

ZWEITER ABSCHNITT.

HILFSLEHREN AUS DER GRAPHOSTATIK.

§. 21.

Vorbemerkungen.

Das Gleichgewicht von Kräften an Punktsystemen lässt sich zeichnerisch dadurch darstellen, dass man die einander das Gleichgewicht haltenden oder gleichwiegenden Kräfte nach ihrer Richtung, Grösse und der Lage ihrer Richtungslinien als gerade Strecken aufträgt. Die Richtung einer Kraft wird durch die Winkel angegeben, welche ihre Richtungslinie mit den zu Grunde gelegten Koordinatenachsen einschliesst; die Länge der darstellenden Strecke gibt die absolute Grösse der Kraft, angebrachte Pfeile deren Bewegungssinn oder Vorzeichen an, womit die algebraische Grösse vollständig wird; die Lage der Strecke im Koordinatensystem gibt endlich die noch erforderlichen Konstanten für die Gleichung der Richtungslinie an. Vermöge dieser Darstellbarkeit von Kräften durch geometrische Grössen lassen sich die Aufgaben der Statik in solche der angewandten Geometrie verwandeln, und alsdann oft weit leichter lösen, als durch die Mittel der algebraischen Analysis, namentlich in solchen Fällen, wo ohnedies die zu ermittelnden Grössen geometrische sind, und verzeichnet werden müssen. Man hat deshalb die allmählich sehr zahlreich gewordenen einschlagenden Verfahrensweisen methodisch ge-

ordnet, und unter dem Namen graphische Statik, oder wie hier gesagt werden soll, Graphostatik zusammengefasst*). Diese Lehre ist für das Maschinen-Entwerfen sehr nützlich, und ist in der unten folgenden Behandlung der Maschinen-Elemente vielfach angewandt. Zur Sicherung des Verständnisses sollen hier einige Hauptsätze der graphostatischen Methode in kurzer Fassung vorgeführt werden.

Von der Graphostatik lassen sich ohne Zwang diejenigen Methoden abtrennen, welche für das graphisch auszuführende Rechnen an sich gelten, wobei nämlich die in Rechnung kommenden Werthe nur in Bezug auf ihr Maass, z. B. Kräfte nur in Bezug auf ihre Grösse betrachtet werden, demnach auch anderes als Kräfte, überhaupt also Grössen darstellen. Es ist deshalb die Unterabtheilung des graphischen Rechnens, Reissrechnens, oder der graphischen Arithmetik, Arithmographie, gemacht worden**). In dem, was folgt, ist diese Abtrennung zwar nicht scharf hervorgehoben, aber immerhin eingehalten, indem namentlich die zuerst mitgetheilten Sätze der reinen Arithmographie angehören. Dem Mechaniker ist ihr Studium und ihre Benutzung anzuempfehlen, wie denn auch im Verlaufe des Buches mehrfache Anwendungen davon vorkommen.

§. 22.

Multiplikation von Strecken.

Die beim graphischen Rechnen gebrauchten Strecken werden mit Zirkel und Maassstab gemessen, und sind alsdann in Bezug auf ihre Grösse je nach der zu Grunde gelegten Maasseinheit, Zoll, Millimeter, Dezimeter, Quadratfuss, Kubikfuss, Geschwindigkeitseinheit, Münzeinheit u. s. w. bequem ausdrückbar. Auch ist mit denselben Hilfsmitteln das Addiren und Subtrahiren durch An- oder Abtragen je nach dem Vorzeichen, leicht zu bewirken; es

*) Siehe Culmann, die graphische Statik, Zürich 1866, welches verdienstvolle Werk die Theorie der Graphostatik gibt und sehr reich an Aufgaben und Anwendungen derselben auf die Werke des Bau-Ingenieurs ist, überhaupt diesen Wissenszweig zuerst methodisch zusammengefasst und in die Praxis eingeführt hat.

***) Siehe Dr. H. Eggers, Grdz. einer graph. Arithmetik, Schaffhausen 1865; ferner Schlesinger, über Potenzkurven, Ztschr. des österr. Ing. u. Arch. Vereins 1866, S. 156; auch E. Stamm, sul calcolo grafico, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Fasc. VI.

können also auf diese dem gewöhnlichen Zifferrechnen entsprechende Weise Zahlen durch Strecken unschwer dargestellt werden. Nicht ganz so einfach zu übertragen ist das Multiplizieren mit den so erhaltenen Grössen; mindestens bedarf dasselbe einer Erklärung. Wie aber alles Messen auf das Angeben des Verhältnisses einer Grösse zu einer als Einheit gewählten Grösse hinausläuft, so wird beim graphischen Multiplizieren die Auffindung solcher Strecken bezweckt, die zu einer als Einheit gewählten Strecke Verhältnisse besitzen, welche durch andere, mit derselben Einheit gemessene Strecken angegeben werden. Demnach heisst zwei Strecken a und b mit einander multiplizieren, oder, genauer gesprochen, eine Strecke von der Länge a mit einer solchen von der Länge b multiplizieren: eine Strecke x angeben, welche $a \times b$ mal die Einheit enthält, mit welcher die beiden gegebenen Strecken (Faktoren) gemessen sind. Dies lässt sich einfach und auf mancherlei Weise durch Anwendung ähnlicher Dreiecke erzielen. Einige Arten der Multiplikation seien hier vorgeführt.

I. Man mache OE , Fig. 13, gleich der zu Grunde zu legenden Einheit, errichte in E ein Perpendikel, schneide in dieses aus O mit $OB = b$, und in die Linie $OE \dots$ mit $OA = a$ ein, und ziehe aus A eine Parallele zu EB , so schneidet diese die Linie $OB \dots$ in C , und es ist OC das gesuchte Produkt x . Denn es ist $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OE}$, d. i. $x = \frac{ab}{1}$, da OE die Einheit ist. Dieses Verfahren setzt voraus, dass ein Faktor (b) grösser als die Einheit sei.

II. Fig. 14. Unter Beibehaltung des vorigen Verfahrens im übrigen kann EB auch schief statt senkrecht auf OE stossen. Alsdann können beide Faktoren kleiner als die Einheit sein.

Fig. 13.

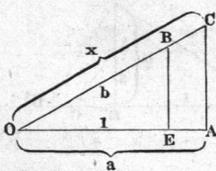


Fig. 14.

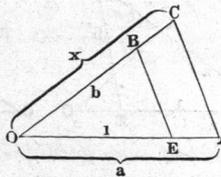
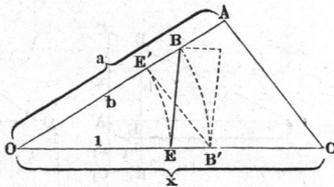


Fig. 15.



III. Man mache, Fig. 15, OE und OB wie vorhin, trage $OA = a$ auf die Linie $OB \dots$, und ziehe AC so, dass $\angle OAC = \angle OEB$, d. h. dass AC antiparallel EB , dann ist OC das gesuchte Produkt x , da die Dreiecke OEB und OAC ähnlich

sind. Die antiparallele Richtung findet man, indem man $OE' = OE$, $OB' = OB$ und $AC \parallel E'B'$ zieht. (Würde man das Dreieck $BE'B'$ um eine durch BB' gehende Achse nach rechts klappen, so würden die beiden Dreiecke $BB'E'$ und $BB'E$ ein Parallelogramm bilden, woher die Bezeichnung antiparallel.) Am bequemsten ist es, wenn EB senkrecht auf OE steht, was aber nur geht, wenn $b > 1$ ist.

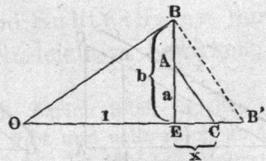
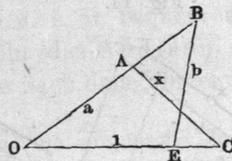
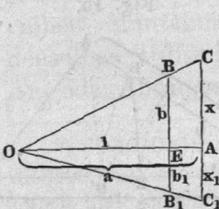
IV. Man mache, Fig. 16, $OE =$ der Einheit, trage auf $OE \dots$ den Faktor $OA = a$ auf, und errichte in E ein Perpendikel oder eine geneigte Linie, auf welcher man $EB = b$ auftrage; zieht man dann durch A eine Parallele zu EB , so schneidet die Verlängerte $OB \dots$ von dieser das Produkt $AC = x$ ab, indem $CA : OA = BE : OE$, oder $x : a = b : 1$. a und b können kleiner oder grösser als 1 sein. — Macht man noch $EB_1 = b_1$ und zieht die OB_1 bis zum Schnitte C_1 mit der Verlängerten CA , so ist $AC_1 = x_1$ das Produkt von a und b_1 , CC_1 also das Produkt von a mit BB_1 ; $x + x_1 = a(b + b_1)$. Es kann mithin der Faktor b , der mit a multipliziert werden soll, auch zu beiden Seiten der Einheitslinie OE auf die Normale (oder Geneigte) $BE \dots$ getragen werden; das gesuchte Produkt $ab = x$ wird dann auf der Parallelen zu b , die auf der Einheitslinie um a von O absteht, von den beiden aus O durch die Endpunkte von b gezogenen Strahlen abgeschnitten.

V. Man mache, Fig. 17, $OE =$ der Einheit, $EB =$ dem Faktor b , OB beliebig, nur $< OE + EB$, ferner OA auf $OB \dots =$ dem Faktor a , und lege durch A eine Antiparallele zu EB (siehe bei III.), so schneidet von dieser die $OE \dots$ das Produkt $AC = x$

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.



ab. Denn es ist $CA : OA = BE : OE$, oder $x : a = b : 1$. a und b können kleiner oder grösser als 1 sein.

VI. Man mache wieder, Fig. 18, $OE = 1$, errichte in E ein

Perpendikel, mache $EA = a$, $EB = b$, verbinde O mit B , ziehe BB' normal zu OB , und lege durch A eine Parallele zu BB' , so schneidet diese von der Verlängerung der OE das Stück $EC =$ dem Produkt x ab. Denn es ist $EC : EA = BE : OE$, oder $x : a = b : 1$.

In Zeichnungen kommt es häufig vor, dass zu multiplizierende Strecken eine gegebene, zum graphischen Multiplizieren schon brauchbare Lage haben, wenn dieselben auch nicht so bequem wie die bisher benutzten sind. Alsdann kann von folgenden Multiplikationsweisen oft Gebrauch gemacht werden.

VII. Fig. 19. $OA = a$ und $B'B = b$ stehen senkrecht oder geneigt auf einander, so aber, dass B' zwischen O und A fällt. Dann trage auf $OA \dots$ die Einheit OE auf, verbinde B mit E , und lege durch A eine Parallele zu BE , und durch den Schnittpunkt C der Parallelen und der Linie $OC \dots$ die Parallele CC' zur Gegebenen BB' , so schneidet $OC \dots$ von der $CC' \dots$ das Produkt $CC' = x$ ab. Denn es ist $CC' : OA = BB' : OE$, oder $x : a = b : 1$.

VIII. Fig. 20. Gegeben wie vorhin, $OA = a$ und $BB' = b$, senkrecht oder geneigt zu OA . Dann trage $OE =$ der Einheit von O aus parallel zu BB' auf, verbinde E mit A , und ziehe durch B eine Parallele zu EA , so schneidet diese die $OA \dots$ in C ein und es ist $B'C$ das Produkt x . Denn man hat $B'C : B'B = OA : OE$, oder $x : b = a : 1$.

Fig. 19.

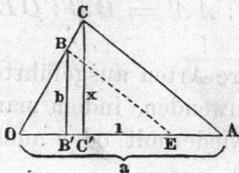


Fig. 20.

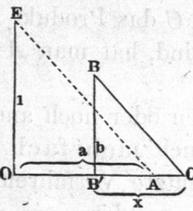
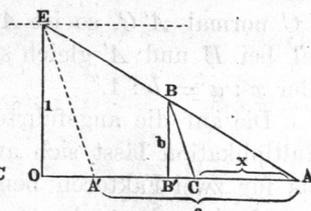


Fig. 21.



IX. Fig. 21. Gegeben wie vorhin $AA' = a$, und senkrecht dazu $B'B = b$, so ziehe $AB \dots$ bis zum Schnitt E mit einer von AA' um die Einheit OE abstehenden Parallelen zu AA' , fälle das Loth EO , welches dann $=$ der Einheit ist, ziehe EA' und zu diesem parallel eine Gerade durch B , so schneidet diese von der AA' das Produkt $AC = x$ ab. Denn es ist $AC : CB$

$= AA' : A'E$, also auch $AC : B'B = AA' : EO$, oder $x : b = a : 1$.

X. Fig. 22. Gegeben $AA' = a$, und $BO = b$ senkrecht zu AA' . Dann schneide mit der Zirkelöffnung $OE =$ der Einheit aus O in AA' ein, ziehe durch A' eine Parallele zu OE , durch A eine Normale dazu, so schneiden diese einander in C , und es ist AC das Produkt x . Denn, da der Winkel $CAA' = BOE$, so ist $AC : AA' = OB : OE$, oder $x : a = b : 1$. Die Strecke AA' wurde hier auf eine zu OE senkrechte Linie projiziert. Eine solche Projektion bezeichnet man*) kurz als Antiprojektion von AA' auf OE .

Fig. 22.

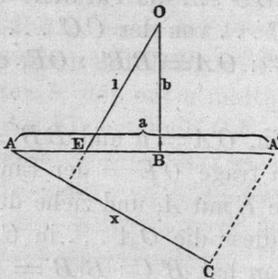
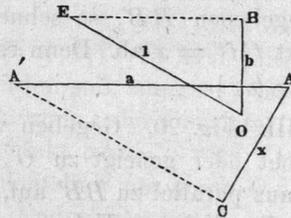


Fig. 23.



eine Parallele zu AA' , schneide aus O mit der Zirkelöffnung $OE =$ der Einheit in $BE \dots$ ein, mache $A'C$ parallel EO und AC normal $A'C$, so ist AC das Produkt x . Denn, da die Winkel bei E und A' gleich sind, hat man $AC : AA' = OB : OE$, oder $x : a = b : 1$.

Die auf die angeführten oder noch andere Arten ausgeführte Multiplikation lässt sich auch mehrfach anwenden, indem man das für zwei Faktoren benutzte Verfahren wiederholt oder auch danach eines der anderen anwendet.

Soll z. B. das Produkt $a \cdot b \cdot c$ dreier Strecken gefunden werden, so ermittelt man zuerst etwa nach (I.) das Produkt $x_1 = ab$, Fig. 24, klappt $OC = ab$ nach OC' auf $OA \dots$, trägt aus O die $OD = c$ auf, errichtet in C' ein Perpendikel und verlängert OD bis zum Schnitte F mit $C'F$, worauf OF das gesuchte

*) Siehe Culmann's graphische Statik.

Produkt $x = abc$ ist. Oder man macht, Fig. 25, nach Auffindung von $OC' = ab$, die Strecke $ED = c$ (nach IV.) und ver-

Fig. 24.

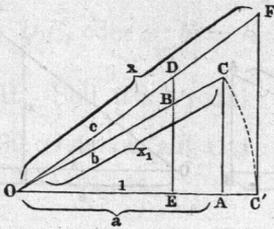
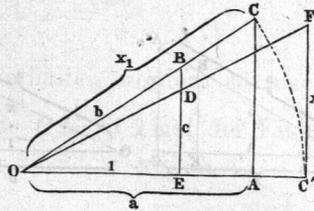


Fig. 25.



längert $OD \dots$ bis zum Schnitte F mit einem Perpendikel in C' , worauf $C'F = x$ u. s. w.

§. 23.

Division von Strecken.

Die Division kann als Umkehrung der Multiplikation sofort aus dem Gegebenen abgeleitet werden. Beim graphischen Dividiren einer Strecke a durch eine Strecke b hat man eine dritte Strecke x anzugeben, welche $\frac{a}{b}$ mal die Einheit der a und b enthält. Aus den oben behandelten Aufgaben gehen u. a. die folgenden Divisionsarten hervor.

I. Man mache, Fig. 26 (a. f. S.), $OE =$ der Einheit, errichte in E eine Senkrechte (oder eine geneigte Linie), schneide mit dem Divisor $OB = b$ in dieselbe ein, ziehe $OB \dots$ und mache $OA =$ dem Dividenten a . Wird darauf durch A eine Parallele zu BE gezogen, so schneidet diese von der $OE \dots$ den Quotienten $OC = x$ ab. Denn es ist: $OC:OE = OA:OB$, d. i. $x:1 = a:b$, oder $x = \frac{a}{b}$.

II. Man mache OE , Fig. 27 (a. f. S.), $=$ der Einheit, ferner auf $OE \dots$ die Strecke $OB =$ dem Divisor b , errichte in B ein Perpendikel, und schneide in dasselbe aus O mit $OA =$ dem Dividenten a ein. Wird dann in E eine Senkrechte errichtet, so schneidet diese von der $OA \dots$ den Quotienten $OC = x$ ab; denn es ist wieder $OC:OE = OA:OB$, oder $x:1 = a:b$.

III. Macht man, Fig. 28, $OB =$ dem Divisor b , auf $OB \dots$ die $OE = 1$, senkrecht auf OB die $AB =$ dem Dividenden a ,

Fig. 26.

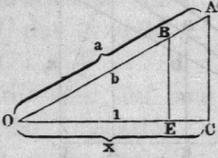


Fig. 27.

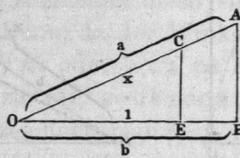
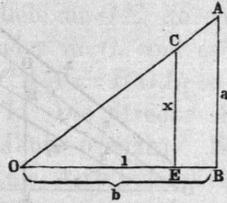


Fig. 28.



zieht OA , und errichtet in E ein Perpendikel auf OE , so wird von diesem durch die $OA \dots$ der Quotient $EC = x$ abgeschnitten. Denn es ist $EC : OE = AB : OB$, oder $x : 1 = a : b$ u. s. w.*).

§. 24.

Multiplikation verbunden mit Division.

Wenn man eine Zahl a mit einem Bruche $\frac{b}{c}$ zu multiplizieren hat, so ist eine Multiplikation von a mit b und eine Division von $a \cdot b$ durch c vorzunehmen, um das Resultat x zu finden. Bedenkt man aber, dass für $x = \frac{ab}{c}$ zu schreiben ist $x : a = b : c$, so sieht man ein, dass die Operationen dadurch vereinigt werden können, dass man bei einem Multiplikationsverfahren statt der Einheit OE den Nenner c aufträgt. Es wird dann die Strecke a statt mit dem Verhältniss $\frac{b}{1}$ mit demjenigen $\frac{b}{c}$ multipliziert. Das Folgende wird zur völligen Erläuterung genügen.

1. Um eine Strecke a mit dem Bruche $\frac{b}{c}$ zu multiplizieren, mache man, Fig. 29, $OA = a$, OE auf $OA \dots$ gleich dem

*) Wegen anderer Regeldetri-Verfahren, z. B. Aufsuchung des gemeinschaftlichen Nenners, Zählers u. s. f. ist das obenangemerkte empfehlenswerthe Schriftchen von Eggers nachzusehen.

Nenner c , errichte in E ein Perpendikel auf OE , in welches man mit $OB=b$ aus O einschneide, ziehe die $OB\dots$, und lege durch A eine Parallele zu EB , so schneidet dieselbe von der $OB\dots$ den Quotienten $OC=x$ ab. Denn es ist $OC:OB=OA:OE$, oder $x:b=a:c$, d. i. $x=\frac{ab}{c}$.

II. Soll das Produkt $\frac{ab}{2}$ erhalten werden, so mache man, Fig. 30, $OA=a$, auf $OA\dots$ die $OE=2$ mal der Einheit oder

Fig. 29.

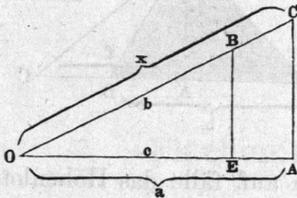
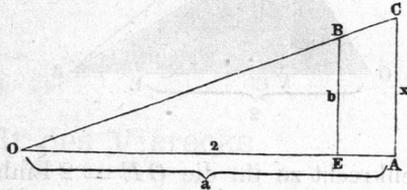


Fig. 30.



$=2$, $EB=b$ senkrecht zu OE , lege durch A eine Parallele zu EB , und ziehe die $OB\dots$, so schneidet diese von der $AC\dots$ das gesuchte Produkt $AC=x$ ab. Denn es ist $AC:OA=BE:OE$, oder $x:a=b:2$, d. h. $x=\frac{ab}{2}$.

Das hier angegebene Verfahren, welches auf sämtliche Multiplikationsarten in §. 22 sofort angewandt werden kann, bietet beim Berechnen von Flächeninhalten sehr gute Dienste, wie sofort gezeigt werden soll.

§. 25.

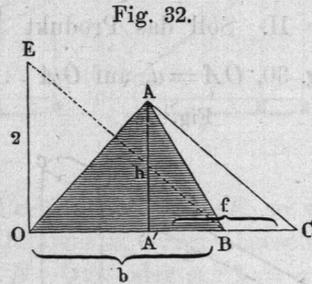
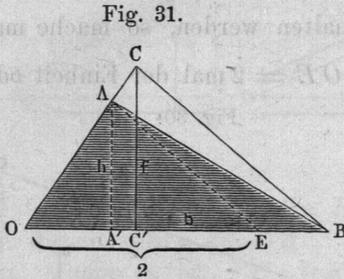
Flächeninhalt des Dreiecks.

Der Inhalt eines Dreiecks als halbes Produkt aus Grundlinie und Höhe ist nach dem vorigen Paragraphen sehr leicht graphisch zu berechnen.

I. Fig. 31 (a. f. S.). Nachdem man eine Seite $OB=b$ des auszumessenden Dreiecks OAB als Grundlinie gewählt hat, wobei das Loth AA' = der Höhe h nicht gezogen zu werden braucht, trägt man auf OB die Strecke $OE=2$ Einheiten (Zoll, Dezimeter etc.) ab, verbindet, oder denkt verbunden, A mit E , und zieht

durch B eine Parallele zu EA bis zum Schnitte C mit der verlängerten $OA \dots$, so ist das aus C gefällte Loth CC' (nach VII., §. 22, und II., §. 24) das Produkt $\frac{hb}{2}$, also der Inhalt f des Dreieckes.

II. Fig. 32. Trage an das Ende der Grundlinie $OB = b$



senkrecht zu ihr die $OE = 2$ Einheiten auf, falle das Höhenloth $AA' = h$, und ziehe durch A eine Parallele zu EB , so schneidet diese von der Grundlinie $OB \dots$ das Stück $A'C$ ab, welches das Produkt $f = \frac{hb}{2}$ ist (Bew. §. 22, VIII., und §. 24, II.).

III. Verlängere die Grundlinie BC und die Seite BA des Dreieckes ABC , Fig. 33, bis diese Linien die dem Höhenloth $h = AA'$ parallele $OE = 2$ Einheiten zwischen sich fassen, verbinde E mit C und ziehe durch A eine Parallele zu EC , so schneidet diese von der Grundlinie das Stück BD ab, welches das Produkt $f = \frac{hb}{2}$ ist (Bew. §. 22, IX., und §. 24, II.).

IV. Schneide aus dem Scheitel O des Dreieckes AOB ,

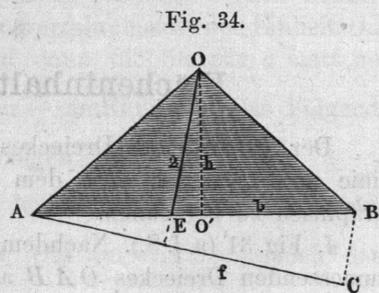
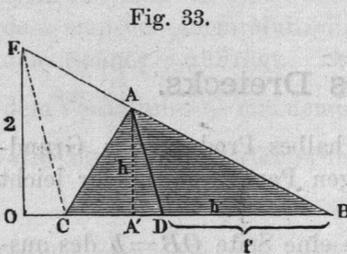


Fig. 34, mit der Zirkelöffnung $OE = 2$ Einheiten in die gegenüberliegende Seite $AB = b$ ein und antiprojizire die Grundlinie

AB auf die OE durch Ziehung der zu OE parallelen $BC \dots$ und der zu ihr normalen AC , so ist letztere das Produkt f aus der Grundlinie b und der Hälfte der Höhe $h = OO'$, also der Flächeninhalt des Dreieckes (Bew. §. 22, X., und §. 24, II.).

War die Einheit 1 Zoll, so gibt das Maass von f , in Zollen ermittelt, die Zahl der Quadratzolle an, welche die Dreiecksfläche enthält, bei Dezimeter gibt es Quadratdezimeter u. s. f. Wäre $f = \frac{7}{8}$ Zoll, so hätte das Dreieck $\frac{7}{8} \square$ Zoll Inhalt; wäre f bei der Einheit Dezimeter 72 Millimeter gross ausgefallen, so wäre der Dreieckinhalt 0,72 Quadratdezimeter, oder $0,72 \cdot 10000 = 7200 \square^{\text{mm}}$.

§. 26.

Flächeninhalt des Vierecks.

Beim Viereck ist der Flächeninhalt entweder direkt bestimmbar, wie beim Parallelogramm, oder man kann es in Dreiecke zerlegen, die man einzeln oder zusammen misst, oder aber man verwandelt das Viereck in ein gleichgrosses Dreieck.

I. Ausmessung des Parallelogramms $ABCO$, Fig. 35. Die Seite OA als Grundlinie betrachtend, macht man $OE =$ der Einheit, errichtet das Perpendikel $EE' = h$ und multipliziert (wie in IV. §. 22) durch Ziehung der $OE' \dots$ und des Perpendikels in A , dessen Abschnitt AD dann der Inhalt $f = bh$ ist.

Fig. 35.

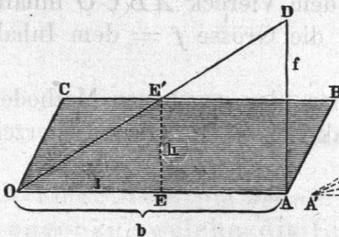
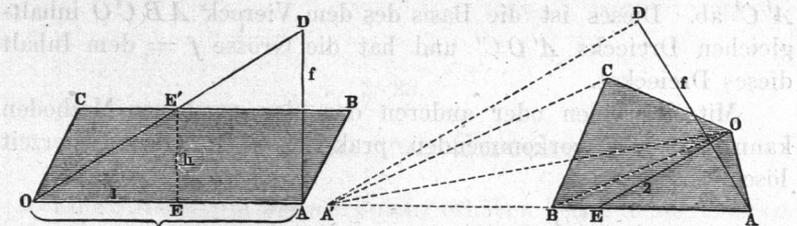


Fig. 36.



II. Das Viereck $ABCO$, Fig. 36, ist durch Ziehung der zur Diagonale OB parallelen $CA' \dots$ bis zum Schnitte mit der verlängerten Grundlinie $AB \dots$ leicht in ein Dreieck verwandelt, da $\triangle OBC = \triangle OBA'$. Es kann nunmehr nach IV. §. 25 ver-

fahren, nämlich $OE = 2$ und $AD =$ der Antiprojektion der AA' auf OE gemacht werden, worauf $AD = f$.

III. Fig. 37. Die Diagonale $AC = b$ theilt das Viereck $ABCO$ in zwei Dreiecke, deren Höhen die Summe $OO' =$ der Antiprojektion der OB auf AC haben. Die Multiplikation von OO' mit $\frac{b}{2}$ kann nun sofort nach XI. §. 22 und II. §. 24 vorgenommen werden, indem man $O'EB \dots$ parallel AC zieht, $OE = 2$ macht, $AD \parallel EO$ und CD normal AD zieht, worauf CD das gesuchte Produkt $f =$ dem Inhalte des Viereckes ist.

Fig. 37.

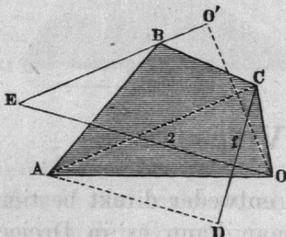
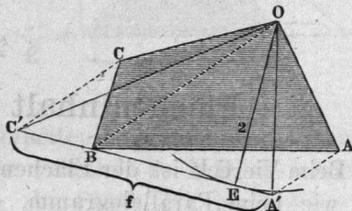


Fig. 38.



IV. Fig. 38. Das Viereck $ABCO$ kann auch auf ein Dreieck von der Höhe 2 gebracht werden, worauf dann die Grundlinie das Produkt $\frac{hb}{2}$ ist. Beschreibe um O einen Kreis mit dem Halbmesser $OE = 2$, und lege an denselben eine Tangente, welche durch die O gegenüberliegende Ecke geht. Ziehe darauf durch die beiden anderen Ecken A und C Parallelen zur Diagonalen OB , so schneiden diese von der genannten Tangente das Stück $A'C'$ ab. Dieses ist die Basis des dem Viereck $ABCO$ inhaltgleichen Dreiecks $A'OC'$ und hat die Grösse $f =$ dem Inhalt dieses Dreieckes.

Mit der einen oder anderen der hier gegebenen Methoden kann man die vorkommenden praktischen Aufgaben jederzeit lösen.

§. 27.

Flächeninhalt von Polygonen.

Zur Ausmessung von Polygonen bedient man sich der Verwandlung derselben in Dreiecke. Diese geschieht auf folgende Weise.

Aus einer Ecke O des Polygons $OABCDE$, Fig. 39, ziehe die Diagonale OB , welche O mit dem nächsten Eckpunkte verbindet, lege parallel dazu eine Gerade durch den zwischen O und B befindlichen Eckpunkt und verlängere die dritte Seite CB bis zum Schnitte B' mit der genannten Parallelen; verbindet man dann O mit B' , so ist, da $\triangle OBB' = \triangle OBA$, das Vieleck $OB'CDE$ inhaltgleich mit dem ursprünglichen, hat aber eine Ecke weniger. Man ziehe nun OC und durch B' die $B'C' \parallel OC$ u. s. f., auch an der anderen Seite von O kann so verfahren werden, worauf schliesslich ein Dreieck $OC'D'$ erhalten wird, welches dem Polygon inhaltgleich ist, und leicht nach dem Früheren auszumessen ist. Die unbenutzten Verbindungslinien OB' u. s. w. brauchen nicht gezogen zu werden. Das Verfahren eignet sich, wie Culmann hervorhebt und allgemeiner ausführt, trefflich für die Ausmessung von Bahn- und Strassenprofilen.

Fig. 39.

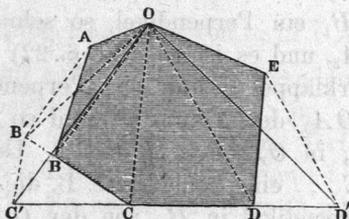
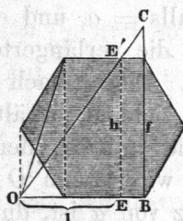


Fig. 40.



Regelmässige Polygone, wie das Sechseck in Fig. 40, brauchen nur zur Hälfte verwandelt zu werden, worauf sie wie Parallelogramme ausgemessen werden können.

§. 28.

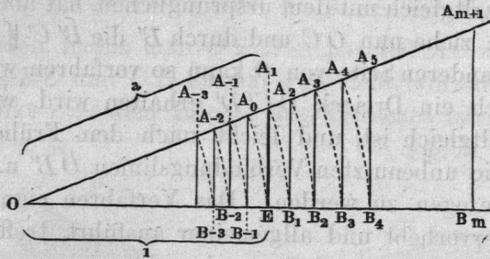
Potenziren von Strecken.

Eine Strecke a in die n te Potenz erheben heisst eine Strecke x angeben, welche die Einheit von a so oft enthält, als die n te Potenz von a angibt, oder welche a^n Einheiten der a lang ist. Das einzuschlagende Verfahren lässt sich, wenn n eine ganze, übrigens positive oder negative Zahl ist, sofort aus der graphischen Multiplikation und Division ableiten, indem es als eine wiederholte Multiplikation oder Division von a mit a aufzufassen ist.

Auch dieses Verfahren ist, entsprechend den früher aufgezeigten Mannigfaltigkeiten, auf mancherlei verschiedene Weisen ausführbar.

I. (Siehe §. 22, I.) Man mache OE , Fig. 41, = der Einheit, errichte in E ein Perpendikel und schneide in dasselbe aus

Fig. 41.



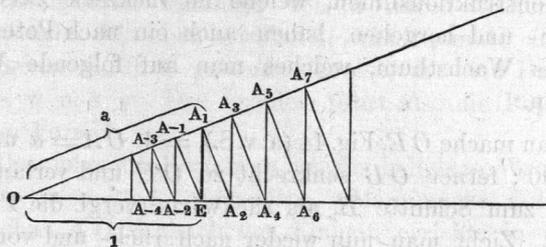
O mit $OA_1 =$ dem Grundfaktor a ein, mache OB_1 auf der $OE \dots$ ebenfalls $= a$, und errichte in B_1 ein Perpendikel, so schneidet dieses die verlängerte OA_1 in A_2 , und es ist (nach I. §. 22) $OA_2 = a^2$. Dieses nach OB_2 niederklappend, und das Perpendikel B_2A_3 ziehend, erhält man in OA_3 den Werth a^3 , und so fortfahrend in OB_4 den Werth a^4 , in OB_5 den a^5 u. s. f. Ueberhaupt wird, wenn OB_m auf $OE \dots$ eine beliebige, z. B. die m te Potenz von a ist, durch das Perpendikel in B_m von der $OA_1 \dots$ die $m + 1$ te Potenz von a in dem Stücke OA_{m+1} abgeschnitten. Umgekehrt wird durch ein Loth aus dem Endpunkte A_{m+1} einer Potenz von a auf die Achse $OE \dots$ von dieser ein Stück OB_m abgeschnitten, welches die um 1 verminderte Potenz von a ist (vergl. die Divisionsregel in I. §. 23).

Hieraus folgt ferner, dass das Loth A_1E aus A_1 auf $OE \dots$ die Potenz a^1 auf a^0 , d. i. 1 bringt, wie auch durch die Voraussetzung klar. Trägt man nun wieder OE nach OA_0 und fällt ein Loth A_0B_{-1} , so ist $OB_{-1} = a^{-1}$ oder $\frac{1}{a}$, d. i. der reziproke Werth von OA_1 ; so fortfahrend erhält man in OB_{-2} den Werth $\frac{1}{a^2}$, in OB_{-3} den Werth $\frac{1}{a^3}$ u. s. f.

II. Durch Verbindung der Multiplikationsregeln I. und III. §. 22 erhält man folgendes Potenzirverfahren. Man mache wieder, Fig. 42 $OE = 1$, $OA_1 = a$, EA_1 senkrecht zu OE , und ziehe durch A_1 eine Senkrechte auf OA_1 , so schneidet

diese die $OE \dots$ in A_2 , und es ist $OA_2 = a^2$; in A_2 ein Perpendikel bis zum Schnitte A_3 mit $OA_1 \dots$ errichtend, erhält man

Fig. 42.



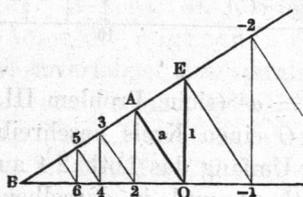
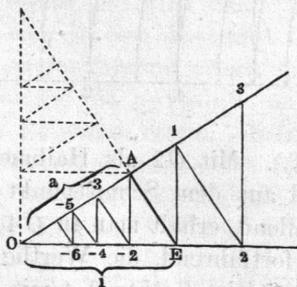
$OA_3 = a^3$, darauf durch ein weiteres Perpendikel auf OA_1 in OA_4 den Werth a^4 , und so fortfahrend auf der Achse $OE \dots$ die geraden, auf $OA_1 \dots$ die ungeraden, und zwar beidemale positiven Potenzen von a . Von E aus rückwärts schreitend erhält man in OA_{-1} die Reziproke von a , in OA_{-2} den Werth $\frac{1}{a^2}$, und so fortfahrend auf $OA_1 \dots$ die ungeraden negativen, auf $OE \dots$ die geraden negativen Potenzen von a .

Die beiden vorstehenden Verfahren setzen voraus, dass $a > 1$ sei; bei den beiden folgenden ist dagegen $a < 1$ vorausgesetzt.

III. Nachdem OE , Fig. 43, gleich der Einheit gemacht, trage man $OA = a$ so auf, dass AE senkrecht zu OA steht. Zieht man dann das Loth $E1$, das Gegenloth 12 , dann Loth 23 , Gegenloth 34 u. s. w., so ist: $O1 = \frac{1}{a}$, $O2 = \frac{1}{a^2}$, $O3 = \frac{1}{a^3}$ u. s. f.

Fig. 43.

Fig. 44.



Von E aus nach links schreitend und abwechselnd Perpendikel und Gegenperpendikel ziehend, erhält man die Werthe: $O - 2$

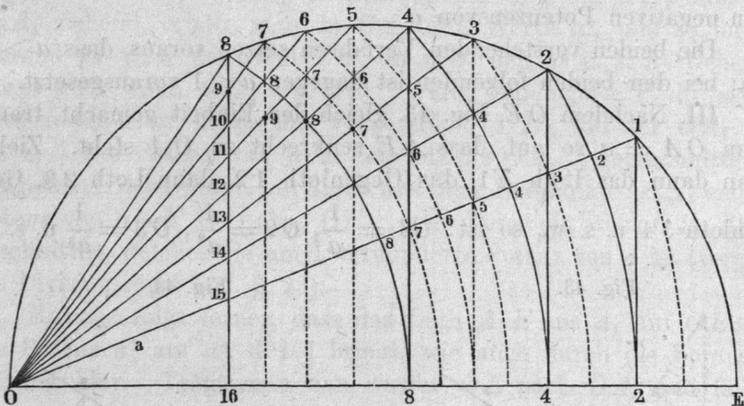
$= a^2$, $O - 3 = a^3$, $O - 4 = a^4$ u. s. w., hier also links die positiven, rechts die negativen Potenzen von a (Bew. s. III. §. 22, auch aus dem obigen Verfahren II. zu entnehmen).

Die Konstruktionslinien, welche im Zickzack zwischen den Achsen hin- und hergehen, haben auch ein nach Potenzen fortschreitendes Wachstum, welches man auf folgende Weise benutzen kann.

IV. Man mache OE , Fig. 44 (a. v. S.), $= 1$, $OA = a$ und Winkel $OA E = 90^\circ$, ferner OB senkrecht zu OE und verlängere EA sowohl bis zum Schnitte B , als rückwärts (vergl. die Punktirung in Fig. 43). Zieht man nun wieder nach rück- und vorwärts die Lothe und Gegenlothe wie vorhin, so erhält man folgende Werthe: $OA = a$, $A 2 = a^2$, $2 3 = a^3$ u. s. f., ferner $OE = a^0$, $E - 1 = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $- 1 - 2 = \frac{1}{a^2}$, $- 2 - 3 = \frac{1}{a^3}$ u. s. w.

V. Man schlage über OE als Einheit einen Halbkreis, Fig. 45, mache $O 1 = a$, und fälle aus 1 auf OE das Loth 1 2, so ist

Fig. 45.



$O 2 = a^2$ (siehe Problem III. dieses §.). Mit $O 2$ als Halbmesser aus O einen Kreis beschreibend und aus dem Schnittpunkt mit dem Umfang das Loth 2 4 auf OE fallend, erhält man in $O 4$ den Werth a^4 , und, in derselben Weise fortfahrend, die Werthe $O 8 = a^8$, a^{16} u. s. w. Der Schnittpunkt 3 des Lothes 2 4 mit dem Strahl $O 1$ steht aber von O um a^3 ab. Denn es ist $O 3 : O 1 = O 4 : O 2$, oder: $O 3 : a = a^4 : a^2$, d. i. $O 3 = a^3$. Jedes der aus einem Potenzpunkt des Umfanges auf die OE gefällten Lothe

§. 29.

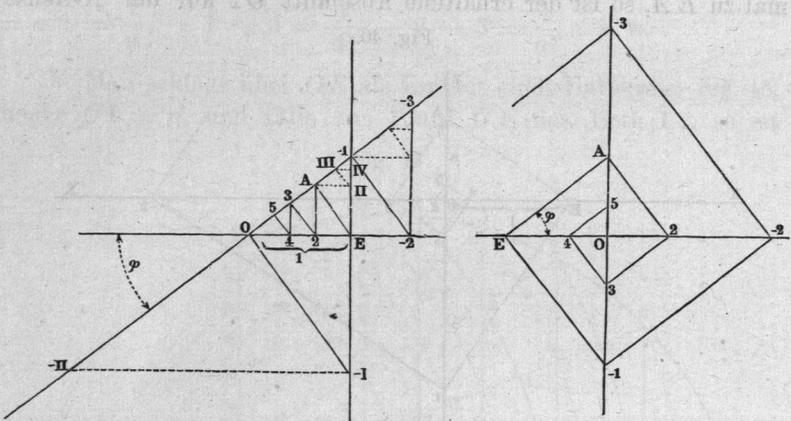
Potenziren der trigonometrischen Funktionen.

Die soeben besprochenen Potenzirungsmethoden lassen sich bequem zur Bildung der Potenzen der trigonometrischen Funktionen benutzen, worauf wegen der Anschaulichkeit der sich darstellenden Fortschreitungen aufmerksam gemacht zu werden verdient.

I. Potenzen des Cosinus und Sinus. Mache OE , Fig. 47,

Fig. 47.

Fig. 48.



$= 1$, Winkel $EOA =$ dem Winkel φ , dessen trigonometrische Funktionen potenzirt werden sollen, EA senkrecht zu $OA \dots$ Zieht man dann die Lothe und Gegenlothe $A2, 23, 34$ u. s. w., ferner $E - 1, -1 - 2$ u. s. f., so hat man: $OA = \cos \varphi$, $O2 = \cos^2 \varphi$, $O3 = \cos^3 \varphi$, $O4 = \cos^4 \varphi$; $O - 1 = \frac{1}{\cos \varphi}$, $O - 2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ u. s. w. Zieht man die Lothe und Gegenlothe $AII, II. III., III. IV. \dots$, $O - I, - I. - II$ u. s. w., so hat man: $AE = \sin \varphi$, $AII. = \sin^2 \varphi$, $II. III. = \sin^3 \varphi$, $III. IV. = \sin^4 \varphi \dots$, $O - I. = \frac{1}{\sin \varphi}$, $- I. - II. = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$ u. s. f.

II. Potenzen der Tangenten und Cotangenten. Mache, Fig. 48, $EO =$ der Einheit und Winkel $OEA = \varphi$. Zieht man

darauf von A vorwärts und rückwärts die Wechsellothe wie bei V. §. 28, so erhält man die folgenden Werthe: $OA = \text{tang } \varphi$, $O2 = \text{tang}^2 \varphi$, $O3 = \text{tang}^3 \varphi$ u. s. f., $OE = 1 = \text{tang}^0 \varphi$, $O - 1 = \text{cotang } \varphi$, $O - 2 = \text{cotang}^2 \varphi$ u. s. w.

Die Convergenz und Divergenz der hier so einfach darstellbaren Potenzenfolgen wird durch die Zeichnung, wie man sieht, sehr übersichtlich gemacht.

§. 30.

Wurzelausziehen.

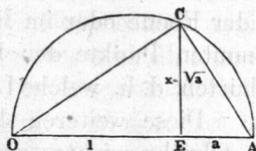
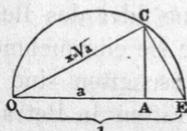
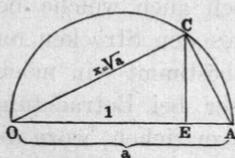
Das Ausziehen der Quadratwurzel ist graphisch leicht zu bewirken, indem \sqrt{a} als mittlere Proportionale zwischen a und 1 auf mancherlei Art bequem zu verzeichnen ist. Auch lassen sich aus den oben angegebenen Potenzirungsmethoden die des Quadratwurzelziehens, deren hier drei stehen mögen, unschwer ableiten.

I. Man mache, Fig. 49, $OE =$ der Einheit, $OA = a$,

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.



schlage einen Halbkreis über OA , errichte in E ein Loth, welches in C von dem Halbkreise geschnitten wird, und ziehe OC , so ist OC die gesuchte Grösse $x = \sqrt{a}$ (siehe §. 28). Hierbei ist $a > 1$, im folgenden Verfahren dagegen $a < 1$ vorausgesetzt.

II. Mache, Fig. 50, $OE = 1$, $OA = a$, schlage einen Halbkreis über OE , errichte in A ein Loth, und ziehe nach dem Schnitte C des Halbkreises mit dem Lothe die OC , so ist diese die gesuchte Grösse $x = \sqrt{a}$.

III. Mache, Fig. 51, $OE = 1$, und auf der verlängerten $OE \dots$ die Strecke $EA = a$, schlage über OA einen Halbkreis, und errichte in E ein Loth, so schneidet dieses den Halbkreis in C , und es ist EC der gesuchte Werth $x = \sqrt{a}$.

Das Ausziehen der vierten Wurzel kann durch zweimalige Ausziehung der Quadratwurzel geschehen, überhaupt dieses Ver-

fahren auf Halbiring des Exponenten eines Radikanden angewandt werden. Schwieriger dagegen ist die Ausziehung der dritten, fünften u. s. w. Wurzel, überhaupt der auf dem soeben erläuterten Wege nicht erhaltbaren Wurzeln aus Strecken. Culmann in seinem angeführten Werke nimmt dabei die logarithmische Spirale zu Hilfe, Schlesinger (siehe oben) benutzt eine nach dem Verfahren in §. 28 verzeichnenbare Schaar von Kurven („Potenzkurven“); andere immerhin nicht ganz einfache Verfahrungsweisen sind in den angeführten Quellen angegeben, worauf deshalb verwiesen wird. Hier soll nicht weiter auf dieselben eingegangen werden, da in den später zu behandelnden Aufgaben davon keine Anwendung gemacht wird.

§. 31.

Das Addiren und Subtrahiren von Kräften.

Bei den bisher vorgenommenen rechnerischen Operationen an Strecken wurde nur deren absolute Grösse oder Maass ins Auge gefasst, aber nicht berücksichtigt, welche Richtung die Strecken in der Ebene oder im Raum etwa hatten, noch auch welche bestimmten Punkte der Ebene oder des Raumes den Strecken angehörten, d. h. welche Lage sie einzunehmen bestimmt sein möchten. Diese weiteren Eigenschaften sind aber bei Betrachtung des Gleichgewichtes von Kräften in Betracht zu ziehen, wozu die folgenden Untersuchungen und Aufgaben Anleitung geben. Wir gehen demnach jetzt von den bloss arithmographischen zu den graphostatischen Methoden über.

Wenn mehrere Kräfte auf einen Punkt wirken oder ein Kraftbüschel bilden, so lässt sich deren Gesamtwirkung auf den Punkt durch Addition der Projektionen der die Kräfte darstellenden Strecken auf die Koordinatenachsen erhalten. Diese Addition der Projektionen der Kräfte auf zeichnerischem Wege nennt man das graphische Addiren der Kräfte. Die Summe wird erhalten, wenn man die Kräfte, gleichviel ob sie in der Ebene wirken oder nicht, ihrer Richtung und Grösse nach Ende an Ende so aufträgt, dass in dem entstehenden Polygon ein den Pfeilrichtungen folgender Punkt alle Seiten durchläuft, ohne eine Seite zweimal zu befahren. Sind die Kräfte, z. B. 1, 2, 3 bis 6, Fig. 52, an O im Gleichgewicht, so ist die Summe ihrer Projektionen = Null, das aus den Strecken 1 bis 6 gebildete Polygon, Fig. 53,

geschlossen. Der beim Addiren von Kräften zu bildende Linienzug heisst Kräftepolygon. Die Ordnung, in welcher man im

Fig. 52.

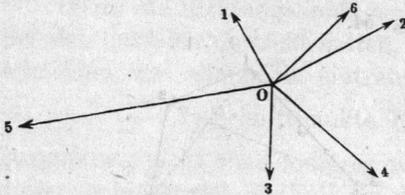
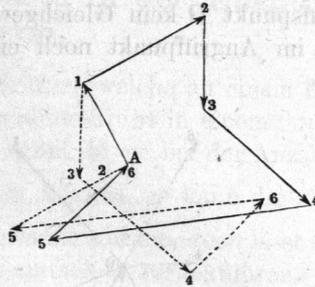


Fig. 53.



Kräftepolygon die Kräfte aufeinander folgen lässt, ist gleichgültig; so kann in Fig. 53 der Zug 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder der Zug 1, 3, 4, 6, 5, 2 u. s. w. gewählt werden, ohne dass dadurch das Ergebnis geändert wird.

Das Subtrahiren von Kräften ist wie arithmetisch, so auch graphisch eine Umkehrung des Addirens, und wird durch Umkehren der Pfeilrichtungen der abzuziehenden Kräfte, die alsdann wie oben addirt werden, bewirkt. Für die Graphostatik eignen sich recht eigentlich nur ebene Kräftepolygone, weshalb man unebene auf ebene zurückzuführen hat, was durch passende Kräftezerlegung geschieht. Die vorstehend erklärte Addition und Subtraktion von Strecken, welche Kräfte darstellen, aber auch andere Dinge darstellen könnten, heisst die geometrische Addition und Subtraktion. Ihr schliesst sich die geometrische Multiplikation und Division ebenso an, wie oben die arithmographischen Verfahrungsweisen sich aneinander reihen. Doch wird auf diese, hier später nicht benutzten Methoden, welche übrigens das grösste Interesse des Geometers verdienen, nicht eingegangen.

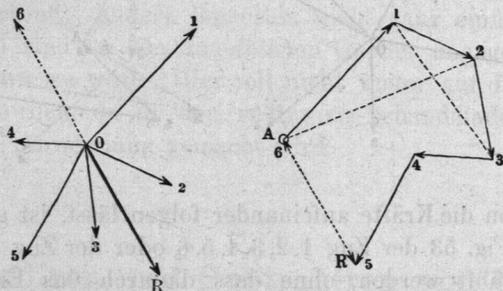
§. 32.

Resultirende oder Mittelkraft eines Kraftbüschels.

Wir nahmen in den vorigen Aufgaben an, dass die betrachteten Kräfte einander das Gleichgewicht hielten, was zur Folge hat, dass der Zug der die Kräfte darstellenden Strecken

in den Ausgangspunkt zurückläuft. Wenn dagegen ein Kräftepolygon für ein gegebenes Kraftbüschel, z. B. das der Kräfte 1 bis 5, Fig. 54, nicht geschlossen ist, so herrscht im Angriffspunkt O kein Gleichgewicht. Um dasselbe herbeizuführen, ist im Angriffspunkt noch eine Kraft 6 zuzufügen, welche nach

Fig. 54.



Richtung und Grösse durch die Schlusslinie 5 6 des Polygons angegeben wird. Mit dieser Kraft sind die übrigen alsdann im Gleichgewicht; sie haben daher eine Mittelkraft R , welche der durch die Schlusslinie angegebenen an Richtung und absoluter Grösse gleich, an algebraischer Grösse oder Vorzeichen aber entgegengesetzt, also mit entgegengestelltem Pfeil zu bezeichnen ist. Hiernach ist im geschlossenen Kräftepolygon jede einzelne Kraft die Resultirende oder Mittelkraft aller übrigen nach Richtung und absoluter Grösse, derselben aber im Bewegungsinne entgegengerichtet. Im nicht geschlossenen Polygon ist die noch zuzufügende Schlusslinie, versehen mit einem dem Pfeilzuge entgegengerichteten Pfeile, die Mittelkraft. So ist in Fig. 54 $A2$ die Mittelkraft von 1 und 2, wie auch von 3, 4, 5 und 6, ferner 1 3 die Resultirende von 2 und 3, wie auch von 4, 5, 6 und 1 u. s. w. *).

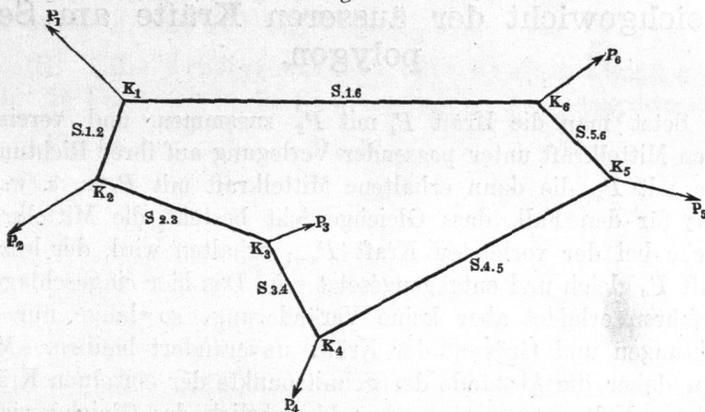
*) Die hier nur von dargestellten Kräften ausgesagten Eigenschaften gelten auch von anderen Grössen, welche die Merkmale Richtung und Grösse besitzen, so von Geschwindigkeiten, die virtuellen eingeschlossen, ferner von Wegen nach bestimmten Punkten, von den Linien, welche die Mittelpunkte der Steine eines Gewölbes verbinden u. s. w. Sie lassen sich auch figürlich verwenden; wissenschaftliche Erörterungen sind oft gleichsam Polygone von Schlüssen, gemacht, um die Schliessungslinie, das Neue, das Resultat zu erhalten.

§. 33.

Zerstreut wirkende Kräfte in der Ebene. Seilpolygon.

Wenn die Richtungslinien von Kräften, welche an einem Körper sich das Gleichgewicht halten, einander nicht in einem Punkte schneiden, was sehr leicht eintreten kann, da sie bei der Anzahl n bis zu $\frac{n}{2} (n-1)$ Schnittpunkte haben können, so kann die obige Darstellung nicht ohne weiteres angewandt werden, doch lässt sich dieser mehr verwickelte Fall auf den einfachen zurückführen. Zu dem Ende denken wir uns, indem wir vorläufig wieder alle Kräfte in einer Ebene wirkend voraussetzen wollen, den Körper durch ein System von geradlinigen festen Gebilden ersetzt, welche, von einer Kraft zur anderen gehend, ein Polygon bilden, dabei sowohl Zug- als Druckkräften (in ihrer Richtung) widerstehen können, und so gerichtet und gelegen sind, dass jede der einzelnen Kräfte im Gleichgewicht mit den beiden Kräften ist, welche, in den genannten Polygonseiten wirkend, mit ihr an einem Punkte angreifen. Das so gebildete Polygon, Fig. 55, führt den Namen Seilpolygon, bei Gewölben Stützlinie oder Drucklinie, weil dort die Verbindungs-

Fig. 55.



geraden vorzugsweise auf Druck beansprucht sind, kann auch allgemein Gelenkpolygon genannt werden *).

*) Das Wort Gelenk in dem Sinne des englischen link genommen, ein starres, an beiden Enden beweglich an andere angefügtes Stück, für welches uns, wie mir scheint, ein ganz guter Name fehlt.

Die Polygonecken K heissen Knoten. Das Gelenkpolygon kann für die Untersuchung der Kräfte nach dem Vorigen den Körper dann vertreten, wenn zwischen den äusseren Kräften einerseits und den Anspannungen in den Polygonseiten andererseits an jedem Knoten Gleichgewicht herrscht, z. B. in dem Knoten K_2 , wenn die Kräfte $S_{1.2}$ und $S_{2.3}$ zur Resultante eine Kraft haben, welche P_2 gleich an Grösse und Richtungswinkel, entgegengesetzt an Bewegungssinn ist. Die Kräfte in den Polygonseiten mögen die inneren Kräfte des Gelenkpolygons heissen. Ist das Seilpolygon bekannt, so können die obigen graphischen Mittel auf die Ermittlung der Kraftgrössen angewandt werden. Wir haben demnach, um zu dem Seilpolygon für einen bestimmten Fall zu gelangen, die Bedingungen aufzusuchen für das Gleichgewicht

- 1) der äusseren Kräfte,
- 2) der inneren Kräfte

des Polygons unter der Voraussetzung, dass zwischen beiden Gleichgewicht bestehe.

§. 34.

Gleichgewicht der äusseren Kräfte am Seilpolygon.

Setzt man die Kraft P_1 mit P_2 zusammen, und vereinigt deren Mittelkraft unter passender Verlegung auf ihrer Richtungslinie mit P_3 , die dann erhaltene Mittelkraft mit P_4 u. s. w., so muss für den Fall, dass Gleichgewicht besteht, die Mittelkraft, welche bei der vorletzten Kraft P_{n-1} erhalten wird, der letzten Kraft P_n gleich und entgegengesetzt sein. Das hier eingeschlagene Verfahren erleidet aber keine Veränderung, so lange nur die Richtungen und Grössen der Kräfte unverändert bleiben. Man kann daher die Abstände der Schnittpunkte der einzelnen Kräfte auch = Null voraussetzen, ohne hinsichtlich des Gleichgewichts der äusseren Kräfte etwas zu ändern. Das Zusammensetzen der Kräfte erfolgt aber dann gerade so wie oben für den Fall, dass die Kräfte alle an einem Punkte angreifen, und kann ohne weiteres durch Auftragung eines Kräftepolygons, aus den äusseren Kräften bestehend, erfolgen. Das Kräftepolygon bestimmt also

auch für getrennt angreifende Kräfte das Gleichgewicht. Das Polygon ist geschlossen, wenn Gleichgewicht stattfindet, oder gibt die Mittelkraft nach Grösse und Richtung an, wenn kein Gleichgewicht herrschte, beziehlich die dasselbe herbeiführende Kraft noch unbekannt war. Es sind somit zwei Unbekannte durch das Seilpolygon bestimmbar. Diese lassen sich auch auf zwei Kräfte vertheilen, also beider Kräfte Richtung oder beider Kräfte Grösse voraussetzen, oder auch, was indessen praktisch selten gefordert wird, die Richtung der einen, die (absolute) Grösse der anderen annehmen, und die beiden fehlenden Stücke bestimmen. Dies kann dann wie folgt geschehen.

I. Zwei gegebene Richtungen. In Fig. 56 sind die beiden Richtungslinien $4,5'$. . . und $A6'$. . . aufgetragen, und durch deren Schnitt 5 die Strecken (Kräfte) 5 und 6 bestimmt. Wenn die Richtungen verwechselt werden dürfen, sind zwei Lösungen möglich. Die zweite ist in Fig. 53 durch die $A VI'$ und $4 V'$, welche die Kräfte $A V$ und $4 V$ liefern, gegeben.

II. Zwei gegebene Kraftgrössen. In Fig. 57 wurden mit den beiden der Grösse nach bekannt vorausgesetzten Kräften 5 und 6 aus 4 und A Kreise beschrieben, und dadurch die beiden Richtungen bestimmt. Da die Kreise, wenn überhaupt, so einander zweimal schneiden, so sind wieder zwei Lösungen, hier 4.5 mit $5.A$, oder $4.V$ mit $V.A$ möglich.

III. Eine Kraftgrösse und eine Krafrichtung gegeben. In Fig. 58 ist in die Richtungslinie $4.5'$. . . mit dem Halb-

Fig. 56.

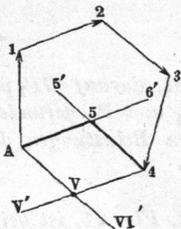


Fig. 57.

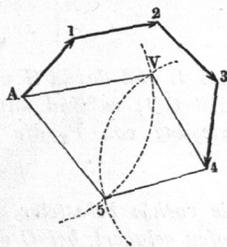
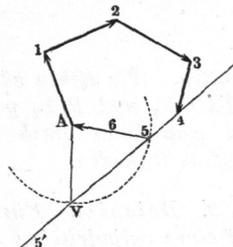


Fig. 58.



messer $A5 =$ der Kraft 6 ein Kreis geschlagen, welcher durch die Einschnitte 5 und V zwei Lösungen wie bei II. und I. liefert. Hätte der Kreis die $4.5'$. . . nicht geschnitten, so wären die Annahmen unbrauchbar gewesen.

Wie diese einfachen Sätze praktisch benutzt werden können, mögen folgende Beispiele zeigen.

1. *Beispiel.* Ein Kran ABC sei bei A mit der Last L beladen, bei B cylindrisch geformt, und von einem (Roll-) Lager umfasst, bei C von einem Fusslager gestützt; in S liege der Schwerpunkt des Krankörpers, dessen Gewicht G sei. Es werden die Kräfte P_1 und P_2 bei B und C gesucht. — Von L und G kennt man die Richtung, sie ist vertikal; von P_1 kennt man sie ebenfalls, wenn man das Lager bei B ganz glatt annimmt, resp. die ohnedies ganz winzige Reibung daselbst, soweit sie den Kran am Abwärtsgehen verhindert, vernachlässigt; P_1 wirkt dann nur horizontal. Denkt man sich nun nach einem passenden Verfahren (siehe z. B. §. 39) G und L vereinigt, und ist TQ die Lage der Mittelkraft $Q = G + L^*$, so muss der Schnittpunkt O der Horizontalen P_1 und der Vertikalen Q ein Punkt der Richtungslinie von P_2 sein. Diese Kraft geht durch den Mittelpunkt des Zapfens bei C , sofern dieser durch seine Pfanne auch seitlich umfasst wird, wie hier angenommen ist. Demnach hat CO die Richtung der Kraft P_2 , und wir können daher sofort, wie bei II. oben, die Grössen von P_1 und P_2 aus dem Kräftepolygon Fig. 60

Fig. 59.

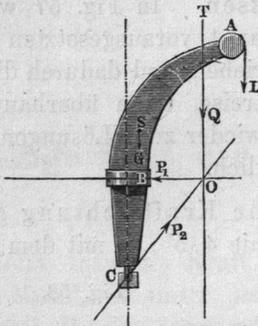
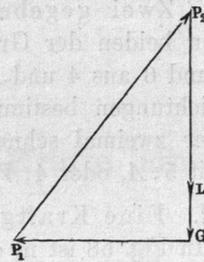


Fig. 60.



erhalten. Wir ziehen nämlich L und daran G vertikal, darauf GP_1 parallel OP_1 und P_1P_2 parallel CO ; es sind dann P_1 und P_2 gefunden, und man kann durch Zerlegung von P_2 die beiden Belastungen des Zapfens C finden.

2. *Beispiel.* Ein wie vorhin belasteter Kran, Fig. 61, ist bei B auf einen cylindrischen Zapfen gelagert, bei C durch eine konische Rolle auf einen Kegel gestützt, der die Spitze mit dem Rollenkegel gemeinschaftlich in der Mitte des Zapfens B hat. — Man kennt nun, wie oben, die

*) Bei unseren gewöhnlichen Uferkranen beträgt G , welches allerdings sehr von der Ausladung BA abhängt, zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$ der Tragkraft des Krans.

Mittelkraft $Q = L + G$, ferner auch die Richtung der auf die Rolle bei C pressenden Kraft P_1 , als normal zu der Kegelerzeugenden gerichtet, mithin den Schnittpunkt O von P_1 und Q , durch welchen Punkt O auch die Zapfenkraft P_2 gehen muss. Hiernach ist das Kräftepolygon Fig. 62

Fig. 61.

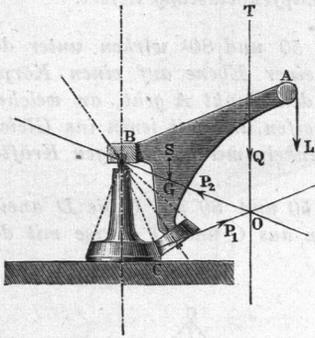
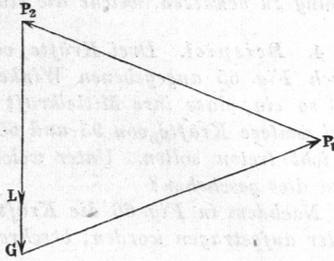


Fig. 62.



durch Ziehen der Vertikalen Q und der beiden Parallelen zu den Kräften P_1 und P_2 alsbald gefunden. Die Vertikalcomponente von P_2 wird hier kleiner als die Belastung Q , während sie beim ersten Beispiel ihr gleich ausfiel. Hier nimmt der Kegel einen Theil der Last auf.

3. Beispiel. Bei einem ähnlichen Krane, Fig. 63, liege die gemeinschaftliche Spitze der beiden Kegel unterhalb der Zapfenmitte B bei D. Sucht man nun, $CO \dots$ wieder normal zu DC richtend, den Punkt O auf, und bildet das Kräftepolygon Fig. 64, so wird (vermöge der Annahme der Kegelspitzenlage D) die Zapfenkraft P_2 schräg nach unten statt nach oben, wie früher, gerichtet. Es muss deshalb der

Fig. 63.

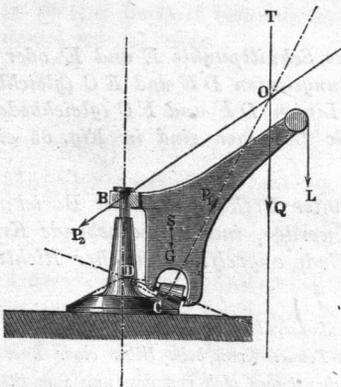
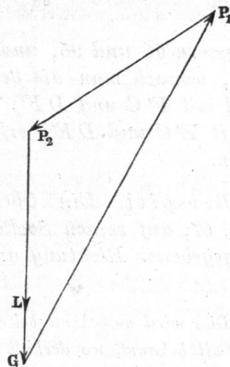


Fig. 64.

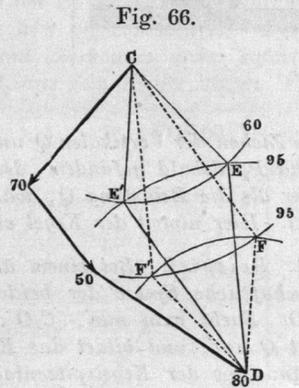
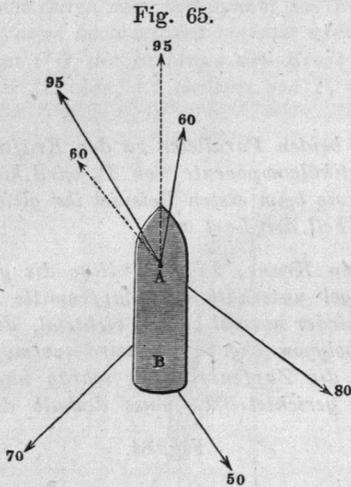


Zapfen mit einem entsprechenden Anlauf oberhalb der Pfanne bei B versehen werden*).

Will man bei Untersuchung der Krane mit noch grösserer Genauigkeit verfahren, so hat man, wie Culmann a. a. O. zeigt, die Richtung des Widerstandes an dem Rollenlager (C bei Fig. 61 und 63, B bei Fig. 59) innerhalb des Reibungswinkels veränderlich anzunehmen, und diejenige Lösung zu benutzen, welche die stärkste Zapfenbelastung liefert.

4. Beispiel. Drei Kräfte von 70, 50 und 80^k wirken unter den durch Fig. 65 angegebenen Winkeln in einer Ebene auf einen Körper AB so ein, dass ihre Mittelkraft durch den Punkt A geht, an welchem zwei weitere Kräfte von 95 und 60^k angreifen und mit jenen ins Gleichgewicht treten sollen. Unter welchen Winkeln mit den übrigen Kräften wird dies geschehen?

Nachdem in Fig. 66 die Kräfte 70, 50 und 80 von C bis D aneinander aufgetragen worden, beschreibt man aus C und D Kreise mit den



Halbmessern 60 und 95, und erhält die Schnittpunkte E und E' oder F und F', wonach man die beiden Richtungslinien DE und EC (gleichbedeutend mit F'C und DF') oder die Linien DF und FC (gleichbedeutend mit E'C und DE') erhält. Beide Lösungen sind in Fig. 65 eingetragen.

5. Beispiel. Ein Obelisk soll unter Drehung um eine Basiskante A, Fig. 67, auf seinen Sockel gehoben werden, indem eine hebende Kraft P_1 in gegebener Richtung am oberen Ende angreift. In welcher Richtung

*) Dies wird manchmal bei ähnlichen Kränkonstruktionen übersehen. Dem Verfasser ist ein Fall bekannt, wo deshalb ein Dreissig-Tonnen-Kran beim Heben einer Last von etwa 20 Tonnen zum Umstürzen kam, indem das Lager sich von dem nur zum Stützen eingerichteten Zapfen abstreifte.

muss eine Kraft P_3 von gegebener Grösse auf die Stelle A des Körpers wirken, damit der Sockel nur Vertikaldruck erfährt?

Fig. 67.

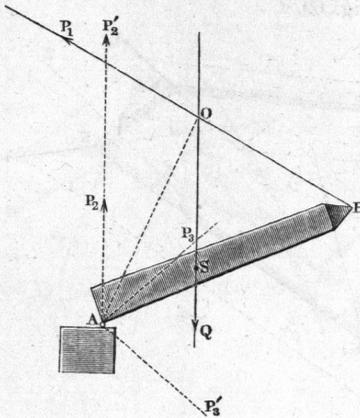
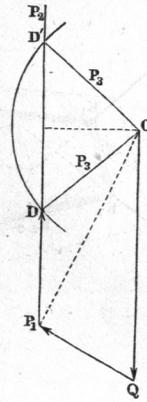


Fig. 68.



Verlängert man die durch den Schwerpunkt S des Obeliskens gehende, das zu hebende Gewicht ausdrückende Kraft Q bis zum Schnitte O mit der Kraft P_1 , so muss zunächst für das Gleichgewicht OA die Richtung der Mittelkraft von Q und P_1 sein. Diese Mittelkraft ist nun in eine vertikal gerichtete Kraft P_2 und eine Kraft P_3 von gegebener Grösse zu zerlegen. Nach Auftragung von Q und P_1 in dem Zuge CQP_1 , Fig. 68, zieht man durch P_1 eine Vertikale $P_1P_2 \dots$, und beschreibt aus C mit der Zirkelöffnung P_3 einen Kreis. Dieser schneidet die P_1P_2 bei genügender Grösse in den Punkten D und D' , wonach wieder zwei Lösungen sich ergeben, indem entweder P_2 die Grösse P_1D und P_3 die Richtung DC , oder P_2 die Grösse P_1D' und P_3 die Richtung $D'C$ erhält. Eine Lösung ist überhaupt nur dann möglich, wenn P_3 mindestens die Grösse des Lothes aus C auf die $P_1P_2 \dots$ besitzt. Die beiden gefundenen Richtungen sind in Fig. 67 als AP_3 und AP'_3 eingetragen. — Aufgaben der in diesem Beispiel behandelten Art sind übrigens, wie schon oben angedeutet wurde, selten.

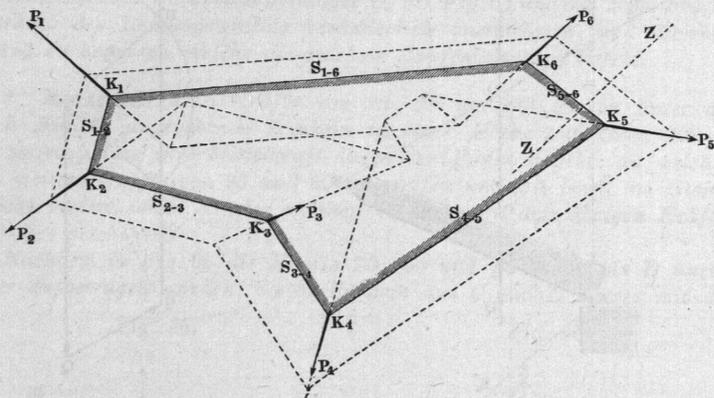
§. 35.

Gleichgewicht der inneren Kräfte am Seilpolygon.

Unter den inneren Kräften im Seil- oder Gelenkpolygon verstehen wir, wie oben erläutert wurde, die auf Zug oder auf Druck wirkenden Kräfte in den einzelnen Gliedern oder Seiten des Seilpolygons, die in Fig. 69 (a. f. S.) mit $S_{1 \cdot 2}$, $S_{2 \cdot 3}$ u. s. w. bezeichnet sind. Diese Kräfte haben eine solche Grösse, dass sie einander an jedem

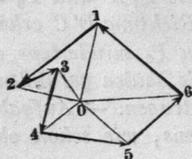
der Knoten K_1, K_2, K_3 u. s. w. das Gleichgewicht halten. Demnach können je zwei derselben, z. B. $S_{1.2}$ und $S_{2.3}$, wenn ihre

Fig. 69.



Richtungen, oder ihre Grössen, oder eine Grösse und eine Richtung bekannt sind (siehe §. 34) aus ihrer Resultierenden P_2 bestimmt werden. Um dies auszuführen, tragen wir in dem Kräftepolygon aus P_1, P_2, P_3 u. s. w., welches nach dem Früheren eine geschlossene Figur sein muss, Fig. 70, von den Enden von P_2

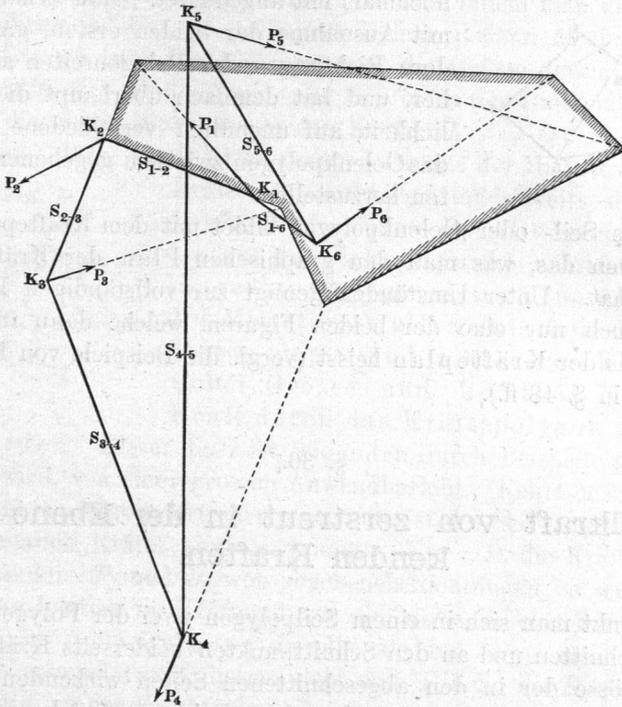
Fig. 70.



aus die Richtungslinien der $S_{1.2}$ und $S_{2.3}$ auf, indem aus Fig. 69 die Richtungen beider Kräfte entnommen werden können. Dieselben schneiden einander in dem Punkte O , und es sind nun $O1$ und $O2$ die Anspannungen $S_{1.2}$ und $S_{2.3}$ der Richtung und Grösse nach. Geht man nun zum Punkte K_3 über, so sind von den drei dort gleichwiegenden Kräften zwei, nämlich P_3 und $S_{2.3}$, schon bekannt; die dritte, $S_{3.4}$, wird durch Verbindung des Schnittpunktes oder Poles O mit dem Endpunkte von Kraft 3, Fig. 70, erhalten. So fortfahrend erhält man also in den Verbindungslinien des Poles O mit den Ecken des Kräftepolygons die inneren Kräfte in dem Seilpolygon nach Grösse und Richtung, und es zeigt sich, dass bei bekannten Kräften die Annahme der Richtungen zweier an einem Knoten wirkenden Seilkräfte für die übrigen bestimmend ist. Nach dieser Auffindung der Seilkräfte kann das Seil- oder Gelenkpolygon sofort verzeichnet werden. Dies geschieht, indem

man, von einem beliebigen Knoten ausgehend, die Gelenkpolygonseiten parallel den Polstrahlen des Kräftepolygons zieht. Die

Fig. 71.



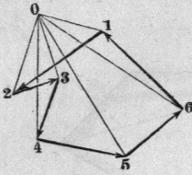
Länge der Polygonseiten wird durch die der Lage nach gegebenen Richtungslinien der äusseren Kräfte bestimmt, worauf alsdann das Seil- oder Gelenkpolygon auch die Lage der inneren Kräfte angibt.

Das Seilpolygon fällt verschieden aus, je nachdem bei der Verzeichnung der Anfangspunkt auf der Richtungslinie gewählt wurde. Zwei andere, mit dem anschraffirten gleichbedeutende Seilpolygone sind in Fig. 69 punktiert eingetragen. Die Seiten derselben sind parallel den entsprechenden des ersten Polygons. Eine zweite Lösung derselben Aufgabe (die äusseren Kräfte durch ein Gelenkpolygon zu verbinden) entsteht in Folge der zweifachen Lösungsart der Aufgabe I. §. 34.

Trägt man, Fig. 72 (a. f. S.), die Richtungen der $S_{1.2}$ und $S_{2.3}$ beziehlich von dem anderen Endpunkte der Kraft P_2 auf, so erhält

man ein neues Seilpolygon, Fig. 71, welches eine von dem vorigen sehr verschiedene Gestalt annimmt. Des Vergleiches halber

Fig. 72.



ist das oben erhaltene Polygon in Fig. 71 nochmals mit angedeutet. Man erhält hier, mit Ausnahme der beiden ersten, ganz andere Richtungen der Polygonseiten als früher, und hat demnach überhaupt die Möglichkeit, auf unendlich verschiedene Arten das Gelenkpolygon zwischen gegebenen Kräften herzustellen.

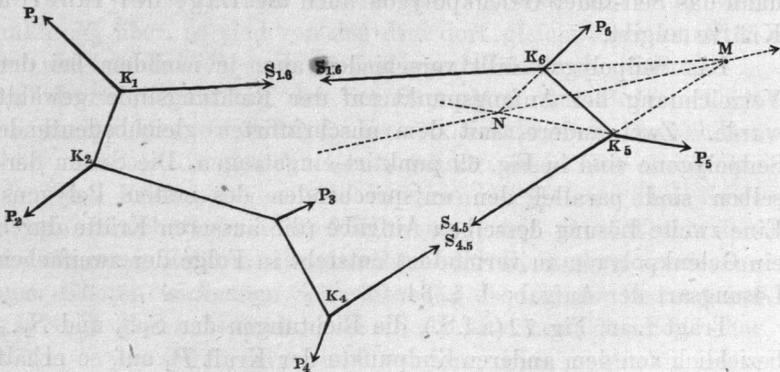
Das Seil- oder Gelenkpolygon bildet mit dem Kräftepolygon zusammen das, was man den graphischen Plan der Kräfte genannt hat. Unter Umständen genügt zur vollständigen Erörterung auch nur eine der beiden Figuren, welche dann für sich ebenfalls der Kräfteplan heisst (vergl. die Beispiele von Kräfteplänen in §. 48 ff.).

§. 36.

Mittelkraft von zerstreut in der Ebene wirkenden Kräften.

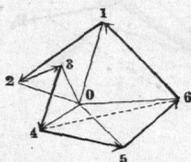
Denkt man sich in einem Seilpolygon zwei der Polygonseiten durchschnitten und an den Schnittpunkten beiderseits Kräfte von der Grösse der in den abgeschnittenen Seilen wirkenden angebracht, welche die Wirkung der abgeschnittenen Stücke ersetzen, so bleibt das Gleichgewicht ungestört; so z. B. wenn man die Seiten K_1K_6 und K_4K_5 in Fig. 73 so zerschneidet und spannt. Dann

Fig. 73.



aber ist sofort ersichtlich, dass die Mittelkraft der nun zu äusseren Kräften gewordenen Seilkräfte $S_{1.6}$ und $S_{4.5}$ den links oder rechts am Polygon wirkenden Kräften das Gleichgewicht hält. Die Lage dieser Kraft bestimmt sich, indem man die Seile bis zu ihrem Schnitte M verlängert, indem alsdann M ein Punkt der Mittelkraft ist. Die Richtung und die Grösse dieser Mittelkraft ergibt sich im Kräftepolygon Fig. 74 in der Diagonale 4. 6, welche die Schlusslinie der beiden Kräfte $S_{1.6} = O6$ und $S_{4.5} = O4$ ist. Diese Kraft ist hier also einerseits die Mittelkraft der

Fig. 74.



Kräfte P_5 und P_6 , andererseits die der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 . Allgemein also liefert der Schnittpunkt zweier verlängerten Polygonseiten einen Punkt der Mittelkraft aller zwischen diesen Seiten angreifenden äusseren Kräfte, wobei Grösse und Richtung dieser Kraft durch das Kräftepolygon geliefert werden.

Dieser Satz ist, wie unten durch Beispiele gezeigt werden wird, von einer grossen Anwendbarkeit. Kehrt man denselben um, so folgt sofort, dass man mittelst des Seil- und Kräftepolygons auch Kräfte zerlegen kann. Um z. B. die Kraft 4. 6 in zwei andere, P_5 und P_6 , von gegebenen Richtungen, zu zerlegen, trage man letztere im Kräftepolygon ein, ziehe die eine derselben, z. B. P_6 , im Seilpolygon, wo dieselbe alsdann die 4. 6 in einem Punkte N schneidet; aus diesem zieht man alsdann die P_5 parallel der Seite 4. 5 des Kräftepolygons. Die erstgewählte Lage $K_6 N$ konnte hierbei auch weiter vorwärts oder rückwärts auf der MN gewählt werden, ohne dass das Gleichgewicht gestört worden wäre.

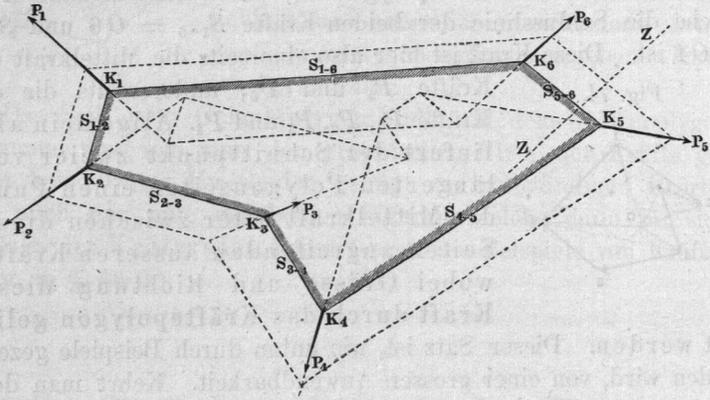
§. 37.

Bedingung für das Gleichgewicht zerstreut wirkender Kräfte in der Ebene.

Wir haben bei den vorstehenden Betrachtungen angenommen, dass die Kräfte, deren Gleichgewicht wir untersuchten, so gelegen waren, dass das Gleichgewicht wirklich stattfand, so dass man sie schon nach der Regel des vorigen Paragraphen auf zwei einander aufhebende Kräfte zurückführen konnte. Die-

ses ist aber nicht nothwendig dann immer der Fall, wenn das Kräftepolygon eine geschlossene Figur ist, sondern es muss zugleich auch das Seil- oder Gelenkpolygon geschlossen sein, d. h. die Lage der Kräfte muss eine entsprechende Beschaffenheit haben. Ist die Lage nicht richtig gewählt gewesen, so zeigt das Seilpoly-

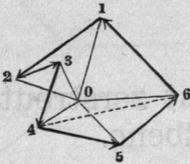
Fig. 75.



gon an, wie dieselbe zu nehmen sei, damit das Gleichgewicht an dem Körper eintreten könne, und nicht ein den Körper drehendes Kräftepaar (siehe den folgenden Paragraphen) übrig bleibe. Man hat zu dem Ende die Lage einer der Kräfte unbestimmt zu lassen.

I. Es sei diese Kraft die P_6 in Fig. 75. Ihre Grösse sei bekannt, ihre Richtung durch die ZZ angegeben. Nach Verzeichnung des Kräftepolygons, Fig. 76, Wahl eines Poles O und Ziehung aller Strahlen aus O nach den Ecken 1 bis 6 ist die Verzeichnung des Seilpolygons vorzunehmen, indem man $K_1K_2 \parallel 1O$, $K_2K_3 \parallel 2O$, $K_3K_4 \parallel 3O$ u. s. w. zieht, bis man die K_5K_6 gefunden. Dann muss die Schlusslinie des Seilpolygons die Richtung der $6O$ haben, gleichzeitig aber durch K_1 gehen. Demnach ist die Lage derselben bestimmt, und ihr Schnitt K_6 mit der K_5K_6 ... ist ein Punkt der Kraft P_6 , die wir nun \parallel der 5.6 eintragen und dadurch ihre Lage angeben haben.

Fig. 76.

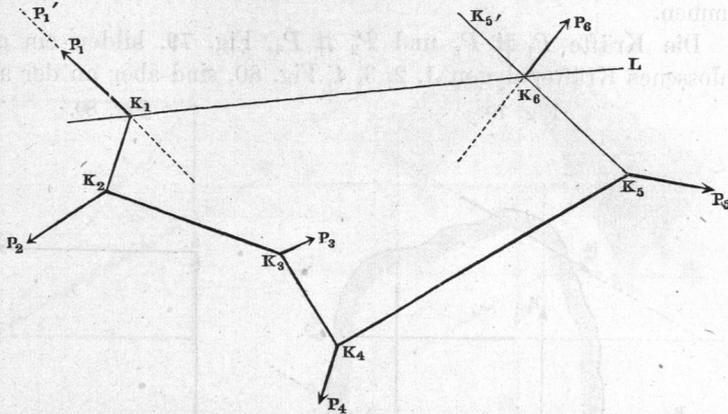


Ist von der letzten Kraft weder Lage noch Richtung noch Grösse bestimmt, so kann, wenn von einer der anderen Kräfte

nur Richtung und Lage gegeben sind, das Fehlende wie folgt ermittelt werden.

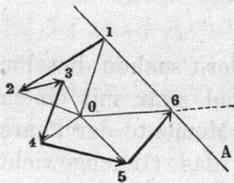
II. Die noch völlig unbekannte Kraft sei die P_6 , Fig. 77, während von der P_1 die Richtung $K_1 P_1'$ und der Punkt K_1 , also

Fig. 77.



ihre Lage bekannt. Wir können nun das Kräftepolygon, Fig. 78, vom Punkte 1 bis 5 verzeichnen, indem wir die Kraft 1 nur ihrer

Fig. 78.



Richtung $A1 \dots$ nach auftragen. Das Seilpolygon kann ferner von K_1 aus durch die Punkte K_2, K_3, K_4, K_5 und K_5' gezogen werden. Wählt man alsdann eine Richtung für die Schlusslinie, z. B. die $K_1 L$, und trägt sie in das Seilpolygon ein, so ist deren Schnitt K_6 mit der $K_5 K_5'$ ein Punkt der Richtungsline der gesuchten Kraft P_6 . Um ihre Grösse und Richtung zu bestimmen, ziehen wir nun

in Fig. 78 die $O6 \dots$ parallel zu $K_1 L$, und verbinden Punkt 5 mit Punkt 6, so ist 5.6 nach Grösse, Richtung und Sinn die Schlusskraft P_6 , sowie 6.1 die Kraft P_1 nach der (noch fehlenden) Grösse.

§. 38.

Kräftepaare.

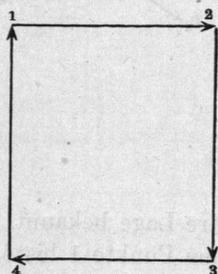
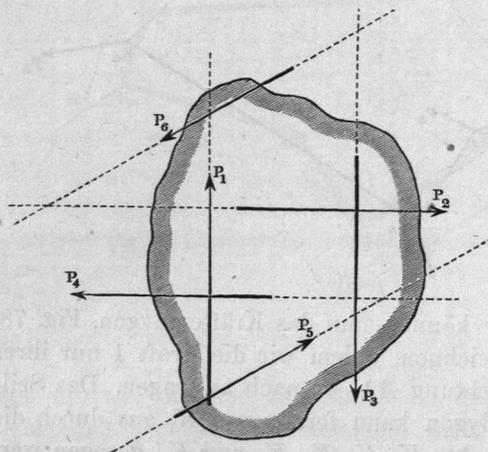
Ist eine ebene Figur in ihrer Ebene nur der Wirkung von Kräftepaaren ausgesetzt, das ist von solchen paarweise gleich

grossen Kräften, welche in parallelen aber nicht zusammenfallenden Richtungslinien in entgegengesetztem Sinne wirken, so erscheint das Kräftepolygon immer geschlossen, ohne dass nothwendig Gleichgewicht an der Figur herrscht. Die Bedingungen für dasselbe lassen sich aber mittelst eines Kräfteplanes wie folgt bestimmen.

Die Kräfte $P_1 \# P_3$ und $P_2 \# P_4$, Fig. 79, bilden ein geschlossenes Kräftepolygon 1, 2, 3, 4, Fig. 80, sind aber an der

Fig. 79.

Fig. 80.



gegriffenen Figur nicht im Gleichgewicht, sondern suchen dieselbe um irgend einen ihrer Punkte zu drehen, und zwar mit einem statischen Momente, welches der Summe der Momente der Paare $(P_1 - P_3)$ und $(P_2 - P_4)$ gleich ist. Um das Gleichgewicht herzustellen, soll ein Paar $(P_5 - P_6)$ von entgegengesetztem Drehungssinne zugefügt werden, dessen Moment dem jener beiden gleich ist, und dessen Richtungslinien die Parallelen VV und VI sein sollen, siehe Fig. 82.

Wir verzeichnen nun in A , Fig. 81, anfangend, das Kräftepolygon $A1, 2, 3, 4$. Dasselbe ist damit noch nicht beendigt; vielmehr fehlen noch die Kräfte 5 und 6. Der Zug derselben muss, wenn sie aneinander getragen sind, wieder nach A zurückführen; ihre Grösse ist aber noch nicht bekannt. Zunächst geht daraus hervor, was wir schon voraussetzten, dass nämlich die beiden Kräfte parallel und gleich sein müssen, also dass nur ein Paar mit den Paaren ins Gleichgewicht treten kann, sobald nur zwei Kräfte noch zu den gegebenen Paaren hinzutreten sollen.

Die Richtung beider Kräfte ist bekannt, wir tragen sie nach AZ ... auf. Es wird nun ein beliebig gelegener Pol O gewählt; wir

Fig. 81.

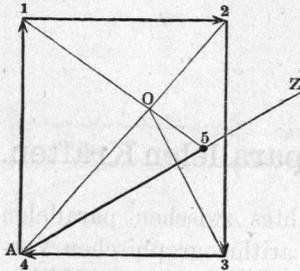
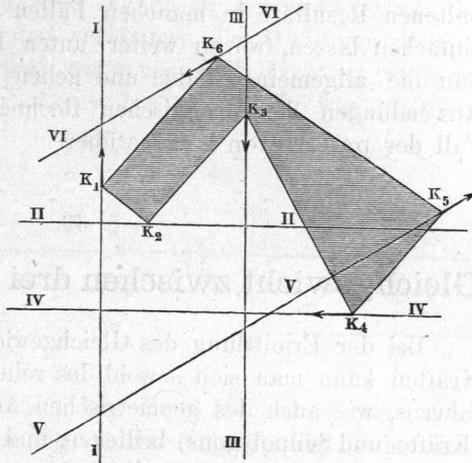


Fig. 82.



ziehen die Strahlen OA , $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ ($= OA$), und können nun zur Verzeichnung des Seilpolygons, Fig. 82, schreiten.

Für diesen sind die Richtungslinien $I I$, $II II$ u. s. w. bis $VI VI$ aus Fig. 79 bekannt. Wir ziehen nach einem beliebigen Punkte K_1 der $I I$ Parallelen zu den Strahlen OA und $O1$ (welche die Kraft P_1 zu Resultanten haben) bis zu den Schnitten K_6 mit $VI VI$ und K_2 mit $II II$, darauf $K_2 K_3 \parallel 2 O$ bis zum Schnitte K_3 mit $III III$, $K_3 K_4 \parallel O3$ bis zum Schnitte mit $IV IV$, und $K_4 K_5 \parallel O4$ bis zum Schnitte K_5 mit $V V$. Von dem Seilpolygon fehlt jetzt nur noch die Schlusslinie. Sie ist die Verbindung von K_5 mit dem zu Anfang gefundenen Punkte K_6 , und es kann nun auch (vergl. §. 37, II.) der Polstrahl $O5 \parallel K_5 K_6$ gezogen werden, worauf das Kräftepolygon wirklich geschlossen ist, und in der Strecke $4 \cdot 5$ ($= A5$) die Kraft P_5 , in $5A$ die Kraft P_6 völlig bestimmt liefert. Das Kräftepolygon hat also hier als vollständigen Verlauf den Zug $A1, 2, 3, 4, 5A$, wobei die Seiten $4, 5$ und $5A$ bei 5 einen unendlich kleinen Winkel einschliessen.

Mit den bis hierhin behandelten Aufgaben über das Kräfte- und Seilpolygon ist nun zunächst für Kräfte in der Ebene erwiesen, wie man mittelst der geometrischen Addition und

Subtraktion das Gleichgewicht beliebig divergirender Kräfte ermitteln kann. Wirken Kräfte in schneidenden oder parallelen Ebenen, so kann nach den gegebenen Regeln das Gleichgewicht für die einzelnen Ebenen bestimmt werden, wobei die erhaltenen Resultate in manchen Fällen sich noch besonders vereinfachen lassen, wovon weiter unten Beispiele. Wir verlassen nun die allgemeinen Sätze und gehen zu den sehr brauchbaren Anwendungen des graphischen Rechnens auf den besonderen Fall der parallelen Kräfte über.

§. 39.

Gleichgewicht zwischen drei parallelen Kräften.

Bei der Ermittlung des Gleichgewichtes zwischen parallelen Kräften kann man sich sowohl des rein arithmographischen Verfahrens, wie auch des geometrischen Addirens und Subtrahirens (Kräfte- und Seilpolygons) bedienen, und wähle in jedem einzelnen Falle das bequemere. Wir betrachten zunächst den sehr schlichten Fall, dass eine Kraft Q einen Körper belastet, und durch zwei ihr parallele zu suchende Kräfte P_1 und P_2 im Gleichgewicht gehalten werden soll.

Ziehen wir zunächst eine zu den Kräften normale Verbindungslinie ABC , Fig. 83, so muss für das Gleichgewicht $P_1 \cdot \overline{AB} = P_2 \cdot \overline{BC}$ oder $P_1 a_1 = P_2 a_2$ und ausserdem $P_1 + P_2 = Q$ sein. Um $P_1 = P_2 \frac{a_2}{a_1}$ graphisch darzustellen, können wir das Verfahren in §. 24 benutzen, indem wir, Fig. 84, $OE =$ dem Divisor

Fig. 83.

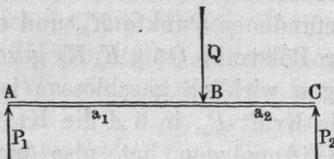
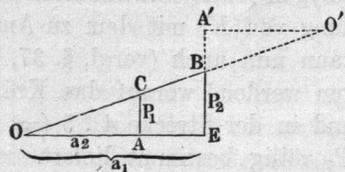


Fig. 84.



a_1 , $OA =$ dem Faktor a_2 , $EB =$ der (einstweilen bekannt gedachten) P_2 machen, worauf die $AC \parallel EB$, welche durch die $OB \dots$ abgeschnitten wird, P_1 darstellt. Auch lässt sich aber das Dreieck CAO in die punktierte Lage $O'BA'$ legen, worauf dann der Voraussetzung nach $A'E = P_1 + P_2 = Q$ sein muss. Damit

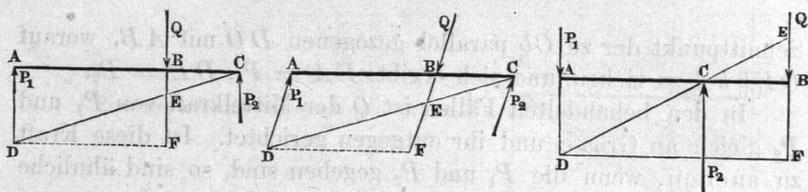
aber hat die Figur eine Gestalt erhalten, vermöge welcher sie sehr leicht in die Fig. 83 eintragbar ist, somit das Zeichnen von Fig. 84 erlässlich wird. Man erhält folgendes Verfahren.

I. Trage die Kraft Q an einen der beiden anderen Angriffspunkte, z. B. A , Fig 85, so dass $\overline{AD} \nparallel Q$, verbinde D mit dem dritten Angriffspunkt C , und verlängere die Q bis zum Schnitte F mit der zu AC parallel gezogenen DF ; dann ist nach dem soeben Entwickelten: $BE = P_1, EF = P_2$. In Fig. 86 ist das-

Fig. 85.

Fig. 86.

Fig. 87.



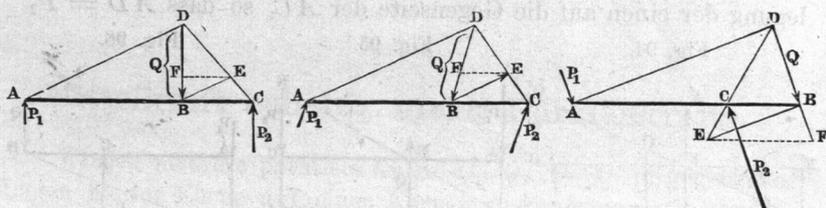
selbe Verfahren für den Fall, dass die ABC schief gegen Q gerichtet ist, angewandt; in Fig. 87 der Angriffspunkt B der Kraft Q ausserhalb AC angenommen.

II. Durch Zerlegung der Kraft Q in zwei Komponenten nach den Stützpunkten A und C hin, Fig. 88 bis 90, erhält man an

Fig. 88.

Fig. 89.

Fig. 90.



denselben schief gerichtete Kräfte, deren parallel zu Q gerichtete Komponenten die gesuchten Gegenkräfte sind, während die parallel ABC fallenden Komponenten einander aufheben. Es ist in allen drei Figuren die $BF = P_1, FD = P_2$.

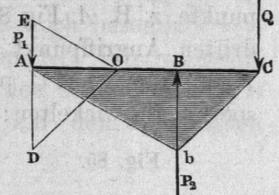
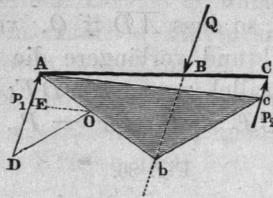
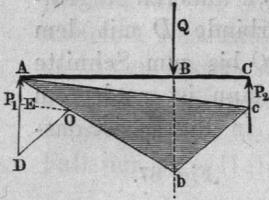
III. Durch Bildung des Kräftepolygons aus $AD = Q$ und einen beliebig gewählten Pol O , Fig. 91, 92, 93 (a. f. S.), und Ziehung der Gelenkpolygonseite $ab \parallel AO, bc \parallel DO$, Ziehung der Schlusslinie ca und ihrer Parallelen OE im Kräftepolygon erhält man $EA = P_1, DE = P_2$. Das Gelenkpolygon wird ein Dreieck. Will man dessen Schlusslinie zusammenfallend oder parallel mit ABC erhalten, so ziehe man vorerst das Seilpolygon AbC , dann ist CA

wieder die Schlusslinie, Ab der erste Strahl des Seilpolygons zur Kraft $AD = Q$, Cb der zweite, es fällt also der Pol O in den

Fig. 91.

Fig. 92.

Fig. 93.



Schnittpunkt der zu Cb parallel gezogenen DO mit AB , worauf $OE \parallel bA$ zu ziehen, und sich ergibt: $EA = P_1$, $DE = P_2$.

In den behandelten Fällen ist Q der Mittelkraft von P_1 und P_2 gleich an Grösse und ihr entgegen gerichtet. Ist diese Kraft zu suchen, wenn die P_1 und P_2 gegeben sind, so sind ähnliche Verfahrungsweisen wie oben anwendbar.

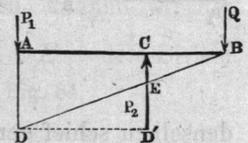
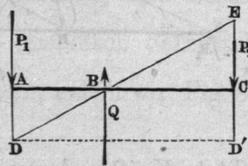
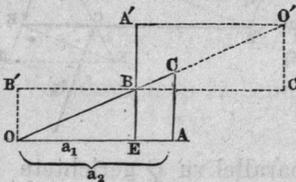
Bildet man zunächst wieder die Berechnungsfigur $OEACB$, Fig. 94, welche wir oben bei (I.) benutzten, verlegt wieder das Dreieck CAO nach $BA'O'$, und zieht noch $B'C' \parallel OA$, $O'C'$ und $OB' \parallel A'B$, so ist $B'B = a_1$, $B'C' = a_2$, $B'O = P_2$, $O'C' = P_1$. Hiernach erhält man folgendes Verfahren.

IV. Vertausche, Fig. 95, 96, die Kräfte P_1 und P_2 unter Verlegung der einen auf die Gegenseite der AC , so dass $AD = P_2$,

Fig. 94.

Fig. 95.

Fig. 96.



$EC = P_1$, verbinde D mit E , so schneidet die DE die AC im Angriffspunkte B der Mittelkraft Q , deren Grösse $= ED' = P_1 + P_2$ ist, indem $DD' \parallel AC$ gezogen wurde.

Da in Fig. 96 P_1 und P_2 von entgegengesetzter Richtung angenommen wurden, so ist deren algebraische Summe DE der absoluten Grösse nach der Unterschied von P_1 und P_2 . Die Mittelkraft Q fällt hier ausserhalb AC .

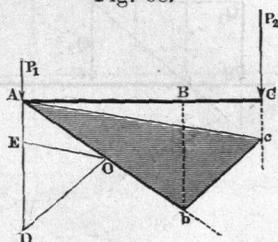
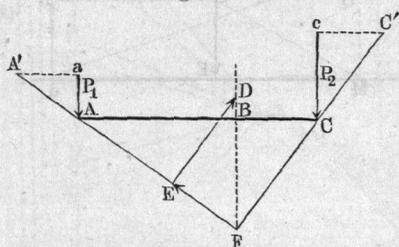
V. Aus (II.) folgt das in Fig. 97 angewandte Verfahren. Trage parallel zu AC von dem Endpunkte a der $Aa = P$ eine

beliebige Strecke (Seitenkraft) aA' , und dieser entgegen die ihr an Grösse gleiche cC' an den Endpunkt der $Cc = P_2$; ziehe die $A'A \dots$ und die $C'C \dots$, so schneiden diese einander in F , einem Punkte der Mittelkraft richtungslinie FB . Die Mittelkraft Q selbst ist $= P_1 + P_2$, zugleich Resultirende der $DE = C' C$ und $EF = A' A$.

VI. Aus (III.) leitet sich folgendes Verfahren ab, Fig. 98. Mache $DE \# P_2$, $EA \# P_1$, wähle einen Pol O , ziehe die

Fig. 97.

Fig. 98.



Schlusslinie OE des Kräftepolygons. Ziehe dann $Ac \parallel EO$, $cb \parallel OD$ und $Ab \dots$ parallel (hier die Verlängerung von) AO , so ist der Schnittpunkt b ein Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft $Q = DA$.

§. 40.

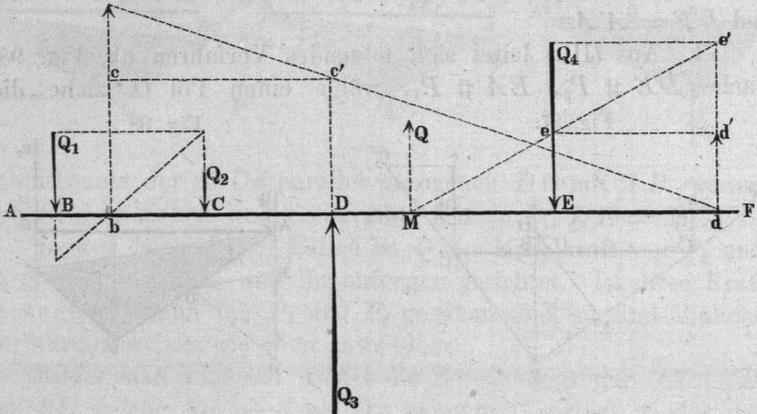
Mittelkraft beliebig vieler Parallelkräfte.

Wirken mehrere parallele Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in gegebenen Lagen in der Ebene auf einen Körper, so kann man zur Bestimmung von deren Mittelkraft zunächst die vorhin besprochenen Methoden benutzen, indem man zwei und zwei Kräfte vereinigt, bis alle vereinigt sind. Oftmals recht brauchbar ist hierzu das Verfahren IV. des vorigen Paragraphen.

I. Nach Auftragung der Kräfte Q_1 bis Q_4 über einer sie normal schneidenden Geraden AF , Fig. 99 (a. f. S.), vereinige man durch Vertauschung von Q_1 und Q_2 diese Kräfte in b zu der Resultanten $Q_1 + Q_2 = bc$, dann diese mit Q_3 zu der $ad' = Q_1 + Q_2 + Q_3$, dann diese unter Uebertragung nach Ee mit Q_4 , wonach sich schliesslich die Mittelkraft $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$, durch M gehend, ergibt. Dieses Verfahren ist bei manchen Berechnungen des Maschinenbauers recht nützlich, namentlich da, wo die

Kräfte Q_1, Q_2 u. s. w. nach einander aufgesucht werden, wie z. B. bei der Bestimmung der Lastvertheilung einer Lokomotive auf die verschiedenen Achsen. Doch bleibt das Verfahren immerhin ziem-

Fig. 99.



lich mühsam; auch haben die einzelnen Werthe der Mittelkräfte zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kräften eine nur untergeordnete Bedeutung und kaum eine Verwendung.

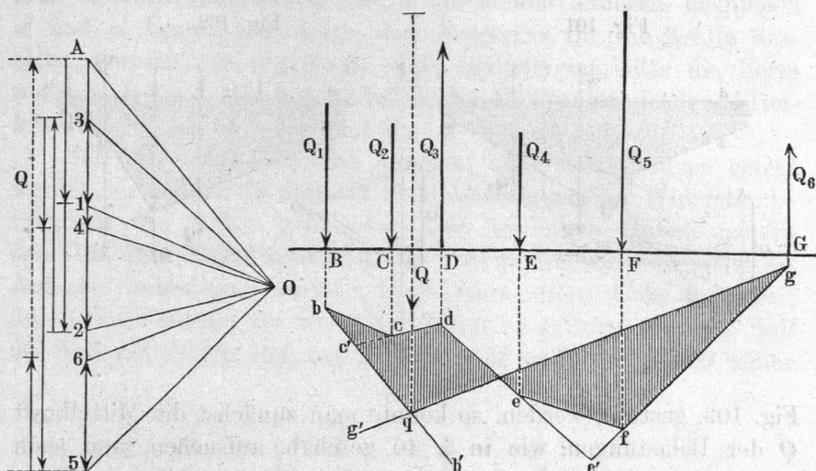
Sehr einfach und ungleich übersichtlicher führt die Anwendung des Seil- und Kräftepolygons zum Ziel.

II. Man bilde, Fig. 100, aus den gegebenen Kräften Q_1 bis Q_6 ein Kräftepolygon, indem man, in A beginnend, zunächst die Kräfte in dem Zuge $A . 1, 2, 3, 4, 5, 6$ aneinanderträgt. Die Mittelkraft Q ist alsdann der Grösse nach schon sofort in dem Zuge $6A$ gefunden. Noch ist aber ihre Lage zu ermitteln. Zu diesem Behufe wählt man einen beliebigen ausserhalb $A5$ gelegenen Punkt O als Pol, und zieht die Strahlen $OA, O1, O2, O3$ u. s. w. bis $O6$, darauf die $bb' \parallel AO$, die $bc \parallel 1O$, die $ed \parallel 2O$ u. s. f., bis endlich die $gg' \parallel$ der Schlusslinie $O . 6$ im Kräftepolygon, dann schneidet diese (vergl. §. 35) die bb' in einem Punkte q der Richtungslinie der Mittelkraft Q .

Nach den Entwicklungen in §. 36 kann man an der so erhaltenen Figur auch sehr leicht die Mittelkraft zweier einzelnen oder mehrerer auf einander folgenden Kräfte bestimmen. So liefert der Schnittpunkt der verlängerten dc in c' den Angriffspunkt der Mittelkraft von Q_1 und Q_2 , also von deren Summe $A . 2$ im

Kräftepolygon; ferner ist e' der Angriffspunkt der Resultirenden von Q_4 und Q_5 .

Fig. 100.



§. 41.

Zerlegung von Kräften in zwei oder mehr parallele Kräfte.

Der besprochenen Zusammensetzung paralleler Kräfte steht deren Zerlegung mittelst des Gelenkpolygons gegenüber. Kennt man das Seilpolygonstück $aqbcd$, Fig. 101 (a. f.S.), für eine Kraft Q , und will dieselbe in zwei durch e und f gehende Kräfte Q_1 und Q_2 zerlegen, so verbinde man die Schnittpunkte e und f der beiden Richtungslinien von Q_1 und Q_2 mit den Seilen aq und bq untereinander; dann ist $ae'fb$, Fig. 101, das Seilpolygonstück für die neuen Kräfte, deren Grösse durch Ziehen von $O1 \parallel ef$ im Kräftepolygon gefunden wird. Liegen die gesuchten Kräfte Q_1 und Q_2 auf einer und derselben Seite von Q , Fig. 102, so bleibt das Verfahren dasselbe. Es ist nur aq bis zum Schnitte e mit Q_1 zu verlängern, und darauf ef zu ziehen. Auch kann man den Schnitt von Q_1 mit qb , von Q_2 mit qa benutzen. Das Polygon erhält dann die Gestalt $ae'f'b$. Das Kräftepolygon liefert im ersten Falle Q_1

$= A 1, Q_2 = 1. 2$, im zweiten die gleichgrossen Stücke $A 1' = Q_2$ und $1' 2 = Q_1$.

Soll der von den parallelen Kräften Q_1 bis Q_5 belastete Stab AG durch zwei in A und G angreifende Kräfte P_1 und P_2 ,

Fig. 101.

Fig. 102.

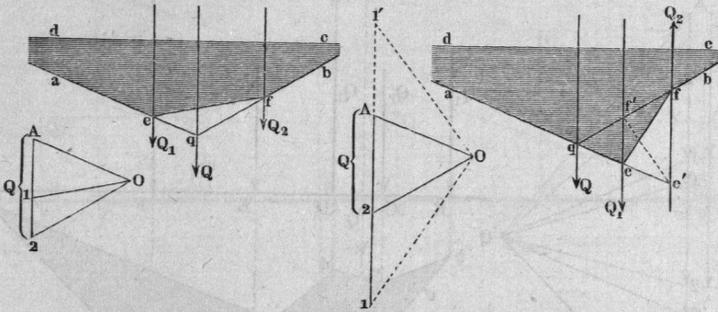
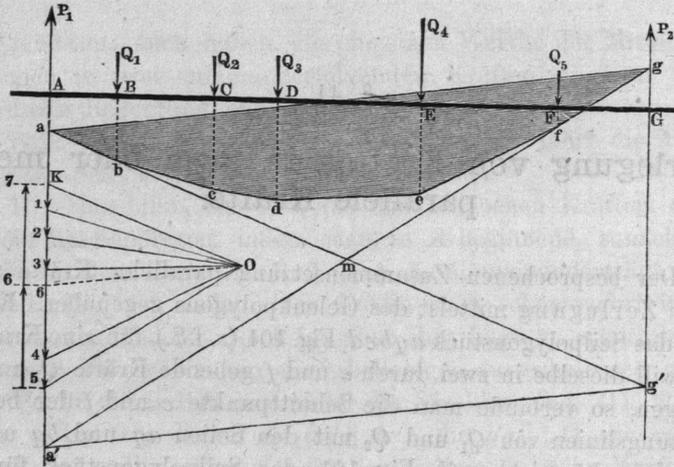


Fig. 103, gestützt werden, so könnte man zunächst die Mittelkraft Q der Belastungen, wie in §. 40 geschah, aufsuchen, und nach

Fig. 103.

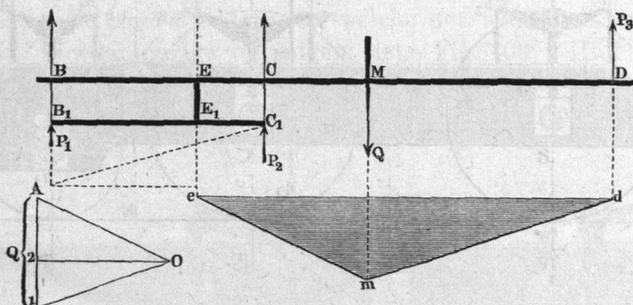


der eben besprochenen Methode in P_1 und P_2 zerlegen. Es kann aber die Aufsuchung von Q unterlassen werden, da die Richtungen von P_1 und P_2 und der Mittelkraft bekannt sind (vergl. §. 37). Man bilde das Kräftepolygon $K 1. 2 \dots 5 O$, ziehe alle Polstrahlen und darauf deren Parallelen im Gelenkpolygon, bilde die Schnitte a und g der zu KO und $O5$ parallelen Seilpolygonseiten mit

den Kraftrichtungen von P_1 und P_2 , und ziehe die ag , so ist diese die Schlusslinie des Seilpolygons, und ihre Parallele $O6$ im Kräftepolygon liefert die beiden Kräfte $P_2 = 56$ und $P_1 = 67$. Hätte man statt der Schnitte a und g die beiden anderen möglichen a' und g' benutzt, so wäre das Ergebniss für die Kräfte dasselbe gewesen, da $a'g' \parallel ag$. Das Seilpolygon hätte die Form $a'g'mbcdefma'$ erhalten, wobei m der Richtungslinie der Mittelkraft der Q_1 bis Q_3 , oder auch der P_1 und P_2 angehört.

Soll ein belasteter Stab auf drei oder mehr Stützen gelegt werden, so müssen diese unter Berücksichtigung der Widerstandsfähigkeit des Stabes ganz genau auf bestimmte Höhen gestellt sein, um ihre Einzelbelastung angeben zu können, weil sonst die Aufgabe unbestimmt bleibt. Doch kann diese Unbestimmtheit durch Einschaltung von Zwischenträgern gehoben werden. Soll der Stab BCD , Fig. 104, auf welchen in M die Mittelkraft Q seiner

Fig. 104.

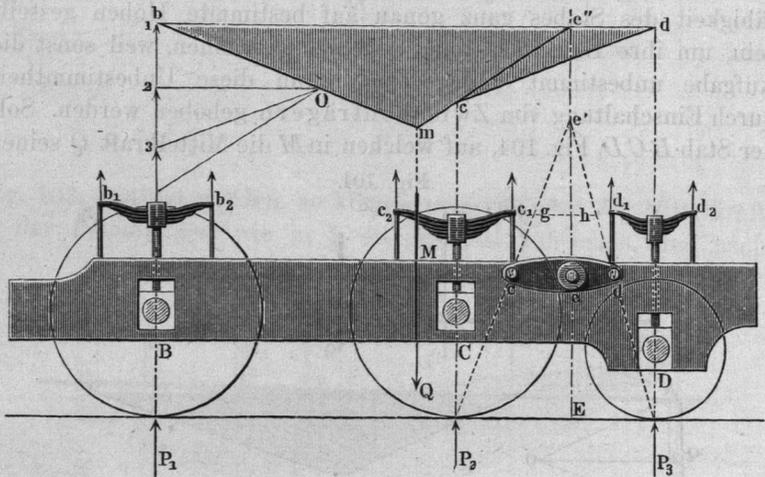


Gesamtbelastung wirkt, durch drei Kräfte P_1 , P_2 , P_3 in den Senkrechten durch B , C und D gestützt werden, so ist zunächst eine Annahme über das Verhältniss zweier der Kräfte, z. B. P_1 und P_2 , zu machen. Diese werden dann durch einen Zwischenträger $B_1 C_1$ aufgenommen, auf welchen in EE_1 der Stab presst, nachdem $E_1 C_1 : E_1 B_1$ gleich dem angenommenen Verhältniss $P_1 : P_2$ gemacht worden. Nunmehr vertheilen wir Q auf E und D mittelst des Seil- und des Kräftepolygons emd und $A O 1 2$. Es ist dann $A 1 = Q$, $1 2 = P_3$, $2 A = P_1 + P_2$, welche letztere Summe dann nach irgend einer der bekannten Methoden auf B_1 und C_1 vertheilt wird. Jede andere Annahme des Verhältnisses $\frac{P_1}{P_2}$ liefert eine andere Grösse für P_3 . Werden P_1 und P_2 gleich gross verlangt, so fällt E in die Mitte von BC und wird der Zwischenträger gleicharmig. Die gewöhnlichen Blattfedern der Eisenbahnwagen und anderer

Fuhrwerke sind gleicharmige Zwischenträger. Bei manchen Luxuswagen, auch selbst bei Lokomotiven, finden sich auch ungleicharmige Federn als Zwischenträger angewandt. Ungleicharmige Zwischenträger sind auch die Hebel der meisten Brückenwaagen.

Soll eine Last auf mehr als drei oder vier Punkte vertheilt werden, so ist durch Zusammensetzung von Zwischenträgern das gewünschte Ergebniss zu erreichen. Solches geschieht z. B. bei den Lokomotiven. Will man die in *M*, Fig. 105, angreifende Ge-

Fig. 105.

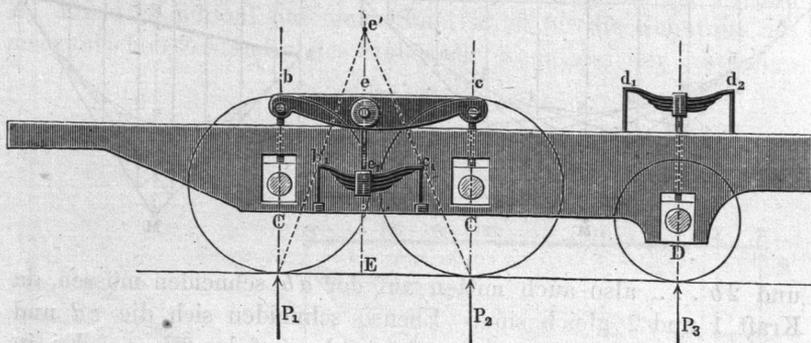


sammtbelastung Q eines Lokomotivrahmens so auf drei Achsen BCD vertheilen, dass die Pressungen sämtlich durch Federn auf die Achslager übertragen werden, und ausserdem die Belastungen der Räder C und D ein bestimmtes Verhältniss zu einander annehmen, so kann dies durch Anbringung von drei Federn und einen steifen Zwischenträger an jeder Rahmenseite geschehen; es kommen dann also im Ganzen acht Zwischenträger zur Anwendung. Zunächst theile man, wenn das Verhältniss der Kräfte P_2 und $P_3 = p : q$ sein soll, den Abstand der Achsen C und D wie $q : p$ ein und errichte im Theilpunkte ein Loth Ee . Aus einem beliebigen Punkte e' desselben ziehe man darauf Strahlen nach den Druckpunkten der Räder C und D , d. i. den Angriffspunkten der von der Schiene auf die Räder ausgeübten Kräfte P_2 und P_3 . Alle zusammengehörigen Horizontalabstände dieser Strahlen von der Ee geben zusammengehörige Armlängen für den Zwischen-

träger ced an. Zugleich liefern die Abstände der Punkte c und d von den Lothen in C und D die zusammengehörigen Armlängen der federnden Zwischenträger c_1e_2 und d_1d_2 . Die Federn sind gleichschenkelig zu machen, damit die Kräfte an ihren Enden gleichgross ausfallen. Die Armlänge der Feder bei C ist willkürlich, nur muss auch diese gleichschenkelig sein. Bei einmal gewähltem Verhältniss $p:q$ und gegebenen Achsenabständen kann durch die Wahl der Zwischenträgerlänge nichts an dem Verhältniss von P_1 zu der Summe $P_1 + P_2$ geändert werden, wie die Betrachtung des Seilpolygons $bmc d$ lehrt. Die als Zwischenträger wirkenden Federn müssen den sie belastenden Kräften entsprechend stark gemacht, beziehungsweise durch Stellung der Gehänge-Schrauben so lange regulirt werden, bis ihre Widerstände den gewählten Verhältnissen der festen Zwischenträger entsprechen.

Aufgaben wie die obige können auf viele verschiedene Arten gelöst werden; die Praxis weist zahlreiche Beispiele auf. So z. B. kann man die beiden Federn, an welche der feste Zwischenträger angreift, in eine einzige vereinigen, siehe Fig. 106. Hier sind die

Fig. 106.



Achsen C und D unmittelbar durch den steifen Zwischenträger bec belastet. Dieser aber wird von der Feder $b_1e_1c_1$ erfasst, deren Enden an den Rahmen angehängt sind. Die Arme b_1e_1 und c_1e_1 der Feder sind ungleich lang, und zwar haben sie dasselbe Verhältniss $p:q$, welches den Armen des Zwischenträgers bec zukommt. Werden die Armlängen der Zwischenträger nicht richtig gewählt, oder trifft die Lastvertheilung der ausgeführten Lokomotive nicht mit der Vorausannahme überein, so stellen sich die Zwischenträger schief.

§. 42.

Gleichförmig vertheilte parallele Kräfte.

Ist über einen Stab eine Last vollständig gleichförmig vertheilt, so können Kräfte- und Seilpolygon nicht nach den bisherigen Angaben gezeichnet werden, indem das Seilpolygon in eine Kurve übergeht. Die Gestalt dieser letzteren ist indessen wie folgt zu ermitteln. Denkt man zunächst die gleichförmig vertheilte Last in lauter gleich grosse Lasten an einzelnen Punkten von gleichem Nachbarabstand zusammengezogen, wie die Kräfte 1, 2...9, Fig. 107, und das Seilpolygon verzeichnet, so ist klar, dass die Polygonseiten aM und bc einander mitten zwischen der $1a$...

Fig. 107.

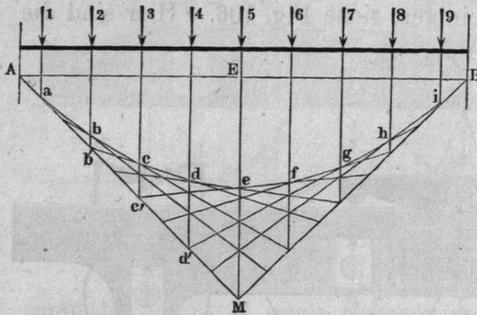
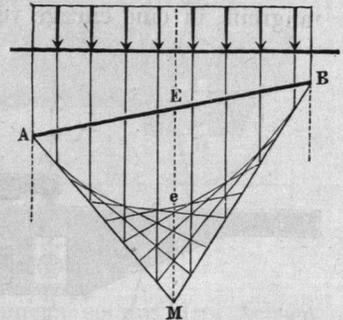


Fig. 108.



und $2b$..., also auch mitten auf der ab' schneiden müssen, da Kraft 1 und 2 gleich sind. Ebenso schneiden sich die cd und aM mitten zwischen $3c$... und $1a$, also auf der $2b$..., d. i. in b' , ferner die de und aM mitten zwischen b' und c' . Und so fort, d. h. die aufeinander folgenden Einschnittpunkte der verlängerten Polygonseiten in die aM , wie auch in die iM , haben auf diesen Geraden gleiche Abstände von einander. Demnach hüllen die Polygonseiten nach einem bekannten Satze eine Parabel ein, deren Scheitel hier bei e auf der Mittellinie EM liegt, und für welchen die Abszisse $Ee = \frac{EM}{2}$. In diese Parabel geht das Seilpolygon über, wenn die Last wieder wie zu Anfang völlig gleichförmig vertheilt wird. Bedenkt man, dass das Dreieck AMB das Polygon

für die in E zusammengezogene Gesamtbelastung ist, so ersieht man sofort, wie die Kurve jederzeit leicht zu verzeichnen ist. Ist die Sehne AEB schief gegen die Kräfte gerichtet, wie in Fig. 108, so wird die Eintheilung auf AM und MB einzeln eine gleichförmige, wiewohl die Theilung auf AM verschieden wird an der auf MB . Der Punkt e liegt auch dabei auf der Mitte von EM , ohne indessen Scheitel der Parabel zu sein.

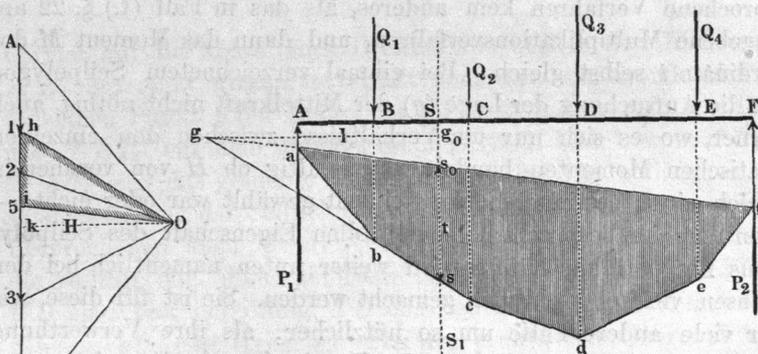
Gelenkpolygone, welche in Kurven übergehen, erhält man auch bei Belastungen, welche über den Stab hingeleiten; sie sind dann die Figuren, welche die auf einander folgenden geradseitigen Polygone einhüllen. Verwickelte Beispiele hiezu liefern die Eisenbahnbrücken, einfachere Uebungsbeispiele die Laufkranträger, auch Geradführungsschienen bei Dampfmaschinen.

§. 43.

Statische Momente paralleler Kräfte.

Wirken parallele Kräfte, z. B. die Kräfte Q_1 bis Q_4 , P_1 und P_2 , Fig. 109, normal auf einen Stab, so ist für die Kenntniss des mechanischen Zustandes des Stabes die Kenntniss der statischen

Fig. 109.



Momente der äusseren Kräfte nothwendig. Diese können mittelst des Seil- und Kräftepolygons leicht bestimmt werden. Nach Verzeichnung des Kräftepolygons $AO4$, und des Seilpolygons $abcdef$ sei das statische Moment M für den Punkt S des Stabes

zu bestimmen. Dieses Moment ist das Produkt aus der Mittelkraft aller Kräfte zur einen oder anderen Seite der zur Kraft-richtung parallel gezogenen SS_1 und dem Abstände l derselben von SS_1 . Der Grösse nach erhält man aber diese Mittelkraft als den Abschnitt $hi = 1.5$ im Kräftepolygon zwischen den Strahlen $O1$ und $O5$, welche parallel bc und fa gezogen sind; ihre Lage wird durch Verlängerung letzterer Polygonseiten bis zu ihrem Schnitte g gefunden. Zieht man also das Loth gg_0 , so ist dieses der Arm l der Resultirenden $P = hi$, welche den Stab bei S zu biegen trachtet. Es ist also $M = P \cdot l$.

Diese Multiplikation lässt sich aber auch graphisch ausführen. Fällt man nämlich noch das Loth Ok im Kräftepolygon, so ist dieses die Höhe des Dreieckes Ohi auf der Grundlinie hi , welches Dreieck dem Dreieck gss_0 von der Höhe l ähnlich ist. Es verhält sich also $hi : Ok = ss_0 : gg_0$, oder wenn man Ok mit H , ss_0 mit t bezeichnet:

$$P : H = t : l$$

woraus:

$$M = Pl = Ht.$$

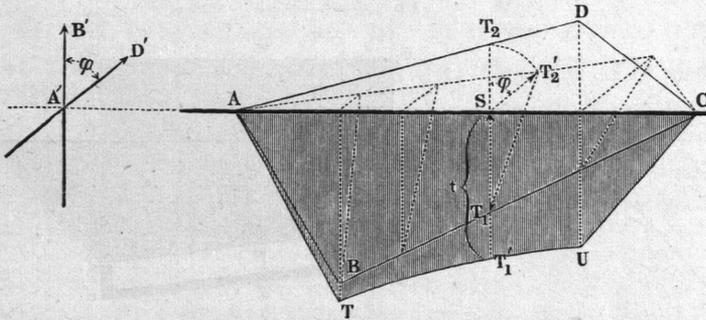
Hiernach verhalten sich die statischen Momente an den einzelnen Stellen des Stabes wie die zugehörigen den Kräften parallelen Ordinaten des Seilpolygones, da H konstant ist. Macht man H zur Einheit, so ist das eben besprochene Verfahren kein anderes, als das in Fall (I.) §. 22 angegebene Multiplikationsverfahren, und dann das Moment M der Ordinate t selbst gleich. Bei einmal verzeichnetem Seilpolygon ist die Aufsuchung der Lage (g) der Mittelkraft nicht nöthig, auch ferner, wo es sich nur um Verhältnisse zwischen den einzelnen statischen Momenten handelt, gleichgültig ob H von vornherein gleich einer bestimmten Maasseinheit gewählt war oder nicht. — Von der hier besprochenen werthvollen Eigenschaft des Seilpolygons für parallele Kräfte wird weiter unten, namentlich bei den Achsen, vielfach Gebrauch gemacht werden. Sie ist für diese, wie für viele andere Fälle um so nützlicher, als ihre Verwerthung keine besondere Abänderung oder Erweiterung der Verzeichnungsmethode erfordert, vielmehr die Momente beim blossen Aufsuchen der Kräfte schon von selbst gefunden werden. Für den praktischen Gebrauch der Figur ist es zweckmässig, den die Momenten-Ordinaten einschliessenden Linienzug mit einem leichten Farberton anzulegen.

§. 44.

Zusammensetzung und Zerlegung statischer Momente.

Nach dem Vorigen sind statische Momente paralleler Kräfte durch Strecken von bestimmter Lage und Richtung darstellbar, gerade wie einfache Kräfte. Wirken deshalb zwei statische Momente in gleichen oder verschiedenen Richtungen auf denselben Punkt eines Stabes, so können dieselben, wie es von Kräften in §. 31 gezeigt wurde, graphisch addirt werden. Sind ABC und ADC , Fig. 110, die Seilpolygone von zwei Reihen paralleler Kräfte, welche

Fig. 110.



normal auf die Achse eines Drehkörpers AC in den Richtungen $A'B'$ und $A'D'$ wirken, so erhält man das resultirende Moment für einen Punkt S der Achse des Körpers, indem man das Dreieck T_1ST_2' mit dem Winkel $\varphi = B'A'D'$ bildet, worauf $T_1T_2' = ST_1' = t$ das gesuchte Moment darstellt. Die vollzogene Zusammensetzung der Seilpolygone ABC und ADC , die nach dem Besprochenen auch Momentenflächen heißen können, liefert die resultirende Momentenfläche $ATUC$. Die Seiten AT und CU sind hier geradlinig, TU dagegen ist eine Kurve, im vorliegenden Falle eine Hyperbel. Für den praktischen Gebrauch kann sie oft durch ihre Sehne TU ersetzt werden; übrigens ist ihre Verzeichnung nicht umständlich.

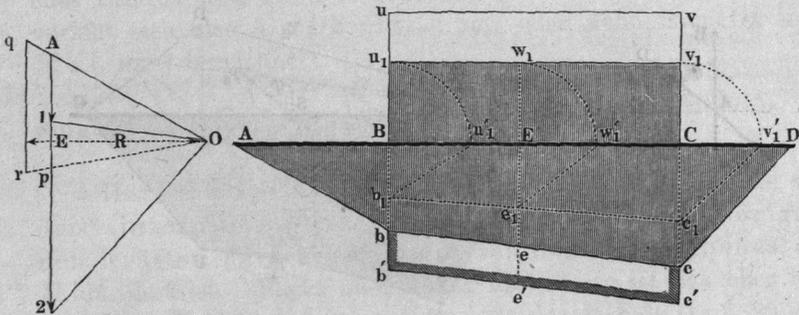
Durch Umkehrung der Aufgabe gelangt man zu der Zerlegung eines beliebigen statischen Momentes t von gegebener Richtung in zwei andere t_1 und t_2 von ebenfalls gegebenen Richtungen.

§. 45.

Verdrehende Momente und deren graphische Vereinigung mit biegenden.

Neben biegenden Momenten und oft mit denselben vereinigt werden viele Konstruktionstheile gleichzeitig auch verdrehenden Momenten ausgesetzt. Dieselben können, wie leicht einzusehen, ebensowohl wie biegende durch Strecken, beziehlich Momentenflächen dargestellt werden. Ist $ABCD$, Fig. 111, die Achse eines

Fig. 111.



Rotationskörpers, welcher durch biegende Kräfte in B und C belastet in A und D gestützt wird, welchen Kräften das Kräftepolygon $AO2$, die Momentenfläche $AbcD$ entspricht, und wird dieser Stab zwischen B und C von einem gegebenen verdrehenden Momente $P \cdot R$ beansprucht, so ist zuerst die Momentenfläche des letzteren zu bestimmen. Nach §. 43 und der Multiplikationsregel I., §. 22, erhält man die Strecke, welche PR darstellt, indem man zunächst P von A bis p im Kräftepolygon aufträgt, den Strahl $Op \dots$ zieht, und in $OA \dots$ und $Op \dots$ mit einer um R von O abstehenden Parallelen zu Ap einschneidet; das abgeschnittene Stück qr der letzteren stellt dann PR in demselben Maassstabe, d. i. für dieselbe Einheit OE dar, welche für das Polygon $AbcD$ gilt. Die Momentenfläche für die Verdrehung zwischen C und D wird hiernach in dem Rechtecke $BCvu$ erhalten, dessen Höhe Bu oder $Cv = qr$ ist. In der Regel ist bei praktischen Aufgaben dieses Torsionsrechteck zu vergleichen und

in Beziehung zu setzen zu gleichzeitig wirkenden biegenden Momenten. Soll dies geschehen, so ist es zu ersetzen durch ein gleichwerthiges, d. h. derselben Tragsicherheit entsprechendes biegendes Moment. Ein solches ist aber nach §. 18 gleich $\frac{5}{8}$ des verdrehenden Momentes. Macht man demnach $Bu_1 = Cv_1 = \frac{5}{8} Bu$, so ist das erhaltene Rechteck die Momentenfläche der biegenden Momente zwischen B und C , welche im Maassstabe der $AbcD$ gezeichnet die verdrehenden Momente ersetzen können.

Sollen diese mit den gegebenen biegenden Momenten vereinigt werden, so hat eine graphische Addition beider stattzufinden, welche durch Formel (IV.) §. 18 S. 49 analytisch angegeben wird, wonach das resultirende (ideelle) biegende Moment M_i , welches das verdrehende M_d und das biegende M_b an jeder Stelle ersetzt:

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

ist. Zu dem Ende machen wir $Bb_1 = \frac{5}{8} Bb$, $Cc_1 = \frac{5}{8} Cc$, $Ee = \frac{5}{8} Ee$ u. s. w., klappen Bu_1 , Cv_1 , Ev_1 auf AD nieder, und addiren die Hypotenusen b_1u_1' , c_1v_1' , e_1w_1' zu den Strecken bb_1 , cc_1 , ee_1 . Die erhaltenen Summen der wirklichen Längen dieser Strecken sind dann die zu B , C und E gehörigen Ordinaten des resultirenden ideellen Seilpolygones $Bbb'e'e'c'D$, welches die zusammengesetzte Beanspruchung darstellt.

§. 46.

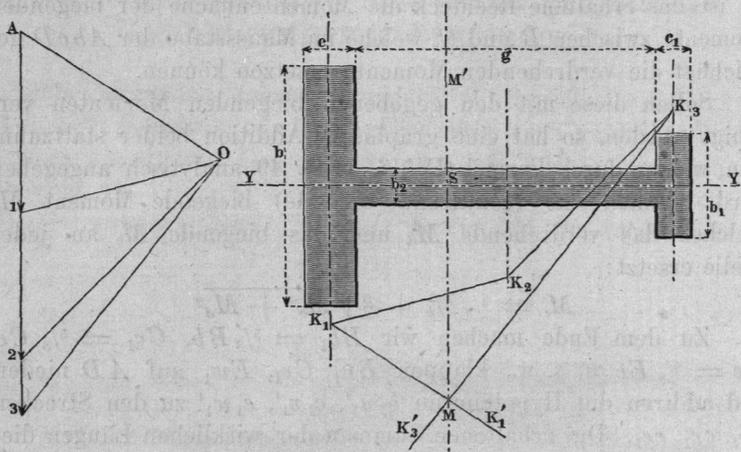
Bestimmung des Schwerpunktes mittelst des Kräfteplanes.

Die Aufsuchung des Schwerpunktes einer ebenen Figur lässt sich mittelst des Kräfteplanes oftmals sehr bequem ausführen. Man zerlegt dieselbe dafür in schmale Streifen von gleicher Breite, deren Inhalt man ihrer mittleren Länge proportional setzen kann, bildet aus denselben ein Kräfte- und Seilpolygon, und erhält dann in der Richtungslinie der Mittelkraft eine Schwerlinie. Ist die Figur nicht symmetrisch, so wiederholt man dasselbe Verfahren unter Annahme einer zweiten Richtung der schmalen Streifen, worauf man eine zweite Schwerlinie, und in deren Schnitt mit der ersten den Schwerpunkt erhält. Bei einfach gestalteten Figuren können auch grössere Abschnitte statt der Streifen ge-

bildet, ihr Flächeninhalt auf irgend eine Weise bestimmt, und in graphischer Auftragung, wie angegeben, benutzt werden.

Es sei z. B. der Schwerpunkt des in Fig. 112 dargestellten T-förmigen Trägerquerschnittes zu suchen. Zur Achse YY ist

Fig. 112.



die Figur symmetrisch, also liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse. Wir zerlegen die Figur ferner in die Rechtecke $b \times c$, $b_1 \times c_1$ und $b_2 \times g$ von den Flächeninhalten 1, 2 und 3. Durch die Mitten dieser Figuren gehen dann deren einzelne Schwerlinien. Es sei nun $c = 1,5 b_2$, $c_1 = b_2$. Dann können wir die Kräfte 1, 2 und 3 durch $1,5 \times \frac{b}{2}$, $\frac{g}{2}$ und $\frac{b_1}{2}$ darstellen und aneinandertragen, wie bei $A123$ geschehen ist, wählen einen Pol O und ziehen $K_1'K_1 \parallel OA$, $K_1K_2 \parallel O1$, $K_2K_3 \parallel O2$, $K_3K_3' \parallel O3$; dann ist der Schnittpunkt M der Seiten K_1K_1' und K_3K_3' ein Punkt der gesuchten Schwerlinie MM' , deren Schnittpunkt S mit der Achse YY der Schwerpunkt der Figur ist.

§. 47.

Mittelkraft der Wasserbelastung eines Wasserrades.

Beim Entwurfe eines Wasserrades ist es mitunter wichtig, die Lage der Mittelkraft der Wasserbelastung zu kennen; man kann

dieselbe nach den entwickelten Lehrsätzen unschwer bestimmen, was beispielsweise hier für ein rückschlächtiges*) Zellenrad gezeigt werden soll.

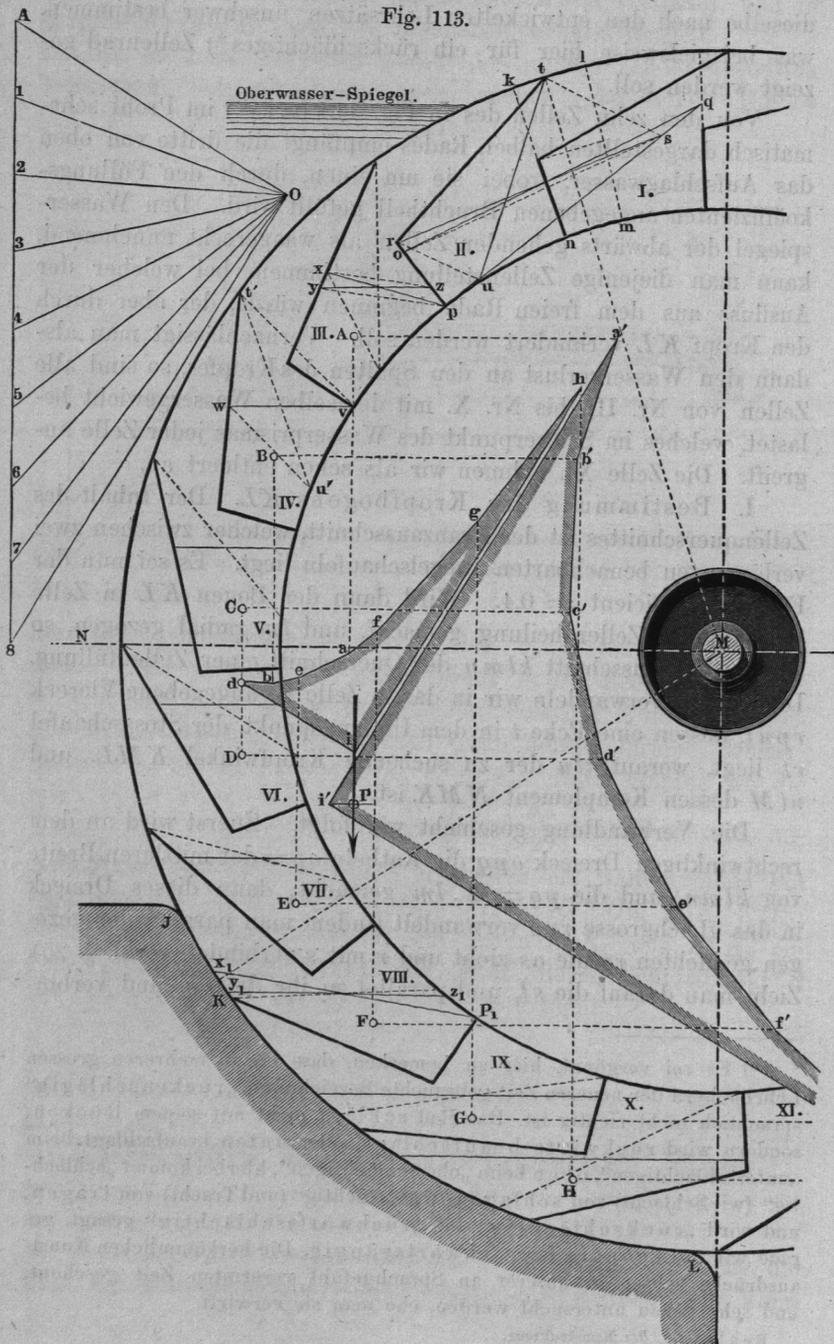
Von den zehn Zellen des in Fig. 113 (a. f. S.) im Profil schematisch dargestellten halben Rades empfängt die dritte von oben das Aufschlagwasser, wobei sie um einen, durch den Füllungskoeffizienten angegebenen Bruchtheil gefüllt wird. Den Wasserspiegel der abwärts gehenden Zellen als waagrecht annehmend, kann man diejenige Zellenstellung bestimmen, bei welcher der Ausfluss aus dem freien Rade beginnen würde, der aber durch den Kropf KL verhindert werden soll. Vernachlässigt man alsdann den Wasserverlust an den Spalten des Kropfes, so sind alle Zellen von Nr. III. bis Nr. X. mit demselben Wassergewicht belastet, welches im Schwerpunkt des Wasserprismas jeder Zelle angreift. Die Zelle XI. nehmen wir als schon entleert an.

I. Bestimmung des Kropfbogens KL . Der Inhalt des Zellenquerschnittes ist der Kranzausschnitt, welcher zwischen zwei verlängerten benachbarten Riegelschaufeln liegt. Es sei nun der Füllungskoeffizient $= 0,4$. Wird dann der Bogen KL in Zelle I. $= 0,4$ der Zellentheilung gemacht, und lm radial gezogen, so ist der Ringausschnitt $klmn$ der Querschnitt einer Zellenfüllung. Diese Figur verwandeln wir in das in Zelle II. angegebene Viereck $rput$, dessen eine Ecke t in dem Umfangspunkt der Stossschaufel rt liegt, worauf ktu der zu suchende Kropfwinkel KML , und utM dessen Komplement NMK ist.

Die Verwandlung geschieht wie folgt. Zuerst wird an dem rechtwinkligen Dreieck opq die Kathete $op =$ der mittleren Breite von $klmn$, und die $pq = 2 \cdot lm$ gemacht, dann dieses Dreieck in das gleichgrosse tps verwandelt (indem man parallel der gezogen gedachten rq die os zieht und r mit s verbindet, vergl. §. 25). Zieht man darauf die st , und parallel zu ihr die ru , und verbind-

*) Es sei vergönnt, hier zu bemerken, dass die in mehreren grossen Lehrbüchern der neueren Zeit gebrauchte Bezeichnung „rückenschlächtig“ sprachlich nicht richtig ist. Das Rad schlägt nicht mit seinem Rücken, sondern wird rückwärts beaufschlagt, oder unten beaufschlagt beim „unterschlächtigen“, oben beim „oberschlächtigen“; hierbei kommt „schlächtig“ (wie Schlacht) von schlagen, wie „trächtig“ (und Tracht) von tragen, und wird „rückschlächtig“ für „rückwärtsschlächtig“ gesagt, gerade wie rückgängig für rückwärtsgängig. Die herkömmlichen Kunstausdrücke sollten in unserer an Sprachgefühl verarmten Zeit geschont, und sehr genau untersucht werden, ehe man sie verwirft.

Fig. 113.



det u mit t , so ist, abgesehen von der statthaften Vernachlässigung der Krümmung von pu , das Viereck $rput$ das gesuchte. Winkel KMN ist $= utM$ gemacht, übrigens wegen des Schwappens des Wassers der Kropf noch bis J hinauf verlängert.

II. Bestimmung der Wasserspiegel in den einzelnen Zellen. Wir beginnen mit Zelle IV. In dieselbe ist die Figur $rput$ eingetragen, darauf von t' aus versuchsweise die $t'v$, und ihr parallel die $u'w$ gezogen, bis die Verbindende vw waagrecht fiel, was nach wenigen Tastversuchen erreicht wird. Ebenso ist mit Zelle V., VI. und VII. verfahren.

In Zelle III. wurde die eingetragene Figur $rput$ vorerst in das Viereck mit der Oberlinie px verwandelt, und dieses dann wie vorhin in die hier fünfeckige Figur mit waagerechter Oberlinie yz umgestaltet.

In Zelle VIII. trat eine dritte Verfahrungsweise ein. Zuerst wurde die eingetragene Figur $rput$ in die mit der Oberlinie p_1x_1 , und darauf diese in die mit waagerechter Oberlinie y_1z_1 verwandelt; auf dieselbe Weise ist endlich in den Zellen IX. und X. verfahren.

III. Kräfteplan für die Wassergewichte. Es werden nunmehr die Schwerpunkte A, B bis H der acht gefüllten Zellen aufgesucht, was auf dem Wege der Zeichnung nach den in der Flächentafel des IV. Abschnittes gegebenen Regeln geschehen kann, und darauf aus den acht gleichen Kräften das Kräftepolygon $A O 8$ gebildet. Mit dessen Hilfe wird sodann das Gelenkpolygon $d b e a f g h i$ nach den bekannten Regeln konstruiert, und dabei in i ein Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft aller Wassergewichte erhalten. Zu bemerken ist über die Zeichnung hier nur, dass wegen der horizontalen Nähe der Schwerpunkte C und D die beiden in ihnen wirkenden Kräfte vereinigt gedacht wurden, so dass $id \parallel AO$, $db \parallel O2$ zu ziehen war, eine Parallele zu $O1$ also wegfiel.

Leicht ist es nun auch, den wirklichen Schwerpunkt P der sämtlichen Wasserprismen zu finden. Wir legen dafür durch ABC u. s. w. Horizontalen, denken uns das Kräftepolygon $A O 8$ um 90° gedreht, und bilden mit den Parallelen zu den Polstrahlen ein Seilpolygon, oder — was dieselben Dienste kürzer thut — wir ziehen die Seilpolygonseiten antiparallel, also hier normal, zu den Polstrahlen, und erhalten das zweite Seilpolygon $a'b'c'd'e'f' \dots i'$. Eine Horizontale durch i' schneidet alsdann die Vertikale, welche

durch i gelegt wurde, im Schwerpunkte P der Gesamt-Wassermasse.

Bei Annahme einer anderen Zellenstellung findet sich die iP vielleicht in einer etwas anderen Lage, doch fallen bei gewöhnlichen Rädern die Schwankungen der Lage äusserst klein aus. Das ganze Verfahren führt sich leicht und sicher aus, wenn man nicht übertrieben peinlich auf eine Genauigkeit sieht, welche hier erlässlich ist.

§. 48.

Kräftepläne für Zimmerwerke.

In Bauten aller Art kommen gezimmerte Träger zur Anwendung, welche aus Stäben bestehen, die zu unveränderlichen Systemen zusammengesetzt sind; sie dienen als einfache Tragbalken, als Brückenträger, als Dachstühle, als Hebel (Balanciers) u. s. w. Die in den Stäben auftretenden Zug- und Druckkräfte lassen sich durch Kräftepläne, welche entweder Kräftepolygone und Seilpolygone sind, oder aus solchen gebildet werden, sehr übersichtlich darstellen. Es sollen hier einige lehrreiche Fälle als Beispiele vorgeführt werden. Bei denselben ist überall angenommen, dass an den Knoten, d. h. an den Punkten, wo mehrere Stäbe zusammentreten und verbunden sind, ein Gelenk vorhanden, oder auf die Biegungsfestigkeit des Knotens wenigstens keine Rücksicht zu nehmen sei.

Um bei bekanntem Konstruktions- oder Bauplan eines solchen Stabsystems dessen Kräfteplan zu bilden, hat man vorerst die Vertheilung der Kräfte der Aufgabe gemäss festzustellen, und dann, bei einer der äusseren Kräfte beginnend, dieselbe den Stabrichtungen nach zu zerlegen; darauf die so erhaltenen Stabkräfte an den nächsten Knoten mit den schon dort angreifenden äusseren Kräften zu vereinigen, und die Resultirende wieder den folgenden Stabrichtungen nach zu zerlegen u. s. f. Die sich hierbei aneinanderreihenden Kräftedreiecke oder -Vierecke bilden den Kräfteplan.

Soll man über die Richtung der Komponenten, in welche eine gegebene oder gefundene Kraft zerlegt wird, stets im Klaren sein, so hat man die in §. 32 erwiesenen Eigenschaften des Kräftepolygons im Auge zu behalten. Aus denselben ist für den hier

zu erreichenden Zweck namentlich folgendes Verfahren abzuleiten. Ist eine Kraft in zwei oder mehrere zu zerlegen, so hat man ihren Richtungspfeil umzukehren, und sie nun zur Schlusslinie S' in dem Zuge der zusammensetzenden Kräfte zu machen, Fig. 114.

Will man zwei oder mehrere gegebene Kräfte durch zwei oder mehrere andere ersetzen, so erhalten das Kräftepolygon aus den gegebenen Kräften und das aus den sie ersetzenden dieselbe Schlusslinie S , Fig. 115

Fig. 114.

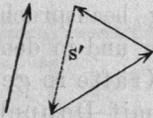
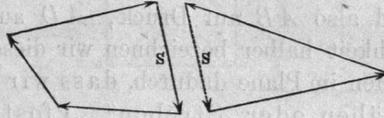


Fig. 115.



Von dieser Regel ist die vorhergehende ein besonderer Fall, indem eine einzeln graphisch dargestellte Kraft als ein ungeschlossenes Kräftepolygon anzusehen ist, dessen Schlusslinie der Rückzug zum Anfangspunkt ist.

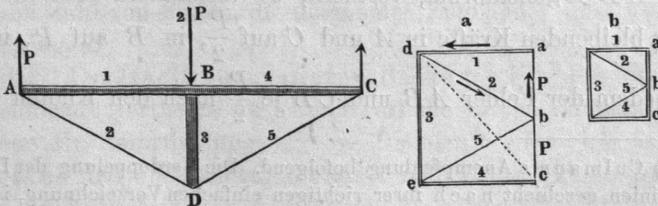
Um die Beanspruchungsart jedes Stabes im Bauplan sicher zu finden, denke man sich, wenn irgend Zweifel entstehen, den Stab zerschnitten und an die beiden Schnittenden äussere Kräfte angesetzt, welche die inneren vertreten; die Richtung dieser Kräfte entscheidet dann sofort mit Bestimmtheit die Beanspruchung.

§. 49.

Kräftepläne für zusammengesetzte Träger.

I. Einfach verspannter Balken. Fig. 116. Der Balken ABC sei bei B normal zu AC mit $2P$ belastet, und bei A und

Fig. 116.



C gestützt; die Stützkkräfte werden beide $= P$, da $AB = BC$. Es sind die Beanspruchungen der Stäbe Nr. 1 bis 5 zu suchen.

In dem mit a bezeichneten kleinen Plan ist \overline{ab} die Kraft P , welche bei A nach oben wirkt. Sie ist zu zerlegen in die der Konstruktion als innere Kräfte angehörige Kräfte in AB und AD . Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese inneren Kräfte mit den Nummern der entsprechenden Stäbe, und ziehen $1 \parallel AB$, $2 \parallel AD$. Damit die Schlusslinie des hiermit erhaltenen Kräfte-dreieckes die Richtung von P habe (d. h. die Resultirende von 1 und 2 der Kraft P entgegengerichtet sei, vergl. §. 48), müssen 1 und 2 den Pfeilrichtungen in Fig. 116 a nach gerichtet sein. Es wird also AB auf Druck, AD auf Zug beansprucht. Der Deutlichkeit halber bezeichnen wir dieses hier und in den folgenden Fällen im Plane dadurch, dass wir die Kräfte in gedrückten Stäben oder „Streben“, „Pfeilen“, mit Doppellinien, die in gezogenen „Ankern“ oder „Zugstangen“, „Zugbändern“, „Schlaudern“ mit einfachen Linien zeichnen*). Ganz entsprechend verzeichnen wir in der Konstruktionszeichnung oder dem Bauplan des Balkens, hier wie weiter unten, die als Streben erfundenen Stäbe mit einer deutlich messbaren Breite, wie Holzbalken, die als Zugstangen sich ergebenden mit einfachem kräftigem Striche, womit aber selbstverständlich der Wahl des Materials nicht vorgegriffen wird.

Für den Knoten B setzen wir nun $2P = \overline{abc}$ mit 1 zusammen, und zwar in dem Zuge dac , indem der Stab von A nach B hin presst, und zerlegen die (punktirte) Schlusslinie horizontal und vertikal in die Kräfte 3 und 4, welche beide Druckkräfte werden. 2 und 3 zusammengesetzt liefern endlich die Kraft 5, welche eine Zugkraft wird. Der Plan hat zwei kongruente Hälften, wie zu erwarten war wegen der Symmetrie des Bauplanes, weshalb wir uns auch mit Untersuchung der einen Hälfte begnügen könnten.

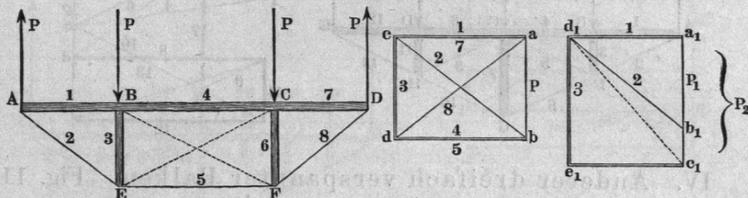
Denkt man sich die Last $2P$ statt in B zusammengezogen, über ABC gleichförmig vertheilt, so vermindern sich die frei übrig bleibenden Kräfte in A und C auf $\frac{P}{2}$, in B auf P , indem von jedem der Felder AB und CB je $\frac{P}{2}$ nach den Knoten A, B

*) Culmann's Anempfehlung befolgend. Die Verdoppelung der Druckkraftlinien geschieht nach ihrer richtigen einfachen Verzeichnung, ist also nur eine Art von Unterstreichung.

und C fallen. Wir erhalten dann den Kräfteplan b , welcher dem ersten geometrisch ähnlich ist, aber nur halb so gross ausfällt.

II. Zweifach verspannter Balken (viel gebraucht als Träger der sogenannten Brücke bei den Zentesimal-Brückenswaagen für Strassen- und Eisenbahn-Fahrzeuge, sowie in manchen anderen kleineren und grösseren Konstruktionen) Fig. 117. In B und C zwei senkrecht abwärts wirkende Kräfte P , in A und

Fig. 117.

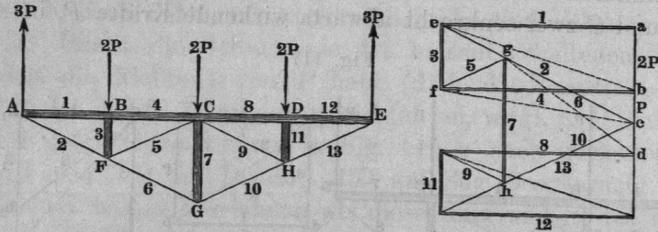


D zwei gleiche nach oben wirkende. Im Kräfteplan a ist $ab = P$ gemacht, $1 \parallel AB$, $2 \parallel AE$ gezogen, wodurch die Kräfte 1 und 2 erhalten werden. 1 ist wie vorhin Druckkraft, 2 Zugkraft. Letztere $\parallel BE$ und $\parallel EF$ zerlegt, zerfällt in die Zugkraft 5 und die Druckkraft 3. 3, 1 und P in B vereinigt liefern nach dem Plan die Druckkraft 4; die andere Hälfte ist der betrachteten gleich. — Wenn die Vertikalkräfte bei A und B an Grösse nicht gleich sind, was leicht bei einer praktischen Ausführung eintritt, so ist entweder bei B das oben erwähnte Gelenk nicht zulässig, oder es müssen noch Verstärkungsbänder EC (und BF) eingezeichnet werden. Der Plan b zeigt dies. Ist $P_1 = a_1 b_1$ in A wirkend, $P_2 = a_1 c_1$ in B , so ergibt die Zerlegung von $2 \parallel EB$ und EF eine andere Vertikalkraft 3, als die Vereinigung von P_2 und 1 zu der punktierten Resultirenden und Zerlegung derselben $\parallel EB$ und EF . Werden also die Zugbänder weggelassen, so sucht sich das Fachwerk schiefe zu zwingen, bis die Theile solche Winkel einschliessen, dass die beiden Zerlegungen dasselbe Ergebniss für 3 liefern. Hiernach empfiehlt es sich in einer grossen Zahl von Fällen, die diagonalen Zugbänder im Mittelfelde anzubringen.

III. Dreifach verspannter Balken. Fig. 118 (a. f. S.). Gleichförmig vertheilte Belastung ruft die in den Bauplan eingetragene Kräftevertheilung hervor. Die Kraft $3P = abc$ ist in 2 und 1, ce und ea , zerlegt; darauf 1 mit $ab = 2P$ zu be vereinigt und diese in 3 und 4, ef und fb zerlegt, 2 und 3 wieder

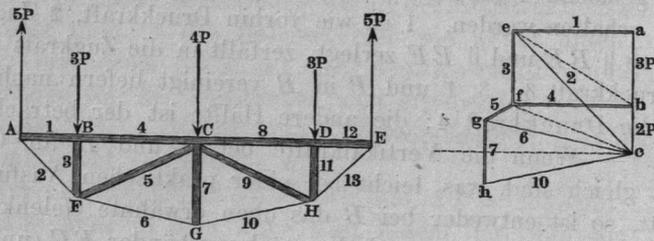
vereinigt, zu fc , und die Resultante in 5 und 6, fg und gc zerlegt. Darauf ist, da 6 und 10 einander gleich sind, $ch \parallel GH$ und $= cg$ gemacht, worauf $gh = 7$; der Rest des Kräfteplanes ist eine Wiederholung der ersten Hälfte desselben.

Fig. 118.



IV. Anderer dreifach verspannter Balken. Fig. 116. Das Feld BC ist doppelt so breit, als das Feld AB , die Last

Fig. 119.



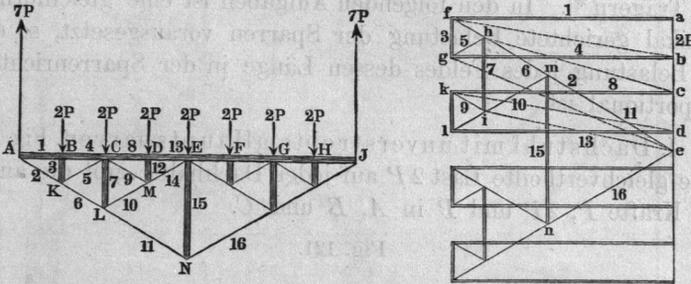
$12 P$ gleichförmig vertheilt angenommen; dann erfahren die Knoten die in Fig. 119 angegebene Belastung.

Es ist nun abc im Kräfteplan $= 5 P$ gemacht, und in 1 und 2, ae und ec zerlegt; dann 1 mit $3P$ vereinigt (Knoten B) und die Zerlegung in 3 und 4, ef und fb , vollzogen; nun 2 mit 3 zu cf vereinigt, und diese parallel FC und FG in 5 und 6 zerlegt. Hier wird, abweichend vom vorigen Beispiel, 5 eine Druckkraft statt eine Zugkraft. Die gleichgrossen Kräfte 6 und 10 liefern den Druck $gh = 7$ für die mittlere Stütze, womit die Hälfte des Kräfteplanes überschritten ist; die symmetrische Wiederholung ist nicht mitgezeichnet.

V. Mehrfach verspannter Balken. Fig. 120. Der Balken AJ ist in acht gleiche Felder getheilt, welche hier gleichförmig belastet angenommen sind, worauf die Belastungen der Knoten die der Figur eingeschriebenen Verhältnisse annehmen.

Im Kräfteplan ist zunächst die $ae = 7P$ gemacht, und durch deren Zerlegung 1 und 2, af und fe erhalten; darauf $ab = 2P$ angetragen, und die Resultirende bf der 1 mit $2P$ in 3 und 4, fg und gb , zerlegt. Die Kräfte 2 und 3 haben die Resultante ge ; zerlegt man diese jetzt parallel KC und KL , so erhält man in gh und he die Zugkräfte 5 und 6. Beim Uebergehen auf K

Fig. 120.



oder L zeigt sich jetzt, abweichend von den bisher betrachteten Fällen, die Schwierigkeit, dass man entweder 6 oder die vereinigten $2P$, 4 und 5 in je drei Kräfte von gegebener Richtung zerlegen muss, was eine unbestimmte Aufgabe ist. Man muss deshalb von einer der Kräfte auch noch die Grösse ermitteln. Dies lässt sich z. B. für die Kraft 7 ausführen. Der Stab CL wird vertikal zusammengepresst durch die Vertikalkomponenten der Züge 5 und 9 und die unmittelbare Last $2P$; 5 und 9 sind einander aber gleich, da sie symmetrisch zu CL liegen und die gleichbelasteten Pfosten BK und DM tragen. Demnach machen wir im Kräfteplan die hi , welche die Kraft 7 darstellen soll, gleich 2mal der Projektion von 5 auf die Vertikale $+ 2P$, vereinigen hi mit $6 = he$ zu der ie , und zerlegen diese in die Kräfte 10 und 11, im und me . Auf Knoten C zurückgehend, kann man nun auch sofort die vereinigten 4, 5 und $2P$ parallel CL , CM und CD zerlegen, was den Zug $hikc$ ergibt und die Kräfte 8 und 9 liefert. So fortfahrend erhält man 12 bis 15, womit die Hälfte des Planes überschritten ist. Bemerkenswerth ist das Ergebniss, dass der Streckbaum AJ überall gleich stark (auf Druck) beansprucht ist.

Der Kräfteplan ändert sich wesentlich, wenn man die Belastung ungleichförmig, wenn auch regelmässig vertheilt; vergl. die Lastvertheilungen in den Fällen Nr. XII und XIII, S. 12.

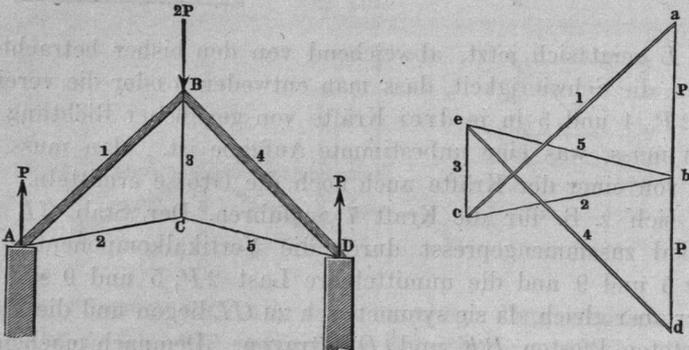
§. 50.

Kräftepläne für Dachstühle.

Die Dachstühle bieten mannigfache Beispiele von gezimmer-ten Trägern *). In den folgenden Aufgaben ist eine gleichförmige vertikal gerichtete Belastung der Sparren vorausgesetzt, so dass die Belastung jedes Feldes dessen Länge in der Sparrenrichtung proportional ist.

I. Dachstuhl mit unverstrebtem Hauptsparren. Fig. 121. Eine gleichvertheilte Last $2P$ auf jeder Dachhälfte gibt die äusseren Kräfte P , $2P$ und P in A , B und C .

Fig. 121.

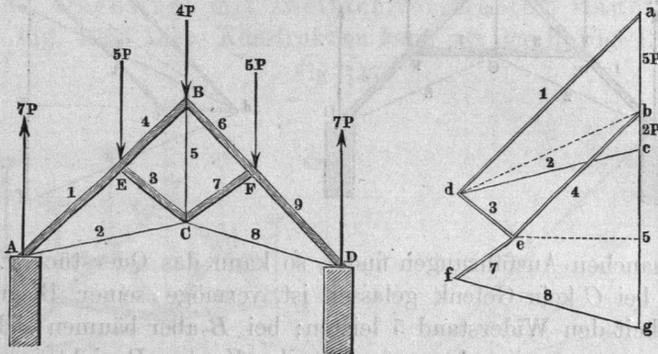


Die Strecke ab im Kräfteplan ist $= P$ gemacht, ac und bc parallel AB und AC gezogen, wodurch die Kräfte 1 und 2 erhalten wurden; 1 ist ein Druck, 2 ein Zug. Letzterer wird vertikal, nach ce , und parallel CD , nach be zerlegt, wodurch die beiden Zugkräfte 3 und 5 gefunden werden, und die Hälfte des Diagramms schon überschritten ist. Vereinigt man übrigens noch 1 mit $2P$ und 3 zu dem Zuge $ecad$, so ist die Schlusslinie de die Kraft 4.

*) Sehr nützliche Beispiele für Uebungen in der Graphostatik sind aus Ritter's Dach- und Brücken-Konstruktionen (Hannover, Rümpler 1863) zu entnehmen, wobei die sorgfältig durchgearbeiteten numerischen Berechnungen der Kräfte in den Stäben als Probe dienen können.

II. Dachstuhl mit einfach verstrebtm Hauptsparren.
 Fig. 122. Fügt man dem vorigen Dachstuhl zwei Streben CE und CF zu, so entsteht der hier gezeichnete. AE und EB verhalten sich hier wie 3 zu 2; ihre Belastungen seien $6P$ und $4P$, dann bewirken diese, dass die äusseren Kräfte an den Knoten die eingeschriebenen Grössen erhalten. Wir machen nun im Kräfte-

Fig. 122.

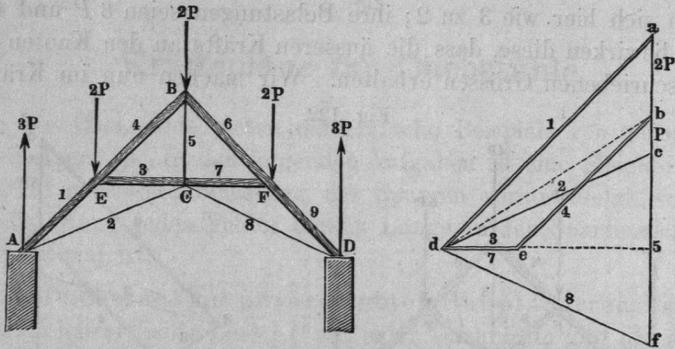


plan $ac = 7P$ und zerlegen letztere Kraft parallel AE und AC in die Kräfte 1 und 2, ad und dc ; darauf 1 mit $5P = ab$ vereinigend, und die (punktirte) Resultante nach EB und EC zerlegend, finden wir die Kräfte 3 und 4, beides Druckkräfte. 2 und 3 werden nun mit ihren Wiederholungen 7 und 8 zu dem Zuge $cdedefg$ vereinigt, worauf sich $cg = 5$ ergibt. Letztere Kraft konnte auch durch Zerlegung der vereinigten 4 und $4P$ nach BC und BF gefunden werden, wie denn überhaupt die Anordnung des Kräfteplanes mancherlei Abänderungen zulässt.

III. Anderer Dachstuhl mit einfach verstrebtm Hauptsparren. Fig. 123 (a. f. S.). Dieser Dachstuhl entsteht aus dem vorigen, wenn man an demselben die Streben EC und CF beide horizontal legt. Hier ist $AE = EB$ genommen, wodurch die Felderbelastungen sämtlich gleich werden, und bei A und D die äusseren Kräfte $3P$ entstehen. Letztere Kraft von a bis c im Kräfteplan aufgetragen ergibt in da und cd die Kräfte 1 und 2, darauf nach Vereinigung von 1 mit $2P$ zu der Resultanten db die Druckkräfte 3 und 4 in de und eb . 7 fällt $= 3$, $8 = 2$ aus; demnach erhält man für 5 die Strecke cf als Schlusslinie des Zuges $cdedf$ oder cdf . Auch muss sich 5 durch Vereinigung der gleichen Kräfte 4 und 6 mit $2P$ ergeben, was die

Figur auch darin zeigt, dass die Vertikalprojektion von 4 um P kleiner, als ef wird. Lässt man die Schlauder CB weg, was sich

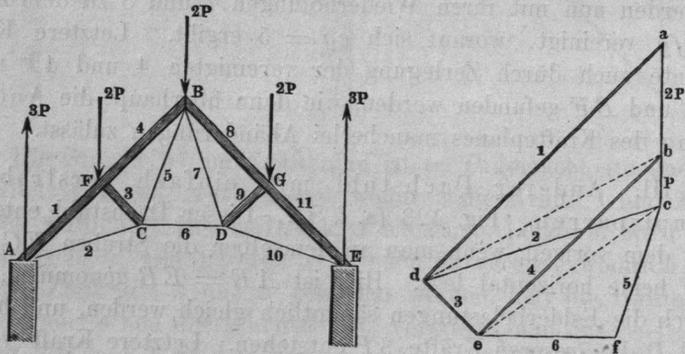
Fig. 123.



bei manchen Ausführungen findet, so kann das Querstück ECF , wenn bei C kein Gelenk gelassen ist, vermöge seiner Biegefestigkeit den Widerstand 5 leisten; bei B aber bäumen sich die Sparren gegen einander auf, wenn der Knoten B nicht in einen festen Verband verwandelt wird.

IV. Dritter Dachstuhl mit einfach verstrebttem Hauptsparren. Fig. 124. Bei dem folgenden Dachstuhl, wel-

Fig. 124.

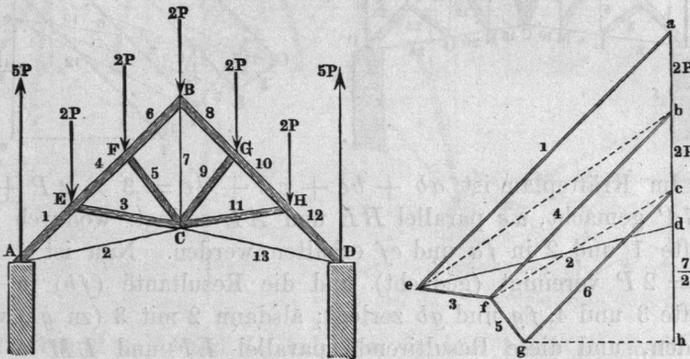


cher häufig als der belgische oder französische bezeichnet wird, ist die mittlere Schlauder der obigen Konstruktionen in ein Dreieck BCD aufgelöst. Die Felder sind gleich breit angenommen, weshalb die äusseren Kräfte an den Knoten wie bei Fig. 120 werden.

Im Kräfteplan ist $abc = 3P$ gemacht, worauf 1 und 2 sofort wie oben gefunden werden. Aus der Zerlegung der vereinigten 1 und $2P$ erhält man dann alsbald die Kräfte 3 und 4 in de und be , und aus der Resultanten ec der Kräfte 2 und 3 die beiden Zugkräfte 5 und 6 in cf und ef . Die zweite Hälfte wird die symmetrische Wiederholung der ersten.

V. Dachstuhl mit zweifach verstrebttem Hauptsparren. Fig. 125. Diese Konstruktion kann aus der in Fig. 124 da-

Fig. 125.

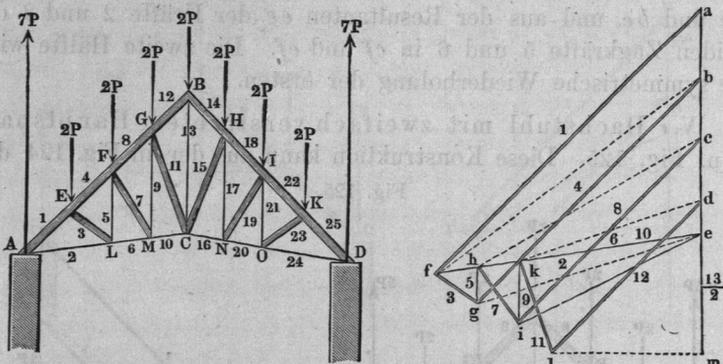


durch erhalten werden, dass man die dort angewandte Strebe des Hauptsparrens in zwei auflöst. Die Felder sind hier wieder gleichgross und gleichbelastet angenommen. Es entstehen dabei, wenn die Belastung jedes Feldes $= 2P$ ist, die freien äusseren Kräfte $5P$ bei A und D . Im Kräfteplan ist nun $ad = 5P$ gemacht und parallel AE und AC zerlegt, wodurch die Kräfte 1 und 2, de und ea , erhalten werden. ea mit $ab = 2P$ zusammengesetzt, liefert die den Knoten E belastende Kraft eb , welche parallel EC und EF zerlegt, in ef und fb , 3 und 4, zerfällt. Ähnlich wird nun die Resultante fc der Kräfte 4 und $2P$ in 5 und 6, fg und gc zerlegt, womit man in der Mitte des symmetrisch ausfallenden Planes angelangt ist. Die Kraft 7 ist die Resultante von 6 und deren Wiederholung 8 und der Firstbelastung $2P$, die Hälfte von 7 also die Projektion von 6 auf eine Vertikale, weniger P , welche Grösse durch die dh dargestellt ist.

VI. Englischer Dachstuhl mit mehrfach verstrebttem Hauptsparren. Fig. 126 (a. f. S.). Hier sind schiefe Streben mit senkrechten Schlaudern verbunden angewandt. Die Belastung ist wieder gleichförmig angenommen, nämlich jedes der gleich-

grossen Felder senkrecht mit $2P$ belastet gedacht. Bei A und D entstehen die Vertikalkräfte $7P$ als äussere Kräfte.

Fig. 126.



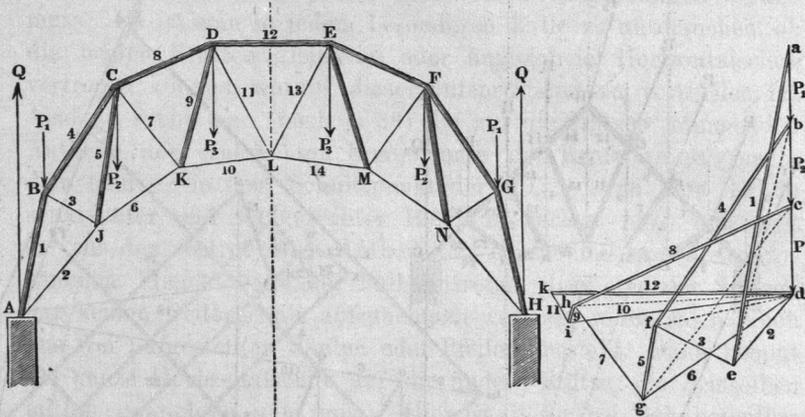
Im Kräfteplan ist $ab + bc + cd + de = 3 \times 2P + P = 7P$ gemacht, ae parallel BE und AL zerlegt, wodurch die Kräfte 1 und 2 in fa und ef erhalten werden. Nun ist 1 mit $ab = 2P$ vereinigt (gedacht) und die Resultante (fb) in die Kräfte 3 und 4, fg und gb zerlegt; alsdann 2 mit 3 (zu ge) verbunden, und diese Resultierende parallel LF und LM in die Kräfte 5 und 6, gh und he zerlegt. So fortfahrend erhält man nach einander die Kräfte bis zu Nr. 12 oder ld , welche alsdann auf die Vertikale projiziert wird. Zieht man endlich jetzt von der so erhaltenen dm die halbe Firstbelastung $P = de$ ab, so bleibt in me die halbe Anspannung der Mittelschlauder BC übrig. Die andere Hälfte des Kräfteplanes fällt gerade so wie die gefundene aus.

VII. Bogenförmiger Dachstuhl, sogenannter Sichelträger, Fig. 127. Der sichelförmige Träger $ABCDEFGH$ in unserer Figur, welcher zur Bedeckung weiter und hoher Räume neuerdings benutzt wird, kann als eine Umformung des englischen Dachstuhles angesehen werden, indem er aus dem letzteren entsteht, wenn man die Abschnitte der Sparren und der unteren Hauptschlauder polygonal anordnet. Die Belastung des Dachstuhles ist hier nicht in bestimmten Verhältnissen angegeben. Zwar ist diejenige, welche von den Deckziegeln und deren Unterstützung herrührt, der Feldbreite proportional zu setzen, nicht aber die vom Schnee herrührende, welche an den steilen Randfeldern bei AB und GH jedenfalls kleiner ausfällt, als bei CD und DE . Es sind deshalb nur unbestimmt gelassene vertikale

Belastungen P_1, P_2, P_3 der Knoten B, C, D, E, F, G eingeführt, denen bei A und B die Kräfte $Q = P_1 + P_2 + P_3$ als äussere Kräfte entgegenwirken.

Im Kräfteplan ist $ab = P_1, bc = P_2, cd = P_3$, also $ad = Q$ gemacht, durch deren Zerlegung parallel AB und AJ die

Fig. 127.



Kräfte 1 und 2, ea und de erhalten werden. 1 mit P_1 zusammen liefert die Kräfte 3 und 4, ef und fb . Aus den nun bekannten Kräften 2 und 3 werden 5 und 6, gf und dg ermittelt; darauf 4 und 5 mit P_2 (zu ge) zusammengesetzt, und durch Zerlegung parallel CK und CD die Kräfte 7 und 8 gefunden, und so fort, bis in kd die Kraft 12 ermittelt ist, welche die Mitte des zu ihr symmetrischen Planes einnimmt. Die Stäbe KL, DL, EL und ML werden sämtlich auf Zug beansprucht.

§. 51.

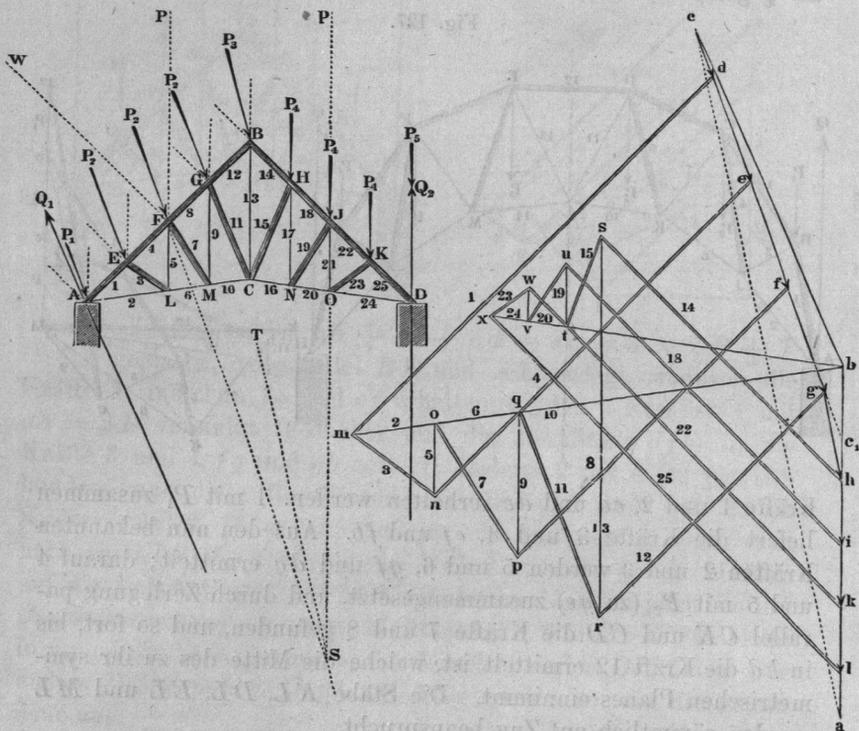
Kräfteplan für einen Dachstuhl mit Winddruck.

Wenn man grosse und schwere Dächer sorgfältig bauen will, muss man ausser der Belastung durch die Konstruktion selbst und den Schnee noch die durch den Wind in Anschlag bringen, indem dieselbe oft beträchtlich ins Gewicht fällt. Um ein Beispiel der graphostatischen Lösung dieser Aufgabe zu geben, untersuchen wir den in Fig. 126 dargestellten englischen Dachstuhl unter Voraussetzung einer Windbelastung W , Fig. 128 (a. f. S.), welche

sich zu der früher in Rechnung gezogenen Vertikalbelastung gesellt.

Zunächst sind hier die Kräfte Q_1 und Q_2 an den Punkten A und D zu bestimmen. Der Winddruck wirkt nur auf die eine

Fig. 128.



Dachfläche, der die Seite AB des Dachstuhles angehört. W sei die normal zu AB gerichtete Mittelkraft des Winddruckes, P die gesammte senkrechte Belastung von AB ; P und W vereinigt bewirken auf AB eine in der Richtung FS wirkende Gesamtbelastung, deren Grösse durch Zusammensetzung von W und P erhalten wird, und die im Kräfteplan durch cc_1 ausgedrückt ist. Auf den anderen Hauptsparren BD wirkt in der Mitte bei J ebenfalls, aber auch allein, die senkrechte Kraft P . Wird deren Richtungslinie bis zum Schnitte S mit der erstgenannten Belastung verlängert, so ist S ein Punkt der Mittelkraft der ganzen Last des Daches. Im Kräfteplan ist $c_1a = P$ gemacht, ac hat also die Richtung dieser Mittelkraft, welche nun nach ST in den Bauplan getragen werden kann. Um die Kräfte Q_1 und Q_2 zu

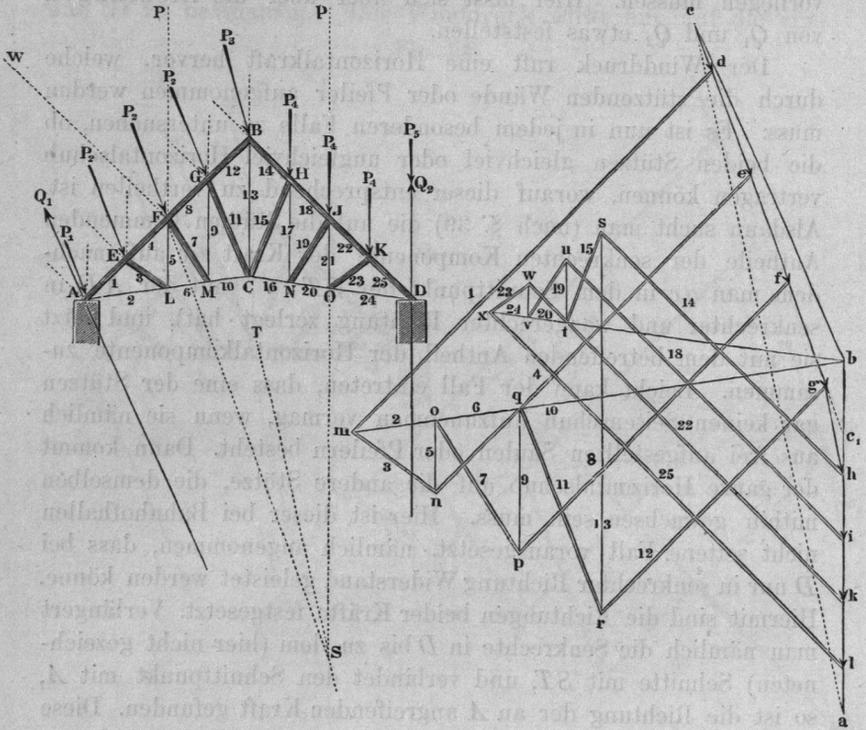
bestimmen, haben wir uns jetzt des in §. 34 Gefundenen zu erinnern, vermöge dessen bei zwei unbekanntem Schlusskräften eines Kräftepolygons wenigstens noch zwei Angaben über die Kräfte vorliegen müssen. Hier lässt sich aber über die Richtungen von Q_1 und Q_2 etwas feststellen.

Der Winddruck ruft eine Horizontalkraft hervor, welche durch die stützenden Wände oder Pfeiler aufgenommen werden muss. Es ist nun in jedem besonderen Falle zu untersuchen, ob die beiden Stützen gleichviel oder ungleichviel Horizontalschub vertragen können, worauf dieser entsprechend zu vertheilen ist. Alsdann sucht man (nach §. 39) die auf die Stützen kommenden Antheile der senkrechten Komponente der Kraft ac auf (nachdem man ac in dem Schnittpunkt der $ST \dots$ mit der AD in senkrechter und waagerechter Richtung zerlegt hat), und setzt sie mit dem betreffenden Antheil der Horizontalkomponente zusammen. Leicht kann der Fall eintreten, dass eine der Stützen gar keinen Seitenschub aufzunehmen vermag, wenn sie nämlich aus frei aufgestellten Säulen oder Pfeilern besteht. Dann kommt der ganze Horizontalschub auf die andere Stütze, die demselben mithin gewachsen sein muss. Hier ist dieser bei Bahnhofhallen nicht seltene Fall vorausgesetzt, nämlich angenommen, dass bei D nur in senkrechter Richtung Widerstand geleistet werden könne. Hiermit sind die Richtungen beider Kräfte festgesetzt. Verlängert man nämlich die Senkrechte in D bis zu dem (hier nicht gezeichneten) Schnitte mit ST , und verbindet den Schnittpunkt mit A , so ist die Richtung der an A angreifenden Kraft gefunden. Diese und die bis jetzt gefundene Rückwirkung bei D sind indessen noch nicht die frei an A und D angreifenden äusseren Kräfte, denn es wirken daselbst noch Antheile der Belastungen der Dachfelder abwärts. Wir vertheilen jetzt, um das Fehlende noch zu finden, die vereinigten P und W auf die Knoten von AB , die P auf die Knoten von BD und erhalten als Belastung von A die Kraft P_1 , für E , F und G die Kraft P_2 , für die First B die Kraft P_3 , für H , J und K die Kraft $P_4 = \frac{P}{4}$ und für D die (senkrechte)

Kraft $P_5 = \frac{P}{8}$. Es ist nun im Kräfteplan gemacht $cd = P_1$, $de = ef = fg = P_2$, $gh = P_3$, $hi = ik = kl = P_4$ und $la = P_5$. Nun endlich haben wir demnach in der Strecke bl die bei D angreifende Kraft Q_2 und in der nicht ausgezogenen Verbindungslinie von b mit d die bei A wirkende äussere Kraft Q_1 .

Die Aufsuchung der Kräfte in dem Gespärre kann nun leicht vorgeommen werden. Zuerst ist $bd = Q_1$ nach AE und AL

Fig. 129.



zu zerlegen, wodurch die bm und md , Kraft 2 und 1 gefunden werden. Darauf wird fortgefahren bis zur Schlauder BC oder Nr. 13, für welche man die Zugkraft $rs = 13$ erhält, indem man in die vertikale rs mit der zu BD parallel gezogenen hs einschneidet. Nunmehr findet man rasch die Kräfte 15 bis 25 in der zweiten Hälfte des Gespärres. Der Kräfteplan liefert ungleiche Kräfte für die entsprechend gelegenen Stäbe. — Die Verzeichnung der Kräfte kann auch mit der Kraft 25, bei dem Dreieck xbl beginnen, und muss dann dasselbe Ergebniss liefern, was als Probe dienen könnte. Da aber der Punkt x durch die von Anfang an verzeichnenbaren Strecken bl und bx bestimmt ist, so zeigt sich die Richtigkeit der ersten Zeichnung schon dadurch, dass die letzte Strecke wx , welche parallel KO zu ziehen ist, in den Punkt x trifft. In der That muss die Zeichnung mit

Sorgfalt ausgeführt werden, damit dieses Zutreffen, d. i. Schliessen des letzten Kräfdreieckes, stattfindet.

Vergleicht man die in Fig. 129 gefundenen Kräfte mit denen in Fig. 126, so sieht man (da der Kräfemaassstab in beiden Fällen derselbe ist), wie sehr man behufs genauer Berechnung der Dachstühle den Winddruck berücksichtigen muss. Will man im vorliegenden Falle ganz vollständigen Aufschluss haben, so hat man in einem zweiten Plane den Winddruck auf BD angreifend einzuführen.

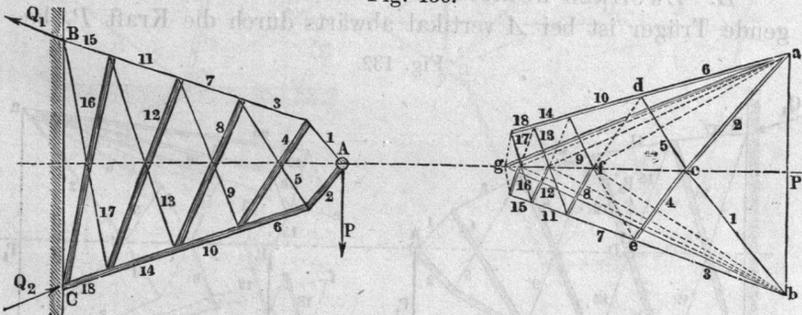
§. 52.

Kräftepläne für gitterförmige Freiträger.

Gitterförmige Freiträger aus Schmiedeeisen wie aus Gusseisen kommen in mancherlei Bauwerken zur Anwendung, in Maschinen u. a. als Balanciers, als Auslader von Kranen u. s. w. Einige Beispiele solcher Träger seien hier noch vorgeführt.

I. Freiträger mit geraden Streckbäumen. Fig. 130. Der hier dargestellte Träger sei in A mit einer Kraft P belastet,

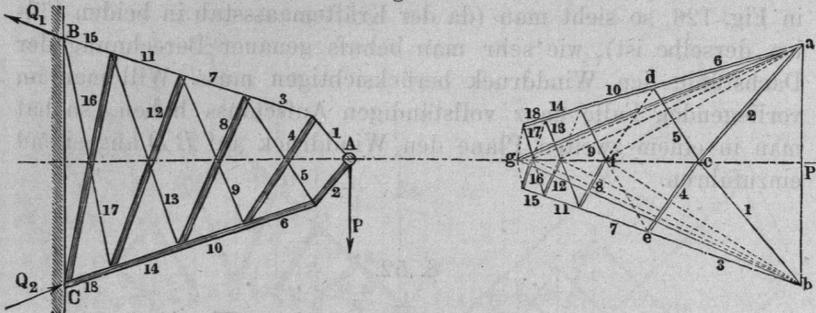
Fig. 130.



welche senkrecht zur Symmetrieachse des Armes gerichtet ist, und in B und C befestigt. Der Kräfteplan lässt sich wie folgt erhalten. In demselben ist $ab = P$ gemacht und nach den Richtungen der Stäbe 1 und 2 zerlegt; ac und cb sind die Kräfte 1 und 2. Jede derselben ist in zwei andere Kräfte zu zerlegen, 1 in 3 und 4, 2 in 5 und 6, was im Kräfteplan durch die Züge bec und adc ausgeführt ist. Nun ist Kraft 3 mit Kraft 5 zu vereinigen, und die Resultante in 7 und 8 zu trennen. Zu dem

Ende wird zuerst $5 = dc$ nach fe getragen, worauf die Resultante fb in die 7 und 8 zerlegt werden kann. So fortfahrend,

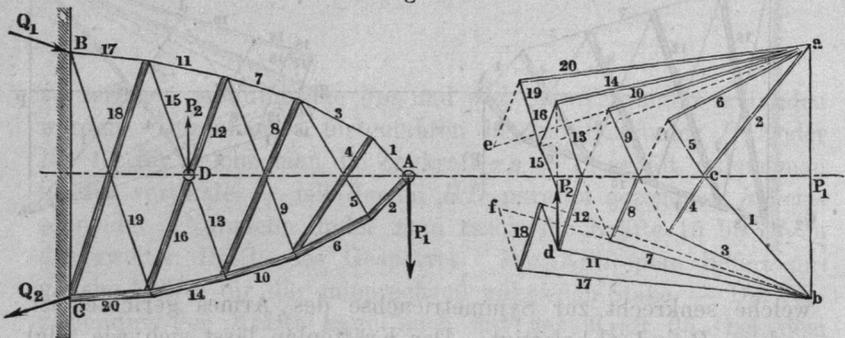
Fig. 131.



erhält man einen zur Achse gc symmetrischen Zug, von dem also eigentlich nur die Hälfte verzeichnet zu werden braucht. Die Strecken ga und bg , welche zuletzt als die Resultanten von 15 mit 17, und 16 mit 18 erhalten werden, kann man als äussere Kräfte in B und C anbringen, um die Träger dort zu befestigen, vorausgesetzt, dass die Richtungen der Kräfte in B und C nach Belieben gewählt werden dürfen.

II. Zweifach belasteter Freiträger. Fig. 132. Der folgende Träger ist bei A vertikal abwärts durch die Kraft P_1 be-

Fig. 132.

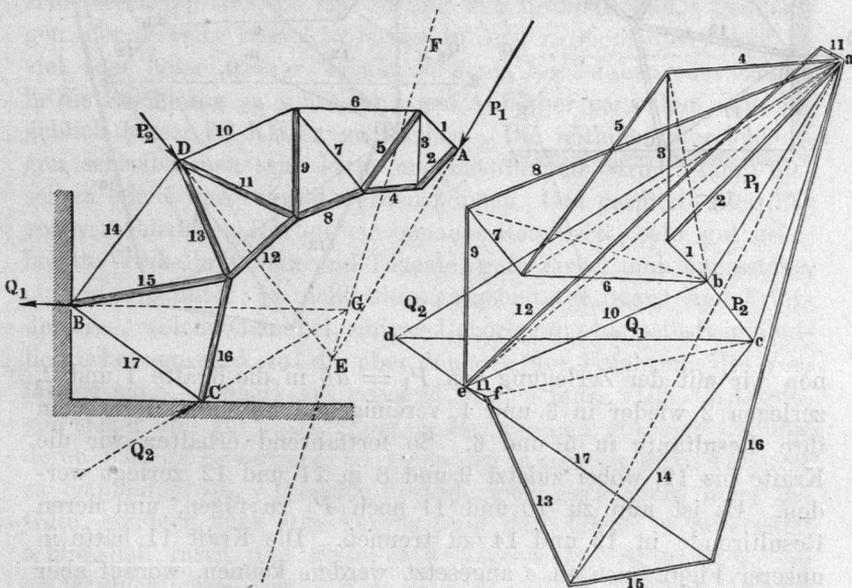


lastet, bei D aufwärts durch P_2 , bei B und C befestigt. Die Streckbäume AB und AC sind polygonal geformt. Der Kräfteplan wird für die Kräfte 1 bis 13 wie der vorige behandelt. Bei D sind die einander kreuzenden Stäbe fest mit einander verbunden gedacht, so dass die Kraft P_2 auf beide Stäbe, 15 und 16, wirken kann; mit ihr vereinigt wirken in demselben Knoten D

die Kräfte 12 und 13. Fügt man demnach bei d dem Zuge 13-12 die Kraft P_2 an, so ist deren Verlängerung bis zum Ursprung von 13 die Resultante der drei Kräfte, welche nun sofort in 15 und 16 zerlegt werden kann. Mit dieser fortfahrend erhält man die Kräfte bis 20 und endlich in bf und ea noch die äusseren Kräfte Q_1 und Q_2 , welche den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht halten.

III. Gitterförmiger Kran-Auslader. Fig. 133. Diese Figur zeigt zur Linken einen gebogen gestalteten Freiträger, wie er als Auslader für grosse Krane, mit mehr Feldern ausgeführt,

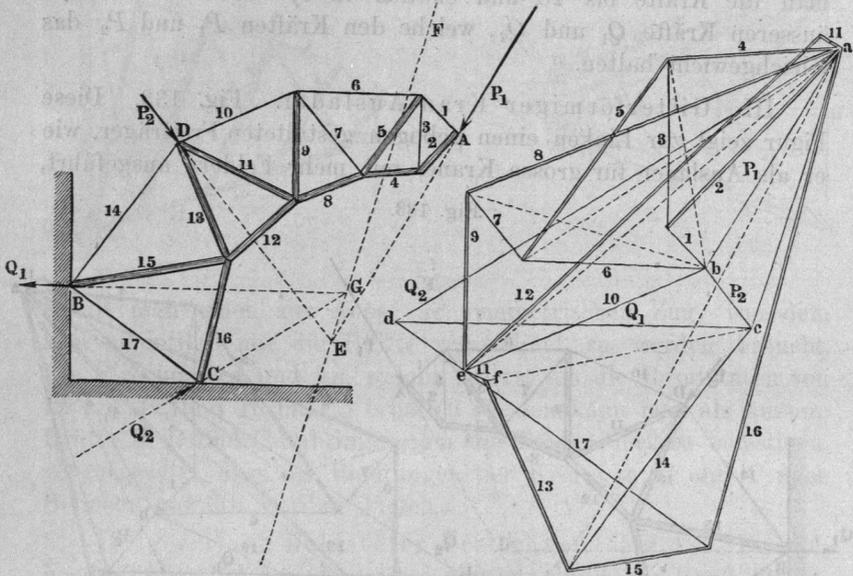
Fig. 133.



gebraucht wird. In A und D greifen die Kräfte P_1 und P_2 an, in B soll eine horizontale äussere Kraft Q_1 , in C eine nach Erforderniss gerichtete äussere Kraft Q_2 ihren Angriffspunkt haben. Der Kräfteplan gibt Aufschluss über die in und an dem Bauwerke vorkommenden Kräfte. Was zunächst die äusseren Kräfte betrifft, so ist vorerst die noch unbekannte Richtung von Q_2 festzustellen. Hierfür verlängern wir P_1 und P_2 bis zu dem Schnittpunkte E , suchen im Kräfteplan durch Verzeichnung des Zuges abc die Richtung EF der Mittelkraft ac der beiden Kräfte, und verlängern die Richtungslinie der Q_1 bis zu ihrem Schnitte G

mit der EF ; dann ist CG die Richtung der Kraft Q_2 . Mit dieser Richtung und der horizontalen den Zug adc im Kräfteplan bildend, erhalten wir $cd = Q_1$ und $da = Q_2$. — Nunmehr begin-

Fig. 134.



nen wir mit der Zerlegung von $P_1 = ab$ in die Kräfte 1 und 2, zerlegen 2 wieder in 3 und 4, vereinigen 3 und 1, und zerlegen ihre Resultante in 5 und 6. So fortfahrend erhalten wir die Kräfte bis 12, wobei zuletzt 9 und 8 in 11 und 12 zerlegt werden. Es ist nun zu 10 und 11 noch P_2 zu fügen, und deren Resultierende in 13 und 14 zu trennen. Die Kraft 11 hätte in unserer Figur auch an e angesetzt werden können, worauf aber 12 mit 2 nahe zusammengefallen, und dadurch Undeutlichkeit entstanden wäre. Nun aber tragen wir 11 noch einmal, und zwar diesmal wirklich von e aus auf, so dass $ef = 11$ wird; dann ist der Zug $11 - 10 - P_2$ gebildet und dessen Schlusslinie ef sofort in 13 und 14 zerlegbar. Es ergeben sich nun 15 und 16 aus der Resultante von 13 und 12, und endlich 17 als Verbindungslinie des Schnittes von 15 und 16 mit d , da 16 und 17 die Mittelkraft $Q_2 = ad$ haben müssen. Ist die Zeichnung genau, so muss 17 im Kräfteplan parallel BC fallen; es entsteht also auch hier eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, die sehr schätzbar ist.

§. 53.

Schlussbemerkungen.

Nachdem im Vorstehenden eine Reihe der für das vorliegende Buch wichtigen Aufgaben der Arithmographie und Graphostatik behandelt worden sind, verdient noch im allgemeinen dazu bemerkt zu werden, dass Genauigkeit und Sauberkeit im Zeichnen sehr wesentlich für die Anwendung der Methode sind. Demjenigen, der dieselbe brauchen lernen will, ist zu empfehlen, nicht zu viel, oder besser gesagt, möglichst wenig Buchstaben oder Zahlen in die Zeichnung zu schreiben, was Anfänger gern thun, um angeblich besser im Klaren zu bleiben. Die nöthigen Bezeichnungen schreibe man sehr klein und mit dünnem Strich, damit dieselben leicht weggewischt werden können. Gut gespitzte Bleistifte von verschiedenen Härten, ein genaues Reissbrett, sehr gut gearbeitete Winkelbrettchen und Lineale, gute Zirkel und Maasstäbe, ein aufgespannter, ja nicht bloss aufgehefteter Bogen sind Erfordernisse, welche man bei einiger Ueberlegung als selbstverständlich erkennen wird, auf die aber dennoch, der Erfahrung des Verfassers nach, aufmerksam gemacht werden muss. Um die Lösungen sicher und gut auszuführen, bedarf es einer gewissen Uebung, deren baldige Erwerbung an einfachen Aufgaben dem Anfänger zu empfehlen ist. Dieselbe fördert aber auch nicht bloss die Güte, sondern auch das Verständniss der Arbeit, welche dann schliesslich rasch und genau das Gesuchte liefert, und zwar in einer glücklichen Form, deshalb, weil sie der sinnlichen Wahrnehmung das Zusammenfassen einer ganzen Reihe von Rechnungsergebnissen gestattet.

DRITTER ABSCHNITT.

KONSTRUKTION DER MASCHINEN- ELEMENTE.

Vorbemerkungen.

Unter den baulichen Elementen der Maschinen, welche auch einfache Maschinentheile oder Maschinentheile kurzweg genannt werden, versteht man solche einzelne Theile oder Theilgruppen, welche sich bei allen Maschinen mehr oder weniger zahlreich vorfinden und wiederholen. Ihre Zahl ist nicht bedeutend, übrigens auch nicht fest bestimmbar, da die erwähnten Gruppen von Theilen nicht nach festen Grundsätzen aus den möglichen Vereinigungen einzelner Stücke zu einem Ganzen ausgewählt worden sind. Die nachfolgend zusammengestellten baulichen Maschinenelemente werden ziemlich allgemein als solche aufgefasst.

Während in den beiden ersten Abschnitten alle Formeln allgemein gehalten werden konnten, müssen sie hier für bestimmte Maasseinheiten ausgerechnet werden. Für die Abmessungen und Belastungen sind Millimeter und Kilogramm als Einheiten benutzt; nur in einzelnen Fällen ist hiervon abgewichen, dies aber dann ausdrücklich bemerkt. Die Geschwindigkeiten sind im Text stets in Metern ausgedrückt und beziehen sich auf die Sekunde als Zeiteinheit, die Umdrehungszahlen dagegen auf die Minute. Als Maass für Arbeitsgrössen dient das Kilogramm^{meter} (km); die Arbeitstärke (Intensität der Arbeit) wird durch Sekundenkilogramm^{meter} (km), grössere Arbeitstärken durch die Pferdestärke = 75km gemessen.