

$r_d \cdot \omega_1 = \overline{gd} \cdot \omega_2$  sein muß, folgt durch Division:

$$\frac{r_c}{r_d} = \frac{\overline{fc}}{\overline{gd}},$$

eine Beziehung, die nur erfüllt werden kann, wenn die Dreiecke  $cfe$  und  $dge$  geometrisch ähnlich sind, also eine gemeinsame Spitze  $e$  auf der Achse  $mm$  haben. Praktisch sind aber derartige Lager unbrauchbar, weil sich die Kugeln durch die Belastung in die Laufrienen eindrücken und nicht mehr in Punkten, sondern in Flächen anliegen, deren äußere Teile infolge der oben erwähnten bohrenden Bewegung gleiten müssen. Dadurch entstehen Beschädigungen an den Kugeln und an den Laufrienen, die sich durch Streifen- und Riefenbildungen bemerkbar machen und die namentlich bei raschem Laufe durch die größere Erwärmung infolge der gleitenden Reibung sehr verstärkt werden. Die Übelstände lassen sich nur vermeiden, wenn die Kugeln in den Laufrienen in einem einzigen Punkte nach Abb. 1597 anliegen, so daß die Momentanachse eine Tangente an der Kugel wird, die radiale Komponente der Winkelgeschwindigkeit aber verschwindet.

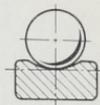


Abb. 1597.  
Kugel in  
einem Punkte  
anliegend.

## 2. Berechnung der Kugellager.

Der Berechnung der Kugellager legte man früher die Bruchlast, bei der die Kugeln zersprangen, zugrunde und glaubte, in ähnlicher Weise wie bei vielen Maschinenteilen  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{10}$  der Bruchlast als zulässige Belastung annehmen zu dürfen. Die Lager führten zu Mißerfolgen; Zerstörungen und Brüche der Kugeln und Laufrienen traten ein. Die richtigen Grundlagen schuf Stribeck [XXI, 20]. Er zeigte, daß nicht die Bruchbelastung, sondern die Sprunglast, bei welcher der erste Sprung, ein an der Druckfläche auftretender feiner Riß, entsteht, maßgebend ist und setzte danach die zulässige Belastung fest. Denn zur Zerstörung der Lager genügt schon das Abbröckeln kleiner Teile; es ist keineswegs der Bruch der Kugeln nötig.

Die Bruch- und Sprunglasten sind vom Kugeldurchmesser und von der Form der Auflageflächen abhängig. Wird eine Kraft nach Abb. 1598 durch drei gleich große Kugeln übertragen, eine Anordnung, die auf die Anregung von Stribeck hin zur Prüfung von Kugeln verwendet wird, weil sie von dem Werkstoff und der Form etwaiger Preßstempel unabhängig ist, so findet die Berührung längs erhabener Flächen, also unter sehr ungünstigen Umständen statt. Bruch- und Sprunglasten liegen niedrig. Je mehr sich die Auflageflächen den Kugeln anschmiegen, desto günstiger werden die Übertragungsverhältnisse. Daher die zunehmende Belastung bei ebenen und hohlen Druckflächen, Abb. 1599 und 1600.

Die mittlere Pressung  $p_m$  an der Berührungsstelle zweier Kugeln vom Durchmesser  $d_1$  und  $d_2$ , die mit  $P_0$  kg aufeinandergedrückt werden und deren Baustoff die Dehnungszahl  $\alpha$  hat, beträgt nach Hertz:

$$p_m = 0,411 \sqrt[3]{\frac{P_0}{\alpha^2} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)^2}. \quad (466)$$

Stribeck fand die Formel bei Versuchen innerhalb der Elastizitätsgrenze in sehr guter Übereinstimmung mit der Wirklichkeit. Für gleich große Kugeln wird mit  $d_1 = d_2 = d$ :

$$p_m = 0,652 \sqrt[3]{\frac{P_0}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}}. \quad (467)$$



Abb. 1598.  
Kugel-  
prüfung nach  
Stribeck.



Abb. 1599.  
Kugel zwi-  
schen ebenen  
Flächen.



Abb. 1600.  
Kugel in  
Laufrienen.

Bei der Berührung einer Kugel vom Durchmesser  $d_1 = d$  mit einer ebenen Platte ( $d_2 = \infty$ ) folgt:

$$p_m = 0,411 \sqrt[3]{\frac{P_0}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}} = 0,652 \sqrt[3]{\frac{P}{4 \cdot \alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}}. \quad (468)$$

Liegt die Kugel vom Durchmesser  $d_1 = d$  in einer Hohlkugelfläche vom Durchmesser  $d_2 = -2d_1$ , so beträgt die mittlere Pressung:

$$p_m = 0,259 \sqrt[3]{\frac{P_0}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}} = 0,652 \sqrt[3]{\frac{P}{16\alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}}. \quad (469)$$

Sollen an Kugeln vom gleichen Durchmesser in den drei Fällen gleich große Pressungen entstehen, so müssen sich die Belastungen wie 1:4:16 verhalten; mit anderen Worten, eine Kugel in einer Hohlfläche vom doppelten Halbmesser darf 16mal höher belastet werden als zwei gleich große, unmittelbar aufeinandergepreßte und 4 mal höher als eine Kugel auf einer ebenen Lauffläche.

Löst man die Gleichung (467) nach  $P_0$  auf:

$$P_0 = \frac{p_m^3}{0,652^3} \cdot \alpha^2 \cdot d^2, \quad (470)$$

so wird der Beiwert von  $d^2$  für eine bestimmte Höhe der Pressung unveränderlich, so daß die Gleichung die Form  $P_0 = \text{konst} \cdot d^2$  annimmt. Unter der Voraussetzung gleicher Beanspruchung der Kugeln darf also die Belastung verhältnismäßig dem Quadrat der Kugeldurchmesser steigen und daher auch die zulässige Belastung  $P_0$  einer einzelnen Kugel nach der Formel:

$$P_0 = k \cdot d^2 \quad (471)$$

gewählt werden.  $k$  ist eine vom Baustoffe, dem Härtezustande und der Laufrinnenform, aber auch von den Betriebsverhältnissen des Lagers abhängige Zahl, die die zulässige Belastung einer Kugel von 1 cm Durchmesser angibt, da für  $d = 1$  cm  $k = P_0$  folgt.  $k$  wird als zulässige spezifische Belastung bezeichnet.

Hierbei ist hervorzuheben, daß die Druckbeanspruchung an der Berührungsstelle bei den üblichen, durch die Erfahrung erprobten Zahlen für  $k$  die Elastizitätsgrenze überschreitet. Beispielweise ergibt Formel (471) für eine Stahlkugel von 20 mm Durchmesser, die in einer Hohlkugelfläche von 40 mm Durchmesser liegt, bei einer spezifischen Belastung mit  $k = 50$  oder

$$P_0 = k \cdot d^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \text{ kg Druck}$$

eine mittlere Pressung an der Berührungsstelle von:

$$p_m = 0,259 \sqrt[3]{\frac{P}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{d^2}} = 0,259 \sqrt[3]{\frac{200 \cdot 2100000^2}{1 \cdot 2^2}} = 15650 \text{ kg/cm}^2,$$

während nach Druckversuchen an gehärteten Stahlzylindern die Elastizitätsgrenze schon bei etwa 9000 kg/cm<sup>2</sup> liegt. Daß in dem Falle Belastungen über die Elastizitätsgrenze hinaus dauernd ohne Veränderung der Kugelform möglich sind, läßt sich dadurch erklären, daß die von den hohen Spannungen betroffenen Stellen als allseitig eingeschlossene Körper betrachtet werden müssen, die bei der Entspannung ihre ursprüngliche Form wieder annehmen.

Die Elastizitätslehre zeigt, daß neben der oben berechneten, senkrecht zur Oberfläche wirkenden Druckspannung  $p_m$  noch rechtwinklig dazu gerichtete Druckspannungen entstehen, die die volle Ausbildung der  $p_m$  entsprechenden Formänderungen verhindern. Nach Mohr kommt für die Beurteilung der Inanspruchnahme der Unterschied der größten und der kleinsten der drei Hauptspannungen, der im vorliegenden Falle etwa  $\frac{1}{6} p_m$  beträgt, in Frage.

Während nun die Beanspruchung der Kugeln um so günstiger wird, je mehr sich die Laufrinnen den Kugeloberflächen anschmiegen, werden die Reibungsverhältnisse

um so ungünstiger. Ein Lager mit einer die Kugeln nach Abb. 1601 umschließenden Lauffläche würde große Tragfähigkeit besitzen, aber wegen der starken gleitenden Reibung nicht betriebsbrauchbar sein. Mit steigender Anschmiegunng nimmt die Reibung zunächst langsam, die Belastungsfähigkeit dagegen rasch zu. Der richtige Mittelweg konnte nur durch Versuche gefunden werden, bei denen Stribeck als zweckmäßigsten Wert der Ausrundung der Laufrinnen  $r = \frac{2}{3} d$  feststellte. An Querlagern ist die äußere Ringmiegung in den beiden Ringen verschieden; während nach Abb. 1602 der äußere Ring sowohl in der Kuglebene wie in der senkrechten dazu vertieft gekrümmt ist, bietet der innere ungünstigere Verhältnisse, da die Laufbahn in der Ringebene erhaben ist. Abb. 1602 zeigt gleichzeitig stark vergrößert die verschiedenen Druckflächen der Kugeln. Hierauf gründet sich der Vorschlag, am inneren Ring einen kleineren Krümmungshalbmesser als am äußeren und zwar:

$$r_i = 0,52d, \quad r_a = 0,56d$$

zu wählen [XXI, 22].

Verteilung der Belastung auf die einzelnen Kugeln eines Lagers. Bei Längslagern, Abb. 1593, werden, genaue Herstellung, gleiche Größe der Kugeln und zentrische Kraftwirkung vorausgesetzt, alle Kugeln gleichmäßig belastet, so daß die Tragkraft  $P$  eines Stützlagers durch die Zahl  $z$  der Kugeln und die Tragfähigkeit  $P_0$  einer einzelnen gegeben ist:

$$P = z \cdot P_0 = z \cdot k \cdot d^2. \quad (472)$$

Dagegen sind in einem mit  $P$  kg belasteten Querlager, Abb. 1603, nur die in der einen Hälfte befindlichen Kugeln und noch dazu verschieden hoch beansprucht. Mit

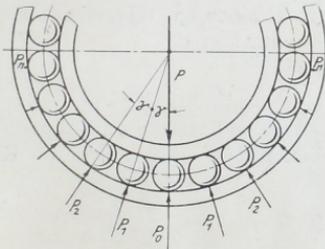


Abb. 1603. Verteilung der Drücke in einem Querlager.

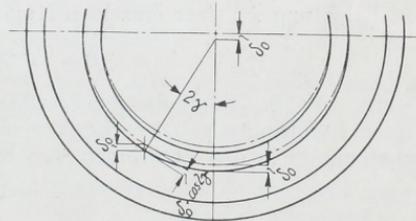


Abb. 1604. Zur Ermittlung der Druckverteilung in einem Querlager.

den Bezeichnungen der Abbildung verlangt die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Kraft  $P$ :

$$P = P_0 + 2P_1 \cos \gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \dots + 2P_n \cos n\gamma,$$

wobei  $n \cdot \gamma < 90^\circ$  sein muß. Durch die Belastung werden die Kugeln zusammengedrückt, dadurch aber die beiden Laufringe einander genähert. Beträgt die Annäherung nach Abb. 1604 in der Richtung der Kraft  $P_0$   $\delta_0$ , in Richtung von  $P_1$   $\delta_1$  cm usw., so muß unter der Voraussetzung, daß die Kreisform der Ringe erhalten bleibt,

$$\delta_1 = \delta_0 \cos \gamma, \quad \delta_2 = \delta_0 \cos 2\gamma \dots \delta_n = \delta_0 \cos n \cdot \gamma \quad (473)$$

sein. Da weiterhin, wie Hertz gezeigt hat, zwischen den Kräften und Zusammenrückungen die Beziehung:

$$\frac{P_0^2}{P_1^2} = \frac{\delta_0^3}{\delta_1^3} \quad \text{ode} \quad P_1 = P_0 \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} \right)^{3/2}$$

besteht, so folgt mit Hilfe der Gleichungen (473):

$$P_1 = P_0 \cdot \cos^{3/2} \gamma$$

und entsprechend:

$$P_2 = P_0 \cdot \cos^{3/2} 2\gamma \dots P_n = P_0 \cos^{3/2} n\gamma$$

oder

$$P = P_0 (1 + 2 \cos^{3/2} \gamma + 2 \cos^{3/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{3/2} n \cdot \gamma). \quad (474)$$

Für verschiedene Kugelzahlen  $z$ , und zwar:

$$z = \quad 10 \quad \quad 15 \quad \quad 20$$

ergibt sich:

$$\gamma = \frac{360^\circ}{z} = \quad 36^\circ \quad \quad 24^\circ \quad \quad 18^\circ$$

$$P_0 = \begin{cases} \frac{P}{2,28} & \frac{P}{3,44} & \frac{P}{4,58} \\ \frac{P \cdot 4,38}{z} & \frac{P \cdot 4,36}{z} & \frac{P \cdot 4,37}{z} \end{cases}$$

Wie die letzte Zeile zeigt, ist  $P_0$  in den drei Fällen, also für Kugelzahlen zwischen 10 und 20 rund  $\frac{P \cdot 4,37}{z}$ . Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Belastung der Scheitelkugel infolge des Spiels und der Formänderung der Ringe noch etwas größer wird, setzt Stribeck:

$$P_0 = \frac{5 \cdot P}{z}$$

Bei  
hat damit die Scheitelkugel:

$$z = 10 \quad \quad 15 \quad \quad 20$$

$$\frac{P}{2} \quad \quad \frac{P}{3} \quad \quad \frac{P}{4}$$

aufzunehmen. Umgekehrt erhält man die Tragkraft  $P$  eines Querlagers aus der zulässigen Belastung  $P_0$  einer einzelnen Kugel vom Durchmesser  $d$ :

$$P = \frac{z \cdot P_0}{5} = \frac{z \cdot k \cdot d^2}{5}. \quad (475)$$

Werte für  $k$ . Die zulässige spezifische Belastung gehärteter Stahlkugeln auf gehärteten Stahlringen gab Stribeck nach Versuchen mit Querlagern, deren Krümmungshalbmesser in den Lauffrinnen  $\frac{2}{3} d$  betrug, mit:

$$k = 100,$$

für ebene, kegelförmige oder zylindrische Laufflächen mit:

$$k = 30 \dots 50$$

an. Neuerdings ist man auf das  $1\frac{1}{2}$ fache der Werte gegangen. Genauere, von den Umlaufzahlen  $n$  und Lagerabmessungen abhängige Zahlen gibt Ahrends [XXI, 23]. Rechnet man sie auf die mittlere Umfangsgeschwindigkeit der Kugeln um, die sich aus dem Durchmesser des Kugelmittlenkreises  $D_m$ , Abb. 1592, zu  $v = \frac{\pi \cdot D_m \cdot n}{60}$  ergibt, so erhält man die in Abb. 1605 durch kleine Kreise hervorgehobenen Einzelwerte, die sich genügend genau nach der Kurve  $I$  zu einer einheitlichen Beziehung zwischen der Belastungszahl  $k$  und der mittleren Umfangsgeschwindigkeit  $v$  der Kugeln zusammenfassen lassen. Tatsächlich ist ja die letztere die gleiche wie die des umlaufenden Ringes und daher an ein und demselben Querlager bei der gleichen Drehzahl recht verschieden groß, je nachdem, ob der innere Ring umläuft und der äußere still steht oder ob der umgekehrte, ungünstigere Fall vorliegt. Der oben berechnete Wert für  $v$

ist der Mittelwert aus den beiden Fällen. Kurve *I* gilt für stoßfreien, Nebenbeanspruchungen nicht ausgesetzten Betrieb und für Rillenhalmesser  $r_i = 0,6d$  am inneren Lauffringe.

Für Längslager, bei denen der Unterschied, ob der eine oder der andere Ring umläuft, wegfällt, ist Kurve *II* mit ihren schon bei geringen Geschwindigkeiten rasch sinkenden, durchweg beträchtlich niedrigeren Belastungszahlen maßgebend.

Kranhakenlager und ähnliche, selten oder ganz langsam laufende Lager können mit  $k = 220$  bis  $250$  berechnet werden.

Für stoßweisen Betrieb muß  $k$  erheblich niedriger sein. So darf für Gleisfahrzeuge bei sehr beschränkten Raumverhältnissen  $k$  80 bis höchstens 120 betragen.

An gußeisernen Kugeln auf ebenen, zylindrischen oder kegeligen Laufflächen kann  $k = 2,5$  gesetzt werden.

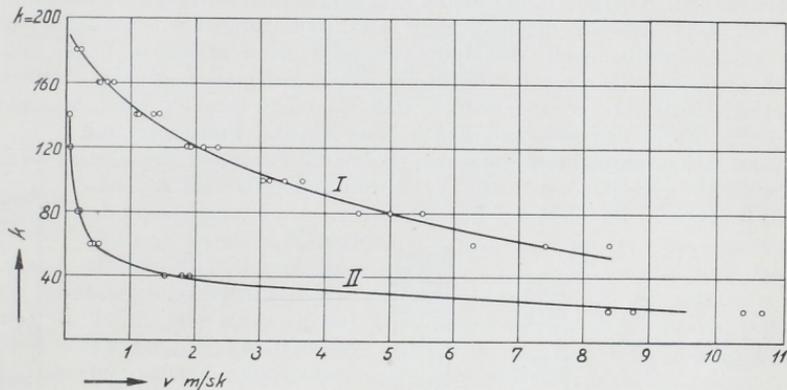


Abb. 1605. Zulässige Belastung  $k$  von Kugellagern in Abhängigkeit von der Umlaufgeschwindigkeit  $v$ . *I* für Querlager, *II* für Längslager.

### 3. Herstellung der Kugellager.

Baustoffe. Die hohen Beanspruchungen der Kugeln und Lauffringe auf Flächen- und Druck bedingen auch hohe Ansprüche an die Güte und Gleichmäßigkeit der zu verwendenden Baustoffe. Es werden insbesondere Chrom- und Chromnickelstähle benutzt, die neben großer Härte noch hinreichende Zähigkeit, der etwa auftretenden Stöße wegen, aufweisen müssen. Sehr harter, gleichzeitig aber spröder Baustoff wäre ungeeignet. Für große und schwere Lauffringe kommt im Einsatz gehärteter Flußstahl in Frage, der billiger ist und infolge des weichen Kerns hohe Zähigkeit besitzt, der aber wegen der Spannungen und Verziehungen beim Härten leichter Ausschuß gibt und bedeutendere Nacharbeiten beim Fertigschleifen verlangt.

Herstellung der Kugeln und Ringe. Die Stücke für die einzelnen Kugeln werden aus Rundstahl abgeschritten, kleinere kalt, größere warm in Gesenken zu Kugeln gepreßt oder geschmiedet und zur Beseitigung der Spannungen ausgeglüht. Dann schleift man die rohen Kugeln zwischen zwei mit konzentrischen Rillen versehenen Scheiben mit Öl und Schmirgel unter  $0,01$  bis  $0,02$  mm Zugabe auf den gewünschten Durchmesser vor. Die Scheiben laufen in entgegengesetztem Sinne um, während die Kugeln ständig von einer Rille zur anderen wandern. Hierauf werden sie sorgfältig gehärtet, fertiggeschliffen und poliert, auf Härte und Fehler nachgeprüft und äußerst genau der Größe nach getrennt, da die Verwendung nur gleicher Kugeln in ein und demselben Lager wegen der richtigen Verteilung der Kräfte und der gleichmäßigen Beanspruchung der Teile von größter Wichtigkeit ist. Fertige Kugeln werden z. B. von der Gußstahlkugelfabrik Fischer in Schweinfurt von  $1,5$  mm bis  $6'' = 152,4$  mm