsilon = 1,225$ . Bei  $f = 0,15$  hat man nach (191 a) für den Verlust durch Zahnreibung:  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 1,225 : 2 \cdot 7 = 0,08243 \sim 8\frac{1}{4}$  Proz.

2. *Beispiel.* Radlinienverzahnung.  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$ . Hier ist  $\varepsilon = 1,44$ , und kommt:  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 1,44 : 2 \cdot 40 = 0,016995 \sim 1,7$  Proz.

3. *Beispiel.* Radlinienverzahnung.  $\mathfrak{Z} = 7$ ,  $\mathfrak{Z}_1 = -60$  (Hohlrad). Hier ist  $\varepsilon = 1,40$  und demnach  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 0,7 (\frac{1}{7} - \frac{1}{60}) \sim 4,2$  Proz.

4. *Beispiel.* Radlinienverzahnung.  $\mathfrak{Z} = 7$ ,  $\mathfrak{Z}_1 = \infty$  (Zahnstange). Hier ist  $\varepsilon = 1,37$ , und somit  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 1,37 : 2 (\frac{1}{7} + 0) \sim 4,6$  Proz.

5. *Beispiel.* Triebstockverzahnung  $\mathfrak{Z} = 6$ ,  $\mathfrak{Z}_1 = 40$ . Hier sei, wie in Fig. 583 durch die Konstruktion bewirkt,  $\varepsilon = 1\frac{1}{6}$ . Es folgt nach (189 c):  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 1\frac{1}{6} : (\frac{5}{24}) \sim 2,6$  Proz.

6. *Beispiel.* Evolventenverzahnung.  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$ . Hier ist  $\varepsilon = 1,92$ . Dies gibt nach (180 c):  $p_r = 3,14 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 1,92 : 40 = 0,0339 \sim 3,4$  Proz., d. i. zweimal soviel als im 2. Beispiel.

Man sieht also, dass von den behandelten die Radlinienverzahnung die kleinste Reibung hat, die Evolventenverzahnung in der Mitte, die Triebstockverzahnung am ungünstigsten steht.

Die Abnützung der Zähne hängt ausser vom Reibungskoeffizienten vom Drucke der Zahnflanken aufeinander und von dem Verhältniss der übereinander hingleitenden Profiltheile ab. Sie ist deshalb bei konstantem Zahndrucke nicht ohne weiteres konstant, und es ist ein grosser Irrthum, wenn man, wie häufig geschieht, annimmt, dass bei der Evolventenverzahnung die Abnützung die Zahnform nicht ändere. Im Gegentheil findet gerade bei dieser Verzahnung verhältnissmässig die stärkste Formänderung durch die Abnützung statt, indem hier das geriebene Flankenstück innerhalb des Theilkreises gegen das darauf reibende des anderen Zahnkopfes besonders klein ist. Man kann die Richtigkeit des Gesagten in der Praxis vielfach beobachten, wo das kleinere Rad in einem mit Evolventenverzahnung versehenen Paare oft tiefe Kerben dicht unter dem Theilkreis zeigt. Die Radlinienverzahnung ist auch in diesem Punkte die günstigere.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man die oben berechneten Reibungsverluste auch geometrisch auffinden kann, und zwar wie folgt. Man bilde die Differenzen der zusammenarbeitenden Profiltheile, dividire dieselben durch die zugehörigen Sehnen der Eingrifflinienbogen, multiplizire sie mit dem Verhältniss des zugehörigen Eingriffbogens zur ganzen Eingriffstrecke, und multiplizire die Summe der erhaltenen Quotienten mit dem Reibungskoeffizienten. Das Resultat ist der Verlust  $p_r$ . Die genannte Sehne ist bei der Evolventenverzahnung die Eingriff-

strecke selbst. Die Regel liefert  $p_r$  auch für die Punktverzahnungen; sie gibt dem Zeichner das Mittel an die Hand, beim Auftragen der Verzahnung deren Reibungsverlust gleichsam mit dem Zirkel abzustechen.

## §. 214.

## Vor- und Nachteile der behandelten Verzahnungsmethoden.

Jede von den beiden Satzräderverzahnungen hat ihre Vorzüge und ihre Nachteile.

**Radlinienverzahnung.** Sie gewährt den grossen Vortheil, dass man bei ihr für gleichgrosse Räder mit der Zähnezahlszahl bis auf 7 herabgehen kann, während bei der Evolventenverzahnung die kleinsten gleichgrossen Räder 14 Zähne haben müssen, man auch die Zähnezahlszahl bei der Evolventenverzahnung nicht unter 11 nehmen darf. Der Reibungsverlust ist bei dieser Verzahnung verhältnissmässig sehr klein, die Abnützung wenig nachtheilig für die Zahnform. Als ein kleiner Nachtheil ist zu betrachten, dass die Zahnprofile eine S-förmige Krümmung haben, was die Anfertigung erschwert; auch können zusammenarbeitende Räder nicht viel auseinandergerückt werden, ohne den genügend richtigen Eingriff einzubüssen.

**Evolventenverzahnung.** Vortheile sind: vor allem die einfache Form der Zähne und sodann die Eigenschaft, dass man die Räder auseinanderdrücken darf, ohne die Richtigkeit des Eingriffes zu beeinträchtigen. Diesen Vorzügen stellt sich aber der oben besprochene Nachtheil entgegen, vermöge dessen bei kleinen Zähnezahlen der Zahnkopf nach Beendigung des richtigen Eingriffstückes eine solche Bahn gegen den ihn angreifenden Zahn oder genauer gegen dessen radialen Fuss beschreibt, dass er ihm eine unrichtige Geschwindigkeit ertheilt. Der Uebelstand wird ausser durch die oben angegebenen Mittel bei fertigen Rädern gehoben, wenn man die betreffenden Räder auseinanderdrückt, und zwar so weit, dass bei beiden Rädern die Zähne wenigstens gleichzeitig aus der Eingriffslinie treten. Somit trägt die Verzahnung das Heilmittel für ihren Fehler zwar in sich selbst; allein für starke Kraftübertragung sind doch, namentlich wo Stösse häufig

sind, so gesperrt gehende Räder nicht geeignet, beziehlich die kleinen Zähnezahlen zu vermeiden.

So wird also für die Satzräder die Evolventenverzahnung nur bei grösseren Zähnezahlen (wo etwa das kleinere Rad im Paare nicht unter 30 Zähne hat) zu empfehlen sein, wo ihre guten Eigenschaften sich dann gut verwerthen lassen, während für Räder mit kleinen, unter Umständen möglichst kleinen Getrieben die Radlinienverzahnung den entschiedenem Vorzug verdient. Da diese ausserdem auch für grosse Zähnezahlen vortrefflich ist und in Bezug auf Reibung und Abnützung sehr günstig steht, so empfiehlt es sich, bei neuen Fabrikanlagen nur sie allein für die Satzräder, insbesondere die Stirnräder, in Anwendung zu bringen. Für manche Einzelräder und sodann für die Kegelräder, welche in der Regel nicht Satzräder sind, eignet sich indessen der einfachen Form wegen die Evolventenverzahnung auch sehr gut. Vergl. auch §. 222.

Die Punktverzahnungen und die gemischten leisten für besondere Fälle, namentlich bei Hebzeugen und anderen Windwerken, wo unter Umständen als Zahnmaterial Schmiedeseisen und Stahl gebraucht wird, ausgezeichnete Dienste. Die Daumenverzahnung kann auch in Triebwerken recht nützlich werden, da sie geringere Zahndicken anzuwenden erlaubt, als die anderen.

Die Schildräder haben eine beschränkte Verwendung; doch erweisen sie sich in mancherlei Mechanismen sehr nützlich, wovon noch weiter unten die Rede sein wird (Kapitel XVIII).

## B. Verzahnung der Kegelräder.

### §. 215.

#### Allgemeines über die Kegelradzähne.

Bei den Kegel- oder Winkelrädern liegen die berührenden Verhältnisskreise zusammenarbeitender Räder in den Grundkegeln, deren Spitzen im Schnittpunkt der geometrischen Achsen der Räder zusammentreffen. Unter den Theilkreisen verstehen wir die an den Grundflächen der Grundkegel liegenden berührenden Verhältnisskreise  $SD$  und  $SE$ , Fig. 596. Die Zahnlänge wird auf dem Ergänzungskegel des Grundkegels gemessen;  $SB$  ist die Kante des Ergänzungskegels zu  $SD$ ,  $SC$  diejenige zu  $SE$ , wobei



Theilung und Verzahnungsart doch meist Einzelräder. In der Praxis findet man übrigens Abweichungen bis zu 5 Proz. in der Länge der Berührungslinie noch als statthaft betrachtet. Man nennt solche mit einem kleinen Fehler behaftete zu einem vorhandenen Kegelräderpaar für denselben Achsenwinkel hinzu konstruirte Räder Bastardräder. Bei einem vorhandenen rechtwinkligen Kegelräderpaar von 80 auf 45 Zähne gestattet also z. B. die Praxis noch, Bastardräder bis zu 80 ( $1 \pm 0,05$ ), d. i. bis zu 84 und 76 Zähnen, mit dem 45 zähligen rechtwinklig arbeiten zu lassen.

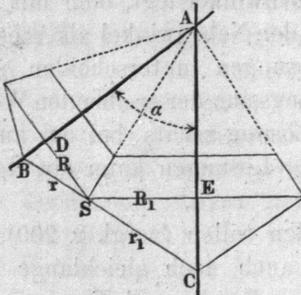
## §. 216.

**Hülfräder der Kegelräder.**

Diejenigen geometrischen Gebilde, welche bei den in Rede stehenden aufeinander rollenden Kegeln in einerlei Fläche bleiben, sind die durch die Grundflächen gelegten, aus der gemeinsamen Kegelspitze beschriebenen Kugelflächen. Sie beschreiben gegeneinander sphärische Cykloiden. Fünf besondere Formen, wie bei den ebenen Cykloiden, kommen auch hier vor; immer fallen die unendlich entfernten Punkte weg, da die Gerade durch den Plankegel, den Kegel von  $180^\circ$  Spitzenwinkel vertreten wird. Die allgemeinen Formen der sphärischen Cykloiden sind denen der ebenen ähnlich, bis auf die der Evolvente analoge Kurve, erzeugt durch Rollung eines Plankegels auf einem gewöhnlichen Kegel; hier reihen sich die Kurvenäste zickzackförmig aneinander\*).

Wollte man die sphärischen Cykloiden als Zahnprofile wirklich zur Ausführung bringen, so würde man in nicht geringe Schwierigkeiten gerathen. Man erhält indessen, wie Tredgold zuerst gezeigt hat, brauchbare Zahnformen für die Kegelräder, wenn man ihre als Stirnräder verzahnten Hülfräder auf die durch die Ergänzungskegel gegebenen Endflächen der Zähne aufwickelt. Hülfräder zweier Kegelräder  $R$  und  $R_1$  (Fig. 597) heissen die Stirnräder von derselben Theilung,

Fig. 597.



\*) Siehe Berliner Verhandl. 1876, S. 321, 449, Reuleaux, Modelle zur Veranschaulichung der sphärischen Cykloiden.

welche zu Halbmessern  $r$  und  $r_1$  die Erzeugenden  $BS$  und  $CS$  ihrer Ergänzungskegel haben.

Bei gegebenem Achsenwinkel  $\alpha$  bestimmen sich der Halbmesser  $r$  und die Zähnezah  $\mathfrak{z}$  eines Hülfrades aus den bekannten Halbmessern und Zähnezahlen  $R, R_1, \mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{Z}_1$  der Kegelräder mittelst der Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{\sqrt{R^2 + R_1^2 + 2 R R_1 \cos \alpha}}{R_1 + R \cos \alpha} \\ \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} &= \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2 + 2 \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_1 \cos \alpha}}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z} \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \cdot (192)$$

Ist der Achsenwinkel ein Rechter, so wird:

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + R_1^2}}{R_1}, \quad \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2}}{\mathfrak{Z}_1}, \quad \frac{r}{r_1} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2$$

*Beispiel.* Ein Kegelräderpaar habe die Zähnezahlen 30 und 50 und einen Achsenwinkel  $\alpha = 60^\circ$ , so ist  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ , und es findet sich für das Hülfrad zu dem 30zähligen Rade:  $\mathfrak{z} = 30 \cdot \frac{\sqrt{30^2 + 50^2 + 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot 0,5}}{50 + 30 \cdot 0,5} = 6 \cdot \sqrt{4900} : 13 = 32,3$ , wofür man 32 nehmen könnte. Für das 50zählige Rad erhält man ferner:  $\mathfrak{z}_1 = 50 \cdot \frac{\sqrt{4900}}{30 + 50 \cdot 0,5} = 50 \cdot 70 : 55 = \text{nahe } 64$ . Mit diesen Zähnezahlen und der gegebenen Theilung sind die Hülfräder zu verzahnen.

Kleine Zähnezahlen sind für Kegelräder nicht günstig, da bei solchen die Fehler, welche die Methode der Hülfräder enthält, merklich auftreten. Macht man aber nur von Zähnezahlen über 24 Gebrauch, so erhalten die Hülfräder nicht unter 28 Zähnen, und man kann sich dann der Evolventenverzahnung bedienen. Diese ist hier wegen der leichten Abformbarkeit der Zähne vortheilhaft, sodass sie trotz ihren kleinen Mängeln an diesem Platze den Vorzug verdient. Auch wegen der Ausführungsfehler in der Verzahnung, welche hier leicht weit grösser ausfallen als bei den Stirnrädern, empfiehlt es sich, grosse Zähnezahlen anzuwenden.

Die Zahnreibungsverluste der Kegelräder sind sehr annähernd gleich denen ihrer Hülfräder.

## §. 217.

### Das Planrad.

Die innenverzahnten oder Hohlkegelräder sind nicht praktisch, da ihre Modellirung und Herstellung weit schwieriger ist,



Je eines der Räder  $R_2$  und  $R_3$  kann strenggenommen mit dem Planrade  $R_1$  nur dann benutzt werden, wenn die Zähnezahlen die genügend angenäherte Verwirklichung des Verhältnisses  $\sin \gamma_2$  gestatten. Obgleich hiernach in seiner Anwendung beschränkt, ist doch das Planrad manchmal benutzbar, indem es schiefwinklige Uebertragungen sehr leicht ausführbar macht\*).

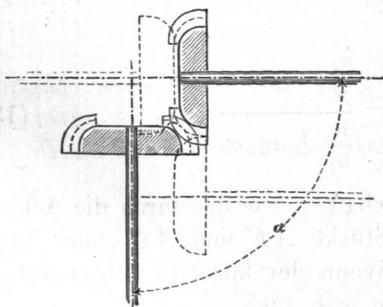
## C. Die Hyperbelräder.

### §. 218.

### Grundkörper der Hyperbelräder.

Die hyperboloidischen oder kurz Hyperbelräder dienen bei geschränkten Achsen, und erhalten Zahnberührung längs einer Linie, weshalb sie zu den Krafrädern gerechnet werden (vergl. S. 558). Ihre Grundkörper sind Drehungshyperboloide, welche einander in einer gemeinschaftlichen Erzeugenden berühren. Die Bestimmung derselben kann wie folgt geschehen. Fig. 600 (a. f. S.) ist eine Projektion normal zur kürzesten Achsenentfernung oder dem Achsenloth. Man theile den Schräkungswinkel  $\alpha$  so in zwei Stücke  $\beta$  und  $\beta_1$ , dass die aus irgend einem Punkte  $A$  der Theilungslinie  $SA$  auf die Achsen gefällten Lothe  $AB$  und  $AC$  sich

\*) Die von Prof. Beylich 1866 angegebenen „Universalräder“ sollen konische Räder in Fällen ersetzen, wo der Achsenwinkel häufig zu ändern

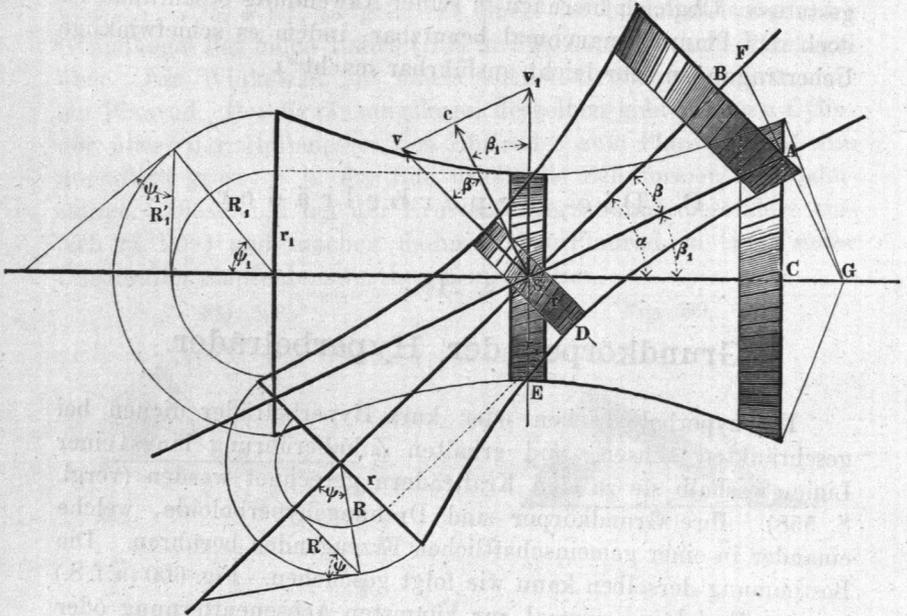


ist. Sie können dazu dienen, Achsen zu verbinden, die einen beliebigen Winkel, von 0 bis  $180^\circ$  einschliessen und innerhalb dieser Grenzen gegeneinander verstellt werden sollen. Die Räder, in beistehender Figur skizzirt, sind verzahnte Ausschnitte von Globoiden III. Kl. (vergl. §. 224), die den Meridianen nach mit Lückenfurchen und Zähnen versehen sind. Anwendungen scheinen selten;

Modell in dem kin. Kabinet der königl. techn. Hochschule. Vergl. übrigens Schluss von §. 211.

verkehrt verhalten, wie die Umdrehungszahlen der Räder.  $SA$  ist dann die Berührungskante der Hyperboloide;  $AB = R'$  und  $AC$

Fig. 600.



$= R'_1$  sind Projektionen der Halbmesser zweier in  $A$  zusammen-treffenden Normalschnitte der Hyperboloide. Man hat

$$\frac{R'}{R'_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{3_1} \dots \dots \dots (194)$$

Die wirklichen Halbmesser  $R$  und  $R_1$  sind noch zu bestimmen, ebenso die Halbmesser  $SD = r$  und  $SE = r_1$  der Kehlkreise. Für letztere hat man zunächst:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{tg \beta}{tg \beta_1} = \frac{\frac{n_1}{n} + \cos \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha} \dots \dots \dots (195)$$

d. h.  $r$  und  $r_1$  müssen sich verhalten, wie die durch die Achsen-projektionen abgeschnittenen Stücke  $AF$  und  $AG$  einer Senk-rechten zur Berührungslinie. Wenn der kürzeste Achsenabstand oder das Achsenloth  $= a$ , so hat man auch:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 + \frac{n}{n_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{n}{n_1} \cos \alpha + \left(\frac{n}{n_1}\right)^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{1 + \frac{n_1}{n} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{n_1}{n} \cos \alpha + \left(\frac{n_1}{n}\right)^2} \quad (196)$$

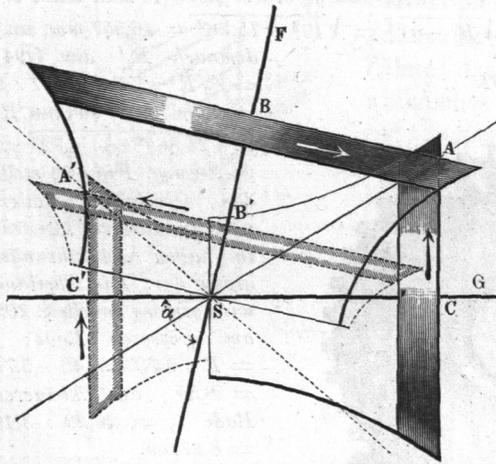
Die Halbmesser  $R$  und  $R_1$  sind Hypotenusen zu den Katheten  $R'$  und  $r$ ,  $R_1'$  und  $r_1$  (siehe linke Seite der Figur) oder:

$$R = \sqrt{R'^2 + r^2}, \quad R_1 = \sqrt{R_1'^2 + r_1^2} \dots (197)$$

$R'$  und  $R_1'$  sind nach dem obigen bekannt, sobald der Abstand  $SA = l$  gewählt ist. Für die Winkel  $\beta$  und  $\beta_1$  hat man endlich noch allgemein:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\sin \alpha}{\frac{n_1}{n} + \cos \alpha} \dots (198)$$

Es sind jedesmal, ähnlich wie bei den Kegelrädern, zwei Lösungen möglich, je nachdem man die Eintheilungslinie  $SA$  innerhalb  $\alpha$  oder ausserhalb desselben (in den Nebenwinkel) legt, s. Fig. 601.



Die Lösungen unterscheiden sich durch den Drehungssinn des getriebenen Rades. Auch kann eine der Lösungen ein Hohlrad liefern, eine Konstruktion, welche wie es scheint, noch nie ausgeführt worden ist,

übrigens auch kaum einen wesentlichen praktischen Werth haben mag.

Wenn der Schrängungswinkel  $\alpha = 90^\circ$  ist, so wird:

$$\frac{r}{r_1} = \operatorname{tg}^2 \beta = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \dots (199)$$

und

$$\frac{r}{a} = \frac{n_1^2}{n^2 + n_1^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{n^2}{n^2 + n_1^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{n_1}{n} \dots (200)$$

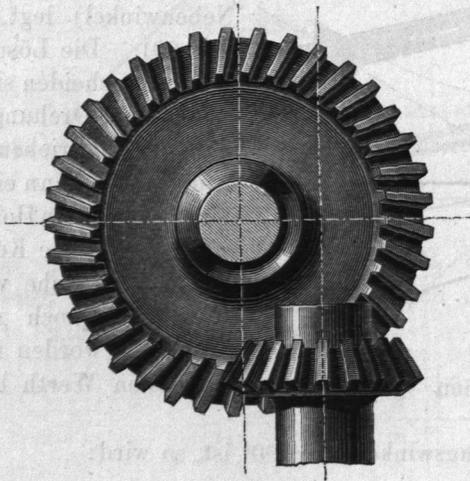
Von den Grundhyperboloiden werden zusammengehörige Zonen als Grundformen der Räder ausgewählt. Bei kleinem Achsen-

abstand sind die in den Kehlen liegenden Zonen meist nicht zu brauchen, wohl aber weiter abgelegene Abschnitte, die alsdann oft durch Kegelstumpfe genähert werden können.

1. *Beispiel.*  $\alpha = 40^\circ$ ,  $n_1 : n = 1 : 2$  (vergl. *Beispiel 1* in §. 221)  $a = 100$  mm. Man hat  $R' : R_1' = 1 : 2$ ;  $r : r_1 = (0,5 + \cos 40) : (2 + \cos 40) = 1,266 : 2,766 = 0,4577$ .  $a : r = (1 + 2 \cdot \cos 40) : (1 + 2 \cdot 2 \cdot \cos 40 + 4) = 2,532 : 8,064 = 0,31398$ ,  $r = 31,398$  mm,  $r_1 = 100 - 31,398 = 68,602$  mm. Ferner  $\operatorname{tg} \beta = \sin 40 : (2 + \cos 40) = 0,6428 : 2,766 = 0,232393 = \operatorname{tg} 13^\circ 5'$  und  $\beta_1 = 40 - \beta = 26^\circ 55'$ . Im Abstände  $SA = l = 200$  mm ist  $R' = l \sin 13^\circ 5' = 200 \cdot 0,226368 = 45,27$  mm,  $R_1' = 200 \cdot \sin 26^\circ 55' = 200 \cdot 0,452634 = 90,04$  mm; endlich  $R = \sqrt{45,27^2 + 31,40^2} = 55,10$  mm und  $R_1 = \sqrt{90,54^2 + 68,60^2} = 113,59$  mm.

2. *Beispiel.*  $\alpha = 90^\circ$ ,  $n_1 : n = 5 : 9$ , wofür die Zähnezahlen  $Z = 36$  und  $Z_1 = 20$  passen;  $a$  sei  $= 20$  mm (Bedingungen, wie sie bei Rädern an Spindelbänken vorkommen). Man erhält nach (197)  $r : r_1 = (9 : 5)^2 = 81 : 25 = 3,24$ , und aus (200):  $r = a \cdot 9^2 : (5^2 + 9^2) = 20 \cdot 81 : 106 = 15,28$  mm,  $r_1 = 4,72$  mm. Für  $\beta$  kommt:  $\operatorname{tg} \beta = n_1 : n = 1,800$ , d. i.  $\operatorname{tg} 60^\circ 57'$ , wonach  $\beta_1 = 29^\circ 3'$ . Es sei nun gefordert  $R = 49$  mm, dann erhält man aus (197):  $R' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{49^2 - 15,28^2} = 46,557$  mm, und demnach  $R_1'$  aus (194)

Fig. 602.



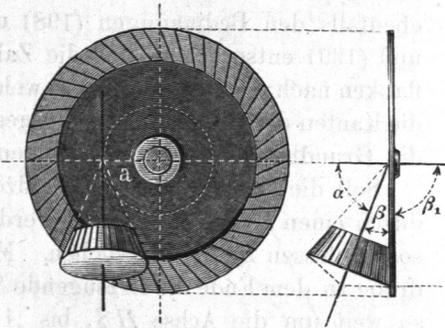
$= \frac{5}{9} R' = 5 \cdot 46,577 : 9 = 25,865$  mm; sodann  $R_1 = \sqrt{25,865^2 + 4,72^2} = 26,292$  mm. Fig. 602 stellt das berechnete Räderpaar in äusserer Ansicht in halber Ausführungsgrösse dar. Die Theilung wird gemäss Tabelle §. 202 am grösseren Rade:  $t = R : 5,73 = 49 : 5,73 = 8,55$ , am kleineren Rade  $t_1 = 26,29 : 3,18 = 8,27$  mm.

3. *Beispiel.*  $\alpha = 90^\circ$ ,  $n_1 : n = 1$  liefert;  $\beta = 45^\circ$ ,  $r = r_1$ ,  $R = R_1$ : die Hyperboloide werden kongruent (vergl. *Beispiel 4*, §. 221).

4. *Beispiel.* In dem besonderen Falle, wo numerisch  $n_1 : n = \cos \alpha$  und man die Eintheilungslinie, welche  $\beta$  bestimmt, in den Nebenwinkel von  $\alpha$  legt, sodass bei Beachtung des Vorzeichens  $n_1 : n = -\cos \alpha$ , geht der eine Grundkörper in einen Normalkegel, der andere in ein Planhyperboloid, Fig. 603 (a. f. S.), über. Dieses hyperboloidische Planrad entspricht dem bei den Kegelrädern vorkommenden Planrad, siehe §. 217, und bietet die

Bequemlichkeit, mit einem gewöhnlichen Kegelrade zusammen zu arbeiten; viel praktischen Vortheil gewährt es übrigens nicht, da das Planrad ein Hinderniss für das Durchführen der Welle des Kegelrades darbietet.

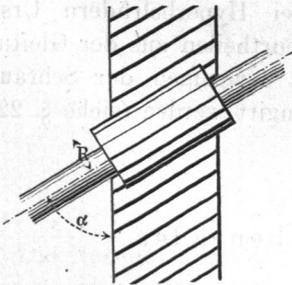
Fig. 603.



Bei  $\alpha = 60^\circ$ ,  $n_1 : n = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ$  erhält man das Planrad. Es wird  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \beta_1 = \infty$ ,  $\beta_1 = 90^\circ$ .  $R' : R_1' = \sin 30 : \sin 90 = 0,5$ ;  $r = 0$ ,  $r_1 = a$ ,  $R = R'$ ,  $R_1 = \sqrt{R_1'^2 + a^2} = \sqrt{4R^2 + a^2}$ . — Wäre  $n_1 : n$  negativ und  $< \cos \alpha$ , so erhielte man ein hyperboloidisches Hohlrad.

Der Grenzfall der Zahnstange mit Getriebe ist bei den Hyperbelrädern auch möglich. Die Zahnstange erhält dabei schiefe Zähne; das Getriebe wird ein gewöhnliches cylindrisches Stirnrad, indem, um Gleichung (195) zu erfüllen, wegen  $r_1 = \infty$  der Winkel  $\beta = 0$ ,  $\beta_1$  also  $= \alpha$  zu setzen ist. Siehe Fig. 604. Zu Anwendungen bietet sich in Werkzeugmaschinen Gelegenheit.

Fig. 604.

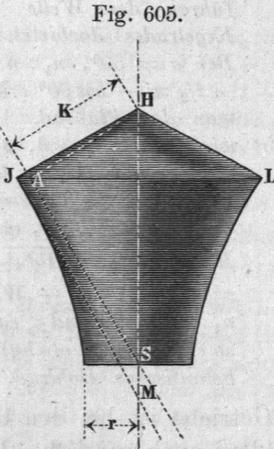


§. 219.

Verzahnung der Hyperbelräder.

Die Verzeichnung einer ganz genauen Zahnform würde bei den Hyperbelrädern sehr grosse Schwierigkeiten bereiten. Man begnügt sich deshalb, wie bei den Kegelrädern, mit Annäherungen. Um unter dieser Voraussetzung die Verzahnung aufzutragen, verzeichnet man zuerst die Ergänzungskegel der benutzten Hyperboloide und benutzt diese, wie bei den Kegelrädern, indem man Hülfräder von dem Halbmesser = der Kegelkante auf sie aufgewickelt denkt. Man findet die Spitze  $H$  desselben, Fig. 605 (a. f. S.), durch Errichtung einer senkrechten  $AH$  auf der Erzeugenden  $SA$ ,

welche wie oben der Bildebene parallel gelegt ist. Genaue Zahnformen werden erhalten, wenn man mit den Grundhyperboloiden an derselben Berührungskante zwei Hülfshyperboloide hinzukonstruirt, die ebenfalls den Bedingungen (198) und (199) entsprechen, und die Zahnflanken nach den Flächen formt, welche die Kanten der Hülfshyperboloide gegen die Grundhyperboloide beschreiben.\*)



Soll die benutzte Hyperboloidzone durch einen Kegel angenähert werden, so ist dessen Spitze zu suchen. Man drehe zu dem Ende die Erzeugende  $SA$  so weit um die Achse  $HS$ , bis  $A$  in den Randpunkt  $J$  fällt, dann geht die neue Projektion der Erzeugenden durch die Kegelspitze  $M$ .

Die Zahnflankengleitung ist bei Hyperbelrädern Ursache grosser Reibung. Letztere ist zu beurtheilen aus der Gleitungsgeschwindigkeit  $c'$ , welche gleich ist derjenigen der Schraubenträder, welche durch die Kehlräder tangirt werden (siehe §. 222).

## D. Die Schraubenträder.

### §. 220.

## Cylindrische Schraubenträder.

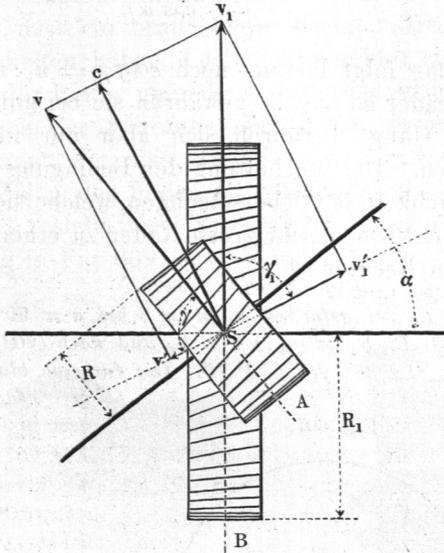
Die cylindrischen Schraubenträder können wie die Hyperbelräder zur Bewegungsübertragung zwischen geschränkten Achsen benutzt werden und gewähren unter Umständen manche Vortheile vor ihnen. Sie haben mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften. Die Räder  $A$  und  $B$ , Fig. 606 (a. f. S.) sind hier beide Links-schrauben mit zur Verzahnung geeigneten Profilen. Sie haben solche Steigungswinkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$ , dass an der Eingriffsstelle die Schraubenlinien der Theilcylinder eine gemeinschaftliche Tangente haben, sodass beim Schräkungswinkel  $\alpha$  der Achsen:  $\gamma + \gamma_1 + \alpha$

\*) Vergl. Herrmann-Weisbach, Mechanik (II. Aufl.) III. 1, S. 418 ff.

= 180°. Zerlegt man die Umfangsgeschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  in der Richtung jener Tangente und normal zu derselben, so erhält man:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_1}, \text{ woraus } \frac{n_1}{n} = \frac{R \sin \gamma}{R_1 \sin \gamma_1} = \frac{3}{3_1} \quad \dots (201)$$

Fig. 606.



Die Normaltheilungen  $\tau = t \sin \gamma$  und  $\tau_1 = t_1 \sin \gamma_1$  müssen einander gleich sein, woraus  $t:t_1 = \sin \gamma_1:\sin \gamma$ .

Vermöge der Geschwindigkeitskomponenten  $v'$  und  $v_1'$  gleiten die Zahnflanken aneinander entlang, und zwar mit der Geschwindigkeit

$$c' = v' + v_1' = c(\cotg \gamma + \cotg \gamma_1) \quad \dots (202)$$

Die Gleitung bewirkt Kraftverlust und Abnutzung; sie wird am kleinsten, wenn  $v'$  und  $v_1'$  gleichgross ausfallen, d. i. wenn  $\gamma = \gamma_1$ .

Hinsichtlich der Wahl von  $\gamma$  und  $\gamma_1$  kann die Forderung gestellt werden, dass die zusammenfallenden Tangenten der beiden Schraubenlinien auch kurz vor und kurz nach dem völligen Zusammentreffen möglichst nahe zusammenbleiben sollen. Das ist aber dieselbe Bedingung, welche hinsichtlich der Berührungskanten der Hyperbelräder zu stellen war (§. 218), woraus dann auch die dort in anderer Form angegebene Beziehung folgt:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\cotg \gamma}{\cotg \gamma_1} = \frac{\frac{n_1}{n} + \cos \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha} \dots \dots \dots (203)$$

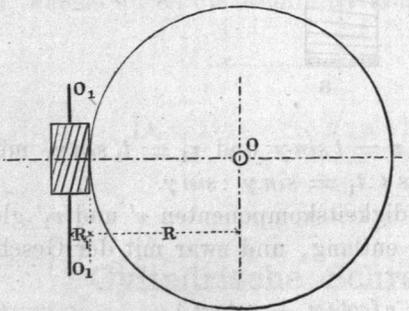
ebenso

$$\cotg \gamma = \frac{\sin \alpha}{\frac{n}{n_1} + \cos \alpha} \dots \dots \dots (204)$$

Für  $\alpha = 90^\circ$  folgt hieraus noch  $\cotg \gamma = n_1 : n$ . Führt man die Schraubenräder so aus, so gewähren sie bei guter Verzahnung einen sanften Gang, berühren sich aber nur in sehr kleinen Flächentheilchen. Die Innehaltung der Bedingung hat dazu noch die Unbequemlichkeit, bei Uebersetzungen, welche sich nur einigermaassen von 1 entfernen, sehr grosse Räder zu erheischen, namentlich, wenn  $\alpha$  ein Rechter ist.

*Beispiel.* Es sei gefordert  $n_1 : n = 3$  bei  $\alpha = 90^\circ$ . Dann ist zu nehmen nach (203)  $R : R_1 = (n_1 : n)^2 = 9$ , und nach (204)  $\cotg \gamma = n_1 : n = 3$ , wonach  $\gamma = 18^\circ 26'$ ,  $\gamma_1 = 71^\circ 34'$ . Die für eine blosse Uebersetzung

Fig. 607.



ins 3fache recht unquemen Verhältnisse zeigt Fig. 607. Die Gleitungsgeschwindigkeit beträgt ausserdem  $c' = c(3 + 0,333\dots) = 3\frac{1}{3}c$ . Die Kleinheit des Winkels  $\gamma$  gestattet schwer oder kaum, das kleine Rad zum treibenden zu machen. Noch stärker werden alle diese störenden Umstände bei noch bedeutenderen Uebersetzungen.  $(n_1 : n) = 5$  und  $\cdot 0$  ergeben z. B.  $R : R_1$

$= 25$  und  $100$ , und  $\gamma \sim 11\frac{1}{6}$  und  $5\frac{2}{3}^\circ$ . Nicht unerwähnt darf auch die Schwierigkeit bleiben, die das Schneiden der Räder auf der Drehbank für die genau ermittelten Steigungswinkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$  hinsichtlich der Wechselräder bereitet.

§. 221.

**Angenäherte cylindrische Schraubenräder.**

Hält man von den obigen beiden Bedingungen, Formel (201) und (203), bloss die erstere fest, so kann man den erwähnten

Schwierigkeiten ausweichen und doch brauchbare Räder erhalten. Dieselben sind dann aber, wenn der Gang genau sein soll, entweder a) beide mit kleinen Abweichungen von der Schraubenform auszuführen, oder b) das eine Rad ist als strenge Schraube herzustellen, dem anderen die Abweichungen zu geben, oder c) man überlässt es der Abnutzung, allmählich die anfänglich vorhandene, die strenge Form nur annähernde Schraubengestalt so zu verändern, dass ein brauchbarer Gang eintritt. Auf Grund dieser Möglichkeiten haben die Schraubenräder eine weitgehende Benutzung in der Praxis gefunden. Eine der wichtigsten Anwendungen ist die in der Schraube ohne Ende, auch Schneckenrad, Wurmrad genannt, Fig. 608. Hier ist  $\alpha = 90^\circ$  und  $\mathfrak{Z} = 1$  angenommen, die Zähne des Rades  $R_1$  werden um  $\gamma$  gegen die Cylinderkante schief gestellt, wobei  $\operatorname{tg} \gamma = t : 2\pi R = 0,15916 (t : R)$ . Bei der Anordnung in Fig. 609 ist  $\alpha = 90 - \gamma$  gemacht, worauf die

Fig. 608.

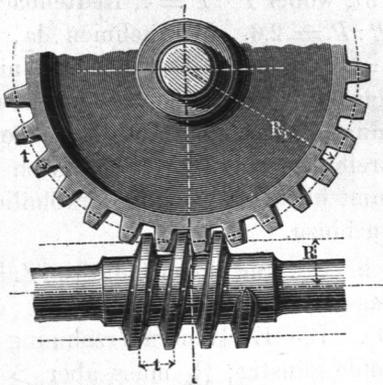
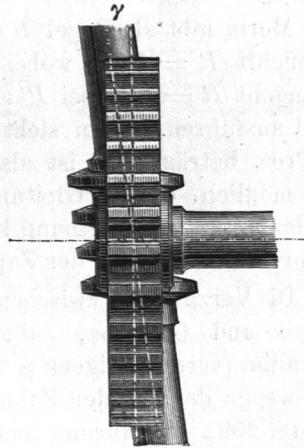


Fig. 609.



Zähne an  $R_1$  wieder parallel der Achse werden. Die Steigung der Schraube ist hier bei der Theilung  $t_1$  des Rades  $= t_1 : \cos \gamma$ . Das Uebersetzungsverhältniss ist, wie dem Grundgesetz (186) entspricht,  $n_1 : n = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}_1$ , insbesondere also  $= 1 : \mathfrak{Z}_1^*$ .

In sehr vielen Fällen verfährt man hier so, dass man die Schraube streng ausführt und der Abnutzung die Richtigstellung überlässt; bei sorgfältigerer Herstellung findet das Verfahren (b)

\*)  $\mathfrak{Z}_1$  ist in unserer Figur  $= 30$ , somit würde Gleichung (203) für genaue Schraubenform  $R_1 = 900 R$  erfordern;  $\gamma$  käme  $= 88,1^\circ$ .

Anwendung, indem man mit der Wurmfräse das Rad ausarbeitet, womit ihm eine an der Schraubenform beträchtlich abweichende Verzahnung gegeben wird. Leider ist die Wurmfräse kaum gut anders zu verwenden, als wenn  $\gamma$  klein ist.

Die Reibung der Schraube an den Radzähnen ist sehr gross, indem die Gänge an den Zahnflanken entlang gleiten müssen. Man hat beim Reibungskoeffizienten  $f$  für das Verhältniss zwischen der wirklich aufzuwendenden Kraft  $P'$  zu der an demselben Hebelarm der Schraube angreifenden Kraft  $P$ , welche bei reibungsfreiem Gange aufzuwenden wäre, annähernd:  $P':P = (1 + f \cdot 2\pi R : t) : (1 - ft : 2\pi R)$ .

Bei  $f = 0,16$  erhält man hieraus nach kleiner Abrundung:

$$\frac{P'}{P} = 1 + \frac{R}{t} \dots \dots \dots (205)$$

Daraus folgt, dass man zur Verhütung grosser Kraftverluste  $R:t$  möglichst klein zu machen hat.

Morin gibt als Regel  $R = 3t$ , wobei  $P':P = 4$ , Redtenbacher empfiehlt  $R = 1,6t$ , wobei  $P':P = 2,6$ . Wir nehmen da, wo es angeht  $R = t$ , wobei  $P':P = 2$ . Kleiner lässt sich  $R:t$  nicht wohl ausführen. Man sieht, dass selbst dann der Nutzeffekt nur 50 Proz. beträgt. Es ist also nur Uebersetzung von Schraube zu Rad möglich, da die Gleitungsreibung dem Rücktrieb gleich ist. Zu der gefundenen Reibung kommt übrigens noch die gewöhnliche Zahnreibung und die der Zapfen hinzu.

Die Verzahnung zwischen Schnecke und Rad ist die von Zahnstange und Getriebe, aufgetragen in einem Längsschnitt der Schraube (vergl. übrigens §. 224). Die Evolventenverzahnung ist hier wegen der geraden Zahnprofile günstig;  $\mathfrak{z}_1$  muss aber  $> 28$  sein (§. 209). Berührung findet geometrisch nur in einem Punkte, physisch in einer kleinen Abplattungsfläche statt; will man eine weitergehende Berührung erzielen, so ist das Rad mit einer Wurmfräse zu schneiden. Zahnräder, bei welchen die Zahnberührung geometrisch in nur einem Punkte stattfindet, nennt man häufig Präzisionsräder gegenüber den Krafräder genannten, deren Zähne einander geometrisch in einer Linie berühren. Der Unterschied, der in diesen Bezeichnungen ausgedrückt ist, wird übrigens nicht scharf inne gehalten, wie das vorstehende Beispiel zeigt, indem man die Schraube ohne Ende sowohl für kleine als für grosse Kräfte gebraucht.

Wegen der statthaften Veränderlichkeit der Steigungswinkel

herrscht eine grosse Mannigfaltigkeit in den Schraubenräderwerken, wie folgende Beispiele zeigen.

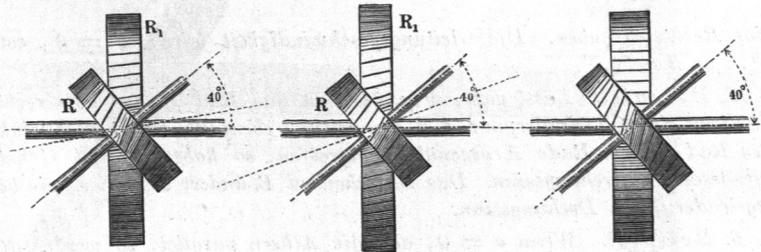
1. *Beispiel.* Gegeben  $n_1 : n = 1/2$  und das Achsenloth  $a = R + R_1$  nebst dem Achsenwinkel  $\alpha = 40^\circ$ . Wählt man  $\gamma = 60^\circ$ , so hat man nach (§. 220)  $\gamma_1 = 180 - 40 - 60 = 80^\circ$ , siehe Fig. 610, und findet nun nach (201):  $R : R_1 = \sin \gamma_1 n_1 : \sin \gamma n = (\sin 80 : \sin 60) 1/2 = 0,5 \cdot 0,9848 : 0,8660 = 0,5686$ , worauf nun  $R$  und  $R_1$  selbst bestimmbar sind. Ist z. B.  $a = 100$  mm gefordert, so kommt:  $R_1 = a : [1 + (R : R_1)] = 100 : 1,5686 = 63,751$  mm,  $R = 36,249$  mm, und bei  $\mathfrak{z} = 20$ ,  $\mathfrak{z}_1 = 40$  die Normaltheilung  $\tau = t \sin \gamma = 2 \pi R \sin \gamma : \mathfrak{z} = 2 \cdot \pi \cdot 36,249 \cdot 0,866 : 20 = 0,272 \cdot 36,249 = 9,862$  mm. Ferner ist die Radtheilung  $t = \tau : \sin \gamma = 9,862 : 0,866 = 11,388$  mm,  $t_1 = 9,862 : 0,9848 = 10,014$  mm. Die Gleitgeschwindigkeit  $c'$  wird nach (202)  $= c (\cotg 60 + \cotg 80) = c (0,5774 + 0,1763) = 0,7537 c$ .

2. *Beispiel.* Um  $c'$  auf sein Minimum zu bringen, machen wir  $\gamma = \gamma_1 = (180 - \alpha) : 2 = (180 - 40) : 2 = 70^\circ$ , siehe Fig. 611. Dann

Fig. 610.

Fig. 611.

Fig. 612.



kommt:  $R : R_1 = 1/2$ ,  $R_1 = 66,667$  mm,  $R = 33,333$  mm,  $\tau = 2 \cdot \pi \cdot 33,333 \cdot 0,9397 : 20 = 9,840$  mm,  $t = t_1 = 9,840 : 0,9397 = 10,472$  mm, und  $c' = 2 \cdot \cotg 70 \cdot c = 2 \cdot 0,3640 \cdot c = 0,728 c$ . Man sieht, dass schon der vorige Werth dem Minimum nahe war.

3. *Beispiel.* Suchen wir eine andere Erleichterung für die Ausföhrung, indem wir  $\gamma = 90^\circ$ , das eine Rad also zu einem gewöhnlichen Stirnrad machen, siehe Fig. 612, so haben wir  $\gamma_1 = 180 - 40 - 90 = 50^\circ$ , und erhalten:  $R : R_1 = 0,5 \cdot 0,7660 = 0,383$ ;  $R_1 = 72,307$  mm,  $R = 27,693$  mm,  $\tau = 11,842$  mm,  $t = \tau$ ,  $t_1 = 15,459$  mm, endlich  $c' = 0,8391 c$ .

Ist statt  $a$  die Normaltheilung  $\tau$  gegeben, was bei Benutzung vorhandener Räderfräsen gewöhnlich ist, so wählt man  $\gamma$  und  $\gamma_1$  und hat dann  $R \sin \gamma = \mathfrak{z} \tau : 2 \pi$ , woraus:

$$R = \frac{\mathfrak{z} \tau}{2 \pi \sin \gamma}, \quad R_1 = \frac{\mathfrak{z}_1 \tau}{2 \pi \sin \gamma_1} \dots \dots (206)$$

Es können auch  $R$  und  $\tau$  gegeben sein; dann ist  $\gamma$  nicht mehr willkürlich; man hat nämlich:

$$\sin \gamma = \frac{3\tau}{2\pi R} \cdot \dots \dots \dots (207)$$

Andere charakteristische Beispiele sind die folgenden.

4. *Beispiel.*  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 3_1$ . Die Gleitung soll ein Minimum werden, weshalb wir  $\gamma = \gamma_1 = (180 - 90) : 2 = 45^\circ$  machen. Die beiden Räder werden kongruent, beide Linksschrauben, oder, wie in Fig. 613,

Fig. 613.

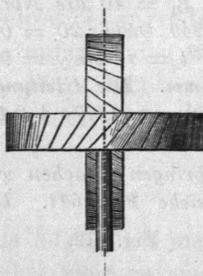


Fig. 614.

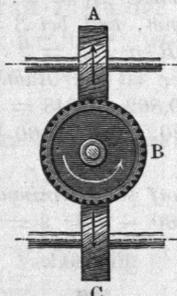
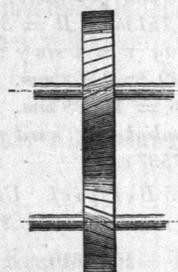


Fig. 615.



beide Rechtsschrauben. Die Gleitungsgeschwindigkeit wird:  $c' = 2 \cdot \cot \gamma$   
 $45^\circ. c = 2c$ .

5. *Beispiel.* Lässt man, Fig. 614, in das Rad B aus dem rechtwinkligen Schraubenräderpaar AB ein drittes, ebenfalls zu B rechtwinkliges Rad C dem Rade A gegenüber eingreifen, so haben A und C entgegengesetzten Drehungssinn. Das Zwischenrad B ändert also hier, wie bei Kegehrädern, den Drehungssinn.

6. *Beispiel.* Wenn  $\alpha = 0$ , also die Achsen parallel, so werden die Schraubenräder Stirnräder mit schraubenförmigen Zähnen, Hooke'sche, auch White'sche Räder genannt, Fig. 615.  $\gamma$  und  $\gamma_1$  ergänzen einander zu  $180^\circ$ ; es ist also immer das eine Rad im Paare eine Linksschraube, das andere eine Rechtsschraube. Hier sind die Schraubenformen wieder streng richtig. Die Gleitungsgeschwindigkeit  $c'$  wird = Null. Wegen Benutzung dieser Räder vergl. §. 222. — Wenn bei  $\alpha = 0$  auch  $\gamma = 0$  wird, so gehen die Schraubenräder in Keilräder über.

Wendet man sich zu anderen Grenzfällen der Schraubenräder, so erhält man noch bemerkenswerthe Formen.

7. *Beispiel.*  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\gamma = 10^\circ$ ,  $\gamma_1$  also  $= 80^\circ$ ,  $R_1 = \infty$ , Zahnstange mit Schraube, siehe Fig. 616. Macht man  $\gamma_1 = 90^\circ$ , die Zahnstange also normal,  $\gamma = 10^\circ$ , so wird  $\alpha = 80^\circ$ , die Zahnstangenverzahnung ein Ausschnitt aus einer Schraubenmutter. Sellers legt bei seinen Hobelmaschinen die Zähne der Zahnstange um soviel schief, Fig. 617 (a. f. S.), dass der dabei entstehende Seitendruck die nach der andern Seite wirkende Kraft, welche aus der gleitenden Reibung zwischen den Zahnflanken hervorgeht, gerade aufhebt.

8. *Beispiel.*  $R = R_1 = \infty$ , zwei Zahnstangen, welche einander verschieben. Fig. 618 (a. f. S.). Man hat, wie bisher,  $v_1 : v = \sin \gamma : \sin \gamma_1$ .

Ist  $\alpha = 90^\circ$ , wie in Fig. 619, und (wegen Kleinhaltung der Gleitung)  $\gamma = \gamma_1 = 45^\circ$ , so ist  $v = v_1$ . Dieser Mechanismus ist vielfach bei den Ziehbanken  
Fig. 616.



Fig. 617.

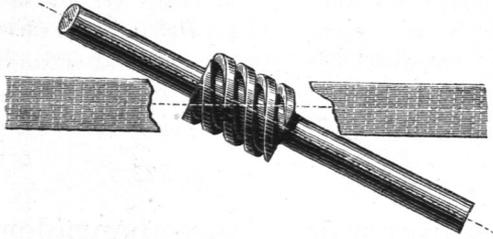


Fig. 618.

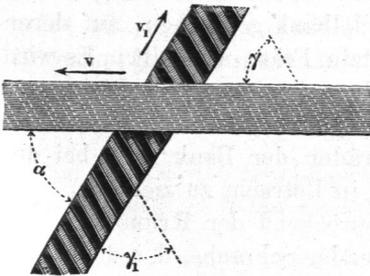
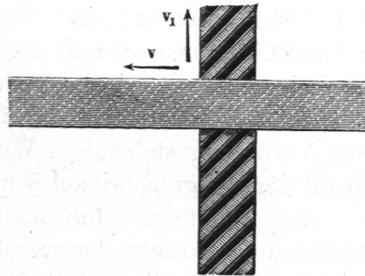


Fig. 619.



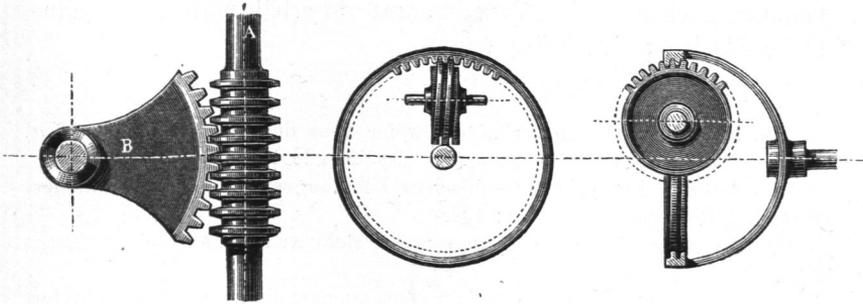
für Kanonen- und Gewehrläufe, auch bei einzelnen Schraubenschneidmaschinen angewandt.

9. Beispiel.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\gamma_1 = 90^\circ$ , also  $\gamma = 0$ , beide Halbmesser von endlicher Grösse, siehe Fig. 620, sogenannte Rotationszahnstange, an Re-

Fig. 620.

Fig. 621.

Fig. 622.



gulatoren und dergleichen angewandt. Die Uebersetzung von A auf B ist = Null.

10. *Beispiel.* Die Schraube ohne Ende ist, wie schon angedeutet, ein besonderer Fall der Schraubenräder. Sie kommt, wenn auch selten, in noch zwei besonderen Formen vor, welche die Schraubenräder überhaupt durchgängig anzunehmen vermögen, nämlich unter Verwendung eines Hohlrades im Paare\*). In Fig. 621 (a. v. S.) erscheint das gerad- oder schiefzahnige Stirnrad als Hohlrad\*\*); bei der in Fig. 622 dargestellten Einrichtung ist die Schraube als Hohlrad, das Stirnrad mit äusserer Verzahnung ausgeführt\*\*\*).

## §. 222.

## Verzahnung der Schraubenräder und Reibung derselben.

Die Schraubenräder werden meistens mit der Fräse geschnitten. Dies kann auf einer Leitspindelbank geschehen, auf deren Stichelträger man die schräg gesetzte Fräse aufstellt. Es wird ähnlich verfahren wie beim Schraubenschneiden. Die Steigung  $s$  der einzuschneidenden Schraubenfurche ist:  $s = 2\pi Rtg\gamma$ . Die zur Verfügung stehenden Wechselläder der Bank sind bei der Wahl der Steigungswinkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$  in Betracht zu ziehen†).

Die Zahnform wähle man entsprechend der Krümmung der Ergänzungsschraube der zu schneidenden Schraube, d. i. der rechtwinklig auf derselben stehenden. Die zu benutzenden Krümmungshalbmesser  $r$  und  $r_1$  sind:

$$r = \frac{R}{\sin^2 \gamma}, \quad r_1 = \frac{R_1}{\sin^2 \gamma_1} \dots \dots \dots (208)$$

Diese werden als Halbmesser von Hülfrädern mit der Theilung  $\tau$  benutzt; nach gewählter Verzahnungsform erhält man in der Zahnücke das Profil der Fräse.

\*) Hohlräder werden erhalten, wenn man den Eingriffpunkt auf  $a$  ausserhalb der Achsen, statt zwischen dieselben legt.

\*\*) An der Prager astronomischen Uhr angewandt, siehe Verh. des Vereins f. Gewerbfleiss 1868, S. 192.

\*\*\*)) An Stehelin's Bohrwerk angewandt, siehe Armengaud, Publ. industr. Bd. I, Taf. 40.

†) Vortreffliche Dienste bei der Zusammenstellung der Wechselläder leisten die Brocot'schen Tafeln. (Calcul des rouages par approximation, Paris 1862), auf des Verfassers Veranlassung mit Zusätzen deutsch herausgegeben von dem Verein Hütte.

1. *Beispiel.* Für die Räder aus dem 1. Beispiel des vorigen §. hat man:  $r = 36,249 : \sin^2 60 = \frac{4}{3} 36,249 = 48,332 \text{ mm}$ ,  $r_1 = 63,751 : \sin^2 80 = 63,751 : 0,9848^2 = 65,734 \text{ mm}$ .

Wie sich  $r$  aus Formel (208) arithmographisch auffinden lässt, ist aus §. 29 abzuleiten.

Die Reibungswiderstände der Schraubenräder sind manchmal sehr bedeutend. Wären dieselben = Null, so hätte man für die Umfangskraft  $P$  am treibenden Rade bei der widerstehenden Umfangskraft  $Q$  am getriebenen Rade:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_1} \dots \dots \dots (209)$$

Die gewöhnliche Zahnreibung ist die der Hülfräder und lässt sich nach den Angaben in §. 213 berechnen, viel grösser ist aber, so lange  $\alpha$  nicht Null, meist die aus der Flankengleitung hervorgehende Reibung. Eine Vorstellung von der Grösse der letzteren gibt die oben ermittelte Gleitungsgeschwindigkeit  $c'$ . Zur Berechnung des entstehenden Effektverlustes dient die Formel:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\sin \gamma_1 \sin(\gamma + \varphi)}{\sin \gamma \sin(\gamma_1 - \varphi)} \dots \dots \dots (210)$$

wobei noch  $\varphi$  den Reibungswinkel für den Koeffizienten  $f$  bezeichnet, also  $\text{tg } \varphi = f$ . Bei  $f = 0,16$  ist  $\varphi \sim 9^\circ$ .

2. *Beispiel.* Für die obigen Räder ist hiernach  $P' : P = \sin 80 \cdot \sin 69 : \sin 60 \cdot \sin 71 = 0,9848 \cdot 0,9336 : 0,8660 \cdot 0,9455 = 1,12$ . (Hierzu gesellt sich die gewöhnliche Zahnreibung mit einigen Prozenten.)

Einen dritten Effektverlust rufen noch die in den Achsenrichtungen wirkenden Seitenkräfte  $K$  und  $K_1$  hervor. Man hat für dieselben:

$$\frac{K}{P'} = \text{cotg}(\gamma + \varphi), \quad \frac{K_1}{Q} = \text{cotg}(\gamma_1 - \varphi) \dots \dots (211)$$

3. *Beispiel.* Für obiges Räderpaar wird  $K = P' \text{cotg } 69 = 0,3839 P'$ ,  $K_1 = Q \text{cotg } 71 = 0,3443 Q$ , aus welchen Werthen bei bekannten Abmessungen der Zapfen sich der betreffende Kraftverlust bestimmen lässt.

Wenn  $\alpha = \text{Null}$ , d. h. die Achsen parallel, so wird die Flankengleitung Null, die Kraft  $P'$  aus (210) =  $P$ ; d. h. die Schraubenräder für parallele Achsen arbeiten ohne Flankengleitung; indessen bleibt die gewöhnliche Zahnreibung, wenn auch in etwas vermindertem Maasse, bestehen, ebenso die Kräfte  $K$  und  $K_1$ . Die Zahnreibung lässt sich indessen bis auf einen verschwindend kleinen Rest wegschaffen, und zwar dadurch, dass man das Zahn-

profil an dem einen Rade auf einen Punkt einschränkt, nämlich seine Zahnflanke als scharfe Kante ausführt. Diese berührt dann die andere, als Fläche ausgeführte Zahnflanke geometrisch nur in einem Punkt des Theilcyllinders. Diese von Hooke angegebene Verzahnung kann nur für Präzisionsräder dienen, leistet aber für diese gute Dienste\*)

Statt der scharfen Kante kann auch eine gewölbte Fläche angewandt werden, welche die Linie auf ihrem Scheitel enthält, wie schon Hooke angedeutet und Willis ausgeführt hat. Verzeichnet man zuerst die Zahnkurven für beide Räder wie üblich, als ob sie stetig greifen sollten, und bleibt dann bei beiden Rädern, oder auch nur bei einem derselben mit der Zahnkurve innerhalb des gezeichneten Profils, den Theilkreispunkt ausgenommen, s. Fig. 623, so berühren die so profilirten schraubenförmig gewundenen Zähne einander nur im Theilkreiscylinder und arbeiten beinahe reibungsfrei. Die Kopflänge  $k$  und die Fusslänge  $f$  können kleiner als üblich genommen werden. Immer ist jedoch dann vorauszusetzen,

Fig. 623.

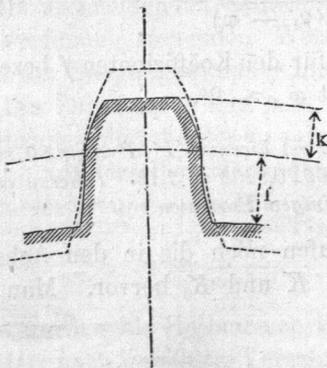
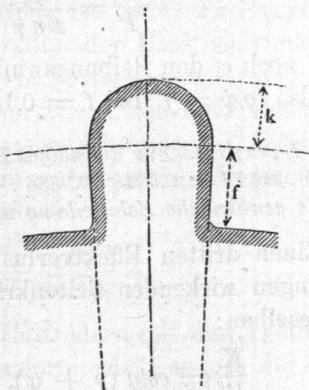


Fig. 624.



dass mehr als eine Theilung Schraubenwindung auf den Zahn treffe. Willis weist darauf hin, wie man hier unmittelbar zu brauchbaren Zahnprofilen dadurch gelangen kann, dass man an beiden Rädern die Fussflanken radial und die Kopf flanken nach einem für beide Zahnseiten gemeinsamen Halbkreis profilirt, Fig. 624. Da solche Zähne schmale Füße bekommen, auch bei geringem Auseinanderrücken starke Axialpressungen ausüben, empfiehlt sich

\*) U. a. für physikalische Apparate von Bréguet, in welchen Umdrehungsgeschwindigkeiten bis über 2000, nach Haton sogar 8000 in der Sekunde oder 480 000 in der Minute hervorzubringen waren. Dow x 60

mehr die Zugrundelegung der Evolventenverzahnung, s. Fig. 625. Bei dieser nähert man die Evolvente durch einen Kreisbogen an, der einen geringeren Halbmesser hat als  $BS = R \cos \alpha$ , dessen Mittelpunkt  $B'$  aber auf der Berührungsnormale  $NN_1$  liegt, genügende Schraubenwindung wieder vorausgesetzt.

Angenähert wird der reibungsfreie Gang durch die Räder mit Stufen- oder Staffelzähnen \*), Fig. 626, die man bei Hobelmaschinen oft angewandt findet (Shanks, Collier u. A.). Auch hier

Fig. 625.

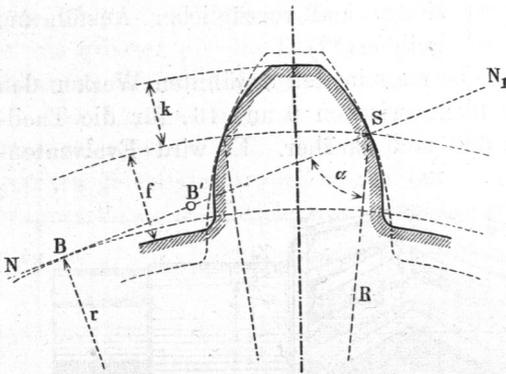
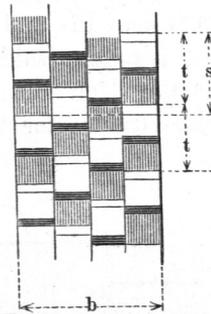


Fig. 626.



sind die Zahnprofile wie vorhin angegeben zu behandeln, wenn man den nahe reibungsfreien Gang erzielen will; doch muss die Stufenversetzung  $s$  so weit oder etwas weiter als eine Theilung gehen. Weniger als vier Staffeln sollte man bei Stirnrädern nicht machen.

Als Uebelstand tritt bei den erwähnten Schraubenrädern der axiale Druck  $K$  auf; dieser wird aber vermieden, wenn man die Räder aus zwei Schrauben von entgegengesetzter gerichteter Steigung zusammensetzt. Man erhält auf diesem Wege die Doppelschraubenräder, neuerdings bei uns Räder mit Winkelzähnen genannt \*\*). Der Verfasser schlägt statt dieses Namens den aus der Pfeilspitzenform der Zähne abgeleiteten Namen Pfeilzahnräder

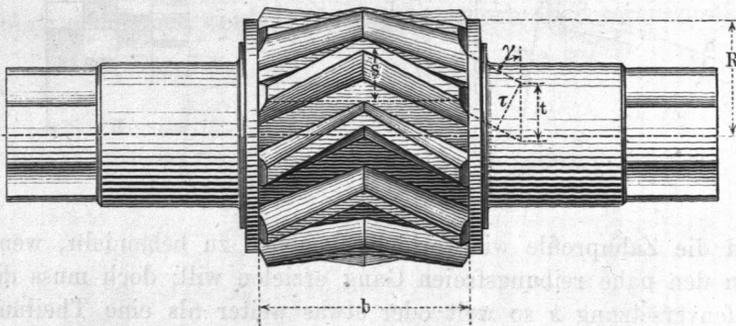
\*) Gekreuzte Zahnung, „denture croisée“, sagt der Franzose. Solche Räder liefert sehr schön A. Piat fils, Paris, Rue St. Maur 48 & 49. Modelle enthält auch die Sammlung der königl. techn. Hochschule in Berlin.

\*\*\*) Von den Engländern „mortice wheels“, also Nuthräder, von den Franzosen „roues à chevron“, d. i. etwa Geißfussräder genannt.

oder kurzweg Pfeilräder vor. Schon lange bekannt\*) und für geringere Kräfte auch nicht ganz selten benutzt (u. a. in Spinnmaschinen, auch Grossuhren) sind diese Räder in den letzten Jahren wesentlich durch deutsche Fabriken in den Grossmaschinenbau eingeführt worden und finden darin eine rasch zunehmende Verwendung. Nachdem man in Amerika mit gusseisernen Rädern dieser Art gelungene Anwendungsversuche bei Kraus- oder Kammwalzen gemacht, wurden 1878 durch die „Hagener Gussstahlwerke, A.-G.“ Pfeilräder aus keinem geringeren Material als Gussstahl in die Walzwerke eingeführt und werden jetzt von den westfälischen Stahlgiessereien in grosser Menge und vorzüglicher Ausführung nach dem In- und Auslande geliefert\*\*).

Die Zähnezahlen, welche man in den erwähnten Werken den Kammwalzen gibt, schwanken zwischen 9 und 16, für die Theilkreisdurchmesser 90 bis 600 und darüber. Es wird Evolventen-

Fig. 627.



verzahnung benutzt, wobei der Grundkreiswinkel  $\alpha$  zwischen  $62^\circ$  und  $69^\circ$  gewählt wird. Zahnkopflänge  $k$  etwa  $0,22 t$ . Indem man die Evolventen recht genau annähert, erzielt man Zahnberührung

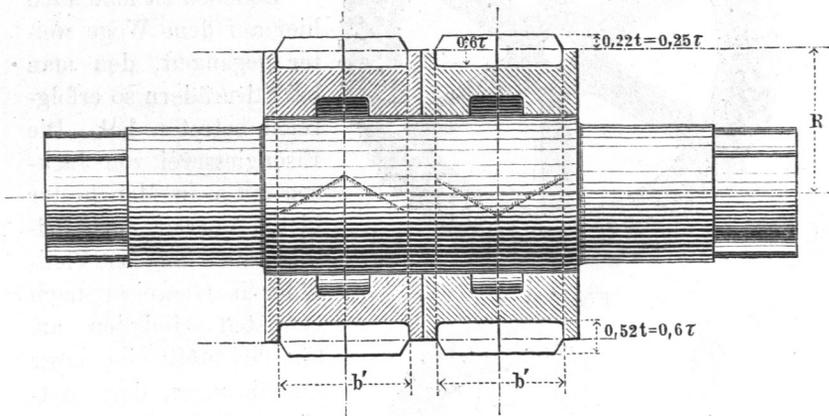
\*) Von White schon 1808 dringend empfohlen. Wethli schlug ein solches Rad als Triebad für Berglokomotiven vor, das Gleis (Zahnstange) mit den Gegenzähnen, die aus zwei Schienenstücken bestanden, versehen.

\*\*) Bis Herbst 1882 hatten die westfälischen Stahlgiessereien gegen 2 000 000 kg Räder mit Winkelzähnen geliefert. Daran sind die Hagener Gussstahlwerke mit 1 600 000 kg für Kammwalzen, mit 80 000 für andere Räder beteiligt; eine beträchtliche Ziffer kommt auf Asthöwer & Cie. in Annen; das Gussstahlwerk Witten lieferte gegen 55 000 kg an Kammwalzen, die Bochumer Gesellschaft ebenfalls ein nicht unbedeutendes Quantum. In allen Stahlhütten Westfalens ist eine Steigerung der Produktion in dem vorliegenden Gegenstand wie überhaupt der Herstellung von Maschinenteilen aus Stahl zu beobachten.

wie bei gewöhnlichen Stirnrädern, was durch eine Abnutzungskurve, die sich diagonal über die Zahnflanke zieht, erkennbar wird. Der nahezu reibungsfreie Gang ist indessen nicht vorhanden, wenn diese Abnutzungskurve sichtbar wird. Fig. 627 stellt eine zehnzählige gussstählerne Krauswalze dar. Die Dreh- und Kuppelzapfen sind mit dem Pfeilrade aus einem Stück gegossen; doch wird die Achse ebenso häufig getrennt von der Kammwalze hergestellt. Der Theilkreisbogen  $s$ , um welchen die Pfeilspitze der Zähne den Enden derselben voraus ist, wird von den westfälischen Fabrikanten sehr bezeichnend der Sprung der Zähne genannt. Will man nahezu reibungsfreien Gang erzielen, so muss der Sprung etwas grösser als die Theilung gemacht, und sollte bei der Verzahnung ähnlich wie vorhin angegeben wurde, verfahren werden\*).

Sehr grosse Kammwalzen werden wohl aus zwei Pfeilrädern zusammengesetzt. Fig. 628 zeigt eine in den Hagener Gussstahlwerken gefertigte Doppelkammwalze für ein sogenanntes Reversirwalzwerk (welche Bezeichnung man kürzer durch „Kehrwalzwerk“

Fig. 628.



wiedergeben kann). Der Theilkreishalbmesser beträgt 550, die Theilung 216, die Zahnbreite  $b'$  jeder Halbwalze 500 mm, das Gewicht der ganzen Walze nebst Achse nahe 11 000 kg. Die Pfeilrichtungen der beiden Halbwalzen sind einander entgegengestellt, damit im Kehrwalzwerk beim Rück- und Vorwärtsgang die Bedingungen für die Kammwalze gleich werden. Maschinentheile wie der dargestellte sind Meisterstücke der Stahltechnik.

\*) Bei unserm Beispiel ist der Sprung etwa  $= 0,8t$ , der Griffbogen der Zahnkurven an sich nahe  $0,75t$ , die ganze Eingriffdauer also  $1,55$ .

## §. 223.

**Kegelschraubenräder.**

Bei den Kegelnrädern hat man ebenfalls schraubenförmig gestellte Zähne schon angewandt. Kegelschraubenräder entstehen aus dem allgemeinen Problem, wenn der Achsenabstand  $a = \text{Null}$  wird, der Winkel  $\alpha$  aber angebbar bleibt. Für die Krümmung der Zahnachse eignet sich am besten die Kegelschraubenlinie von konstanter Steigung, deren Projektion auf die Kegelbasis eine archimedische Spirale ist. In Spinnereimaschinen finden sich Kegel-

Fig. 629.

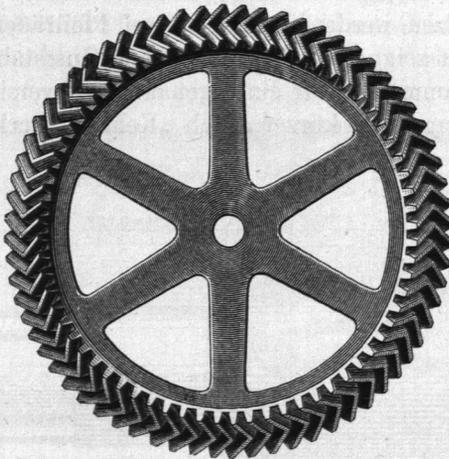
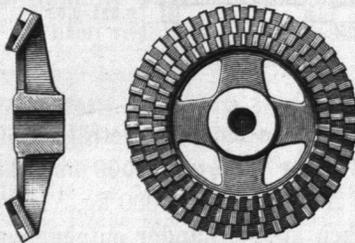


Fig. 630.



Auch die Staffelung der Zähne wird für konische Räder praktisch verwerthet. Die schon erwähnte Firma A. Piat fils in Paris liefert konische Staffelmräder, deren Fig. 630 eines vor Augen führt.

\*) Ueber eine Maschine zum genauen Herstellen der Zähne von Kegelschraubenrädern siehe Génie industriel, Bd. XII, S. 255.

schraubenräder öfter in Anwendung. Die Ausführungsschwierigkeiten sind auch selbst für blosse Gussmodelle immerhin gross\*).

Dennoch ist man auch hier auf dem Wege weiter gegangen, den man bei Stirnrädern so erfolgreich betreten hat. Die Eisengiesserei von Jackson & Co. in Manchester bietet ausser cylindrischen auch konische Pfeilräder in Gusseisen nach gefrästen Modellen an. Fig. 629 stellt eine ihrer Ausführungen dar. Asthöwer & Co. in Annen, Westfalen, haben gussstählerne konische Pfeilräder bereits mehrfach gefertigt.

§. 224.

**Globoidschraubenräder.**

Lässt man einen Kreis um eine Achse  $AA_1$  rotiren, die mit einem seiner Durchmesser zusammenfällt, und dreht zugleich in einer durch die Anfangslage des Kreises gelegten festen Ebene einen Radius  $CS$  um den Mittelpunkt  $C$  mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche derjenigen des Kreises proportional ist, so beschreibt der Kreis zunächst eine Kugel, Fig. 631, und zugleich die Spur des Radius  $CS$  auf dem Kugelmantel eine Kurve von schraubenförmigem Verlauf. Man könnte sie eine Kugelschraube nennen\*); ihre benachbarten Gänge haben auf dem Meridian der Kugel gleiche Abstände. Ueberschreitet der Radius  $CS$  die Rotations- oder Hauptachse, so durchkreuzen die neu entstehenden Gänge die bereits beschriebenen, siehe bei  $A_1$ . Statt des blossen

Fig. 631.

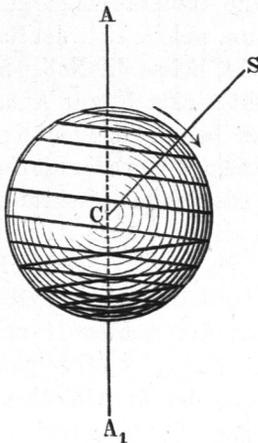
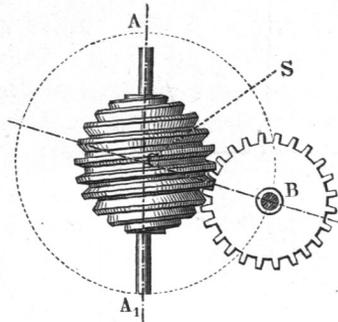


Fig. 632.



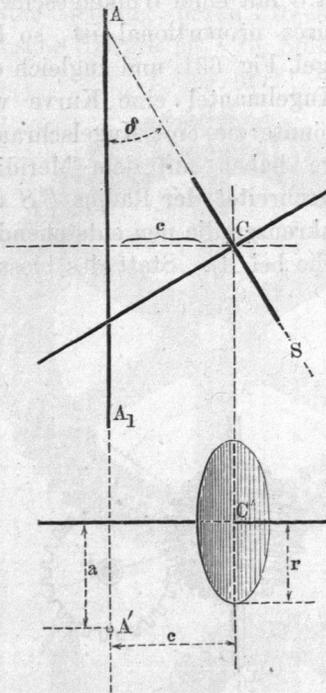
Radius kann man auch eine Punktfolge, welche das Profil einer Radzahlücke darstellt, herumführen und in die Kugel einschneiden lassen. Es entsteht dann eine körperliche Kugelschraube, in welche man ein Stirnrad  $B$  an irgend einer Stelle eingreifen lassen kann, geeignete Verzahnung vorausgesetzt, Fig. 632. Wird eine

\*) Sie ist eine sphärische Cykloide, vergl. §. 216; die kinematischen Axoide sind Normalkegel.

angemessene Lagerung der Achsen  $A$  und  $B$  angebracht, so wirkt die Kugelschraube, wenn betrieben, auf das Zahnrad ganz ähnlich, wie eine Schraube ohne Ende, §. 221.

Dieses ganze Problem lässt sich mit Nutzen dadurch erweitern, dass man die Rotationsachse allgemein als nicht zusammenfallend mit einem der Kreisdurchmesser annimmt. Die unter dieser Voraussetzung entstehenden Drehkörper haben Verwandtschaft mit der Kugel, weshalb der Verfasser den Namen Globoide für dieselben vorgeschlagen hat.

Fig. 633.



Die entstehenden Schrauben werden gemäss dieser Bezeichnung Globoidschrauben\*), die damit gebildeten Räder Globoidschraubenräder zu nennen sein. Manche der letzteren besitzen praktisch verwerthbare Eigenschaften.

Man erhält verschiedene Formen für das Globoid, jenachdem man den beschreibenden Kreis gegen die Hauptachse stellt. Die Achse, um welche sich der Radius  $CS$  dreht, heisse die Nebenachse. Sie steht senkrecht zur Anfangslage des beschreibenden Kreises und schneidet entweder die Hauptachse, oder steht geschränkt zu ihr. Es sei dann noch  $r$  der Halbmesser des beschreibenden Kreises,  $a$  der kürzeste Abstand oder das Loth der Achsen  $A$  und  $C$ ,  $c$  der Abstand des Mittelpunktes

des beschreibenden Kreises von der Ebene des Achsenlothes und der Hauptachse,  $\delta$  der Winkel, welchen die Hauptachse mit der Ebene des beschreibenden Kreises einschliesst, zu zählen von 0 bis  $90^\circ$ , da weiterhin nur Wiederholungen eintreten, so lassen sich vier Klassen von Globoiden unterscheiden, jenachdem nämlich:

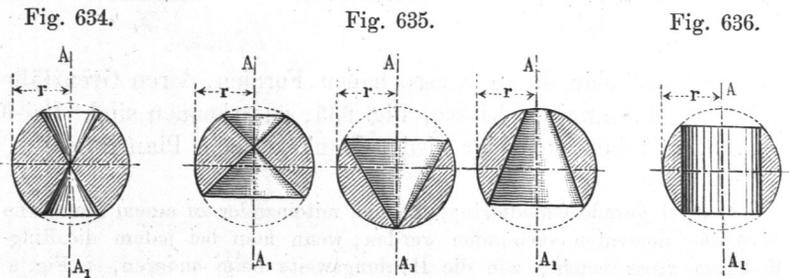
\*) Entsprechend der vorigen Anmerkung wird man die schraubenartigen Kurven als globoidische Cykloiden auffassen können; die kinematischen Axoide sind im allgemeinen Fall Drehhyperboloide.

- I)  $a = 0, c = 0$                       III)  $a$  angebbar,  $c = 0$   
 II)  $a = 0, c$  angebbar                IV)  $a$  angebbar,  $c$  angebbar.

Ein Globoid heiße sodann noch ein gerades, wenn  $\delta = 0$ ; wenn dagegen  $\delta$  ein spitzer Winkel, heiße es ein schiefes Globoid.

Die erste Klasse liefert allgemein das Globoid Fig. 634, einen zum Aequator symmetrischen Kugelausschnitt, auf dessen Zonenmantel die Globoidschraube liegt; bei  $\delta = 0$  entsteht die obige Kugel.

Die zweite Klasse ergibt die schiefen Globoide, Fig. 635, zum Aequator unsymmetrische Kugelausschnitte, auf deren Zonen-



mnteln wieder die Schrauben liegen. Für  $\delta = 0$  kommt als gerades Globoid ein symmetrischer, cylindrisch gehhlter Kugelausschnitt, Fig. 636. Die Schraubenkurven werden, wenn  $a = 0$ , sphärische Cykloiden. Wird noch  $\delta = 90^\circ$ , so werden die Körper Plankegel oder Planringe; die Kurven gehen dabei in ebene Cykloiden über.

In der dritten Klasse erhält man, wenn  $\delta = 0$  und  $a > r$ , den bisher sogenannten cylindrischen Ring, für uns den geraden Globoidring, Fig. 637 a, und wenn  $a < r$ , das apfelförmige Globoid

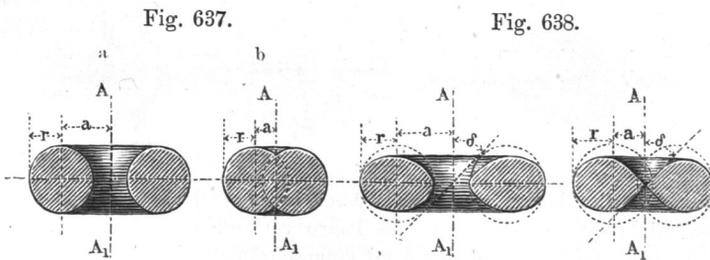
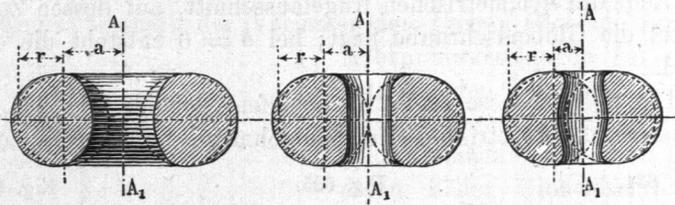


Fig. 637 b. Ist  $\delta$  ein schiefer Winkel, so wird der Globoidring oder der Globoidapfel abgeplattet, Fig. 638; das Globoid Kl. I. ist

der Grenzfall. Die Schraubenkurven werden globoidische Cykloiden, sie gehen in ebene über, wenn  $\delta = 90^\circ$ , wobei das Globoid ein Planring oder ein Plankegel wird.

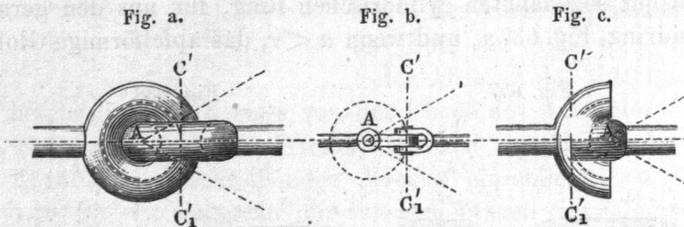
Die vierte Klasse liefert die höchsten Formen, s. Fig. 639, wo  $\delta = 0$ , einmal  $a > r$ , einmal  $= r$  und einmal  $< r$  ist. Die

Fig. 639.



schiefen Globoide dieser Klasse haben Formen, deren Grenzfälle in denen der zweiten Klasse, Fig. 635, zu erkennen sind. Bei  $\delta = 90^\circ$  entstehen auch hier wieder Plankegel oder Planringe\*).

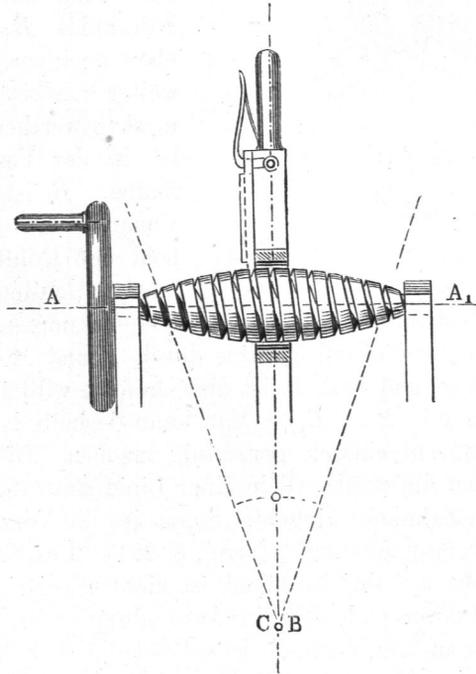
\*) Zwei gerade Globoidringe können miteinander zu einem Paare von Maschinenelementen verbunden werden, wenn man bei jedem die Ringdicke so gross macht, wie die Hölungsweite beim anderen, s. Fig. a. Die beiden Stücke verhalten sich dann etwa wie Zapfen und Lager zu einander, und ähneln dem Kugelgelenk, ja letzteres ist als ein besonderer Fall des vorliegenden allgemeineren Paares anzusehen. Jedes der beiden Elemente *A* oder *B* beschreibt bei eintretender Relativbewegung mit irgend einem seiner Punkte nur Bahnen, welche auf einem mit dem anderen Elemente verbunden zu denkenden Globoid liegen. Die gewöhnlichen Gliedketten bestehen aus angenäherten Paaren dieser Art. Man kann ein solches Paar von Körpern ersetzen durch ein geschränktes Kreuzgelenk *ABC*, Fig. b, in diesem treten zwischen *A* und *C* dieselben soeben an-



gegebenen Relativbewegungen ein. Auch bruchstückweise lassen sich die beiden Globoide zu einem solchen Paare verbinden, s. Fig. c., vorausgesetzt, dass das Spiel entsprechend eingeschränkt sei und der Trennung der einander berührenden Globoidflächen durch geeignete Hilfsmittel, z. B. Zugbänder, vorgebeugt werde. Derartige Gelenke aber hat die Natur am menschlichen Skelett verwirklicht. U. a. sind die unteren Fingerglieder

Der praktischen Anwendungen der Globoidschraubenräder sind mehrere vorhanden. Es handelt sich dabei wesentlich um gerade Globoide der III. und IV. Klasse. In Stephenson's Steuerhebelgetriebe für Lokomotiven, Fig. 640, ist eine Globoidschraube der Klasse III. benutzt, und zwar indem zunächst das Mitteltheil

Fig. 640.



des geraden Globoidapfels, Fig. 637 b ( $a < r$ ), benutzt ist. Sodann ist das eingreifende Rad  $B$  als Hohlrad ausgeführt, dem aber ein Halbmesser  $R_1 =$  dem Halbmesser  $r$  des beschreibenden Kreises gegeben ist\*). Endlich ist von dem Hohlrade nur ein einziger Zahn benutzt; es würde auch zulässig sein, mehrere anzuwenden.

Man hat zu beachten, dass man die Globoide auch in ihren Hohlformen zur Ausführung bringen kann. Solches ist geschehen

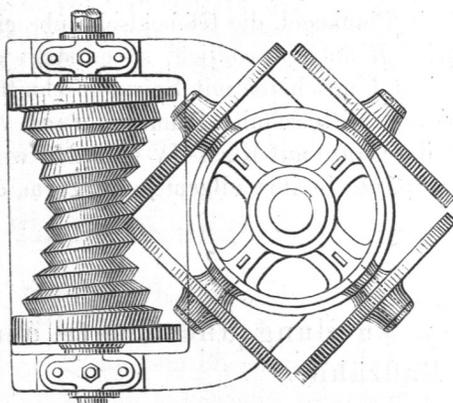
(Phalangen) mit Globoidgelenken der vorliegenden Art an die Mittelhandknochen angelenkt; die beiden zusammengehörenden Globoidflächen sitzen wie zwei Sättel aufeinander (Sattelgelenke). Alle Punkte der unteren Fingerglieder bewegen sich relativ zur Mittelhand auf Globoidflächen.

\*) Die Schraube ohne Ende mit Hohlrad, Fig. 621, lässt sich ebenfalls nach dem vorliegenden Prinzip gestalten.



selben, ein Zahn des anderen Rades eingreifen, so müssten ausser den durch die Rollen gebildeten Zahnücken noch auf jedem Umfangsviertel 10 weitere Lücken an *B* angebracht werden, sodass statt 4 Zähnen an *B* deren  $4(1 + 10) = 44$  anzubringen sein

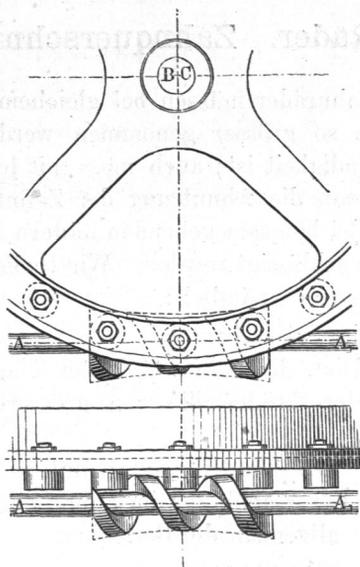
Fig. 642.



würden. Diese Zahl 44 ist also die dem Grundgesetz entsprechende Zähnezahl von *B*.

Dem Rädergetriebe des Jensen'schen Göpels, Fig. 643\*), liegt die Globoidklasse IV, Fig. 639 zu Grunde. Gewöhnlich scheint  $a = r$  gemacht zu sein, gelegentlich aber findet man auch  $a < r$  gemacht, wie in Fig. 639 c.  $R_1$  ist wiederum  $= r$  gemacht, auch wieder die Hohlform des Globoids benutzt. Die Verhältnisse sind so gewählt, dass aus dem Langsamen ins Schnelle übersetzt werden kann, was sich auch bei der Einrichtung Fig. 641 erzielen lässt, wenn man nur den Winkel der Schraubensteigung ausreichend gross macht. Die Triebstockverzahnung zeigt sich empfehlenswerth, da sie auch die Anwendung von Rollen statt der Zähne gestattet\*\*).

Fig. 643.



\*) S. Uhlend, Prakt. Maschinenkonstrukteur, auch Engineer, Bd. 24 (1867) S. 493. — \*\*) Modell im kinematischen Kabinet der königl. techn. Hochschule; Uebersetzung 12 : 1, Gang ausserordentlich sanft.

Lässt man in den zwei oberen Globoidklassen die Nebenachse in unendliche Ferne rücken, so gehen die Globoide in Regelflächen über; auch die Globoidschrauben erreichen dabei ihre Grenzfälle. Als ein Grenzfall von Klasse III tritt dann die gewöhnliche Schraube ohne Ende auf. Ein anderer ist das Long'sche Spiralaräderwerk\*), ebenfalls zu Klasse III gehörig,  $a$  angebbbar,  $c = 0$ ,  $\delta = 0$ . Das Globoid wird ein Plankegel, die Globoidschraube eine archimedische Spirale. Wird  $R$  auch unendlich, so entsteht ein Getriebe, bestehend aus einer Planscheibe mit Spiraleinschnitten und einer Zahnstange, deren Mittelschnitt Zahnberührung von oben bis unten hat. Wenn das Ganze auf Klasse IV gebracht wird, so geht die archimedische Spirale in ihre allgemeinere Form, die Kreisevolvente über.

## E. Berechnung der Theilung und Breite der Radzähne.

§. 225.

### Eintheilung der Räder. Zahnquerschnitt.

Die Abmessungen der Zahnräder müssen bei gleichem Zahndruck wegen der Stösse um so grösser genommen werden, je grösser ihre Umfangsgeschwindigkeit ist; auch muss mit letzterer die Zahnbreite zunehmen, wenn die Abnutzung der Zahnflanken eingeschränkt werden soll. Bei langsam gehenden Rädern können indessen diese Einflüsse vernachlässigt werden. Wir theilen deshalb die Räder in zwei Klassen ein, nämlich:

1. Kranräder, 2. Triebwerkräder;

und zwar sind Kranräder solche, die bis zu  $\frac{1}{2}$  Meter Theilkreisgeschwindigkeit haben, Triebwerkräder die von grösserer Geschwindigkeit.

Bei der Zahntheilung  $t$ , der Zahnbreite  $b$ , der Zahnlänge  $l$ , der Zahnfussdicke  $h$ , dem Zahndruck  $P$  und der im Zahne eintretenden Biegungsspannung  $\mathfrak{S}$  gilt allgemein die Beziehung

$$bt = 6 \frac{P}{\mathfrak{S}} \left(\frac{l}{t}\right) \left(\frac{t}{h}\right)^2 \dots \dots \dots (212)$$

\*) S. Civil-Engineer and Arch. Journal, 1852, Juli; auch Dingler's Journ. Bd. 125, Weisbach III, 1. Aufl. S. 449, 2. Aufl. III. 2, S. 87.

und für die oben angenommenen Verhältnisse zwischen Zahnlänge und -Dicke die Formel:

$$bt = 16,8 \frac{P}{\mathfrak{S}} \dots \dots \dots (213)$$

Dies bedeutet, dass die Festigkeit des Zahnes seinem Querschnitt proportional ist, dass es also für dieselbe gleichgültig ist, welches Verhältniss  $b$  und  $t$  zu einander haben, ein Umstand, aus welchem sich beim Konstruiren vielfach Nutzen ziehen lässt.

### §. 226.

## Theilung und Zahnbreite der Kranräder.

Bezeichnet bei einem gusseisernen Kranrad:

$(PR)$  das statische Moment der angreifenden Kraft,

$\mathfrak{Z}$  die dem Rad bestimmte Zähnezahl,

$R$  seinen vorläufig festgesetzten Theilkreishalbmesser,

$t$  seine Theilung,

so nehme man je nach den gegebenen Grössen:

$$t = 2,602 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}}, \quad \frac{t}{\pi} = 0,827 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}} \dots (214)$$

$$t = 1,67 \sqrt{\frac{(PR)}{R}}, \quad \frac{t}{\pi} = 0,53 \sqrt{\frac{(PR)}{R}} \dots (215)$$

und gleichzeitig die Zahnbreite  $b$ :

$$b = 2t \dots \dots \dots (216)$$

Hierbei ist für die Spannung  $\mathfrak{S}$  der Werth  $\mathfrak{Z}$  eingeführt. Die wirklich eintretende Spannung ist kleiner, da der Zahnfuss im allgemeinen dicker ist als  $\frac{1}{2}t$ , wie oben in (213) eingeführt.

Da der Werth  $(PR):R$  gleich der Umfangskraft  $P$  ist, so gilt (215) auch für die Fälle, wo  $P$  unmittelbar gegeben ist, wie bei der Zahnstange.

Aus den vorstehenden Formeln lässt sich der bemerkenswerthe Einfluss ermitteln, welchen die zum Theil freigestellte Wahl der in Rechnung kommenden Grössen auf den numerischen Werth der Radabmessungen ausübt. Sind  $t'$  und  $t$  die Theilungen zweier für denselben Fall bestimmten Räder von den Zähnezahlen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{Z}'$ , in welchen die Spannungen  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  am Zahnfuss vorausgesetzt sind, und bezeichnet man die Konstante  $6(l:t)(t:h)^2$ , welche in (213) = 16,8 ist, allgemein mit  $C$ , beziehungsweise  $C'$ ,

so ist, wenn das Kraftmoment ( $PR$ ) für ein zu bauendes Rad gegeben ist, nach (214):  $t = \sqrt[3]{2\pi C(PR)(t:b) : \mathfrak{S}}$ , woraus:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt[3]{\frac{C' \mathfrak{S}}{C \mathfrak{S}'}} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'} \quad \dots \quad (217)$$

Hieraus folgt für die Radhalbmesser  $R$  und  $R'$ :

$$\frac{R'}{R} = \frac{\mathfrak{S}' t'}{\mathfrak{S} t} = \sqrt[3]{\frac{C' \mathfrak{S}}{C \mathfrak{S}'}} \left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\right)^2 \quad \dots \quad (218)$$

Die Werthe  $C$  hängen von den Zahnverhältnissen, diejenigen der Spannung  $\mathfrak{S}$  von dem gewählten Material ab. Nehmen wir beide bei einem anzustellenden Vergleich zunächst als von derselben Grösse seiend an, so bleibt der Einfluss der Zähnezahlen übrig. Eine Verminderung der Zähnezahl vergrössert nach (217) die Theilung, verringert aber nach (218) die Radgrösse.

1. *Beispiel.*  $\mathfrak{S} = 11$ ,  $\mathfrak{S}' = 7$  liefert  $t' : t = \sqrt[3]{11 \cdot 7} = \sqrt[3]{1,571} \sim 1,16$ ;  $b' = 2t' = 1,16b$ . Aber  $R' : R = \sqrt[3]{7^2 \cdot 11^2} = \sqrt[3]{49 \cdot 121} = \sqrt[3]{0,405} \sim 0,74$ , oder: das 7 zähniige Rad wird nur ungefähr  $\frac{3}{4}$  so gross als das 11 zähniige, oder auch: das 42 zähniige Rad für denselben Fall wird rund nur  $\frac{3}{4}$  so gross als das 66 zähniige, indessen  $1\frac{1}{6}$  mal so breit als dasselbe.

Die Konstante  $C$  ist bei einer gegebenen Satzräder-Verzahnung ein bestimmter unveränderlicher Werth, also z. B. für unsere Radlinienverzahnung, wie oben bei (213) ermittelt, = 16,8. Bei unserer „Daumenverzahnung“ (§. 212), aber fällt die Konstante kleiner aus und gestattet demzufolge eine erhebliche Herabziehung der Radabmessungen. Der Werth von  $h : t$  nämlich ist bei den Rädern von mehr als 10 Zähnen schon grösser als 0,7. Wird dieser Werth eingesetzt, so erhält man  $C' \sim 8,4$ , d. i.  $0,5 C$ , in Worten: der Zahn mit unserem „Daumen“-Profil trägt bei sonst gleichen Verhältnissen doppelt so viel, als der gewöhnliche.

2. *Beispiel.* Wird unsere Daumenverzahnung statt gewöhnlicher gewählt bei gegebenem Moment ( $PR$ ) und die Zähnezahl unverändert gelassen, so vermindert sich die Theilung auf  $t' = t \sqrt[3]{0,5} = 0,79t$ , oder rund das 0,8 fache, der Theilkreishalbmesser desgleichen, ebenso die Zahnbreite. Wird aber gleichzeitig auch die Zähnezahl in dem schon vorhin gebrauchten Verhältniss von 11:7 vermindert, so wird die Theilung  $t' = t \sqrt[3]{0,5(11:7)} \sim 0,89t$ , und der Halbmesser  $R' = R \sqrt[3]{0,5(7^2 : 11^2)} = R \sqrt[3]{0,202} \sim 0,58R$ .

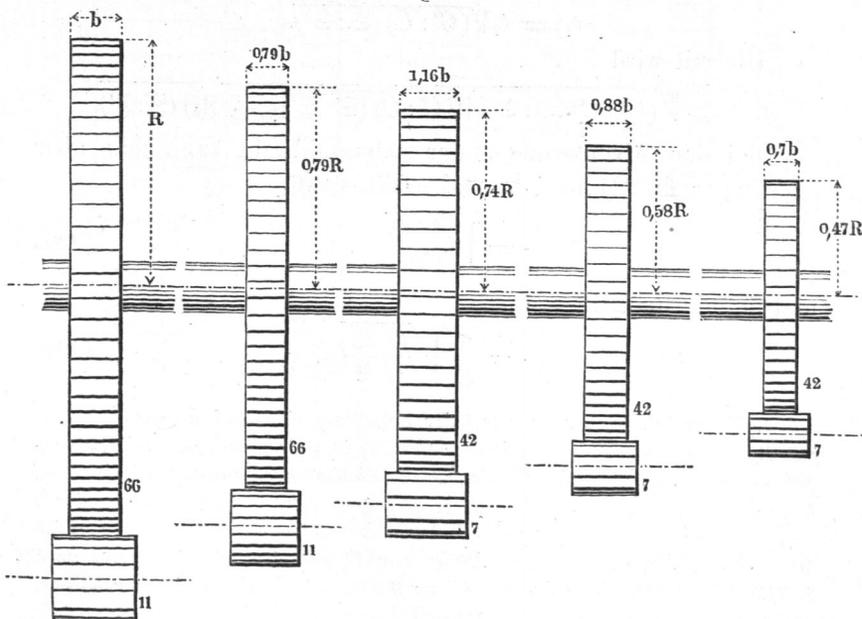
Der Einfluss der Spannung  $\mathfrak{S}$  ist ebenfalls bedeutend. Zwar wird man bei gegebenem Material, also für alle gewöhnlicheren Fälle für Gusseisen, nicht gerne viel von normalen Werthen ab-

weichen wollen. Eine Erhöhung der Spannung um  $\frac{1}{4}$  würde Theilung und Radhalbmesser nur um 7 Proz. vermindern; anderntheils ist auch ersichtlich, dass man nicht Veranlassung hat, gar zu niedrige Spannungen zu wählen, weil man dadurch gezwungen wird, grosse Räder, also auch grosse Lagerstühle, Gestelle zu bauen, mithin das Gewicht der Maschine gross zu machen. Die oben gewählte Spannung  $\mathfrak{S} = 3$  entspricht thatsächlich einer grösseren Sicherheit, als sie vielfach in der Praxis vorzufinden ist, sodass es unnöthig scheint, in normalen Fällen unter sie herabzugehen. Wendet man aber Schmiedeisen als Radmaterial an, was in einzelnen Fällen gerechtfertigt ist, so kann umgekehrt  $\mathfrak{S}$  höher und zwar ohne weiteres mit dem Werthe 6 eingeführt werden. Hierdurch wird  $t'$  bei sonst gleichen Verhältnissen auf  $t\sqrt[3]{0,5} = 0,79t$  herabgezogen.

3. *Beispiel.* Daumenverzahnung bei einem schmiedeisernen Rade von sieben Zähnen anwendend gegenüber Radlinienverzahnung beim 11zähligen gusseisernen Rade liefert  $R' = R\sqrt[3]{0,5 \cdot 0,5 (7^2 : 11^2)} = R\sqrt[3]{0,101} = 0,47R$ , während  $t' = t\sqrt[3]{\frac{1}{4}(11:7)} = t\sqrt[3]{0,393} \sim 0,7t$ ,  $b' = 0,7b$  wird.

In Fig. 644 sind die fünf Fälle, welche in den letzten drei Beispielen behandelt worden sind, vergleichbar gemacht, indem

Fig. 644.



die Projektionen der Theilkreiscylinder nebeneinandergestellt sind. Zur Verdeutlichung des Festhaltens an einem gegebenen Kraftmomente ( $PR$ ) dient die Beibehaltung der Wellendurchmesser für alle fünf Fälle. Hier wird einleuchtend, dass zwischen dem Radhalbmesser und der Wellendicke ein festes Verhältniss nicht besteht, indem die fünf Konstruktionen an sich alle brauchbar und zweckerfüllend sind.

Die Unveränderlichkeit des Kraftmomentes, welche den vorigen Beispielen zu Grunde lag, ist nicht vorhanden, wenn etwa der Zahndruck  $P$  von dem getriebenen Rade abermals durch ein Zahnrad fortgepflanzt wird, dieses letztere Rad also an den Abmessungenänderungen theilnimmt. Wirkt das Rad vom Halbmesser  $R$  beziehungsweise  $R'$  mittelst eines ihm konaxialen Rades vom Halbmesser  $R_2$  beziehungsweise  $R_2'$  z. B. auf eine Zahnstange von der gegebenen Belastung  $P$ , so hat man nach (214):

$$t = \text{Const} \sqrt[3]{(C : \mathcal{E}) (P R_2 : \mathfrak{Z})}$$

woraus

$$\frac{t'}{t} = \sqrt[3]{\frac{R_2' C' \mathcal{E}}{R_2 C \mathcal{E}' \mathfrak{Z}'}} \dots \dots \dots (219)$$

Hieraus käme  $R' = R \sqrt[3]{(R_2' : R_2) (C' : C) (\mathcal{E} : \mathcal{E}') (\mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z})^2}$ . Nun ist aber  $R_2 = \mathfrak{Z}_2 t_2$ , und  $R_2' = \mathfrak{Z}_2' t_2'$ , und nach Formel (215):

$$t_2' = t_2 \sqrt{(C' : C) (\mathcal{E} : \mathcal{E}')}$$

Hiermit wird

$$t' : t = \sqrt[3]{(C' : C) (\mathcal{E} : \mathcal{E}') \sqrt{(C' : C) (\mathcal{E} : \mathcal{E}') (\mathfrak{Z}_2' : \mathfrak{Z}_2) (\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}')}}$$

Bei den Abänderungen der Zähnezahlwahl kann man aber  $(\mathfrak{Z}_2' : \mathfrak{Z}_2) = (\mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z})$  machen, und erhält dann:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{C' \mathcal{E}}{C \mathcal{E}'}} \dots \dots \dots (220)$$

und für die Radhalbmesser:

$$\frac{R'}{R} = \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} \sqrt{\frac{C' \mathcal{E}}{C \mathcal{E}'}} \dots \dots \dots (221)$$

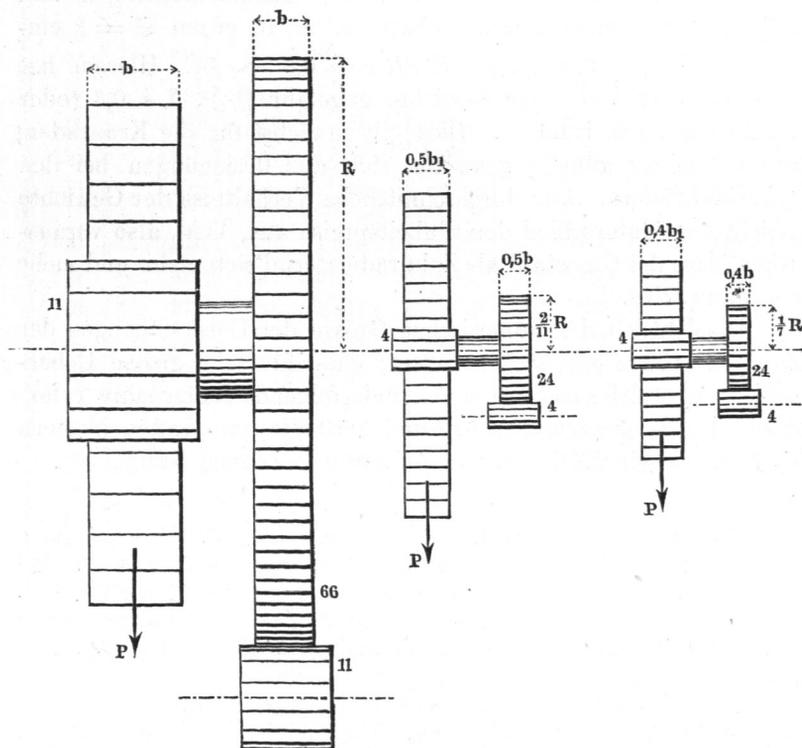
4. Beispiel. Zahnstange mit der Belastung  $P$ , getrieben vom 11zähligen Rade an einem grösseren Rade befestigt, in welches wieder ein 11zähliges eingreift, Fig. 645, als Verzahnung die Radlinienverzahnung, als Material Gusseisen vorausgesetzt. Wir ersetzen dieses überall durch Schmiedeisen und die Radlinienverzahnung durch Daumenverzahnung, indem wir zugleich die Zähnezahlen der kleineren Räder von 11 auf 4 herabsetzen, was nach §. 212 gut angeht. Hier ist nun  $C' = 0,5 C$ ,  $\mathcal{E}' = 2 \mathcal{E}$  und wir erhalten:  $t' = t \sqrt[4]{1/4} = 1/2 t$  und  $R' = R^{4/11} \sqrt[4]{1/4} = 2/11 R$ .

Zu bemerken ist bei dieser Gelegenheit, dass das Grössenverhältniss zwischen dem grossen Rade und dem auf seiner Achse sitzenden in die Zahnstange greifenden Getriebe durch die Formeln (217) und (218) ausgedrückt wird, da beide für dasselbe Moment ( $PR$ ) bestimmt sind.

5. Beispiel. Will man, um noch weitergehende Verkleinerung zu erzielen, Gussstahl statt Schmiedeisen verwenden, worauf man unbedenklich 10 statt 6 kg pro  $\square$ mm als Spannung einführen kann, so wird  $t' = t \sqrt{0,5 \cdot 0,3} = 0,387 t \sim 0,4 t$ , und dann  $R' = 0,4 \cdot \frac{4}{11} R = 0,145 R$  oder etwa  $\frac{1}{7} R$ . Noch weiter würde man die Verkleinerung treiben, wenn man drei statt vier Zähne in den kleineren Rädern anwände.

Fig. 645 stellt die Ergebnisse der zwei letzten Beispiele dar. Die Kraft  $P$  an der Zahnstange ist in den drei Fällen dieselbe.

Fig. 645.



Ihr statisches Moment an der Hauptachse nimmt aber ab wie  $R'$ , demzufolge ebenso dasjenige an der Vorgelegewelle. Dies äussert sich sowohl in der, der letzteren zu gebenden Dicke, als in der etwa auf ihr angebrachten Handkurbel in Hinsicht auf deren Arm-

länge und den aufzuwendenden Druck an der Handhabe. Aufgaben der vorstehenden Art sind bei den Wagenwinden oder „Domkräften“ (wie man sie nach dem Holländischen bei uns zu nennen begonnen hat) verwirklicht. Auch bei den Hebezeugen der Feldartillerie, wo die Leichtigkeit der Hilfsmaschinen eine der obersten Bedingungen ist, sind dieselben von Wichtigkeit; sie geben aber auch für den allgemeinen Maschinenbau brauchbare Hinweise.

Dass der Gussstahl als Material für Zahnräder rasch Boden gewinnt, wurde bereits in §. 222 hervorgehoben. Ungemein begünstigt wird dies durch die hohe Festigkeit des Materials, welcher zufolge die Räder bedeutend leichter gemacht werden können als gusseiserne. Für ein gusseisernes und ein gussstählernes Rad, die demselben Kraftmoment auszusetzen sind, ergibt sich nach (217) bei gleichen Verhältnissen zwischen den Zahnabmessungen und gleichen Zähnezahlen, wenn wieder  $\mathcal{E}' = 10$  gegen  $\mathcal{E} = 3$  eingeführt wird,  $t' : t$  und auch  $R' : R = \sqrt[3]{0,3} \sim 2/3$ . Hieraus hat man das Verhältniss der Gewichte ungefähr  $(2/3)^3$ , d. i. 0,3 (oder  $\mathcal{E} : \mathcal{E}'$ ), sage man rund  $1/3$ . Dies gilt zunächst für die Kranräder; kaum weniger günstig gestalten sich die Beziehungen bei den Triebwerkkrädern. Das durchschnittliche Verhältniss der Gewichte gleicht den Unterschied der Einheitspreise aus, lässt also voraussehen, dass der Gussstahl als Zahnradmaterial sich mehr und mehr einführen wird.

Hinsichtlich der numerischen Grösse der Uebersetzungen der Zahnräderpaare sei noch erörtert, dass für sehr grosse Uebersetzungen, welche mehrere aufeinanderfolgende Räderpaare erfordern, die Uebersetzungen 1:9 und 1:10 die günstigsten insofern sind, als sie ein Minimum von Achsen und Zähnen bedingen\*).

\*) Die Uebersetzung  $\varphi$  eines zusammengesetzten Räderwerkes aus  $k$  Räderpaaren von der Uebersetzung  $x$  ist  $\varphi = x^k$ , wobei  $x = 3 : 3'$ . Die Summe  $y$  aller Zähne im Räderwerk ist dann  $y = k(3 + 3') = k3'(1 + x)$ . Nun ist  $k = \ln \varphi : \ln x$ , demnach hat das Produkt aus der Zahnsumme  $y$  und der Paarzahl  $k$  den Werth  $yk = (\ln \varphi)^2 3'(1 + x) : (\ln x)^2$ . Diese Gleichung differenzirend und den Differential-Quotienten = Null setzend, erhält man  $\ln x = 2(1 + x) : x$ , welche Bedingung durch  $x = 9,19$  erfüllt wird. Beispiel.  $\varphi$  sei = 600, Zähnezahl im kleinsten Rade = 7.  
 a)  $\varphi = 20 \cdot 30$  gibt  $y = 7(2 + 20 + 30) = 364$ ,  $yk = 728$ . b)  $\varphi = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6$  gibt  $y = 7(4 + 4 + 5 + 5 + 6) = 168$ ,  $yk = 672$ . c)  $\varphi = 6 \cdot 10 \cdot 10$  gibt  $y = 7(3 + 6 + 10 + 10) = 203$ ,  $yk = 609$ . Die letzte Lösung ist die praktischste, weil sie zwar mehr Zähne erfordert als (b), dafür aber nur drei statt vier Räderpaare verlangt; bei Lösung (a) ist die Zähnezahl 210 unbequem hoch.

## §. 227.

Tabelle über die gusseisernen Kranräder mit gewöhnlicher Verzahnung.

$t$	$P = \frac{(PR)}{R}$	$\frac{(PR)}{3}$	$\frac{t}{\pi}$	$P = \frac{(PR)}{R}$	$\frac{(PR)}{3}$
10	36	57	3	32	48
12	51	98	4	56	113
14	70	156	5	88	220
16	91	233	6	127	381
18	116	331	7	173	605
20	143	455	8	226	902
22	173	605	9	286	1 285
24	206	786	10	352	1 762
26	241	999	11	427	2 346
28	280	1 248	12	508	3 045
30	321	1 535	13	596	3 872
35	437	2 437	14	691	4 836
40	571	3 638	15	793	5 948
45	723	5 180	16	902	7 219
50	893	7 105	17	1 019	8 659
60	1 285	12 277	19	1 272	12 088
70	1 749	19 496	22	1 706	18 766
80	2 285	29 102	25	2 203	27 538
90	2 893	41 436	28	2 763	38 688
100	3 571	56 840	32	3 609	57 750

1. *Beispiel.* Auf eine Handkurbel von 400 mm Länge finde ein Druck von 50 kg statt; welche Theilung und Zahnbreite ist dem die Kraft weiter leitenden 10zähligen Getriebe zu geben? Hier ist  $PR:3 = 50 \cdot 400:10 = 2000$ , und daher nach Sp. 3, Z. 11 bis 12 zu nehmen  $t = 30$  bis 35 mm oder nach Sp. 6, Z. 8 bis 9,  $t:\pi = 10$  bis 11, Zahnbreite =  $2t$ .

2. *Beispiel.* Eine Zahnstange soll 2900 k Zug ausüben. Sie erhält dafür nach Sp. 2, Z. 19 eine Theilung von 90 mm, oder nach Sp. 5, Z. 19 bis 20 eine Theilung  $t \sim 29\pi$ , sowie eine doppelt so grosse Zahnbreite. — Soll diese Zahnstange aus Schmiedeeisen gemacht werden, so ist nach Beispiel 3 zu nehmen:  $t = 0,707 \cdot 90 \sim 64$  mm, die Zahnbreite 128 mm.

§. 228.

**Theilung und Zahnbreite der Triebwerkkräder.**

Die Spannung  $\mathfrak{S}$ , welche bei der statischen Beanspruchung durch  $P$  in den Zähnen eintreten würde, wählt man meist bei den Triebwerkkrädern um so kleiner, je grösser die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  der Räder ist, damit die dynamischen Einflüsse, Stösse und Erschütterungen ausgeglichen werden. Man kann nehmen bei Gusseisen:

$$\mathfrak{S} = \frac{34,5}{v + 11} \dots \dots \dots (222)$$

für Gussstahl  $3\frac{1}{3}$  und für Holz  $\frac{6}{10}$  mal so viel. Man erhält hieraus für Gusseisen, bei:

$v = 0,5$	1	2	4	6	8	10	12	16 m
$\mathfrak{S} = 3,00$	2,89	2,65	2,30	2,03	1,81	1,64	1,50	1,38

für Gussstahl:

$\mathfrak{S} = 10,00$	9,63	8,83	7,67	6,77	6,03	5,47	5,00	4,60
------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------

und für Holz:

$\mathfrak{S} = 1,80$	1,73	1,59	1,38	1,22	1,09	0,98	0,90	0,83
-----------------------	------	------	------	------	------	------	------	------

Die Geschwindigkeit  $v$  in  $m$  berechnet sich bei gegebenem  $n$  und  $R$  (in  $mm$ ) aus der Formel:

$$v = \frac{\pi R n}{30.1000} = 0,10472 \left( \frac{R n}{1000} \right) \sim \frac{R n}{10000} \dots (223)$$

Dass eine blossе Schätzung von  $v$  schon genügt, wird sich weiter unten noch zeigen.

Ferner findet man die Zahnbreite  $b$  mit  $P$  wachsend genommen. Tredgold empfahl, den Druck auf 1 mm Zahnbreite, d. i.  $P:b$  nicht über 7,15 kg zu nehmen. Doch wurde dies nicht befolgt, da bei guten Ausführungen  $P:b$  höher, sogar bis zu 25 vorkommt. Einleuchtend ist aber, dass wegen Kleinhaltung der Abnutzung das Produkt aus  $P:b$  und  $n$  nicht zu gross werden darf. Man findet  $(P:b)n$  bis zu 1200 gehend, doch treten dann auch störende Abnutzungen auf. In Räderpaaren, bei welchen Eisen auf Eisen arbeitet, ist es das kleinere Rad im Paare, welches die grösste Abnutzung erfährt. Bei diesen ist zu empfehlen,

$$\frac{P n}{b} \text{ nicht über } 500 \dots \dots \dots (224)$$

gehen zu lassen, wenn thunlich noch weniger zu nehmen; für geringe Kräfte lässt sich mit dieser Konstanten, welche man den Abnutzungskoeffizienten nennen kann und die durch  $A$  bezeichnet werden möge, leicht bis zu 200 und sogar gegen 100 herabgehen, ohne auf unbequeme Abmessungen zu kommen. Bei Holz-Eisenrädern kann die Abnutzung der Eisenzähne unberücksichtigt bleiben, da die Abnutzung sich hier fast ganz auf die Holzzähne wirft. Es ist sehr empfehlenswerth, bei dem Rade mit Holzzähnen ebenfalls den Werth  $A$  nicht über 500 gehen zu lassen, aber lieber bei 300 bis 400 zu bleiben\*). Ganz feste Vorschriften lassen sich hier nicht geben, da Ausführungsschwierigkeiten allerlei Art, ferner die Rücksicht auf vorhandene Modelle u. s. w. mit in Betracht kommen; es muss daher dem Konstruirenden überlassen bleiben, wie weit er sich etwa von den erprobten und empfehlenswerthen Verhältnissen entfernen will.

Dabei wolle man beachten, dass bei verschiedenen Annahmen von  $A$  man nicht etwa verschieden sicher baut, sondern nur die Abnutzung mehr oder weniger günstig gestaltet. Hat man Raum, und lässt sich ohne Schwierigkeiten ein niedriger Abnutzungskoeffizient wählen, so thue man es; kann dies nicht geschehen, so gibt der gewählte Koeffizient wenigstens eine gewisse Klarheit in Bezug auf die zu erwartende Abnutzung.

Für Gruppenräder, d. h. solche, bei denen mehrere Räder mit einem einzigen zusammenwirken, ist statt der Umlaufzahl beim Mittelrade die Zahl von dessen Zahnberührungen, d. h. das Produkt aus der Umlaufzahl und der Zahl der Seitenräder einzuführen.

Ist  $R$  gegeben, wie oft bei Wasserradkränzen, Schwungrädern und dergl., so kennt man auch  $P$  und hat nun, nachdem man  $A$  gewählt:

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{Pn}{A} = \frac{716\ 200}{A} \frac{N}{R} \\ \text{sowie nach (213) für gewöhnliche Verzahnung} \\ t = \frac{16,8 P}{\ominus b} = \frac{16,8 A}{\ominus n} \\ \text{und für die Daumenverzahnung} \\ t' = \frac{8,4 P}{\ominus b} = \frac{8,4 A}{\ominus n} \end{array} \right\} \dots \dots (225)$$

\*) Vergl. übrigens das 10. Beispiel in §. 229.

Ist aber, wie in der Mehrzahl der Fälle,  $R$  nicht im voraus bekannt, so steht die Wahl von  $\mathfrak{z}$  frei. Dieses einführend erhält man für die Zahnbreite:

$$b = \frac{4\,500\,000}{A} \frac{N}{\mathfrak{z}t} \dots \dots \dots (226)$$

Je nachdem nun  $A = 1000, 900 \dots 150, 100$  gewählt wird, gehen die allgemeinen Ausdrücke in die folgenden numerischen über:

Gewöhl. und Daumenverz.	Gewöhl. Verz.	Daumen-Verz.	
$b = \frac{Pn}{1000} = 716 \frac{N}{R} = 4500 \frac{N}{\mathfrak{z}t}$	$t = \frac{16\,800}{n\mathfrak{S}}$	$t' = \frac{8400}{n\mathfrak{S}}$	(227)
$" = \frac{Pn}{900} = 796 \quad " = 5\,000 \quad "$	$" = \frac{15\,120}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{7560}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{800} = 895 \quad " = 5\,625 \quad "$	$" = \frac{13\,430}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{6765}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{700} = 1023 \quad " = 6\,429 \quad "$	$" = \frac{11\,760}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{5880}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{600} = 1194 \quad " = 7\,500 \quad "$	$" = \frac{10\,080}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{5040}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{500} = 1432 \quad " = 9\,000 \quad "$	$" = \frac{8\,400}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{4200}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{400} = 1790 \quad " = 11\,250 \quad "$	$" = \frac{6\,720}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{3360}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{300} = 2387 \quad " = 15\,000 \quad "$	$" = \frac{5\,040}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{2520}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{200} = 3581 \quad " = 22\,500 \quad "$	$" = \frac{3\,360}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{1680}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{150} = 4774 \quad " = 30\,000 \quad "$	$" = \frac{2\,520}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{1260}{n\mathfrak{S}}$	
$" = \frac{Pn}{100} = 7160 \quad " = 45\,000 \quad "$	$" = \frac{1\,680}{n\mathfrak{S}}$	$" = \frac{840}{n\mathfrak{S}}$	

Die Zähnezahl wählt man bei Triebwerkkrädern nicht unter 20, damit die unvermeidlichen Ausführungsfehler nicht zu sehr störend wirken können; man muss in der Regel wegen der Abnützung mit  $\mathfrak{z}$  höher und zwar um so höher hinaufgehen, je grösser die Umlaufzahlen sind. So zählen die Räder rasch laufender Turbinen selten weniger als 40, oft über 80 Zähne. Bei Holz-Eisenrädern ist es günstig für geringe Abnützung, die Holzzähne

dem treibenden Rade zu geben, weil an diesen der Eingriffpunkt vom Zahnfuß nach dem Kopfe hinläuft, während er am getriebenen Rade den umgekehrten Weg nimmt.

Statt versuchsweise vorzugehen, kann man auch durch Rechnung solche Werthe von  $\mathfrak{B}$  voraus ermitteln, welche ein gewünschtes Breitenverhältniss  $b:t$  liefern. Verbindet man die Formeln (225) und (226), so erhält man nach kleiner Umformung den lehrreichen Ausdruck:

$$\mathfrak{B} = \frac{4\,500\,000}{16,8^2 A^3} \frac{n^2 \mathfrak{E}^2 N}{\left(\frac{b}{t}\right)} \dots \dots \dots (228)$$

Er zeigt den gewaltigen Einfluss von  $A$  auf  $\mathfrak{B}$ , oder umgekehrt den der Zähnezahl auf die Abnützung; auch ist die starke Einwirkung der Zahnprofilverhältnisse ersichtlich, indem die Konstante 16,8 (bei der Daumenverzahnung 8,4) im Quadrat vorkommt. Sodann bemerken wir, dass  $\mathfrak{B}$  mit dem Quadrat von  $n$  zunehmen sollte, auch mit dem Quadrat von  $\mathfrak{E}$ , wenn die übrigen Werthe konstant sind. Dieser Umstand erklärt zum Theil die Vorliebe für niedrige Spannungen. Numerisch erhält man aus (228):

Für die gewöhnlichen Verzahnungen:											
wenn $A =$	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	150	100
$\frac{4\,500\,000}{16,8^2 A^3} =$	$\frac{0,016}{1000}$	$\frac{0,022}{1000}$	$\frac{0,031}{1000}$	$\frac{0,046}{1000}$	$\frac{0,074}{1000}$	$\frac{0,128}{1000}$	$\frac{0,25}{1000}$	$\frac{0,59}{1000}$	$\frac{2,00}{1000}$	$\frac{4,72}{1000}$	$\frac{16,0}{1000}$
und für die Daumenverzahnung:											
$\frac{4\,500\,000}{8,4^2 A^3} =$	$\frac{0,064}{1000}$	$\frac{0,088}{1000}$	$\frac{0,124}{1000}$	$\frac{0,184}{1000}$	$\frac{0,296}{1000}$	$\frac{0,512}{1000}$	$\frac{1,00}{1000}$	$\frac{2,36}{1000}$	$\frac{8,00}{1000}$	$\frac{18,88}{1000}$	$\frac{63,8}{1000}$

$b:t$  findet man bis 5 gewählt. Bei noch grösser sich ergebenden Werthen, oft auch bei kleineren, wird der Zahnkranz in zwei neben einander liegende aufgelöst.

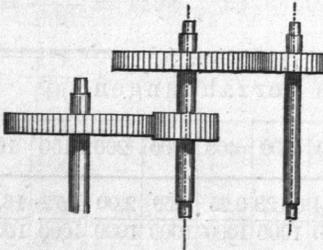
1. *Beispiel.* Ein 60pferdiges Wasserrad von 8 m Durchmesser und 1,3 m Umfangsgeschwindigkeit ist mit einem innenverzahnten eisernen Zahnkranze zu versehen, dessen Theilkreis mit dem inneren Umfang des 400 mm breiten Radkranzes ungefähr zusammenfallen und ein eisernes Triebbad von 40 minutlichen Umdrehungen treiben soll. Man hat hier:  $n = 30 \cdot 1,3 : \pi \cdot 4 = 3,1$ , also  $n_1 : n = 40 : 3,1$ ; ferner  $v \sim 1,3 (4000 - 400) : 4000 = 1,17$  m, somit  $P = 75 \cdot 60 : 1,17 = 3846$  kg. Wir haben nun nach dem

Obigen  $\mathcal{E}$  zwischen 2,89 und 2,65 zu wählen und nehmen  $\mathcal{E} = 2,85$ . Ferner wählen wir  $Pn : b$  beim kleineren Rade = 500. Dann haben wir  $P : b = 500 : n_1 = 500 : 40 = 12,5$  und damit zunächst  $b = P : 12,5 = 3846 : 12,5 = 307,7 \sim 310$  mm. Aus (227) folgt sodann  $t = 8400 : 40 \cdot 2,85 = 73,6 \sim 75$  mm. Dies gibt vorläufig  $\mathfrak{Z} = 2 \pi R : t = 2 \cdot \pi \cdot 3600 : 75 = 306$ . Machen wir  $\mathfrak{Z} = 312$ , so lässt sich der Zahnkranz in 12 Segmente zu 26 Zähnen zerlegen. Nun kommt  $R = 3720$  mm, was ebenfalls annehmbar ist. Endlich haben wir noch für das getriebene Rad  $\mathfrak{Z}_1 = (n_1 : n) \mathfrak{Z} = (3,1 : 40) 312 = 24,18 \sim 24$ , woraus  $R_1 = 24 \cdot 75 : 2 \pi =$  sehr nahe 287 mm.

2. Beispiel. Eine 100pferdige Turbine mit stehender Welle von 96 minutlichen Umdrehungen soll eine liegende Welle mit 144 Umgängen treiben; das erforderliche Winkelräderpaar ist zu bestimmen. Wir wählen Holz-Eisenräder und geben dem treibenden Rade die Holzzähne. Nach ungefähre Schätzung wird  $v$  zwischen 6 und 7 m fallen, wonach wir für  $\mathcal{E}$  etwa 1,2 einsetzen können. Wir wünschen nun  $b : t = 3$  zu erhalten und wählen  $A = 500$ . Dann haben wir nach (228) für die Zähnezahl:  $\mathfrak{Z} = (0,128 : 1000) 96^2 \cdot 1,2^2 100 : 3$ , woraus kommt  $\mathfrak{Z} = 56,6 \sim 60$ . Damit kommt  $\mathfrak{Z}_1 = (96 : 144) 60 = 40$ . Nun ergibt sich  $t = 8400 : 96 \cdot 1,2 = 72,9 \sim 75$  mm,  $b = 3t = 225$  mm.  $v$  kommt = 7,2.

3. Beispiel. Wenn in einem zusammengesetzten Räderwerke, Fig. 646,

Fig. 646.



die auf einander folgenden Räderpaare gleiche Grösse haben, so verhalten sich die Umfangskräfte verkehrt wie die Umlaufzahlen; um daher in einem solchen Falle die Koeffizienten der Abnutzung  $Pn : b$  bei allen Paaren gleich zu halten, braucht man nur die Radbreiten alle gleich zu machen. Die Räder vorgelege der Spindelstöcke an Drehbänken zeigen die Gebräuchlichkeit dieser Einrichtung.

4. Beispiel. Für  $N = 5$ ,  $n = n_1 = 60$  soll ein recht dauerhaftes Paar von Holzeisenrädern konstruiert werden, wobei  $b : t = 2$  gewünscht wird.  $v$  zu 2,4 m schätzend, wählen wir nach (222)  $\mathcal{E} = 1,41$ , sodann der verlangten grossen Dauerhaftigkeit wegen  $A = 150$  und finden nun zunächst aus (228)  $\mathfrak{Z} = (4,72 : 1000) 3600 \cdot 1,41^2 \cdot 5 : 2 = 18 \cdot 4,72 \sim 85$ , wofür wir 84 nehmen. Nach (227) kommt nun  $t = 2520 : 60 \cdot 1,41 \sim 30$  mm, und  $b = 30000 \cdot 5 : 84 \cdot 30 = 59,8 \sim 60$  mm =  $2t$ , wie kommen sollte.

5. Beispiel. Für  $N = 40$ ,  $n = 30$ ,  $n_1 = 50$  sollen Eisenräder, zunächst mit gewöhnlicher Verzahnung, für  $b : t = 2,5$  konstruiert werden. Indem wir  $v$  auf 1,5 m schätzen, wählen wir  $\mathcal{E} = 2,7$  und haben nun bei  $A = 500$  für das getriebene Rad:  $\mathfrak{Z}_1 = (0,128 : 1000) 2500 \cdot 2,7^2 \cdot 40 : 2,5 = 0,128 \cdot 7,29 : 40 \sim 37$ , wofür wir 36 wählen und  $\mathfrak{Z} = \frac{5}{3} \cdot \mathfrak{Z}_1 = 60$  erhalten. Nun kommt  $t = 8400 : 50 \cdot 2,7 \sim 62$  mm und  $b = 2,5 \cdot t = 155$  mm. Wählen wir aber nun Daumenverzahnung statt gewöhnlicher und setzen dabei  $b : t = 3,5$ , so kommt  $\mathfrak{Z}_1 = (0,512 : 1000) 2500 \cdot 7,29 \cdot 40 : 3,5 = 106,6$ ,

wofür wir 105 nehmen und  $\mathfrak{Z}_1 = 175$  bekommen.  $t'$  wird  $= 4200 : 50 \cdot 2,7 = 31,1 \sim 32$  mm,  $b = 112$  mm. Die Zahndimensionen fallen geringer, die Halbmesser aber grösser aus als vorhin. Man erhält nämlich  $R_1 = 5,73 \cdot 62 = 355,26$  mm und  $R_1' = 534,72$  mm, was aber annehmbar.

Für den Gussstahl als Radmaterial treten eigenthümliche Verhältnisse ein. Man geht gewiss nicht zu weit, wenn man den Abnutzungskoeffizienten  $A$  bei Gussstahl doppelt so hoch einführt, als bei Gusseisen\*). Die Spannung  $\mathfrak{S}$  ist aber, um die ausgezeichneten Festigkeitseigenschaften des Materials auszunutzen, rund  $3\frac{1}{3}$  mal so hoch als bei Gusseisen zu nehmen. Der Erfolg ist nach Formel (228), dass  $A$  zwar die erforderliche Zähnezah auf  $\frac{1}{3}$  vermindern,  $\mathfrak{S}$  sie aber auf das  $(\frac{10}{3})^2$ , d. i. 11fache steigern würde, so dass sich schliesslich die  $\frac{11}{3}$ fache Zahl ergibt, wenn die übrigen Verhältnisse gleichgesetzt werden. Wir haben also den gussstählernen Triebwerkkrädern im allgemeinen etwas grössere Zähnezahlen zu geben, als den gusseisernen. Herabziehen kann man die Zähnezah durch Wahl eines grossen Breitenverhältnisses. Hierzu bietet sich aber die beste Gelegenheit bei den Pfeilrädern. Das Breitenverhältniss  $b : \tau$  ist daselbst unschwer zu 7 und 8 und höher herauszubringen. Bei Vorhandensein der Seitenleisten kann man zur Berechnung die Formeln für Daumenverzahnung benutzen (während die gewöhnliche Verzahnung angewandt wird), indem die Konstante 8,4 die Verhältnisse genügend genau berücksichtigt. Die ermittelte Grösse der Theilung gilt für die Normaltheilung  $\tau = t \sin \gamma$ , die ermittelte Zahnbreite aber für die wirkliche Breite der Radkrone ( $b$  in Fig. 627,  $2b'$  in Fig. 628).

6. Beispiel. Die Räder aus Beispiel 5 seien in Gussstahl als Pfeilräder auszuführen. Wir wählen  $A = 1000$  und vorläufig  $b : \tau = 6$ , bei  $\mathfrak{S} = 3\frac{1}{3} \cdot 2,7 = 9$ . Es kommt zunächst  $\mathfrak{Z}_1 = (0,064 : 1000) 2500 \cdot 81 \cdot 40 : 6 = 86,4$ . Sodann  $\tau = 8400 : 50 \cdot 9 = 18,7$ , damit  $b = 4500 \cdot 40 : 86,4 \cdot 9 = 111,3$ . Wir nehmen  $\mathfrak{Z}_1 = 84$ , damit  $\mathfrak{Z} = 140$ , ferner  $b = 115$ . Wird  $\gamma = 60^\circ$  gemacht, so ist  $t = \tau : \sin 60 = \tau : 0,866 \sim 21$  mm; wir nehmen  $t = 22$  mm, womit  $\tau = 0,866 t = 19$  mm und  $b : \tau = 115 : 19 \sim 6$ . Der Sprung beträgt  $0,5 b \cdot \cot \gamma = 0,5 \cdot 115 \cdot 0,577 = 33$  mm, was weit mehr als eine Theilung ist, somit völlig ausreicht. Es kommt jetzt  $R_1 = 13,37 \cdot 22 = 294,14$  mm,  $R = 22,28 \cdot 22 = 450,16$  mm, also sehr kleine Räder.

Es folgen nun zwanzig interessante Beispiele aus der Praxis.

\*) Bei dem in Fig. 628 dargestellten Rade ist die Gesamtbreite  $b = 2b' = 1000$  mm.  $P$  berechnet sich zu 25000 kg. Dies gibt  $P : b = 25$  und bei  $n = 40$  für  $Pn : b$  den Werth 1000. Vorzügliche Haltbarkeit der Räder ist bestätigt (Kehrwalzwerk der Gebr. Stumm in Neunkirchen).

## Stirnräder.

Nr.	N	n	R	z	t	b	v	P	⊙	$\frac{P}{b}$	$\frac{Pn}{b}$	Bemerkungen
1	1000	$\frac{36,67}{114,8}$	$\frac{3050}{972}$	$\frac{144}{46}$	133	610	11,7	6410	1,32	10,5	$\frac{385}{1205}$	E/E Dampfmaschine
2	300	$\frac{25}{100}$	$\frac{8724}{939}$	$\frac{230}{58}$	102	356	9,70	2320	1,1	6,52	$\frac{2.163}{622}$	E/E "
3	270	$\frac{60}{12}$	$\frac{498}{2490}$	$\frac{19}{95}$	158	525	3,13	6500	1,3	12,40	$\frac{744}{149}$	E/E "
4	240	$\frac{13,3}{44}$	$\frac{2790}{843}$	$\frac{208}{68}$	79	406	3,89	4633	2,3	11,60	$\frac{154}{510}$	E/E Triebwerk zu Nr. 8
5	192	$\frac{1,33}{15,14}$	$\frac{10193}{897}$	$\frac{704}{62}$	91	381	1,42	10110	5,1	26,53	$\frac{35}{402}$	E/E Wasserrad
6	192	$\frac{15,14}{50}$	$\frac{2691}{815}$	$\frac{208}{63}$	81	381	4,27	3375	1,6	8,86	$\frac{134}{443}$	E/E Triebwerk z. vor.
7	140	$\frac{30}{55}$	$\frac{1485}{815}$	$\frac{132}{72}$	71	218	4,62	2273	$\frac{3,0}{3,4}$	10,42	$\frac{313}{573}$	E/E Dampfmaschine
8	140	$\frac{30}{54,5}$	$\frac{1690}{905}$	$\frac{138}{76}$	77	330	5,31	1977	2,6	5,99	$\frac{180}{326}$	E/E "
9	120	$\frac{1,51}{13,3}$	$\frac{7391}{838}$	$\frac{560}{80}$	79	381	1,22	7377	4,0	19,36	$\frac{29,2}{257}$	E/E Wasserrad
10	100	$\frac{45}{158,8}$	$\frac{2148}{610}$	$\frac{176}{50}$	76	254	10,09	743	0,65	2,92	$\frac{131}{520}$	H/E Dampfmaschine
11	90	$\frac{26}{80}$	$\frac{2170}{705}$	$\frac{228}{74}$	60	150	5,91	1142	2,1	7,61	$\frac{198}{609}$	H/E "
12	82,5	$\frac{54}{83}$	$\frac{1400}{910}$	$\frac{114}{74}$	78	$\frac{2.120}{300}$	7,92	1563	$\frac{1,3}{1,0}$	6,50	$\frac{351}{2.540}$	H/E Schraubenschiff

## Stirnräder.

13	50	$\frac{4,0}{7,32}$	$\frac{1282}{700}$	$\frac{96}{52}$	83	270	0,53	7075	5,3	26,20	$\frac{105}{192}$	E/E Wasserrad
14	20	$\frac{7,74}{40}$	$\frac{2170}{420}$	$\frac{248}{48}$	55	160	1,67	900	1,7	5,60	$\frac{43}{224}$	E/E "

## Kegelräder.

15	300	$\frac{93}{50}$	$\frac{620}{1160}$	$\frac{50}{93}$	78	330	6,04	3730	$\frac{2,3}{2,6}$	11,23	$\frac{1044}{562}$	E/E Turbine
16	300	$\frac{100}{111,8}$	$\frac{755}{679}$	$\frac{55}{49}$	68	254	8,01	2806	2,7	11,04	110	E/E Triebwerk zu Nr. 1
17	240	$\frac{44}{41}$	1067	75	89	457	4,92	3659	1,5	7,70	389	E/E " " 3
18	200	$\frac{41}{80}$	$\frac{1500}{765}$	$\frac{98}{50}$	96	300	6,40	2344	1,4	7,80	$\frac{320}{624}$	H/E Turbine
19	130	$\frac{93}{124}$	$\frac{795}{630}$	$\frac{80}{60}$	62	204	7,74	1260	$\frac{1,6}{1,7}$	6,18	575	H/E "
20	100	$\frac{93}{144,7}$	$\frac{595}{380}$	$\frac{70}{45}$	53	160	5,79	1300	$\frac{2,1}{2,7}$	8,14	757	H/E "
21	50	$\frac{93}{218}$	$\frac{645}{275}$	$\frac{75}{32}$	54	160	6,28	597	$\frac{1,1}{1,3}$	3,70	$\frac{1178}{844}$	H/E "
											807	H/E "

## Hyperbeleräder.

20	16	$\frac{72}{81,6}$	$\frac{549}{483}$	$\frac{68}{60}$	$\frac{50,7}{50,6}$	150	4,13	291	$\frac{0,65}{0,88}$	1,94	$\frac{140}{158}$	E/H Triebwerk
----	----	-------------------	-------------------	-----------------	---------------------	-----	------	-----	---------------------	------	-------------------	---------------

## §. 229.

**Erläuterungen zu den vorstehenden Beispielen.**

Es sind, wie man aus der ersten Spalte sieht, vorzugsweise sehr stark beanspruchte Räderpaare ausgewählt, zu denen die Zahlenangaben so gut wie möglich geliefert sind \*). Das Material der Zähne ist in der letzten Spalte angegeben. *E/E* deutet Eisen auf Eisen, *H/E* Holz auf Eisen, *E/H* Eisen auf Holz; das treibende Rad im Paare steht immer zuerst. Ueberall sind wirkliche Pferdestärken (*PS*), nicht nominelle gemeint. Zu den einzelnen Beispielen noch folgendes.

*Nr. 1. Der Betriebsdampfmaschine der Fleming'schen Spinnerei und Weberei in Bombay entnommen\*\*). Verzahnter Schwungradring ist treibendes Rad; die Zähne haben Seitenleisten, wie in Fig. 651 angegeben. Der Koeffizient der Abnutzung für das getriebene Rad scheint hoch und lässt eine sehr lange Dauer des Rades nicht erwarten.*

*Nr. 2. Treibendes Rad: verzahnter Ring eines Schwungrades, in zwei gleichgrosse Räder eingreifend, und auf jedes 300 PS, im ganzen also 600 PS übertragend.  $Pn:b$  war deshalb für das Schwungrad mit 2 zu multiplizieren, siehe vorletzte Spalte.*

*Nr. 3. Der jetzt abgebrochenen Gebläsemaschine der atmosphärischen Eisenbahn von St. Germain entnommen.  $Pn:b$  ist entschieden zu hoch, was sich auch fühlbar gemacht haben müsste, wenn nicht der Betrieb ein häufig unterbrochener gewesen wäre.*

*Nr. 4.  $P:b$  ist sehr hoch; wegen der kleinen Umlaufzahlen geht aber dennoch  $Pn:b$  nicht über statthafte Grenzen hinaus.*

*Nr. 5 und 6. Dem mächtigen Wasserrad in Greenock (wohl das grösste heute bestehende) entnommen. Sehr grosser Breitendruck am Zahnkranze; dennoch ist das Räderwerk erwiesenermaassen haltbar, was ohne Zweifel der genügenden Kleinheit von  $Pn:b$  zuzuschreiben ist. Letzterer Werth ist bei Nr. 6 fast gleich dem bei Nr. 5; es müssen also die beiden Paare sehr nahe gleiche Abnutzungsstärke gezeigt haben.*

---

\*) Es ist nicht leicht, trotz der grossen Zahl vorhandener Veröffentlichungen, Beispiele wie die hier gegebenen zusammenzubringen, da meistens nur von dem einen Rade im Paare Mittheilungen gegeben werden, während die hier aufgestellte Abnutzungstheorie es als nothwendig erweist, beide Räder des Paares zu kennen. Es wäre sehr erwünscht, wenn hierauf stets Rücksicht genommen würde. Angaben über stattgehabte, durch Messung näher festgestellte Abnutzungen würden stets sehr nützlich sein.

\*\*) Corlissmaschine, von Douglass & Grant 1875 oder 1876 erbaut. S. Engineering 1879, Dez., S. 487.

Nr. 7. Die Zähne des kleinen Rades sind dünner als die des grossen (Schwungradring), was sich in der Spalte für  $\mathcal{S}$  bemerkbar macht. Wahrscheinlich hatte das grosse Rad anfänglich Holzzähne.

Nr. 9. Trotz dem grossen Breitendruck ist  $Pn : b$  genügend klein. Die Spannung in den Zähnen ist, wie auch bei Nr. 4, nicht unbedeutend. Wir würden nach (222) geringere Werthe eingeführt haben.

Nr. 10. Eines der bemerkenswerthesten von sämmtlichen Beispielen, weil über die Grösse der Abnutzung gute Angaben vorliegen. Die Holzzähne am treibenden Rade, dem Schwungringe einer Dampfmaschine zum Betrieb einer Papiermühle (Kelvindale Paper Mill bei Glasgow) angehörig, haben nach  $26\frac{1}{2}$ jährigem Laufe, bei 20stündigem täglichem Betrieb, eine Abnutzung von etwa 3 mm, gemessen auf dem Theilkreis, erlitten und wurden dann zum erstenmal erneuert\*). Die erste Hälfte dieser Zeit arbeitete die Maschine mit 84 PS (indizirt, und Reibung abgerechnet) bei 38 minutlichen Umdrehungen. Zweimal wöchentlich wurden die Zähne mit Talg und Graphit geschmiert. Die lange Dauer ist neben dem Umstande, dass das getriebene Rad auf der Maschine geschnitten war, ausser der sorgfältigen Wartung, wohl wesentlich dem günstigen Abnutzungskoeffizienten zuzuschreiben.

Nr. 11. Die Zähne wurden im Gebrauch als zu schmal befunden, was wohl der hohen Spannung  $\mathcal{S} = 2,1$  zuzuschreiben ist; wir würden nach (222) 1,22 kg eingeführt haben.

Nr. 12. Zwei Räder mit Holzkammen greifen in das kleine Rad auf der Schraubenwelle ein. Ihre Zähne bestehen der Breite nach aus zwei Stücken von 120 mm Einzelbreite.

Nr. 13. Sehr grosser Breitendruck. Es wird geklagt über die Abnutzung der Zähne; augenscheinlich lassen sich dieselben nur deshalb schwer in guter Ordnung erhalten, weil  $P : b$  so gross ist.

Nr. 15. Die Zähne werden als etwas schwach bezeichnet; wiederholt haben Zahnbrüche stattgefunden; die Abnutzung soll sehr stark sein; wir sehen auch, dass  $Pn : b$  ungewöhnlich gross ist.

Nr. 17. Das Räderpaar (von Fairbairn herrührend) soll im Stande sein, das Doppelte der angegebenen Leistung zu übertragen, nämlich unter Umständen die Kraft von 4 statt von 2 Wasserrädern, jedes zu 120 PS übertragen. Die Spannung in den Zähnen würde dabei auf 3 kg steigen, was statthaft ist;  $Pn : b$  indessen würde dann für einen dauernden Betrieb etwas hoch ausfallen.

Nr. 20. Der Werth für  $Pn : b$  beim Holzrade scheint etwas hoch; beim Eisenrade ist er aussergewöhnlich gross; doch ist zu bedenken, dass bei Holzisenrädern die Abnutzung fast allein das Holzrad trifft.

Nr. 22. Dieses Räderpaar ist dem Triebwerke einer Maschinenfabrik entnommen, welche schon früher Hyperbelräder für Triebwerke mit bestem Erfolge benutzt hatte, Achsenwinkel  $90^\circ$ . Dass das getriebene Rad die Holzzähne hat, ist ungünstig; da hierdurch die ohnedies schon beträchtliche Abnutzung verstärkt wird.

\*) S. Engineering 1879, Febr., S. 123. Die Quelle gibt versehentlich  $v$  zu gross und deshalb  $P$  und den Breitendruck  $P : b$  zu klein an.

F. Abmessungen des Radkörpers.

§. 230.

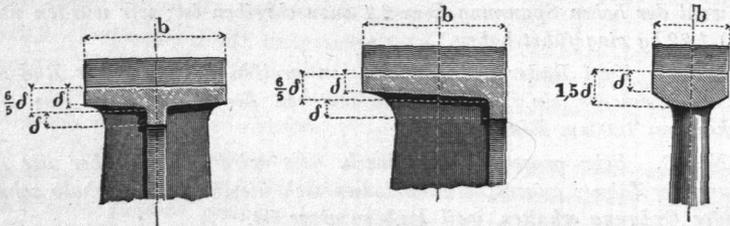
Der Radkranz.

Der Ring, an welchem die Zähne eines Zahnrades sitzen, heisst der Kranz oder die Felge des Rades; unter letzterer Bezeichnung wird insbesondere auch jeder von den Bögen verstanden, aus welchen man den Kranz eines Rades zusammensetzt. Bei den gusseisernen Stirnrädern nehme man die Kranzdicke:

$$\delta = 3 + 0,4t \dots \dots \dots (229)$$

(Fig. 647). Nach der Mitte oder nach der einen Seite zu wird der Kranz auf  $\frac{6}{5}\delta$  verstärkt und durch die Kranzrippe ausgesteift,

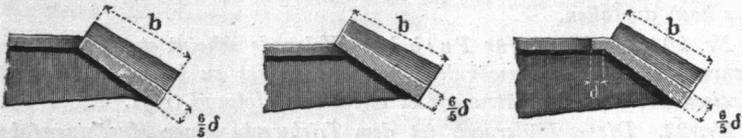
Fig. 647.



bei kleineren Theilungen auch wohl bogenförmig profilirt, wozu aber nur Arme von ovalem Querschnitt passen. Eine Theilung von 20mm erfordert nach (229) eine Kranzdicke  $\delta = 3 + 8 = 11$  mm; bei  $t = 10$  mm wird  $\delta = 7$  mm.

Bei den gusseisernen Kegelrädern, Fig. 648, wird die Felge

Fig. 648.



aussen  $\frac{6}{5}\delta$  dick gemacht und erhält einen der hier skizzirten Armanschlüsse.

Räder mit Holzzähnen oder Holzkammen bekommen eine höhere und seitlich verstärkte Felge, bei deren Abmessungen namentlich Rücksicht auf die Handarbeit beim Verschirren; d. i. Einsetzen der Kammen, genommen wird; die Verhältnisse für Stirn-

räder sind aus Fig. 649, die für Kegelhäder aus Fig. 650 ersichtlich. Sehr breite Holzkammen werden aus zwei Stücken gebildet, deren Stiele durch einen Steg getrennt sind.

Fig. 649.

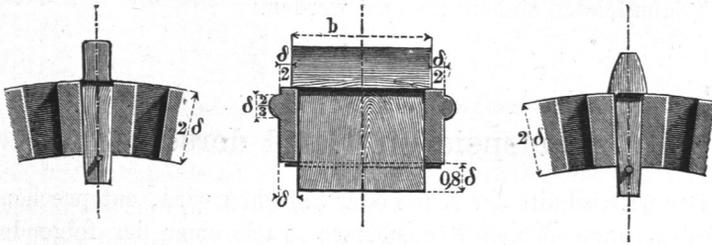
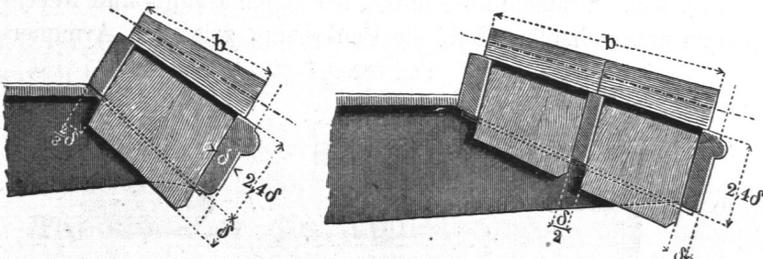
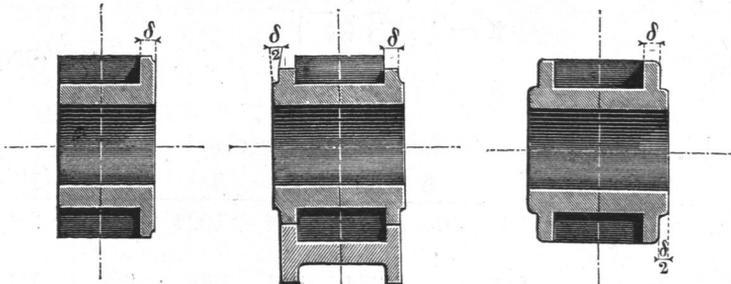


Fig. 650.



Ganz kleine Stirnräder (Blockräder) erhalten, wenn bei ihnen die Kraftübertragung wesentlich ist, entweder eine die Festigkeit ausreichend sichernde Zahnbreite, siehe Fig. 644 und Fig. 645, oder eine oder zwei verstärkende Seitenscheiben oder Saumleisten, Fig. 651, welche zweckmässig bis auf die Theilkreishalbmesser ab-

Fig. 651.



gedreht werden. Bei den gusstählernen Pfeilrädern, vergl. §. 223, hat sich die Anwendung von Saumleisten sehr bewährt und recht allgemein eingeführt. Als Erschwerung der Herstellung wird sie nicht empfunden; vielmehr sichern die Saumleisten das gute Gelingen des Gusses des Stahles, der eine sehr starke Schwindung

— gegen zwei Prozent — hat und deshalb zum Saugen oder Lunken neigt.

Kleine Getriebe, wie sie für die Domkräften üblich sind, werden aus dem vollen Schmiedeisenstück herausgearbeitet, wobei meist Saumleisten stehen gelassen werden.

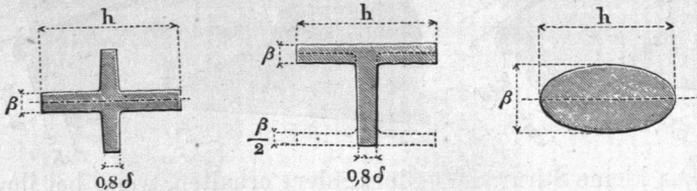
§. 231.

Die Radspeichen. Zahl derselben.

Der Querschnitt der Arme oder Speichen wird, entsprechend den oben angegebenen Kranzformen, nach einer der folgenden Figuren gebildet.

Fig. 652. Rippenquerschnitte, bei denen Haupt- und Nebenrippe zu unterscheiden sind; die Punktirung zeigt den Armquerschnitt.

Fig. 652.



schnitt, welcher bei Anwendung der Räderformmaschine oder der Schablonen-Sandformerei am zweckmässigsten ist; der ovale Querschnitt erhält an allen Stellen die halbe Höhe zur Breite  $\beta$ . Man erzielt gute Verhältnisse für die Räder, wenn man die Anzahl  $\mathfrak{A}$  der Speichen nimmt:

oder

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{4} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{t} \\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{\frac{t}{\pi}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (230)$$

Hiernach ist folgende Zahlenreihe berechnet.

$\mathfrak{A}$	= 3	4	5	6	7	8	10	12
$\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{t}$	= 144	256	400	576	784	1024	1600	2304
$\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{\frac{t}{\pi}}$	= 81	144	225	324	441	576	900	1296

Beispiel. Ein 50zähniiges Rad von 50mm Theilung hat für  $\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{t}$  den Werth  $50.7 = 350$ , was nahe an 400 liegt; das Rad erhält also fünf Speichen. Hätte das Rad 16mm Theilung, so würde man haben:  $\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{t} = 50.4 = 200$ , was mitten zwischen 256 und 144 liegt, also die Wahl zwischen 3 und 4 Speichen lässt.

Beim Rippenquerschnitt wähle man die Speichenhöhe  $h$  in der Radmitte nach dem Gefühl, wobei zu bemerken ist, dass das Verhältniss  $h = 2$  bis  $2,5t$  meistens recht gut passt, und ermittele darauf die konstante Rippenstärke  $\beta$  nach folgender Formel:

$$\frac{\beta}{b} = 0,07 \frac{3}{2} \left( \frac{t}{h} \right)^2 \dots \dots \dots (231)$$

Ergibt sich dabei eine für das Aussehen oder die Rücksicht auf das Giessen zu grosse oder zu kleine Rippendicke, so ändere man  $h:t$  entsprechend ab, und rechne aufs neue. Die nachfolgende Tabelle erleichtert dieses Verfahren.

Speichenverjüngung wie vorhin. Höhe der Nebenrippe am Kranz etwas kleiner als  $b$ , an der Nabe gleich oder etwas grösser als  $b$ . Die Speichenhöhe  $h$  in der Radmitte wird bei den Rädern mit ovalem Armquerschnitt  $= 2t$  genommen, und die Höhe nach aussen bis auf  $\frac{2}{3} 2t$  verjüngt.

## §. 232.

Tabelle über die Abmessungen der Radspeichen.

$\frac{h}{t}$	Werthe von $\frac{\beta}{b}$ , wenn								
	$\frac{3}{2} = 7$	9	12	16	20	25	30	35	40
1,50	0,20	0,28	0,37	0,50	0,62	0,78	0,93	1,08	1,24
1,75	0,16	0,21	0,27	0,37	0,46	0,57	0,69	0,80	0,91
2,00	0,12	0,16	0,21	0,28	0,35	0,44	0,53	0,61	0,70
2,25	0,10	0,12	0,17	0,22	0,28	0,35	0,41	0,48	0,55
2,50	0,08	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,34	0,39	0,45
2,75	0,06	0,08	0,11	0,15	0,18	0,23	0,28	0,32	0,37
3,00	0,05	0,07	0,09	0,12	0,16	0,19	0,23	0,27	0,31

1. Beispiel. Hat ein 6armiges 120zähniges Rad von 50 mm Theilung eine Zahnbreite von 100 mm, und wählt man die Speichenhöhe  $h$  in der Radmitte  $= 2t = 100$  mm, also  $h:t = 2$ , so hat man nach Sp. 6. Z. 3, zu nehmen:  $\beta = 0,35 \cdot 100 = 35$  mm. Fände man dies nicht bequem und zöge eine kleinere Rippendicke vor, so könnte man z. B.  $h = 2,25t = 2,25 \cdot 50 = 113$  mm wählen, und erhielte dann nach Sp. 6, Z. 4:  $\beta = 0,28 \cdot 100 = 28$  mm.

Die Speichenkreuze der Räder mit Holzzähnen und der in sie eingreifenden Eisenräder dürfen bei denselben Armhöhen-Abmessungen, welche man den Rädern für Eisen auf Eisen gibt, die 0,8fache Armdicke erhalten. Will man genauer verfahren, so ermittle man die Maasse der den Holzzähnen gleichwerthigen Eisenzähne, und suche aus deren Theilung, Breite und Zahl die zugehörigen Armdimensionen.

## §. 233.

**Die Radnabe.**

Die Nabe des Zahnrades wird je nach dem gewählten Armquerschnitt nach einer oder nach beiden Seiten schwach konisch geformt, bei grösseren Abmessungen überdies mit viertelelliptischen Stäbchen abgerundet; sie erhält eine Länge  $L = \frac{3}{4}b$ , bei sehr grossen Halbmessern etwas mehr, und eine Wanddicke  $w = 10 + 0,4h$ , wobei  $h$  die Armhöhe bezeichnet. In besonders wichtigen Fällen verfähre man nach Formel (66) §. 65.

Im Innern ist, sofern die Nabe nicht zum Warmaufziehen bestimmt ist, das Material auszusparen, sodass an den Enden Arbeitsleisten von der Breite  $\frac{3}{4}w$  stehen bleiben. Die Keilbahn wird der ganzen Nabenlänge nach, und zwar unter Verlegung des Anzuges in die Nabe, bearbeitet. Aussen auf der Nabe ist bei starken Rädern ein sanft an- und absteigender Wulst über der Keilbahn aufzusetzen, damit das Eintreiben des Keiles die Nabe nicht sprengen könne. Doch kann statt dessen auch die Umlegung von schmiedeisernen Zwängungsringen an den Nabenrändern, oder wenigstens an einem derselben, empfohlen werden. Diese Ringe, quadratisch von Querschnitt, und etwa  $\frac{1}{2}w$  stark, verstärken die Nabe ganz wesentlich, und gestatten ein zuversichtliches Eintreiben des Keiles. Vergl. Kapitel III, sodann auch §. 161 zu Ende.

## §. 234.

**Gewichte der Zahnräder.**

Das Gewicht  $G$  eines nach den vorstehenden Regeln konstruirten Stirnrades wird annähernd aus folgendem Ausdruck erhalten:

$$G = bt^2(6,25 \mathfrak{z} + 0,04 \mathfrak{z}^2) \dots \dots \dots (225)$$

wobei die obigen Bezeichnungen gelten,  $b$  und  $t$  aber in Decimetern auszudrücken sind. Folgende Tabelle erleichtert die Benutzung der gegebenen Formel, indem sie die Werthe von  $G:bt^2$  für eine Reihe von Zähnezahlen enthält. Die Tabellenwerthe entsprechen derjenigen Zähnezahl, welche gleich der Summe von Spalten- und Zeileneingang ist.

$\mathfrak{z}$	0	2	4	6	8
20	141,0	156,9	173,0	189,5	206,4
30	223,5	241,0	258,7	276,8	295,3
40	314,0	333,0	352,4	372,1	392,2
50	412,5	433,2	454,1	475,4	497,1
60	519,0	541,3	563,8	586,7	610,0
70	633,5	657,4	681,5	706,0	730,7
80	756,0	781,5	807,2	833,3	859,8
90	886,5	913,6	940,9	968,6	996,7
100	1025,0	1053,7	1082,6	1111,9	1141,6
120	1326,0	1357,9	1390,0	1422,5	1455,4
140	1659,0	1694,1	1729,4	1765,1	1801,2
160	2024,0	2062,3	2100,8	2139,7	2179,0
180	2421,0	2462,5	2504,2	2546,3	2588,8
200	2850,0	2894,7	2936,9	2984,9	3030,6
320	3311,0	3358,9	3407,0	3455,5	3504,4

*Beispiel.* Ein gusseisernes, nach obigen Regeln konstruirtes Zahnrad habe 50 Zähne, 0,5 dcm Theilung und 1 dcm Zahnbreite; bei ihm ist also  $bt^2 = 0,25$  und somit sein Gewicht nach Sp. 2, Z. 4:  $G = 0,25 \cdot 412,5 = 103,1 \text{ kg}$ . Hätte ein 50zähniges Rad 30 mm Theilung und 60 mm Breite, so würde sein Gewicht sein:  $G = 0,6 \cdot 0,3^2 \cdot 412,5 = 0,054 \cdot 412,5 = 22,28 \text{ kg}$ .

Kegelräder und Holzisenräder mit leichtem Speichenkreuz (s. Ende §. 232) werden etwas leichter, als die Tabelle angibt.