



Günther Werner Illich, Dipl.-Ing.

# **Ein Beitrag zur allgemeinen Beschreibung des Tragverhaltens von schlanken Betondruckgliedern**

## **DISSERTATION**

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Viet Tue

Institut für Betonbau

## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Dissertation identisch.

---

Datum

---

Unterschrift

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Universitätsassistent am Institut für Betonbau der Fakultät für Bauingenieurwesen der TU-Graz.

Ich möchte mich bei Professor Tue für die Unterstützung, die Hilfe und die zahlreichen Fachdiskussionen während der letzten Jahre bedanken. Vielen Dank für die Möglichkeit, meine Arbeit in Ruhe fertigstellen zu können.

Herrn Professor Kollegger danke ich für die Übernahme der zweiten Begutachtung dieser Arbeit.

Nach meinem Studium hat mir Professor Sparowitz als damaliger Vorstand des Instituts für Betonbau den Weg in die Wissenschaft ermöglicht, indem er mich in sein Team aufgenommen hat und mich die ersten Jahre während meiner Arbeit begleitete. Danke!

Bernhard Freytag, Leiter des Labors für konstruktiven Ingenieurbau und gleichzeitig Leiter des FFG-Bridgeprojekts „Druckglieder aus UHPC“, möchte ich ebenfalls meinen Dank aussprechen. Die zahlreichen kritischen Diskussionen trugen wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit bei.

Dank gebührt auch dem Kooperationspartner des FFG-Bridgeprojekts, der Firma SW Umwelttechnik Österreich GmbH.

Dem Team des Labors für konstruktiven Ingenieurbau danke ich für die kompetente Betreuung während der Versuchsdurchführung.

Ich möchte mich hiermit bei allen Kollegen des Instituts für die Hilfsbereitschaft und die Entlastung im letzten Jahr bedanken.

Der größte Dank gehört meiner Familie und meiner Freundin für die mir entgegengebrachte Geduld und die Unterstützung.

Graz, im Jänner 2015

**Günther Werner Illich**

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Tragverhalten normalkraftbeanspruchter, stabförmiger Bauteile im Stahlbetonbau. Hierbei zeigt sich grundsätzlich ein bedeutender Einfluss der Verformungen. Das reale Bauteilverhalten kann mit nichtlinearen Berechnungen nachvollzogen werden, wobei die Berechnungsergebnisse von der Qualität der Werkstoffcharakterisierung und dem Modellierungsgrad der Querschnitts- und Systemberechnungen abhängen.

Nach einer Einführung in die Charakteristik von Spannungs- und Stabilitätsproblemen von Einzeldruckgliedern folgt die Beschreibung der Materialcharakteristik. Hierbei wird das Druck- und Zugtragverhalten konventioneller normalfester Betongüten gleichermaßen behandelt, wie jenes moderner ultrahochfester Betone. Da letztere ein ausgesprochen sprödes Materialverhalten aufweisen, werden diese Betone in der Regel zusätzlich mit Fasern bewehrt. Im Zuge der Werkstoffcharakterisierung wird auch auf die Modellierung des Zugtragverhaltens faserbewehrter Betone eingegangen, wobei einem mechanisch hergeleiteten Modell aus der Literatur der Vorzug gegeben wird.

Das Verformungsverhalten gerissener Stahlbetonbauteile wird durch die Zugversteifung beeinflusst. Das sogenannte Tension Stiffening ist durch die Verbundwirkung von Stahl und Beton zwischen den Rissen erklärbar. Oftmals wird die Zugversteifung durch die Modifikation der Stahlarbeitslinie oder der Betonarbeitslinie auf Zug beschrieben. Obwohl diese beiden Modelle einfach zu entwickeln sind, können sie zu ungünstigen Ergebnissen bei der Spannungsintegration führen. Deswegen wird in dieser Arbeit ein neues Modell vorgestellt, bei dem unter Einhaltung des Kräftegleichgewichts und der Verformungskompatibilität sowohl die Stahl- als auch die Betonarbeitslinie auf Zug modifiziert werden. Damit ist eine realitätsnahe Spannungsintegration über den Querschnitt möglich. Das vorgestellte Modell lässt auch die Berücksichtigung von Faserbewehrung zu. Da das Modell rein mechanisch herleitbar ist, kann es für alle Betone und Bewehrungsausführungen angewendet werden. Die Verifikation erfolgt durch die Nachrechnung ausgewählter Zug- und Biegeversuche aus der Literatur.

Querschnittsberechnungen sind ein wesentlicher Bestandteil jeder Verformungsberechnung. Es werden numerische Methoden zur Spannungsintegration und zum Finden von Dehnungszuständen beliebiger Querschnittsformen unter zweiachsiger Biegung mit Normalkraft vorgestellt. Die Querschnittsberechnungen werden genutzt, um die Auswirkungen von Kriechen und Schwinden auf die kinematischen Kenngrößen und die Spannungen zu beschreiben. Zunächst erfolgt eine ausführliche Beschreibung von zwei häufig angewendeten Modellen, dem Verfahren von Trost und der Methode effektiver Steifigkeiten. Anschließend wird eine eigene Methode, basierend auf Zeitschrittberechnungen, präsentiert, mit der die mechanischen Vorgänge während des Kriech- und Schwindvorganges realitätsnah beschrieben werden können. Anhand von theoretischen Beispielen werden die vorgestellten Modelle miteinander verglichen und auf deren Eignung für allgemeine nichtlineare Berechnungen geprüft.

Im Anschluss an die Querschnittsberechnungen folgt die Erweiterung auf das System. Hierbei wird das Weggrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung zur nichtlinearen Berechnung von Stabtragwerken vorgestellt. Zusätzlich wird gezeigt, wie die Zeitschrittmethode in den inkrementellen Berechnungsalgorithmus implementiert werden kann. Anhand von Versuchsnachrechnungen wird das Potential der Zeitschrittmethode demonstriert.

Aufbauend auf die Erkenntnisse der Werkstoffcharakterisierung, der Querschnitts- und der Stabwerksberechnungen wurde eine Parameterstudie durchgeführt, bei der die Schlankheit, die Betongüte, der Bewehrungsgrad, die Bewehrungsausführung (schlaff bewehrt, vorgespannt, faser-

bewehrt) und die Lastausmitte variiert wurden. Alle nichtlinearen Berechnungen wurden sowohl für Kurzzeit- als auch Langzeitbeanspruchung mit Einfluss von Kriechen und Schwinden durchgeführt, wobei das Kriechen sowohl über die Methode effektiver Steifigkeiten, als auch mit der Zeitschrittmethode berücksichtigt wurde. Zusätzlich erfolgte die Bemessung mit den vereinfachten Ansätzen des Eurocode 2 (ON-EN-1992-1-1), dem Nennkrümmungs- und dem Nennsteifigkeitsverfahren. Mit den Ergebnissen der Parameterstudie können folgende Fragen beantwortet werden:

- In welchem Maß beeinflussen Betongüte, Bewehrungsgrad und Vorspannung die Traglast?
- Wann ist welche der genannten Maßnahmen sinnvoll?
- Wie groß sind die rechnerischen Traglasten zum Zeitpunkt  $t = \infty$  bei Berücksichtigung des Kriechens mit effektiven Steifigkeiten bzw. mit der Zeitschrittmethode?
- Hat das Schwinden einen Einfluss auf die Traglast?
- Wie stark nimmt die Traglast durch zeitliche Effekte ab?
- Wie verhalten sich die Bemessungslasten aus einer nichtlinearen Berechnung zu jenen mit dem Nennkrümmungs- bzw. Nennsteifigkeitsverfahren?

Eigene Versuche runden diese Arbeit ab. Der Anhang beinhaltet die Dokumentation, Auswertung und Nachrechnung von Versuchen an 15 Probekörpern mit einer Schlankheit von  $\lambda = 29$  und 27 Stützen mit Schlankheiten zwischen  $\lambda = 90$  und  $\lambda = 180$ . Alle Versuchskörper wurden aus UHPC hergestellt. Neben der Bestimmung der Bauteilfestigkeit wurde in den Versuchen sowohl der Einfluss der Vorspannung auf die Tragfähigkeit, als auch das Tragverhalten von schlanken Stützen bei sehr kleinen Lastausmitten analysiert. Zusätzlich konnte der Einfluss einer Dauerbeanspruchung auf die Tragfähigkeit untersucht werden.

## Abstract

The present work deals with the structural behaviour of concrete columns. Such elements show a significant sensibility to deflections. Nonlinear calculations can approximate the real structure behaviour. The results of numerical calculations depend on the quality of the material-characterization and the level of approximation of the cross-section- and the structure-modelling.

After an introduction into the topic of stress- and stability-problems of columns, the material-characterization is discussed. Here both, the compressive and the tensile behaviour of conventional normal-strength concrete and modern high-performance concrete are described. The latter has an extreme brittle behaviour. Therefore such concretes are reinforced with fibres. This work presents a mechanical model from the literature to describe the tensile behaviour of fibre-reinforced concrete.

The deflection-behaviour is influenced by the tension stiffening, which can be explained with the bond of concrete and steel between the cracks. The tension stiffening effect is often modelled by the modification of the tensile stress-strain-law of the reinforcement or the concrete. Both models are easy to develop but tend to lead to inconvenient results when integrating the stresses over the cross-section. Therefore a different modelling approach is derived. Here both, the tensile stress-strain laws of the reinforcement and the concrete are modified. Thereby the equilibrium of the forces and the compatibility of the deformation represent the boundary conditions. Also fibre reinforcement can be taken into account. Due to the mechanical derivation, the new model can be used with any concrete and reinforcement type. Recalculations of existing tests verificate the new model.

Every deflection-calculation is based on cross-section-calculations. In this work numerical integration methods and algorithms for finding strain-states are presented. The cross-section contemplation is used to describe the effects of creep and shrinkage. At first, two common methods, the method with effective stiffness and the method of Trost are presented. Further a new model, based on the time-step-method, is introduced. With the time-step method, the mechanical processes during creep and shrinkage can be described in a realistic way. Theoretical examples are used to compare the presented models and to check their usability for nonlinear numerical calculations.

The deformation-method including second order effects is used to describe the system-behaviour. Further the implementation of the time-step-method into the algorithms of the nonlinear system-calculation is explained.

With the acknowledgements of the material-characterization, the cross-section- and the system-calculation a wide-range parameter study was carried out. In this study the concrete grade, the amount of reinforcement, the type of reinforcement (untensioned-, prestressed-, fibre-reinforcement) and the load eccentricity were varied. All nonlinear calculations were carried out for short-term and long-term loadings, considering the creep as well as the shrinkage. Creep effects were modeled with effective stiffnesses and with the time-step-method. Additionally the design-loads, using simplified design-methods (method based on nominal curvature and the model based on nominal stiffness) according to the Eurocode 2 (ON-EN-1992-1-1), were calculated. With the results of the parameter study the following questions can be answered:

- How large is the influence of the concrete grade, the degree of reinforcement and the prestressing force on the capacity of columns?

- When does which measure make sense?
- How large is the calculated capacity at  $t = \infty$  with different creep models (effective stiffness, time-step-method)?
- Can the capacity be influenced by shrinkage effects?
- How much do the time dependent effects influence the capacity?
- How large is the calculated design-load, using different design methods (nonlinear calculation, simplified methods)?

This work is completed with own tests. The annex contains the documentation, evaluation and recalculation of tests on 15 specimen with a slenderness of  $\lambda = 29$  and  $27$  and columns with a slenderness between  $\lambda = 90$  and  $\lambda = 180$ . All specimen were produced with UHPC. With the tests, the structural strength, the influence of prestressing on the capacity and the load-bearing behaviour of slender columns was determined. Additionally the influence of a long-term-loading on the capacity of columns was analyzed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Definition der Biegetheorien . . . . .	1
1.2	Definition der Schlankheit . . . . .	2
1.3	Charakteristik des Knickstabes . . . . .	2
1.3.1	Linear-elastisches Materialverhalten ohne Bruchkriterium . . . . .	4
1.3.2	Verhalten bei linear-elastischem Materialverhalten mit Bruchkriterium . . . . .	6
1.3.3	Verhalten bei multi-linearem bzw. nichtlinearem Materialverhalten mit Bruchkriterium . . . . .	7
1.4	Ziel der Arbeit und Beschreibung der Vorgehensweise . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Materialmodelle</b>	<b>11</b>
2.1	Beton, realitätsnahe Stoffmodellierung für nichtlineare Berechnungen . . . . .	11
2.1.1	Beton unter Druckbeanspruchung . . . . .	11
2.1.2	Beton unter Zugbeanspruchung . . . . .	14
2.1.3	Einfluss von Fasern auf das Zugtragverhalten . . . . .	20
2.2	Beton, Stoffmodellierung für die Bemessung . . . . .	27
2.2.1	Beton unter Druckbeanspruchung . . . . .	27
2.2.2	Beton und Faserbeton unter Zugbeanspruchung . . . . .	29
2.3	Zeitabhängiges Verhalten von Beton . . . . .	31
2.3.1	Schwinden bzw. Quellen . . . . .	35
2.4	Stahl . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Die versteifende Mitwirkung des Betons</b>	<b>41</b>
3.1	Allgemeines . . . . .	41
3.2	Modifikation der Stahlarbeitslinie . . . . .	42
3.3	Modifikation der Betonarbeitslinie . . . . .	44
3.4	Modifikation der Beton- und Stahlarbeitslinie . . . . .	45
3.5	Die mitwirkende Zugzone . . . . .	56
3.6	Einfluss des Schwindens . . . . .	58
3.7	Ergebnisse, Vergleichsrechnungen . . . . .	59
3.7.1	Zugversuche . . . . .	59
3.7.2	Biegeversuche - Vergleich der M- $\kappa$ -Kurven . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Berechnungen am Querschnitt</b>	<b>65</b>
4.1	Bestandteile von Querschnitten, Definitionen . . . . .	65
4.2	Charakteristische Kennwerte von Querschnitten . . . . .	65
4.3	Spannungsintegration . . . . .	69
4.4	Finden des Dehnungszustandes zu einwirkenden Schnittgrößen . . . . .	74
4.5	Bestimmung der beanspruchungsbedingten Steifigkeit . . . . .	78
4.6	Die Berücksichtigung zeitlicher Phänomene . . . . .	78
4.6.1	Verfahren nach Trost . . . . .	78

4.6.2	Methode mit effektiven Steifigkeiten . . . . .	81
4.6.3	Verfahren mit Zeitschritten - Die Zeitschrittmethode ZSM . . . . .	82
4.6.4	Vergleich der Methoden zur Berücksichtigung zeitlicher Phänomene . . . . .	89
4.6.5	Bewertung der Verfahren . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Berechnung von Stäben und Stabwerken</b>	<b>93</b>
5.1	Grundidee des Verfahrens . . . . .	93
5.2	Definitionen . . . . .	94
5.3	Aufbau eines Stabes . . . . .	96
5.4	Aufbau des Systems . . . . .	99
5.4.1	Berücksichtigung von Stab- und Knotenbelastungen . . . . .	100
5.5	Berücksichtigung von Zwangsverschiebungen . . . . .	101
5.6	Berücksichtigung von Lagerungen . . . . .	102
5.6.1	Berücksichtigung von starren Lagerungen . . . . .	103
5.6.2	Berücksichtigung von nachgiebigen Lagerungen . . . . .	103
5.6.3	Berücksichtigung von gedrehten Lagerungen . . . . .	104
5.7	Schnittgrößen und Auflagerreaktionen . . . . .	104
5.8	Gleichgewichtsiteration . . . . .	105
5.9	Verifikation der eigenen Routine . . . . .	111
5.9.1	Vergleich mit Stab2dNL . . . . .	111
5.9.2	Vergleich an Versuchen . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Bemessung</b>	<b>117</b>
6.1	Einführung . . . . .	117
6.2	Allgemeine Nichtlineare Bemessung/Berechnung . . . . .	119
6.3	Vereinfachte Bemessungsverfahren . . . . .	124
6.3.1	Das Verfahren mit Nennkrümmungen - NKV . . . . .	124
6.3.2	Das Verfahren mit Nennsteifigkeiten - NSTV . . . . .	129
6.4	Bauteilverhalten, Vergleich der Verfahren . . . . .	131
6.4.1	Auswirkungen verschiedener Einflussgrößen und Berechnungsansätze auf die Ergebnisse nichtlinearer Berechnungen . . . . .	136
6.4.2	Vergleich des Nennkrümmungsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung	147
6.4.3	Vergleich des Nennsteifigkeitsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung	154
6.4.4	Fazit der Parameterstudie . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>161</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Versuchsdokumentation</b>	<b>A 1</b>
A.1	Versuchsprogramm . . . . .	A 1
A.2	Herstellung der Probekörper . . . . .	A 4
A.3	Materialkennwerte . . . . .	A 6
A.3.1	Betonkennwerte . . . . .	A 6
A.3.2	Kennwerte der Spannlitzen . . . . .	A 8
A.4	Messkonzept . . . . .	A 8
A.4.1	Prüfkörpervermessung . . . . .	A 8
A.5	Grundlagen der Nachrechnung . . . . .	A 15
A.5.1	Aus den begleitenden Materialprüfungen abgeleitete Arbeitslinien für die Berechnung . . . . .	A 15

A.5.2	Spannkraftverluste infolge Kriechen, Schwinden und Relaxation . . . . .	A 17
A.6	Versuchsergebnisse, Vergleich mit Nachrechnungen . . . . .	A 18
A.6.1	Serie 1 - Nullversuche . . . . .	A 18
A.6.2	Serie 2 - Traglastversuche an schlanken Stützen . . . . .	A 24
A.6.3	Serie 3 - Dauerlastversuche . . . . .	A 25
A.6.4	Serie 3 - Ergänzende Traglastversuche . . . . .	A 33



# 1 Einführung

Die Entwicklungen der Betontechnologie haben in den letzten zwanzig Jahren Betone mit beachtlichen Materialeigenschaften hervorgebracht. Ultrahochfester Beton (UHPC) ist einer dieser neuen Betonsorten. UHPC weist sehr hohe Druckfestigkeiten auf und ist zusätzlich durch sein dichtes Gefüge ausgesprochen widerstandsfähig gegen schädliche Umwelteinflüsse. Durch die hohe Druckfestigkeit von UHPC können Stützen im Hochbau in ähnlichen Dimensionen wie Verbundstützen realisiert werden. Zusätzlich bietet UHPC hierbei den Vorteil der besseren Widerstandsfähigkeit im Brandlastfall. Der Nachteil des spröderen Versagens von UHPC kann durch die Zugabe von Fasern mehr als ausgeglichen werden. In der Regel kommen hier Mikrostaalfasern (Durchmesser  $\sim 0.12$  bis  $0.3$  mm, Länge  $6$  bis  $30$  mm) zum Einsatz. Die hohe Drucktragfähigkeit von UHPC kann aber auch genutzt werden, um dünnwandige und schlankere Bauteile herzustellen. Das Tragverhalten druckbeanspruchter Bauteile, wie beispielsweise Stützen, Fachwerkstäbe oder aussteifende Rahmenkonstruktionen wird vom Verformungsverhalten geprägt. Abhängig von den Bauteilabmessungen, die den Schlankheitsparameter  $\lambda$  definieren, wird die Tragfähigkeit solcher Bauteile durch Materialbruch (kleine  $\lambda$ ) oder Stabilitätsverlust (große  $\lambda$ ) bestimmt. Im Betonbau wird das Verformungsverhalten durch das Materialverhalten auf Druck, die Rissbildung, die Verbundeigenschaft zwischen Stahl und Beton und durch zeitliche Phänomene wie Kriechen und Schwinden beeinflusst. Bei faserverstärkten Stahlbetonbauteilen ist darüber hinaus die Mitwirkung der Fasern in Abhängigkeit der Rissbreite von großer Bedeutung. Erst durch die realitätsnahe Modellierung dieser Eigenschaften kann die Traglast von Betondruckgliedern gezielt bestimmt werden.

## 1.1 Definition der Biegetheorien

Die Grundlage jeder Bemessung stellen Schnittgrößen dar. Werden diese durch Formulierung des Kräftegleichgewichts am unverformten System gebildet, spricht man von der Theorie I. Ordnung. Sie ist immer dann anwendbar, wenn die Schnittgrößen unabhängig von der Verformung sind (biegebeanspruchte Systeme mit geringer Verformung) oder der Verformungseinfluss als vernachlässigbar klein eingestuft werden kann. Haben Verformungen bei Bauteilen, die auf Biegung mit Normalkraft beansprucht werden, einen beträchtlichen Einfluss auf die Tragfähigkeit (siehe Abbildung 1.8), müssen sie bei der Formulierung des Kräftegleichgewichts mitberücksichtigt werden (Theorie II., III. bzw. IV. Ordnung). Hierbei unterscheiden sich die Theorien höherer Ordnung grundsätzlich nur am Genauigkeitsgrad der Formulierung der Differentialbeziehungen. Dieser hat aber weitreichende Auswirkungen auf weitere Berechnungsverfahren, denn mit steigender Ordnung der Biegetheorie steigt auch der Berechnungsaufwand. Sind Stabquer- und Längsverformungen groß gegenüber den Systemabmessungen, dürfen kinematische Beziehungen am differentiellen Element nicht vereinfacht werden. Diese allgemeine geometrisch nichtlineare Betrachtungsweise wird als Theorie IV. Ordnung bezeichnet. Mit dieser Theorie lassen sich Bauteile mit großen Verformungen und Verzerrungszuständen exakt berechnen. Im Bauwesen wird die Theorie IV. Ordnung nicht benötigt, da die Strukturen derartig große Verformungs- und Verzerrungszustände nicht erlauben. Bei Annahme mäßiger Verformungen und kleiner Verzerrungen

können die trigonometrischen und kinematischen Beziehungen des Biegestabes vereinfacht werden. Hieraus resultiert die Theorie III. Ordnung, die vor allem bei Hängebrücken, Seil- und Membrankonstruktionen Anwendung findet. Wird das Gleichgewicht zwar am verformten System formuliert, die Stabquerverformungen und Verzerrungen jedoch als klein vorausgesetzt, und die Stablängsverformungen vernachlässigt, lassen sich trigonometrische und kinematische Differentialbeziehungen linearisieren. Hieraus resultiert die Theorie II. Ordnung. Eine Hilfestellung zur Wahl der geeigneten Biegetheorie in Abhängigkeit der Größenordnung von Verschiebungen und Verzerrungen bietet die Tabelle 1.1. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Theorie II. Ordnung.

Tabelle 1.1: Annahmen der Stabwerkstheorien

Ordnung	Verschiebungsgrößen	Verzerrungen	Gleichgewichtsbetrachtung
I	$\infty$ -klein	klein	unverformtes System
II	klein	klein	verformtes System
III	mäßig	klein	verformtes System
IV	groß	groß	verformtes System

## 1.2 Definition der Schlankheit

Die Schlankheit  $\lambda$  ist eine dimensionslose Kenngröße, mit der die Empfindlichkeit auf Stabilitätsversagen von Stützen eingestuft werden kann:

$$\lambda = \frac{l_k}{i} = \frac{l_k}{\sqrt{I/A}} \quad (1.1)$$

mit:  $l_0$  ... Knicklänge

$I$  ... Trägheitsmoment

$A$  ... Querschnittsfläche

Die Knicklänge ist hierbei als Abstand der Momenten-Nullpunkte bzw. als Abstand der Wendepunkte der Biegelinie beim Stabilitätsverlust festgelegt.

## 1.3 Charakteristik des Knickstabes

Das Verhalten eines stabilitätsgefährdeten Stabes kann an  $N$ - $M$  bzw.  $N$ - $w$  und  $M$ - $w$ -Verläufen dargestellt werden. Den folgenden Betrachtungen wird der in der Abbildung 1.1 dargestellte Knickstab zu Grunde gelegt. Hier ist ein imperfekter Stab mit sinusoidaler Vorverformung dargestellt, der nur durch die exzentrische Normalkraft  $F$  mit konstanter Ausmitte beansprucht wird. Die Herleitung und die Lösung der folgend aufgestellten Differentialgleichung ist aus Pflüger (1975) entnommen und kann dort detailliert nachvollzogen werden.

Folgende Vereinfachungen werden getroffen:

- Die Biegesteifigkeit sei über die Stablänge konstant.

- Es wird davon ausgegangen, dass die Vorverformung  $w_i$  und die Lastverformung  $w$  klein sind und somit die Taylorreihen der trigonometrischen Funktionen nach dem linearen Glied abgebrochen werden können ( $\sin(\varphi_i + \varphi) \approx \varphi_i + \varphi$ ,  $\cos(\varphi_i + \varphi) \approx 1$ ).
- Die durch die Verformung hervorgerufene Verkürzung  $\Delta l$  ist, bezogen auf die Stablänge  $l$ , vernachlässigbar klein.
- Es gilt die Linearisierung der Krümmung  $\kappa = \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \approx w'' = -\frac{M}{EI}$ .

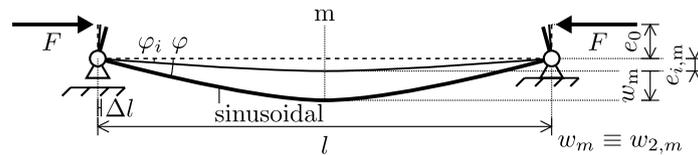


Abbildung 1.1: Doppelt gelenkig gelagerter, imperfekter Biegestab mit Lastexzentrizität

Wird das Momentengleichgewicht bezüglich der verformten Stabachse gebildet, kann für den dargestellten Stab folgende Differentialbeziehung hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= F \cdot e_0 \cdot \cos(\varphi_i + \varphi) + F \cdot w(x) + F \cdot e_{i,m} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \\
 M(x) &\approx F \cdot e_0 + F \cdot w(x) + F \cdot e_{i,m} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \\
 EI \cdot w'' + F \cdot w &= -F \cdot e_0 - F \cdot e_{i,m} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \\
 w'' + \frac{F}{EI} \cdot w &= -\frac{F}{EI} \cdot e_0 - \frac{F}{EI} \cdot e_{i,m} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung setzt sich aus dem homogenen und dem partikulären Anteil zusammen:

$$w = w_h + w_p = \underbrace{C_1 \cdot \cos \frac{\varepsilon \cdot x}{l} + C_2 \cdot \sin \frac{\varepsilon \cdot x}{l}}_{w_h} + \underbrace{\frac{e_i(x)}{(\pi/\varepsilon)^2 - 1} - e_0}_{w_p} \tag{1.3}$$

mit:  $\varepsilon = l \cdot \sqrt{\frac{|P|}{EI}}$  ... Stabkennzahl

Mit der Gleichung 1.3 kann die Verformung an jeder Stelle des Knickstabes der Abbildung 1.1 in Abhängigkeit der einwirkenden Normalkraft bestimmt werden. Die angegebene Gleichung der Biegelinie bildet die Grundlage des klassischen Verzweigungsproblems.

### 1.3.1 Linear-elastisches Materialverhalten ohne Bruchkriterium

#### Der perfekte Stab - Das Verzweigungslastproblem

Der perfekte Knickstab weist keine Vorverformungen auf und wird absolut zentrisch beansprucht. Die Biegelinie setzt sich für diesen Stab nur aus dem homogenen Anteil der Gleichung 1.3 zusammen. Die Randbedingungen lauten  $M(x = 0) = -EI \cdot w''(x = 0) = 0$  und  $M(x = l) = -EI \cdot w''(x = l) = 0$ . Aus der ersten Bedingung folgt  $C_1 = 0$ . Die zweite Randbedingung führt zu:

$$0 = C_2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^2 \cdot \sin \varepsilon \quad (1.4)$$

Wird die triviale Lösung  $C_2 = 0$  ausgeschlossen, muss  $\sin \varepsilon = 0$  gelten ( $\sin \varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = n \cdot \pi$ ):

$$n \cdot \pi = l \cdot \sqrt{\frac{|F|}{EI}} \rightarrow F(n) = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2} \quad (1.5)$$

Die Kraft  $F(n)$  wird als Verzweigungslast bezeichnet. Sie ist von der Form der Biegelinie beim Stabilitätsverlust abhängig. Die sogenannte kritische Verzweigungslast ergibt sich für die niedrigste Eigenform mit  $n = 1$  zu:

$$F(n = 1) = F_b = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2} \quad (1.6)$$

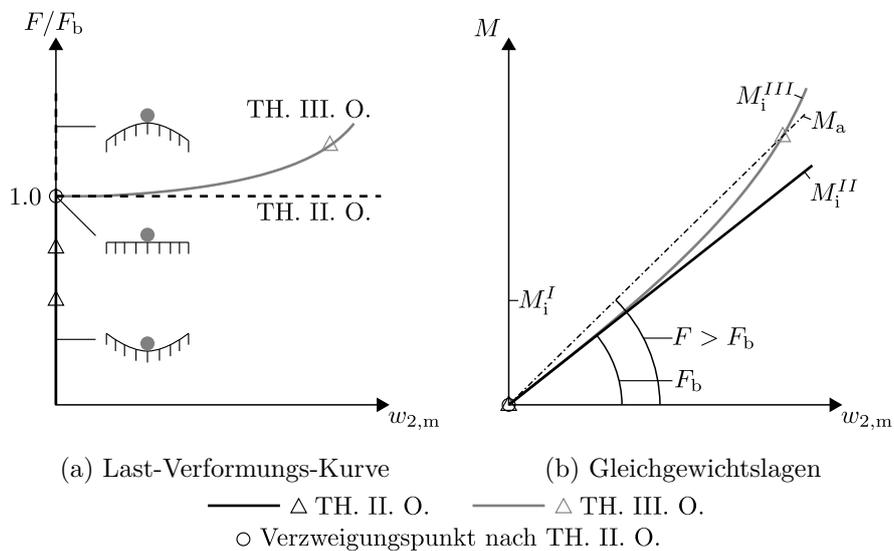


Abbildung 1.2: Tragverhalten des perfekten, linear-elastischen Stabes

Bis zum Erreichen der Verzweigungslast ist die Gleichgewichtslage beschränkt stabil. Das bedeutet, dass die Struktur bei einer geringfügigen Änderung der Auslenkung wieder in den ursprünglichen Verformungszustand zurückkehrt. Der Zusatz „beschränkt“ verdeutlicht hierbei, dass die aufgebrachte Störung der Auslenkung nicht beliebig groß sein darf. Mit Erreichen von  $F_b$  führen nach Theorie II. Ordnung schon infinitesimal kleine Änderungen der Lage zu unendlich großen

Verformungen. Daher sind Gleichgewichtslagen ab  $F \geq F_b$  als labil einzustufen. Werden anstelle der linearisierten kinematischen Beziehungen Näherungen höheren Grades angewendet (Theorie III. Ordnung) kann ein endlicher Verformungszustand auch oberhalb der Verzweigungslast gefunden werden (siehe Abbildung 1.2). Dieses Verhalten könnte mit einem perfekten Stab mit linear-elastischem Materialverhalten ohne Bruchkriterium auch im Versuch gezeigt werden. Das klassische Verzweigungsproblem ist jedoch nur von theoretischer Natur, da perfekte Stäbe in der Realität nicht vorkommen.

### Der imperfekte Stab

Sind auch nur geringe Abweichungen vom perfekten Zustand vorhanden, sei es durch den vorverformten Einbauzustand und/oder Abweichungen der Lasteinleitung, entstehen bei Aufbringung der Last unweigerlich Biegemomente und dadurch auch Biegeverformungen. Trotz Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens wachsen die Verformungen mit steigender Last überproportional an. Bei Erreichen der klassischen Verzweigungslast nach Gleichung 1.6 wäre die rechnerische Auslenkung in Stabmitte nach Theorie II. Ordnung unendlich groß. Dies ist in der Abbildung 1.3a an der asymptotischen Annäherung der Last-Verformungs-Kurve an den Pfad des klassischen Knickstabes erkennbar. Die immer größer werdenden Auslenkungen verletzen zunehmend die Voraussetzung der Theorie II. Ordnung, nämlich die Annahme kleiner Verformungen. Daher weicht die Traglastkurve nach Theorie II. Ordnung mit steigender Normalkraft immer mehr von jener nach Theorie III. Ordnung ab. Die Verformungen nach Theorie III. Ordnungen sind hierbei stets kleiner als bei Berechnung nach Theorie II. Ordnung. In der Abbildung 1.3a ist auch erkennbar, dass die Abweichungen zwischen Theorie II. und III. Ordnung bis zu einem gewissen Lastniveau vernachlässigbar sind. Der zusätzliche Vergleich mit der Kraft-Verformungs-Kurve nach Theorie I. Ordnung verdeutlicht, dass die Formulierung des Kräftegleichgewichts am unverformten System zu einer unsicheren Beurteilung des Tragverhaltens führt.

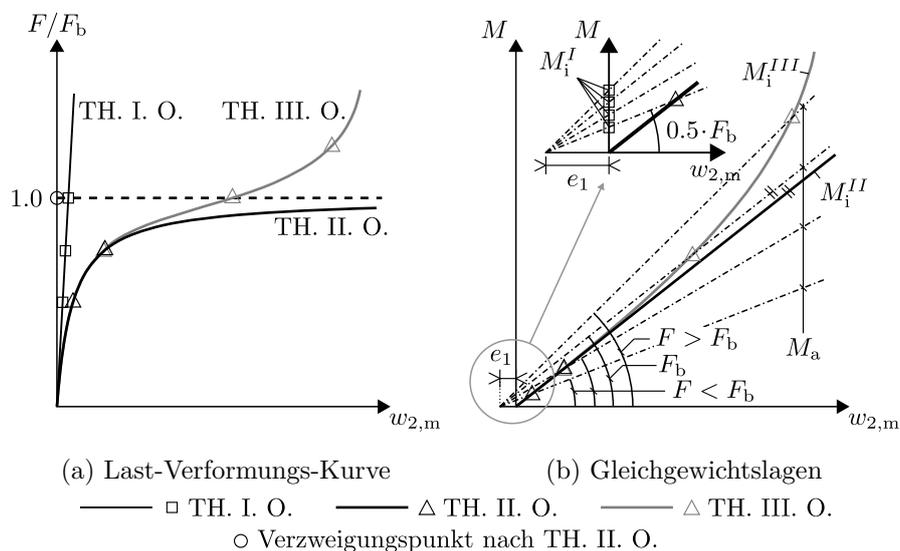


Abbildung 1.3: Tragverhalten des imperfekten, linear-elastischen Stabes

Eine weitere sehr anschauliche Darstellung ist der Vergleich der inneren und äußeren Momentenverläufe (siehe Abbildung 1.3b). Zu jeder Normalkraft muss in jedem beliebigen Schnitt entlang der betrachteten Stütze das zugehörige äußere Moment mit dem inneren Moment im

Gleichgewicht stehen und mit dem Verformungszustand verträglich sein. Das äußere Moment ist immer als Gerade der Form  $M_a = |F| \cdot w_2 + M^I$  darstellbar, wobei die Steigung hierbei der einwirkenden Normalkraft entspricht. Der Schnittpunkt der  $M_a$ -Gerade mit der Ordinate entspricht dem Moment  $M^I$  nach Theorie I. Ordnung. Der Anteil  $M^I$  hängt demnach nur von der Normalkraft und der Ausmitte  $e_1$  im unbelasteten Zustand und dem Moment infolge Stabquerbelastung ab. Das innere Moment ergibt sich aus dem Stoffgesetz und der Querschnittsgeometrie zu  $M_i = \int \sigma(z) \cdot z \, dA$ . Bei linear-elastischem Materialverhalten hat auch der innere Momentenverlauf die Form einer Gerade. Solange ein stabiles Gleichgewicht zwischen Einwirkung und Widerstand möglich ist, gibt es einen Schnittpunkt der  $M_a$  und  $M_i$ -Verläufe. Der Grenzzustand der Stabilität ist erreicht, wenn die  $M_a$  und  $M_i$  Geraden zu einander parallel sind bzw. der Schnittpunkt im Unendlichen liegt. Die geometrische Visualisierung der Gleichgewichtszustände verdeutlicht, dass am imperfekten Stab nach Theorie II. Ordnung kein Gleichgewichtszustand für Normalkräfte oberhalb der idealen Verzweigungslast  $F_b$  existiert.

### 1.3.2 Verhalten bei linear-elastischem Materialverhalten mit Bruchkriterium

#### Der imperfekte Stab - Das Spannungsproblem

Selbst wenn ein Material hinreichend genau mit linear-elastischem Verhalten beschrieben werden kann, so wird die Traglast des imperfekten Stabes bei jedem Material irgendwann durch den Bruch bestimmt. Allein aus dieser Limitation kann die ideale Verzweigungslast nie erreicht werden, wie an der Abbildung 1.4 zu erkennen ist. Wie weit die tatsächlich aufnehmbare Last von der idealen Verzweigungslast abweicht, ist bei ideal-elastischem Materialverhalten von der Lastausmitte und der Schlankheit abhängig. Die Abbildung 1.5 zeigt, dass das Versagen bei kleinen Schlankheiten durch den Materialbruch bestimmt wird. Folgend nehmen die Abweichungen zwischen der klassischen Verzweigungslast und der tatsächlichen Traglast mit sinkender Schlankheit zu. Die Differenz wird mit steigender Lastausmitte zusätzlich vergrößert.

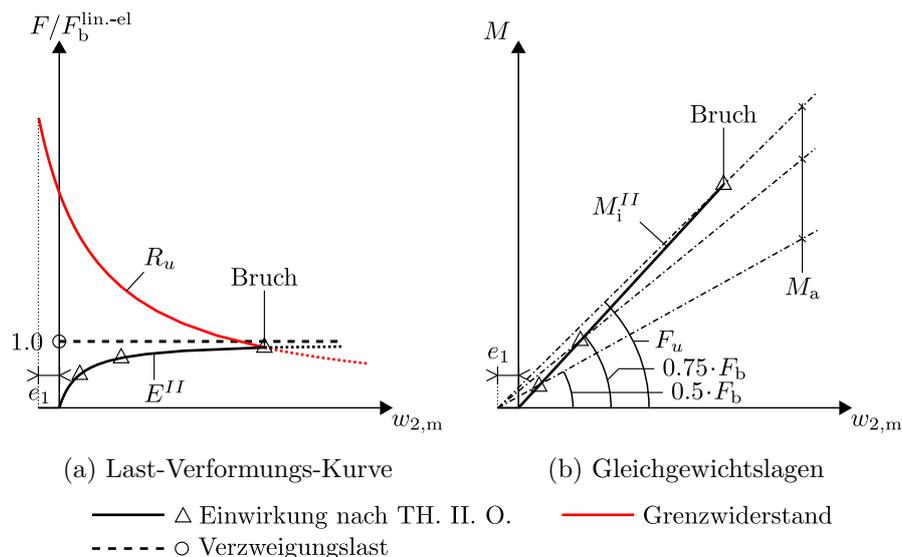


Abbildung 1.4: Tragverhalten des imperfekten, linear-elastischen Stabes mit Bruchkriterium

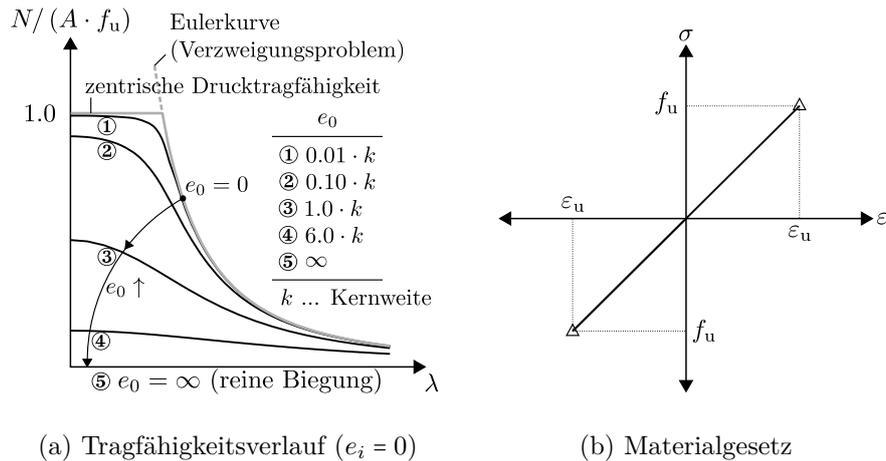


Abbildung 1.5: Normalkrafttragfähigkeit bei linear-elastischem Materialverhalten mit Bruchkriterium in Abhängigkeit von Schlankheit und Lastausmitte  $e_0$

### 1.3.3 Verhalten bei multi-linearem bzw. nichtlinearem Materialverhalten mit Bruchkriterium

Beton verhält sich bei Druckbeanspruchung degressiv nichtlinear (siehe Kapitel 2). Bei Biegung mit oder ohne Normalkraft kann es zusätzlich zur Rissbildung kommen, wodurch das nichtlineare Verhalten zusätzlich verstärkt wird. In Stahlbetonbauteilen nimmt die Steifigkeit bei steigender Beanspruchung ab. In der Abbildung 1.6b ist dies an der konvex gekrümmten  $M_i$ -Kurve erkennbar. Es können drei Fälle eintreten:

1. **Versagen durch Stabilitätsverlust:** So lange das äußere Moment langsamer zunimmt als das innere Moment, ist ein stabiler Gleichgewichtszustand möglich. Wird der Zustand erreicht, bei dem die Einwirkung schneller zunimmt als der Widerstand, liegt ein Stabilitätsversagen vor. Bei Laststeuerung nehmen die Auslenkungen eines Stabes bei gleichbleibender Kraft schlagartig zu, bis der Bruchzustand erreicht ist (graue Linie in Abbildung 1.6). Bei Wegsteuerung muss die resultierende Stablängskraft mit zunehmender Auslenkung abnehmen, um das Gleichgewicht innerer und äußerer Kräfte aufrecht zu erhalten (schwarze Linie in Abbildung 1.6). Werden die Gleichgewichtslagen betrachtet (Abbildung 1.6a) ist das Stabilitätsversagen am Berühren der  $M_a$ - und  $M_i$ -Verläufe bei gleicher Tangentensteigung zu erkennen. Bei idealem linear-elastischen Materialverhalten nimmt die Steigung der Last-Verformungs-Kurve hingegen mit zunehmender Kraft kontinuierlich ab, bis der Bruchzustand erreicht wird.
2. **Versagen durch Bruch:** Dieses Versagen tritt auf, wenn das Materialversagen vor dem Stabilitätsversagen eintritt. In diesem Fall ist die Tangentensteigung des inneren Momentes beim Versagen größer als die Steigung des äußeren Momentes (siehe Abbildung 1.7a).
3. **Bruch und Stabilitätsversagen gleichzeitig:** Der Sonderfall, bei dem 1. und 2. zusammenfallen (siehe Abbildung 1.7b).

Die Betrachtung der Gleichgewichtslagen von Einwirkung und Widerstand wird im Kapitel 6 bei der vereinfachten Bemessung mit dem Nennkrümmungsverfahren aufgegriffen. Da diese erst nach einer Systemberechnung möglich ist, müssen Vereinfachungen getroffen werden, um diese Betrachtungsweise für eine händische Bemessung nutzbar zu machen. Im Zuge der Beschreibung

der Grundlagen des Nennkrümmungsverfahrens (Seite 125 ff.) wird gezeigt, mit welchen Annahmen die  $M$ - $w$ -Beziehung für Stützen in die zur Bemessung geeignete  $M$ - $\kappa$ -Beziehung umgeformt werden kann.

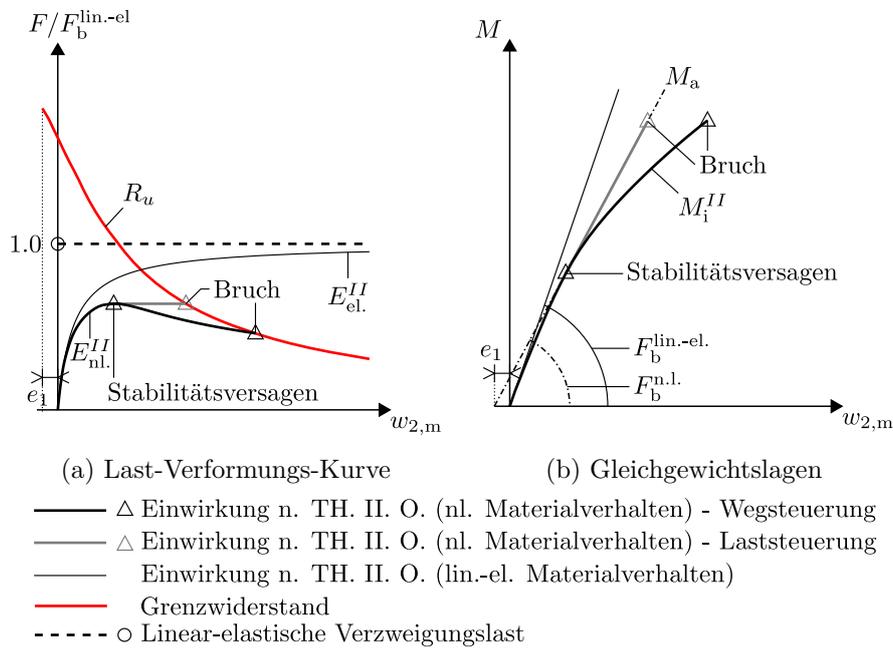


Abbildung 1.6: Tragverhalten des imperfekten Stabes bei nichtlinearem Materialverhalten und Versagen durch Stabilitätsverlust

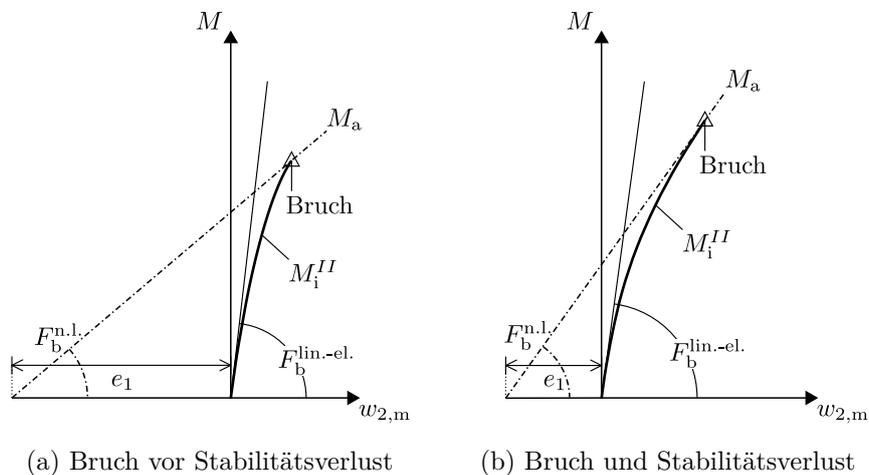


Abbildung 1.7: Gleichgewichtslage bei Versagen durch Bruch und Bruch mit Stabilitätsverlust

Das Verhalten von Betonstützen unterschiedlicher Bauteillängen bei gleicher Lastausmitte kann der Abbildung 1.8 entnommen werden. Bei kleinen Schlankheiten (hier: bis  $\lambda = 60$ ) wird das Tragverhalten durch den Materialbruch bestimmt. Mit steigender Schlankheit wird die Traglast durch den Stabilitätsverlust limitiert. Der  $N$ - $M$ -Punkt bei der höchsten Tragfähigkeit entfernt sich hierbei immer mehr vom Grenzzustand des Materialbruchs des am höchsten beanspruchten

Querschnitts. Die Stütze mit der Schlankheit  $\lambda = 80$  stellt hierbei den Sonderfall dar, bei dem der Materialbruch und der Stabilitätsverlust zusammenfallen.

Wird das Tragverhalten einer Stütze maßgeblich durch die Rissbildung bestimmt, kann die Vorspannung eine wirksame Maßnahme zur Traglaststeigerung darstellen. Die Vorspannung vermindert zwar die Drucktragfähigkeit, doch gleichzeitig kann die Biegesteifigkeit über einen weiten Lastbereich hoch gehalten werden indem die Rissbildung verzögert wird. Das Entfernen des Grenzzustandes des stabilen Gleichgewichts vom Grenzzustand der Materialtragfähigkeit kompensiert hierbei in vielen Fällen die reduzierte Drucktragfähigkeit. In Kapitel 6, Seite 138 ff. erfolgt die genauere Beschreibung der Auswirkungen durch die Vorspannung.

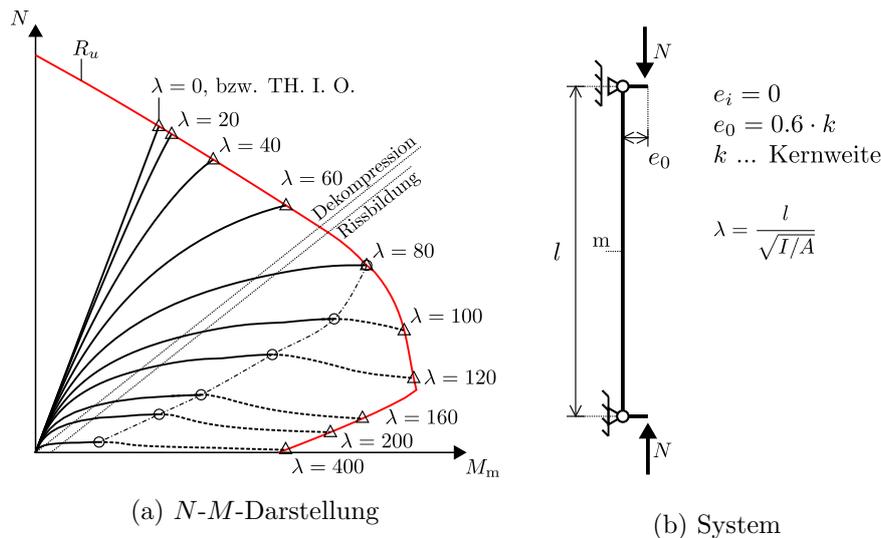


Abbildung 1.8: Einfluss der Schlankheit auf das Tragverhalten von Stahlbetonstützen

## 1.4 Ziel der Arbeit und Beschreibung der Vorgehensweise

Der Anspruch dieser Arbeit ist es, einen wertvollen Beitrag zur nichtlinearen Berechnung von Betonstützen zu liefern. Hierbei wird der Fokus auf die Bestimmung des Tragverhaltens mittel- bis hochschlanker Stützen ( $\lambda : 80$  bis  $200$ ) unter wirklichkeitsnaher Berücksichtigung der Rissbildung und Modellierung von Kriechen und Schwinden gelegt. Mit dieser Arbeit als Grundlage können Stützen aus genormten als auch ultrahochfesten Betonen unterschiedlicher Bewehrungsausbildung (schlafe und vorgespannte Bewehrung, Faserbewehrung oder deren Kombination) berechnet werden. Aus diesem Grund werden hier in erster Linie Ansätze auf mechanischer Grundlage vorgestellt und entwickelt, mit denen die gesamte mögliche Bandbreite an Anwendungsfällen abgedeckt werden kann.

Die Werkstoffcharakterisierung für die Verformungsberechnung und Bemessung (Verhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung, Kriechen und Schwinden) erfolgt in Kapitel 2. Hierbei wird auch auf die Beschreibung des Zugtragverhaltens von faserbewehrten Beton eingegangen. Die Zugversteifung ist eine wesentliche Eigenschaft von gerissenem Stahlbeton. Sie wird in Kapitel 3 beschrieben, wobei zusätzlich zu konventionellen Modellen eine neue Betrachtungsweise vorgestellt wird, bei der unter Einhaltung des Kräftegleichgewichts und der Verformungskompatibilität sowohl die Stahl- als auch die Betonarbeitslinien auf Zug modifiziert werden. Diese

Maßnahme erlaubt eine bessere Beschreibung der Spannungsverläufe im Querschnitt bei kombinierter Momenten- und Normalkraftbeanspruchung. Nichtlineare Systemberechnungen sind in der Regel iterativ und führen zu kontinuierlicher Interaktion zwischen Querschnitts- und Systemberechnungen, die in den Kapiteln 4 und 5 beschrieben werden. Besondere Berücksichtigung findet hier die realitätsnahe Erfassung der Systemantwort auf Kriechen und Schwinden, die über Zeitschrittberechnung erfolgt. Auf die Bemessung von Stützen wird in Kapitel 6 eingegangen. Hier werden die Grundsätze und Schwierigkeiten einer allgemeinen nichtlinearen Bemessung angeführt und die vereinfachten Bemessungsansätze aktueller Normen (ON-EN1992-1-1 (2011), DIN-EN1992-1-1 (2011)) beschrieben. Die Erkenntnisse der Kapitel 1 bis 5 bilden die Grundlagen einer Parameterstudie. Ziel der Studie ist die Quantifizierung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf die Traglast vorgespannter und schlaff bewehrter Stützen. Hierbei wird der Einfluss der Vorspannung auf die Tragfähigkeit beschrieben und quantifiziert. Die konsequente Erweiterung der vereinfachten Bemessungsverfahren für die Bemessung (Nennkrümmungs- und Nennsteifigkeitsverfahren) für die Bauteile aus UHPC können die Frage der grundsätzlichen Eignung dieser Verfahren zur Bemessung von ultrahochfesten Stützen beantworten. Den Abschluss der Arbeit bildet die Dokumentation und Nachrechnung von Versuchen, die im Zuge dieser Arbeit durchgeführt wurden (Anhang A). Das Hauptaugenmerk wird hierbei auf den Einfluss der Vorspannung auf die Tragfähigkeit schlanker bis hochschlanker UHPC Stützen gerichtet. Neben der Ermittlung der Bauteilfestigkeiten an Versuchskörper sehr kleiner Schlankheiten, werden hier zusätzlich auch die Auswirkungen zeitlicher Einflüsse, sowie sehr kleiner Lastausmitten und über die Stützenlänge veränderlicher Lastausmitten versuchstechnisch bestimmt. Die Versuchsnachrechnungen bestätigen die in dieser Arbeit vorgestellten Modellbildungen und Berechnungsverfahren.

## 2 Materialmodelle

Die Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit basiert auf Spannung-Dehnungs-Beziehungen, die als Verhalten einer Faser interpretiert werden können. In der Regel werden Arbeitslinien aus einachsigen Versuchen ermittelt, indem gemessene Längenänderungen den aufgetragenen Spannungen zugeordnet werden. Beton ist ein Material, das von Rissbildung geprägt wird. Mit Einsetzen der Rissbildung sind Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von der Betrachtungslänge abhängig und somit nicht mehr eindeutig. Die Annahme eines Wirkungsbereiches wird notwendig.

Zunächst wird das realitätsnahe Tragverhalten von Beton unter Druck- und Zugbeanspruchung beschrieben, das vor allem für die Schnittgrößenermittlung und Verformungsberechnungen benötigt wird. Zusätzlich wird der Einfluss durch Faserzugabe, insbesondere für das Zugtragverhalten erläutert. Hierbei stellt ein auf mechanischen Grundlagen basierendes Modell den Schwerpunkt dar. Nach der Beschreibung des Zug- und Drucktragverhaltens bei kurzzeitiger Beanspruchung folgt die Erläuterung und Quantifizierung zeitlicher Einflüsse. Weiter werden Arbeitsgesetze vorgestellt, die für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit herangezogen werden können. Um die Thematik der relevanten Materialmodelle abzurunden, erfolgt abschließend eine sehr kurze Darstellung der Eigenschaften gebräuchlicher Stähle im Massivbau.

### 2.1 Beton, realitätsnahe Stoffmodellierung für nichtlineare Berechnungen

#### 2.1.1 Beton unter Druckbeanspruchung

Im Beton werden die Kräfte über das Zweiphasensystem Matrix und Zuschlag übertragen, wobei die einzelnen Körner des Zuschlags über den Zementstein zusammengehalten werden. Durch das Gefüge des Betons entstehen bei der Weiterleitung von Druckkräften Zugspannungen im Zementstein (siehe Abbildung 2.1). Mit zunehmender Druckspannung bilden sich Mikrorisse, die sich bei weiterer Spannungserhöhung zu Makrorissen vereinigen und letztendlich Bruchflächen entstehen lassen. Dieser Vorgang führt zu einem sehr ausgeprägt nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verhalten. Bei Normalbeton stellt der Zementstein den Schwachpunkt dar, weshalb die Risse in der Regel um die Zuschlagkörner verlaufen.

Je höher die Druckfestigkeit des Betons wird, desto höher wird auch die Festigkeit des Zementsteins. Um die Druckfestigkeiten von ultrahochfesten Betonen zu erreichen, werden reaktive Zusatzstoffe (Silikastaub) hinzugefügt, das Wasser-Bindemittel-Verhältnis reduziert und die Sieblinie optimiert. Zusätzliche Wärmebehandlung führt zu chemischen Reaktionen, die mit einer Festigkeitssteigerung einhergehen. Die hohe Packungsdichte und der niedrige Wasser-Bindemittelwert ( $< 0.25$ ) führen zu geringer Porosität, wodurch der Linearbereich der Arbeitslinie vergrößert wird. Da die Bruchfestigkeit von hochfesten Betonen zunehmend vom Bruch des Zuschlags bestimmt wird, wird das Bruchverhalten zunehmend spröder. Sowohl ON-EN1992-1-1 (2011),

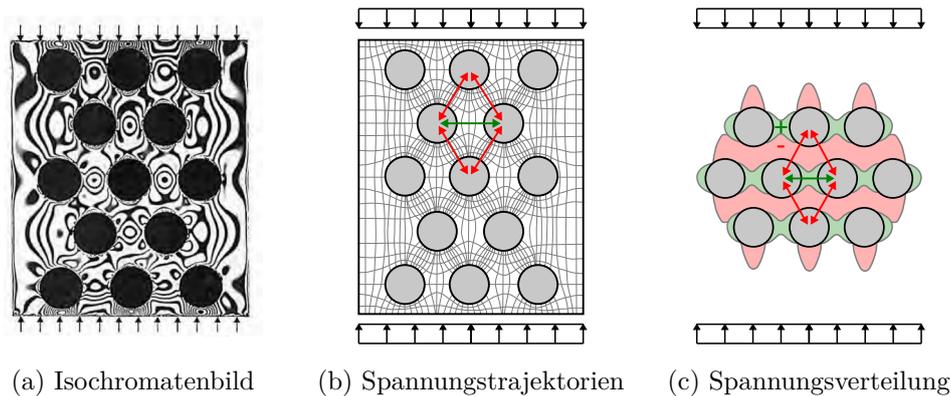


Abbildung 2.1: Innere Spannungsverläufe in druckbeanspruchten Normalbeton nach Wischers und Lusche (1972)

DIN-EN1992-1-1 (2011), CEB-fib (2013) als auch CEB-fib (2008) wählen zur realitätsnahen Beschreibung der Arbeitslinie folgende Funktion:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (2.1)$$

mit:  $k$  ... Plastizitätszahl

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$\varepsilon_{c1}$  ... Stauchung bei Höchstwert der Betondruckspannung

Die Plastizitätszahl stellt das Verhältnis des Tangentenmoduls zum Sekantenmodul bei Höchstspannung dar:

$$k = \underbrace{1.05 \cdot E_{cm}}_{E_{cm,tan}} \cdot \underbrace{|\varepsilon_{c1}| / f_{cm}}_{1/E_{cm,sek} \text{ bei } f_{cm}} \quad (2.2)$$

Die eben erwähnten Quellen unterscheiden sich lediglich im Ansatz der Plastizitätszahl (siehe Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1: Tangentenmodul und Dehnung bei Höchstspannung

Quelle	$E_{cm,tan}^{[b]}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_{c1}$ [%]	gültig bis
EN 1992-1-1 <sup>[a]</sup>	$1.05 \cdot 22000 \cdot \alpha_E \cdot (f_{cm}/10)^{0.3}$	$-0.7 \cdot f_{cm}^{0.31} \leq 2.8$	C90/105
CEB-fib (1993)	$21500 \cdot \alpha_E \cdot (f_{cm}/10)^{1/3}$	-2.2	C80/95
CEB-fib (2013)	$21500 \cdot \alpha_E \cdot (f_{cm}/10)^{1/3}$	k. Formel <sup>[c]</sup>	C120
CEB-fib (2008)	$20500 \cdot \alpha_E \cdot (f_{cm}/10)^{1/3}$	$-1.60 \cdot (f_{cm}/10)^{0.25}$	C120

<sup>a</sup> ON-EN1992-1-1 (2011) bzw. DIN-EN1992-1-1 (2011)

<sup>b</sup>  $\alpha_E$  ... Einfluss der Zuschlagsart auf den E-Modul (Tabelle 2.2)

<sup>c</sup> keine Formel angegeben (Werte liegen im Bereich jener aus CEB-fib (2008))

Tabelle 2.2: Einflussfaktor der Gesteinsart auf den E-Modul nach CEB-fib (2013) und CEB-fib (2008)

Art des Zuschlags	$\alpha_E$	Art des Zuschlags	$\alpha_E$
Basalt, dichter Kalkstein	1.2	Kalkstein	0.9
Quarz und Quarzite	1.0	Sandstein	0.7

In Ma (2010) wird ebenfalls die Gleichung 2.1 zur Beschreibung des Betonverhaltens auf Druck angesetzt. Hier wird die Plastizitätszahl jedoch durch eine Regressionsfunktion beschrieben, die für alle Betongüten von Normalbeton bis zum UHPC gültig ist:

$$k = \frac{E_{cm,tan} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cm}} = A^{(B-f_{cm})} + C \quad (2.3)$$

mit:  $A = 1.04$

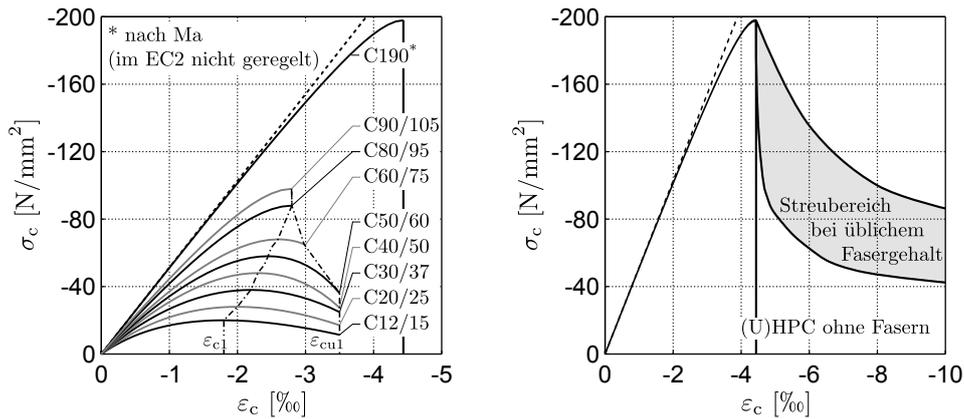
$B = 36.3$

$C = 1.15$

Für grobkörnigen UHPC mit Basaltsplitt empfiehlt Ma den Tangentenmodul mit  $E_{cm,tan} = 10200 \cdot f_{cm}^{1/3}$  und für feinkörnigen UHPC mit Quarzsand mit  $E_{cm,tan} = 8800 \cdot f_{cm}^{1/3}$  anzusetzen. Verglichen mit einer Vielzahl an Versuchsergebnissen, betragen die Abweichungen der Gleichung 2.3 nach dem Verfasser nicht mehr als  $\pm 10\%$ .

Die Abbildung 2.2a zeigt acht nach den Bestimmungen der ON-EN1992-1-1 (2011) - Abschnitt 3.1.5 entwickelte nichtlineare Arbeitslinien (C12/15 bis C90/105). Zusätzlich ist der Spannungs-Dehnungs-Verlauf eines ultrahochfesten Betons der Güte C190 (Annahme:  $f_{cm} = f_{ck} + 8$ ) aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Nichtlinearität der Arbeitslinie mit zunehmender Druckfestigkeit abnimmt. Bei den Betongüten C12/15 bis C50/60 darf der Nachbruchbereich nach Erreichen der Druckfestigkeit noch bis zu einer Grenzdehnung  $\varepsilon_{cu1} = -3.5\%$  ausgenutzt werden. Der anrechenbare Nachbruchbereich nimmt ab dem C50/60 bis zur letzten genormten Betongüte C90/105 (bzw. C100/115 gem. DIN-EN1992-1-1/NA (2011)) konstant ab. Dadurch soll dem zunehmend spröderen Verhalten bei ansteigender Druckfestigkeit Rechnung getragen werden. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass der abfallende Ast der Spannungs-Dehnungs-Linie nach dem EC2 nur als erste Näherung zu verstehen ist, die immer angesetzt werden darf. Der Verlauf der Entfestigung ist sehr stark von der Bauteilgeometrie, der Beanspruchungssituation und den Randbedingungen wie Bügel, Fasern, Teilflächenbelastung, Querdruck, usw. abhängig. Er stellt also keine reine Materialgröße mehr dar. Ist das Nachbruchverhalten von Beton für die Berechnungsergebnisse von Bedeutung, sollte dieses mit dem compression damage zone model bzw. dem Biegedruckzonenmodell (CDZ-Modell, BDZ-Modell vgl. Jensen und Shah (1997), König et al. (1999)) erfasst werden. Das Stabilitätsversagen schlanker Bauteile wird nicht durch das Nachbruchverhalten des Betons auf Druck bestimmt. Daher wird auf die Modellierung dieses Effektes nicht näher eingegangen.

In der Abbildung 2.2b ist das qualitative Nachbruchverhalten des UHPC C190 dargestellt. Ohne Faserzugabe verhält sich ultrahochfester Beton ausgesprochen spröde. Mit ansteigendem Fasergehalt wird das Nachbruchverhalten zunehmend duktiler. Durch die Querdehnungsbehinderung kann die Druckfestigkeit ebenfalls gesteigert werden (in der Abbildung 2.2b nicht abgebildet). Durch die starke Abhängigkeit der Umschnürungswirkung und des Nachbruchverhaltens von Fasergeometrie, -gehalt und -ausrichtung ist die Streuung im Entfestigungsbereich sehr groß und sollte in wichtigen Fällen an begleitenden Versuchskörpern bestimmt werden.

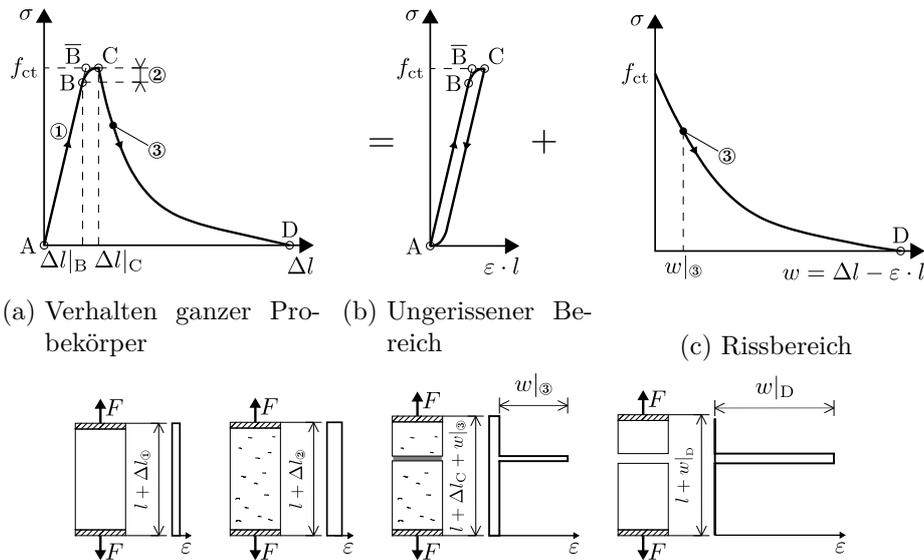


(a) Ausgewählte Arbeitslinien nach ON-EN1992-1-1 (2011) und C190 (b) C190 - Einfluss des Fasergehalts auf das Nachbruchverhalten

Abbildung 2.2: Nichtlineare Arbeitslinien zur Schnittgrößenermittlung und Verformungsberechnung gemäß ON-EN1992-1-1 (2011), Abschnitt 3.1.5 (C190 nach Ma (2010))

### 2.1.2 Beton unter Zugbeanspruchung

Die Zugfestigkeit wird wie die Druckfestigkeit wesentlich vom Zementstein beeinflusst, beträgt jedoch nur einen Bruchteil der Druckfestigkeit.



(a) Verhalten ganzer Probekörper (b) Ungerissener Bereich (c) Rissbereich

(d) Qualitative Darstellung der Längsverformungen in vier Stadien

Abbildung 2.3: Zugtragverhalten von Beton nach Duda (1991)

Wird ein Betonkörper, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, zentrisch gezogen, verhält sich dieser bis ca. 70 % der Zugfestigkeit nahezu linear-elastisch (Bereich ①). Mit Bildung erster Mikrorisse ist ein leichter Dehnungsanstieg zu verzeichnen (siehe Pfad ②). Ab ca. 90 % der Zugfestigkeit (Punkt B) nimmt die Mikrorissbildung stark zu, wodurch die Dehnung der Zugprobe schnell anwächst. Bei Erreichen der Zugfestigkeit kommt es zur Lokalisation eines Makrorisses (Punkt

C). Die Rissöffnung kann nun, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, einem fiktiven Einzelriss (vgl. Hillerborg et al. (1976)) oder einem Bereich (vgl. Rissbandmodell nach Bažant (1983)) zugeordnet werden. Der ansteigende Ast der Spannungs-Dehnungs-Linie wird als Vereinfachung oft ideal elastisch angenommen (Punkt  $\bar{B}$ ). Wird der Probekörper nach Erreichen der Zugfestigkeit weiter verlängert, öffnet sich der lokalisierte Makroriss bei gleichzeitiger Spannungsabnahme (Entfestigung) zunehmend. Die Dehnung im restlichen Probekörper geht durch die Spannungsabnahme wieder zurück (siehe Abbildungen 2.3b und 2.3c). Letztlich existiert eine Rissöffnung, ab der über den Riss keine Zugspannung mehr übertragen werden kann (Punkt D). Mit Erreichen dieses Zustandes ist der Probekörper vollständig getrennt.

Tabelle 2.3: Rechnerische Bestimmung der Bruchenergie  $G_F$  in [N/mm]

Literatur	Bruchenergie $G_F$				
CEB-fib (1993)	$G_F = G_{F0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0.7}$				
	$\varnothing_g$	8	16	32	[m]
	$G_{F0}$	0.025	0.030	0.058	[N/mm]
Remmel (1994)	$G_F = G_{F0} \cdot \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{10}\right) \leq G_{max}$				
	Kornart	$G_{F0}$	$G_{max}$		
		N/mm	N/mm		
	Kies	0.065	0.143		
	Basaltsplitt	0.106	0.185		
CEB-fib (2008)	$G_F = 0.18 \cdot \left(1 - 0.77 \cdot \frac{10}{f_{cm}}\right)$				
	für: $f_{cm} \geq 7.7 \text{ N/mm}^2$				
CEB-fib (2008), CEB-fib (2013)	$G_F = 0.073 \cdot f_{cm}^{0.18}$				

Die unter der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve eingeschlossene Fläche entspricht der Bruchenergie  $G_F$ , die entweder direkt aus Versuchen bestimmt oder mit theoretischen Ansätzen aus der Literatur abgeschätzt werden kann (siehe Tabelle 2.3). In den Ansätzen wird der Einfluss des Korndurchmessers unterschiedlich bewertet. Im Modelcode 1990 ist dieser noch vorhanden. Bei der Verfassung des Modelcode 2010 fehlt die Berücksichtigung des Korndurchmessers, weil die Meinung vertreten wird, dass die Kornart (vor allem die Form) mehr Einfluss auf die Bruchenergie hat, als der Korndurchmesser. Auch Remmel (1994) kommt zu ähnlichen Erkenntnissen.

Bei Verwendung dieser Ansätze für UHPC mit einer Güte C150 ( $f_{cm} = 158 \text{ N/mm}^2$ ) erhält man Werte für  $G_F$  in der Größenordnung von 160 bis 200 N/mm<sup>2</sup>. Hier zeigt sich eine erhebliche Diskrepanz zu Versuchsergebnissen. Ma (2010) erhält Bruchenergien in der Größenordnung von ca. 60 N/m für Feinkorn-UHPC und ca. 90 N/m für Grobkorn-UHPC und liegt mit seinen Werten weit unter den Vorhersagemodellen. Es existieren nur wenige systematische Prüfungen betreffend dem Bruchverhalten von reinem UHPC. Daher wird die Bruchenergie im Zuge dieser Arbeit mit 60 N/m für Feinkorn-UHPC und 90 N/m für Grobkorn-UHPC angesetzt. Diese Vorgehensweise wählen auch Pfyl (2003), Leutbecher (2007) und Reichel (2010).

Das Spannungs-Rissöffnungs-Verhalten kann nach Duda (1991), siehe Abbildung 2.4 mit zwei Haupttragwirkungen beschrieben werden. Die primäre Tragwirkung wird durch die schrittweise Zerstörung des Haftverbundes zwischen der Matrix und dem Korn bestimmt. Ist der Haftverbund überschritten, dominiert zwischen den Rissufern der Reibungsverbund (sekundäre Tragwirkung), wobei die primäre und sekundäre Tragwirkung fließend ineinander übergehen. Dieses äußerst komplexe Verhalten kann durch lineare, bi-lineare, multi-lineare Verläufe oder Funktionen höherer Ordnung angenähert werden. Die Tabelle 2.4 gibt einen Überblick.

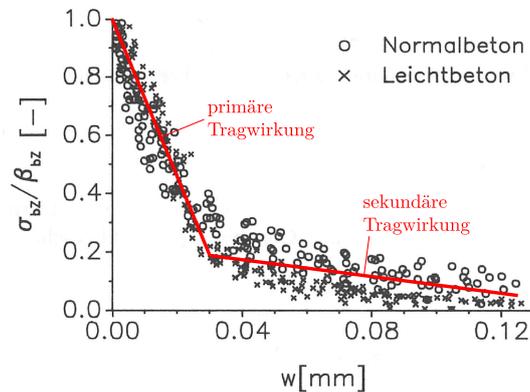


Abbildung 2.4:  $\sigma$ - $w$ -Beziehung aus Versuchen nach Duda (1991)

Tabelle 2.4: Modellierung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung

Form der $\sigma$ - $w$ -Beziehung	Quelle	Anmerkungen
linear	Pfyl (2003) Leutbecher (2007)	Tragverhalten Faserbeton (UHPC)
bi-linear	CEB-fib (1993) CEB-fib (2013) CEB-fib (2008)	Normal- und Hochfestbeton
Exponentialfunktion	Hordijk (1991) Duda (1991) Rommel (1994)	Normal- und Hochfestbeton

### Lineares Entfestigungsmodell

Die einfachste Modellierung der Entfestigung ist der lineare Verlauf der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung. Die Grenzzrissbreite ab der keine Zugspannungen mehr übertragen werden können ergibt sich hierbei zu:

$$w_c = \frac{2 \cdot G_F}{f_{ct}} \quad (2.4)$$

### Bi-lineares Modell nach CEB-fib (1993) und CEB-fib (2013)

Im Modelcode wird neben der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung auch ein Modell der Spannungs-Dehnungs-Beziehung im ungerissenen Zustand angegeben (Abbildung 2.5a). Die Rissöffnung, bei der keine Zugspannung mehr übertragen werden kann wird im Modelcode 1990 in Abhängigkeit des größten Korndurchmessers gesetzt. Der Übergang von primärer zur sekundärer Tragwirkung erfolgt abrupt bei der Rissbreite  $w_1$  und der zugehörigen Zugspannung  $0.15 \cdot f_{ctm}$  (siehe Abbildung 2.5b).

$$w_1 = \frac{2 \cdot G_F}{f_{ctm}} - 0.15 \cdot w_c \quad (2.5)$$

$$w_c = \alpha_F \cdot \frac{G_F}{f_{ctm}} \quad (2.6)$$

$$\text{mit } \alpha_F = \begin{cases} 8 & \dots \text{ bei } \varnothing_g = 8 \text{ mm} \\ 7 & \dots \text{ bei } \varnothing_g = 16 \text{ mm} \\ 5 & \dots \text{ bei } \varnothing_g = 32 \text{ mm} \end{cases}$$

Nach dem Modelcode 2010 wird  $w_c$  hingegen unabhängig vom Korndurchmesser berechnet. Weiter beträgt die zu  $w_1$  zugehörige Zugspannung  $0.2 \cdot f_{ctm}$  (siehe Abbildung 2.5c).

$$w_1 = \frac{G_F}{f_{ctm}} \quad (2.7)$$

$$w_c = 5 \cdot \frac{G_F}{f_{ctm}} \quad (2.8)$$

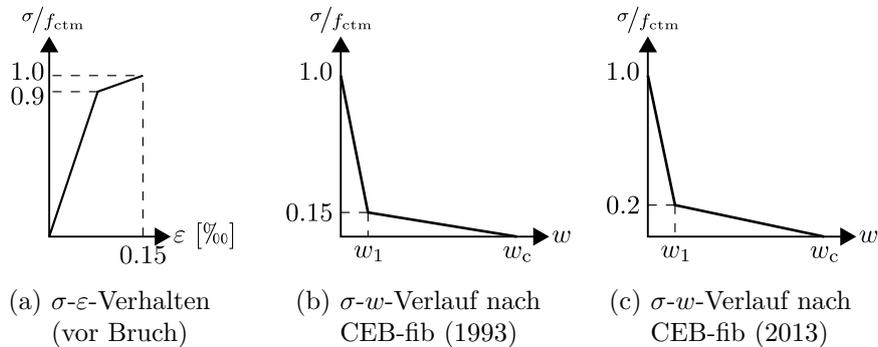


Abbildung 2.5: Zugverhalten nach CEB-fib (1993) und CEB-fib (2013)

### Modell von Hordijk (1991)

Hordijk beschreibt die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung mit einer exponentiellen Funktion, die er durch Regression von Versuchsergebnissen findet:

$$\frac{\sigma_c(w)}{f_{ct}} = \left[ 1 + \left( c_1 \cdot \frac{w}{w_{t0}} \right)^3 \right] \cdot \exp \left( -c_2 \cdot \frac{w}{w_{t0}} \right) - \frac{w}{w_{t0}} \cdot (1 + c_1^3) \cdot \exp(-c_2) \quad (2.9)$$

$$\text{mit: } c_1 = 3; \quad c_2 = 6.93; \quad w_{t0} = 5.14 \cdot \frac{G_{F0}}{f_{ct}}$$

### Modell von Duda (1991)

Auch Duda wählt einen exponentiellen Ansatz zur Beschreibung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung (Abbildung 2.6). Im Gegensatz zu Hordijk entwickelt er die Funktion auf Basis mechanischer Zusammenhänge. Der Vorteil liegt hier in der Anpassungsmöglichkeit an unterschiedliche Betonsorten und Betongüten. Nachteilig wirkt sich jedoch der erhöhte Aufwand zur Bestimmung der Funktionsargumente aus.

$$\sigma(w) = \underbrace{\sigma_{a,0} \cdot \exp\left(-\left(w/w_a\right)^2\right)}_{\text{primäre Tragwirkung}} + \underbrace{\sigma_{b,0} \cdot \exp\left(-w/w_b\right)}_{\text{sekundäre Tragwirkung}} \quad (2.10)$$

Der Abfall am Beginn der  $\sigma$ - $w$ -Beziehung kann mit  $\sigma_{a,0}$  und  $w_a$  und der Endverlauf mit  $\sigma_{b,0}$  und  $w_b$  gesteuert werden. Duda schlägt vor,  $\sigma_{a,0}$ ,  $w_a$ ,  $\sigma_{b,0}$  und  $w_b$  an Versuchen zu kalibrieren. Bei fehlenden Versuchsdaten können diese Parameter wie folgt abgeschätzt werden:

$$w_a = \frac{3}{5 + \sqrt{\pi}} \cdot \frac{G_F}{f_{ct}} \quad (2.11)$$

$$w_b = \frac{1}{1/3 + \sqrt{\pi}/15} \cdot \frac{G_F}{f_{ct}} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{a,0} \approx 2/3 \cdot f_{ct} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{b,0} = f_{ct} - \sigma_{a,0} \quad (2.14)$$

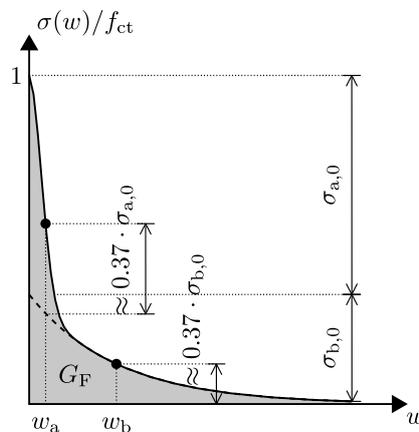


Abbildung 2.6: Ansatz nach Duda (1991)

### Modell von Rammel (1994)

Rammel modifiziert das Modell von Duda und entwickelt einen für Normal- und Hochfestbetone bis zu einer Druckfestigkeit von  $125 \text{ N/mm}^2$  gültigen Ansatz (Abbildung 2.7). Im Gegensatz zum Ansatz von Duda verläuft der sekundäre Traganteil linear, mit einer maximalen Rissöffnung  $w_2$ . Über den Faktor  $c$ , der mit zunehmender Druckfestigkeit gegen eins geht, kann die Völligkeit des Primäranteils gesteuert werden, um das Verhalten von Beton höherer Festigkeit

besser beschreiben zu können.

$$\sigma(w) = \underbrace{f_{t1} \cdot \exp(-(w/w_1)^c)}_{\text{primäre Tragwirkung}} + \underbrace{f_{t2} \cdot (1 - w/w_2)}_{\text{sekundäre Tragwirkung}} \quad (2.15)$$

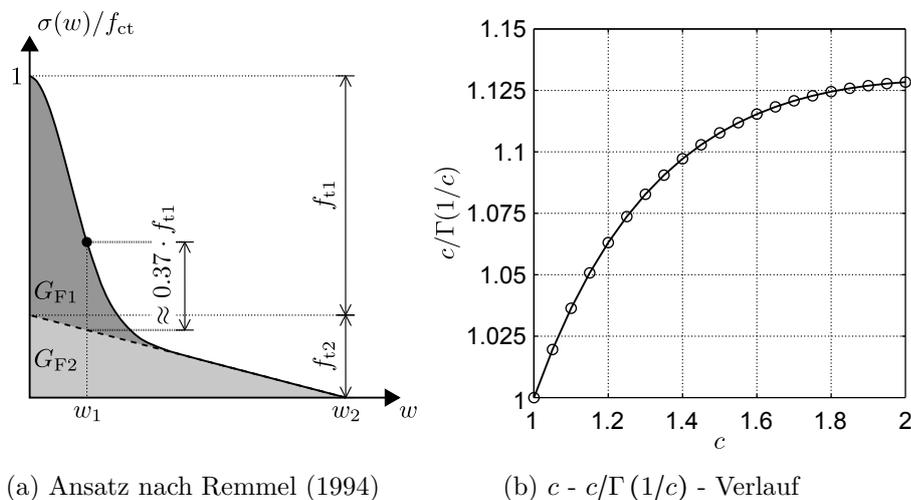
mit:  $w \leq w_2$

Die Parameter der obigen Gleichung können der Tabelle 2.5 entnommen werden.

Tabelle 2.5: Parameter der  $\sigma$ - $w$ -Beziehung nach Rammel (1994)

Parameter	Zuschlagsart	
	Kies 8 mm bzw. 16 mm	Basaltsplitt 16 mm
$f_{t1}$	$f_{ct} - f_{t2}$	
$f_{t2}$	0.17 bzw. 0.20 $\cdot (1 + 0.6 \cdot f_{ct})$ $\leq 0.60$ bzw. $\leq 0.70$	0.24 $\cdot (1 + 0.6 \cdot f_{ct})$ $\leq 0.85$
$w_1$	$\frac{c}{\Gamma(1/c)} \cdot \frac{G_{F1}}{f_{t1}}$ mit $G_{F1} = G_F - 0.5 \cdot f_{t2} \cdot w_2$	
$w_2$	160	250 ( $f_{ct} \leq 4.2 \text{ N/mm}^2$ ) <sup>a</sup> 200 ( $f_{ct} \geq 4.7 \text{ N/mm}^2$ ) <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Zwischenwerte interpolierbar



(a) Ansatz nach Rammel (1994)

(b)  $c - c/\Gamma(1/c)$  - Verlauf

Abbildung 2.7: Ansatz nach Rammel (1994)

### Vergleich der Modelle

In der Abbildung 2.8 sind die Spannungs-Rissöffnungs-Verläufe aus Zugversuchen nach Rammel (1994) abgebildet. Die drei Kurvenverläufe zeigen das Zugtragverhalten von Normal- bis Hochfestbeton. Grundsätzlich bilden alle Modelle das Tragverhalten gut ab, wobei die Qualität mit steigender Ordnung der Funktionen besser wird. Das einfachste Modell, der lineare Entfestigungsverlauf, passt sich dem realen Verhalten mit zunehmender Betongüte immer besser an.

In Anbetracht des Berechnungsaufwandes und der möglichen Streuung des Zugtragverhaltens bietet die bi-lineare Modellierung der Entfestigung ebenfalls ausgezeichnete Übereinstimmung. Das Modell von Duda (1991) zeigt die beste Abbildung der Realität, was zum Teil sicher auch daran liegt, dass er seinen Ansatz an diesen Versuchen kalibriert hat. Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass der lineare und der bi-lineare Entfestigungsverlauf bei der Modellierung von UHPC vollkommen ausreichend sind.

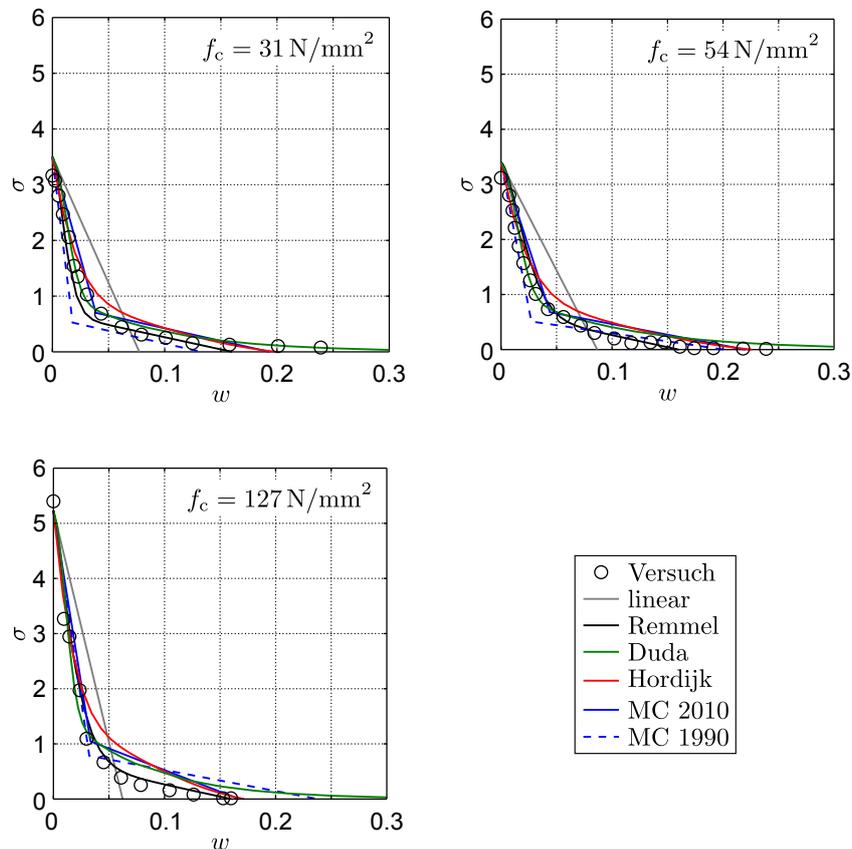


Abbildung 2.8: Vergleich ausgewählter Zugversuche von Rimmel (1994) mit  $\sigma$ - $w$ -Modellen

### 2.1.3 Einfluss von Fasern auf das Zugtragverhalten

Durch Faserbeigabe wird das Zugtragverhalten von Beton stark beeinflusst. Durch Verzögern des entfestigenden Verhaltens steigt die Duktilität. Die Nachrisszugfestigkeit kann je nach Fasergehalt unter oder sogar über der Matrixzugfestigkeit liegen. Die Grenze zwischen diesen beiden Verhaltensweisen wird als der kritische Fasergehalt bezeichnet (siehe Abbildung 2.9). Die mechanische Wirkung von Fasern ist mit jener der Stabbewehrung ident. Grundsätzlich kann zwischen mechanischem, Reib- und Haftverbund unterschieden werden. Bei Stabbewehrung prägen die Rippen den mechanischen Verbund, bei Fasern wird dieser durch Endhaken oder wellenförmige Ausbildung der Fasern realisiert. Mit Erreichen der Zugfestigkeit der Matrix, findet bei steigender Rissbreite und fortschreitender Entfestigung des Betons eine kontinuierliche Kräfteumlagerung vom Beton auf die Fasern statt. Die im Beton eingebetteten Fasern leiten einen Teil ihrer Kraft im Riss über Verbundspannungen wieder in den Beton ein. Diese Phase wird als Faseraktivierung bezeichnet. Sie ist beendet, wenn die Mantelspannungen die Faserspitze erreichen. Ab diesem

Zeitpunkt erfolgt, sofern kein Faserreißen vorliegt, die Phase des Faserauszugs. Während der Faseraktivierung kann die auf die Fasern übertragbare Kraft gesteigert werden, die am Ende dieser Phase ihren Höhepunkt findet. In der Auszugsphase sinkt die von den Fasern übertragbare Kraft proportional zur Einbindetiefe wieder ab. Im Fasergefüge sind alle Einbindetiefen von null bis  $l_f/2$  vorhanden und haben die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit. Dadurch wird der Spannungs-Rissöffnungs-Verlauf in der Faserauszugsphase nichtlinear (vgl. Abbildung 2.10b). Ist die Faser komplett aus der Matrix ausgezogen, ist über den Riss keine Zugkraft mehr übertragbar.

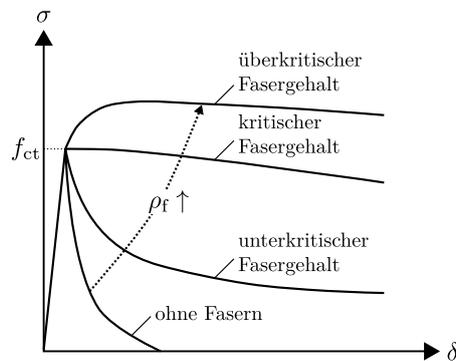


Abbildung 2.9: Qualitatives Zugtragverhalten mit und ohne Fasern

### Mechanisches Tragmodell nach Leutbecher (2007)

In der Arbeit von Leutbecher wird das Tragverhalten von faserbewehrtem UHPC auf mechanischem Weg, analog zum Stahlbeton, aus dem Kräftegleichgewicht und der Verformungskompatibilität hergeleitet. Grundsätzlich ist sein Modell aber nicht nur auf UHPC beschränkt. Bei Anpassung des Verbundgesetzes ist der Ansatz allgemeingültig. Das hergeleitete Modell basiert auf folgenden Annahmen:

- Die Fasern sind parallel und kreuzen den Riss im rechten Winkel.
- Die Einbindelängen der Fasern reichen von null bis  $l_f/2$ , wobei jede Einbindelänge gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit besitzt.
- Die Faserauszugsphase beginnt erst, sobald die letzte Faser voll aktiviert ist. Es findet kein partieller Faserauszug statt.
- Die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung ist starr-plastisch.
- Die Spitzenspannung in der Faser wird vernachlässigt.
- Der Verformungsanteil der Betonmatrix wird bei der Ermittlung der Rissbreite vernachlässigt.
- Die Fasern reißen nicht und fließen nicht vor dem Faserauszug.

Leutbecher zeigt, dass sich das Verhalten von Faserbeton mit parallelen, die Rissfläche im rechten Winkel kreuzenden Fasern näherungsweise auf das Verhalten der Einzelfaser zurückführen lässt. Da er vereinfachend festlegt, dass der Faserauszug erst nach der Aktivierung der letzten

Faser beginnt, beschreibt er das Faserbetonverhalten mit einer Modellfaser der Länge  $l_f$ , die symmetrisch mit  $l_f/2$  im Beton eingebunden ist. Um Faserfließen und Faserreißen vor dem Auszug auszuschließen, muss die Faser folgender Bedingung genügen:

$$\lambda_f = \frac{l_f}{\varnothing_f} \leq \frac{f_y}{2 \cdot \tau_f} \text{ bzw. } \frac{f_u}{2 \cdot \tau_f} \quad (2.16)$$

mit:  $f_y$  ... Elastizitätsgrenze des Fasermaterials

$f_u$  ... Zugfestigkeit des Fasermaterials

Annahme: starr-plastisches-Verbundgesetz

(2.17)

Die mittlere Faserverspannung im Riss während der Aktivierungsphase lautet:

$$\sigma_{fm,r\perp} = \left( \sqrt{\frac{4 \cdot E_f \cdot \tau_f \cdot w}{\varnothing_f}} + \varepsilon_{f,shr}^* \cdot E_f \right) \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{4 \cdot E_f \cdot \tau_f \cdot w}{\varnothing_f}}}{2 \cdot \left( \frac{2 \cdot l_f \cdot \tau_f}{\varnothing_f} - \varepsilon_{f,shr}^* \cdot E_f \right)} \right) \quad (2.18)$$

In der Auszugsphase gilt:

$$\sigma_{fm,r\perp} = \frac{E_f^2 \cdot \varnothing_f \cdot (2 \cdot \varepsilon_{f,shr}^* + 1)^2}{16 \cdot \tau_f \cdot l_f} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\frac{16 \cdot \tau_f}{E_f \cdot \varnothing_f} \cdot \left( w - \frac{l_f}{2} \right) - 4 \cdot \varepsilon_{f,shr}^{*2}}{(2 \cdot \varepsilon_{f,shr}^* + 1)^2}} \right)^2 \quad (2.19)$$

mit:  $\varepsilon_{f,shr}^* = \varepsilon_{f,shr} \cdot (1 + \alpha_{E,f} \cdot \rho_f)$

Zunächst wird an der Vorstellung festgehalten, dass alle Fasern gleich ausgerichtet sind und den Riss im rechten Winkel kreuzen. Sind die Fasern gleichmäßig im Bauteil verteilt, werden die den Riss kreuzenden Fasern jede Einbindelänge zwischen null und  $l_f/2$  annehmen. Daraus ergibt sich im Mittel eine Einbindelänge von  $l_f/4$  mit der mittleren, notwendigen Ausziehungskraft:

$$N_{fm0,r\perp} = \frac{l_f}{4} \cdot \tau_f \cdot u_f = \frac{\tau_f \cdot l_f \cdot \varnothing_f \cdot \pi}{4} \quad (2.20)$$

Die mittlere Faserverspannung am Beginn des Faserauszugs (Faserwirksamkeit) beträgt:

$$\sigma_{fm0,r\perp} = \frac{N_{fm0}}{A_f} = \frac{\tau_f \cdot l_f}{\varnothing_f} \quad (2.21)$$

Mit der zugehörigen Rissbreite:

$$w_0 = \frac{(\sigma_{fm0,r\perp} - \varepsilon_{f,shr}^* \cdot E_f)^2 \cdot \varnothing_f}{4 \cdot E_f \cdot \tau_f} \quad (2.22)$$

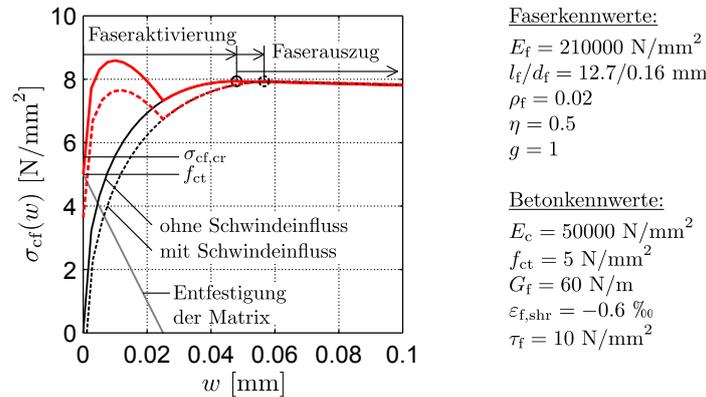
Bei abgeschlossener Faseraktivierung sind die Rissbreiten üblicherweise unter 0.1 mm. Die Fasern sind in der Regel nicht alle gleich ausgerichtet und kreuzen den Riss daher nicht alle im rechten Winkel. Die Anrechnung variierender Faserorientierung und dadurch veränderter Faserwirksamkeit erfolgt pauschal durch Multiplikation der mittleren Faserverspannung im Riss mit dem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  und dem Faserwirksamkeitsbeiwert  $g$ :

$$\sigma_{fm,r} = \eta \cdot g \cdot \sigma_{fm,r\perp} \quad (2.23)$$

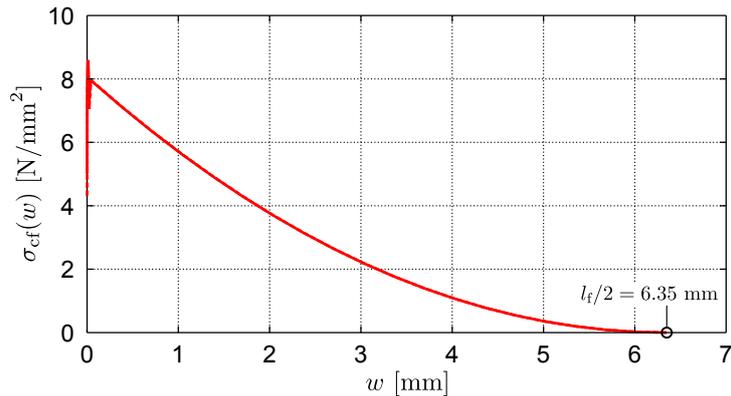
Die Faserbetonspannung kann durch Superposition der Betonkraftanteile und Faserkraftanteile bezogen auf die Bruttoquerschnittsfläche bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{cf}(w) &= \sigma_c(w) \cdot (1 - \rho_f) + \eta \cdot g \cdot \rho_f \cdot \sigma_{fm,r,l}(w) \\ &= \sigma_c(w) \cdot (1 - \rho_f) + \rho_f \cdot \sigma_{fm,r}(w)\end{aligned}\quad (2.24)$$

Die Abbildung 2.10a illustriert die Zusammensetzung der Faserbetonspannung anhand eines Beispiels:



(a) Faserbetonspannung während der Aktivierungsphase



(b) Faserbetonspannung über den gesamten Wirkungsbereich

Abbildung 2.10: Faserbetonspannung als Superposition von Entfestigung und Faseranteil

In bestehenden Richtlinien bzw. Vorschriften sind zum Teil auf empirischem Weg ermittelte, vereinfachte polygonale Spannungs-Rissöffnungs-Verläufe angegeben, um das Tragverhalten von faserbewehrten Beton auf Zug zu beschreiben (siehe DBV (2001) und ÖBV (2008))

Die Ansätze für faserbewehrten UHPC basieren fast ausschließlich auf den Erkenntnissen von Pilotprojekten und sind im konkreten Falle der französischen und japanischen Richtlinie (AFGC (2002) und JSCE (2006)) auch produktspezifisch.

### Ansatz nach der französischen Richtlinie

Die Abbildung 2.11 zeigt den Ansatz zur Beschreibung des Zugtragverhaltens von Faserbeton nach der französischen Richtlinie.

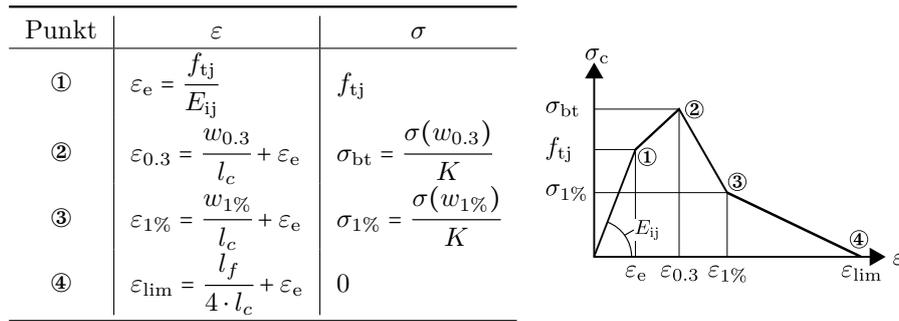


Abbildung 2.11: Zugarbeitslinie für nichtlineare Berechnungen nach AFGC (2002)

Mit  $l_f$  ist die Faserlänge, mit  $l_c$  die charakteristische Länge, die im Allgemeinen mit  $2/3 \cdot h$  abgeschätzt wird, und mit  $h$  die Bauteilhöhe festgelegt. Weiter sind mit  $w_{0.3}$  die Rissbreite 0.3 mm und mit  $\sigma(w_{0.3})$  die zugehörige Zugspannung definiert. Der Wert  $w_{1\%}$  entspricht der Rissbreite in der Größe von 1 % der Bauteilhöhe ( $0.01 \cdot h$ ) und  $\sigma(w_{1\%})$  der zugehörigen Zugspannung. Der Faktor  $K$  dient der Berücksichtigung von Streuungen in der Faserorientierung und von Unregelmäßigkeiten. Er wird in Schmidt et al. (2008) für allgemeine Berechnungsfälle mit  $K = \gamma_f = 1.25$  und zur speziellen Erfassung von lokalen Effekten (Fehlstellen) mit  $K = \gamma_f = 1.75$  vorgeschlagen.

### Ansatz nach der japanischen Richtlinie

Die japanische Richtlinie gibt keine genaue Auskunft darüber, welcher Ansatz zur Schnittgrößenbestimmung gewählt wurde. Es ist aber gut vorstellbar, dass dieser affin zum angegebenen Bemessungsansatz ist. Die mittlere zentrische Zugfestigkeit ist mit  $11.3 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Die Rissbreite  $w_1$  wird mit 0.5 mm und die Rissbreite  $w_2$  mit 4.5 mm definiert. Die angegebene Zugfestigkeit gilt im Grunde nur UHPC mit einem Fasergehalt von  $\rho_f = 2\%$  und einer Fasergeometrie von  $l_f/\varnothing_f = 15/0.2 \text{ mm}$ , denn dieser Beton wurde beim Bau der Sakata Mirai Bridge verwendet. Die Umrechnung der Rissöffnungen in Dehnungen erfolgt mit der charakteristischen Länge  $L_{eq}$ , für die eine von der Bauteilhöhe abhängige, nichtlineare Ansatzfunktion angegeben wird (siehe  $l_{st}$  in Gleichung 2.29).

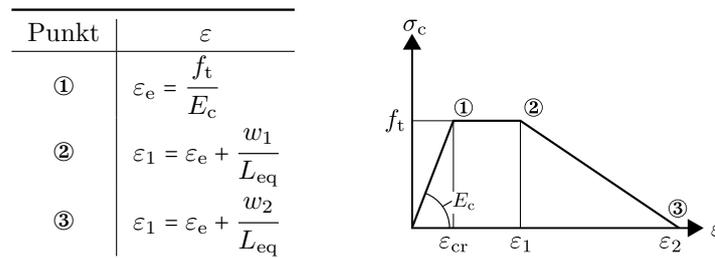


Abbildung 2.12: Zugarbeitslinie für nichtlineare Berechnungen nach JSCE (2006)

### Verteilung, Orientierung und Wirksamkeit von Fasern

Die Faserverteilung sollte im Bauteil möglichst gleichmäßig sein. Für die Bemessung werden Inhomogenitäten in der Verteilung zur Zeit in den Teilsicherheitsbeiwerten berücksichtigt. Bei

den Arbeitslinien zur Schnittgrößen- und Verformungsberechnung bleibt der Einfluss der Faser-  
verteilung im Moment unberücksichtigt.

Geometrische Randbedingungen (Bauteilgeometrie und Fasergeometrie) und Herstellungsprozesse können sowohl die Verteilung als auch die Orientierung der Fasern beeinflussen. Der Faserorientierungsbeiwert wird in der Literatur unterschiedlich interpretiert. Schönlinn (1988) und Lin (2000) definieren ihn als das mittlere Verhältnis der in Richtung der Zugbeanspruchung projizierten Faserlängen zur tatsächlichen Faserlänge. Freytag und Santner (2014) definieren den Faserorientierungsbeiwert als Mittelwert der Risskreuzungswahrscheinlichkeit über alle in einem Volumen der Fläche  $A_c$  und der Tiefe  $l_f$  befindlichen Fasern.

Grundsätzlich kann der Faserorientierungsbeiwert jeden Wert zwischen null und eins annehmen. In Falkner und Grunert (2011) werden folgende Spektren angegeben:

- 3-D-Orientierung  $0.200 \leq \eta_{3D} \leq 0.668$
- 2-D-Orientierung  $0.375 \leq \eta_{2D} \leq 0.785$
- 1-D-Orientierung  $0.825 \leq \eta_{1D} \leq 1.000$

Leutbecher (2007) leitet in seiner Arbeit für ideale zweidimensionale Faserorientierung  $\eta_{2D} = 2/\pi \approx 0.64$  und für ideale dreidimensionale Faserorientierung  $\eta_{3D} = 0.5$  her.

Eine nicht im rechten Winkel zum Riss stehende Faser wird sich im Riss in Zugrichtung gerade-  
richten. Dadurch entstehen Knicke in der Faser, die Umlenkkräfte aktivieren und den Auszieh-  
widerstand erhöhen. Gleichzeitig werden durch die Umlenkung lokal Querpressungen hervorge-  
rufen, die zum Abplatzen von Kanten im Bereich der Stirnflächen führen können. Diese Effekte  
werden zur Zeit global mit dem Faserwirksamkeitsbeiwert erfasst. Folgende Bandbreite kann in  
der Literatur gefunden werden:

- Jungwirth (2006):  $g = \sqrt{0.75}$  bei 2-D-Orientierung,  $g = 0.75$  bei 3-D-Orientierung.
- Pfyl (2003), Freytag und Santner (2014):  $g = 1.0$  unabhängig von der Faserorientierung
- Behloul (1996):  $1.0 \leq g \leq 1.2$

Im Fasergemenge heben sich positive und negative Effekte der Faserneigung oftmals auf. Des-  
wegen wird in den meisten Fällen  $g = 1.0$  gesetzt.

### Überführen der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung in die Spannungs-Dehnungs-Beziehung

Durch Lokalisierung eines oder mehrerer Risse stellt das Zugtragverhalten im Entfestigungs-  
bereich keine reine Materialeigenschaft mehr dar und kann daher nicht ohne Kenntnis einer  
Bezugslänge als Spannungs-Dehnungs-Beziehung angegeben werden. Der grundlegende Ansatz  
zur Umrechnung von Rissöffnungen zu Dehnungen lautet mit der Indizierung nach Fehling et al.  
(2013):

$$\varepsilon(w) = \varepsilon_{st} + \frac{w}{l_{st}} \quad (2.25)$$

Der Index „st“ steht für strukturelle Länge und wird in der Literatur unterschiedlich quantifiziert.  
Die Parameter ausgewählter Modelle werden folgend angeführt, wobei die Bezeichnungen in  
den Originaldokumenten abweichen können. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden diese aber  
vereinheitlicht.

**Parameter nach der französischen Richtlinie AFGC (2002)**

$$\varepsilon_{\text{st}} = \frac{\sigma_c(w)}{E_c} \quad (2.26)$$

$$l_{\text{st}} = 2/3 \cdot h \quad (2.27)$$

**Parameter nach der japanischen Richtlinie JSCE (2006)**

$$\varepsilon_{\text{st}} = \frac{\sigma_c(w)}{E_c} \quad (2.28)$$

$$l_{\text{st}} = 0.8 \cdot h \cdot \left( 1 - \frac{1}{(1.05 + 6 \cdot h/l_{\text{ch}})^4} \right) \quad (2.29)$$

$$\text{mit: } l_{\text{ch}} = G_f \cdot E_c / f_t^2$$

Auch Reichel (2010) schließt sich diesem Vorschlag in seinen Berechnungen an.

**Parameter nach Fehling et al. (2013)**

$$\varepsilon_{\text{st}} = \frac{1}{E_{\text{c,sek}}} \cdot (\beta_{\text{st}} \cdot \sigma_{\text{ce}} + (1 - \beta_{\text{st}}) \cdot \sigma_{\text{cf}}(w)) \quad (2.30)$$

mit:  $E_{\text{c,sek}}$  ... Sekantenmodul

$\beta_{\text{st}}$  ... Völligkeitsbeiwert des Dehnungsverlaufs  $\beta_{\text{st}} = 0.6$

$\sigma_{\text{ce}}$  ... Betonspannung außerhalb des Lasteinleitungsbereichs  $l_{\text{st}}/2$

$$l_{\text{st}} \begin{cases} \leq 2 \cdot h & \dots \text{ bei Bauteilen ohne Stabbewehrung} \\ = s_{\text{rm}} & \dots \text{ bei Bauteilen mit Stabbewehrung} \end{cases} \quad (2.31)$$

**Eigener Ansatz**

In Kapitel 3 wird ein mechanischer Ansatz beschrieben, mit dem es bei bekannter Systemlänge und bekanntem mittleren Rissabstand unter Einhaltung des Kräftegleichgewichts und der Verformungskompatibilität möglich ist, Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen in Spannungs-Dehnungs-Beziehungen überzuführen. Hierbei werden sowohl die Beton- als auch die Stahlarbeitslinie modifiziert. Der mittlere Rissabstand stellt hierbei speziell für Faserbeton eine schwierige Fragestellung dar. Pfyl (2003) und Leutbecher (2007) geben in ihren Arbeiten maximale Rissabstände von theoretisch null bis  $l_f/2$  an. Sie halten aber fest, dass durch inhomogene Faserverteilungen verursachte Störstellen zu Lokalisierungen führen, wodurch diese theoretischen mittleren Rissabstände in der Regel nicht erreicht werden. Gleichzeitig stellt sich die Frage, welche mittleren Rissabstände bei Kombibewehrung mit unterschiedlichen Faser- und Stabstahlmengen auftreten. Bisher wurden in eigenen Betrachtungen ausgehend von reinem Faserbeton über kombibewehrten Faserbeton bis zum reinen Stahlbeton mit Werten für  $s_{\text{rm}}$  von  $l_f/2$  bis  $1.443 \cdot l_{\text{es}}$  nach Gleichung 3.10 gute Ergebnisse erzielt.

## 2.2 Beton, Stoffmodellierung für die Bemessung

### 2.2.1 Beton unter Druckbeanspruchung

Als Arbeitslinie zur Bemessung ist im EC2 ein Parabel-Rechteck-förmiger Verlauf festgelegt (Gleichung 2.32). Hier beschreibt  $n$  die Völligkeit der Parabel. Für Betongüten von C12/15 bis C50/60 ist  $n = 2$ . Der Verlauf entspricht also einer quadratischen Parabel. Für höhere Betongüten nimmt die Völligkeit ab und beträgt bei der höchsten genormten Betongüte C90/105 ((C100/115 nach der DIN-EN1992-1-1/NA (2011))) schließlich  $n = 1.4$ . In der Abbildung 2.13 ist die Arbeitslinie für die Bemessung für zwei Betongüten dargestellt.

$$\frac{\sigma_c}{f_c} \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n & \dots \text{ für } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ 1 & \dots \text{ für } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad (2.32)$$

mit:  $f_c = f_{ck}$  oder  $f_{cd}$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.33)$$

mit:  $\alpha_{cc} \begin{cases} 1.0 & \dots \text{ in ON-B1992-1-1 (2011)} \\ 0.85 & \dots \text{ in DIN-EN1992-1-1/NA (2011)} \end{cases}$

und:  $\gamma_c = 1.5$  für die ständige und vorübergehende Bemessungssituation

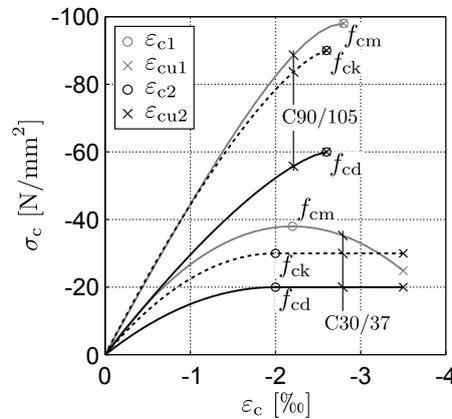


Abbildung 2.13: Arbeitslinie für Schnittgrößenermittlung/Verformungsberechnung (grau) und Bemessung (schwarz) nach ON-EN1992-1-1 (2011)

Betongüten höher als C100/115 sind derzeit nicht genormt. Für UHPC können Bemessungsansätze den Richtlinien AFGC (2002), JSCE (2006) und Schmidt et al. (2008) entnommen werden. Alle eben genannten Quellen definieren die Bemessungsdruckspannung ähnlich:

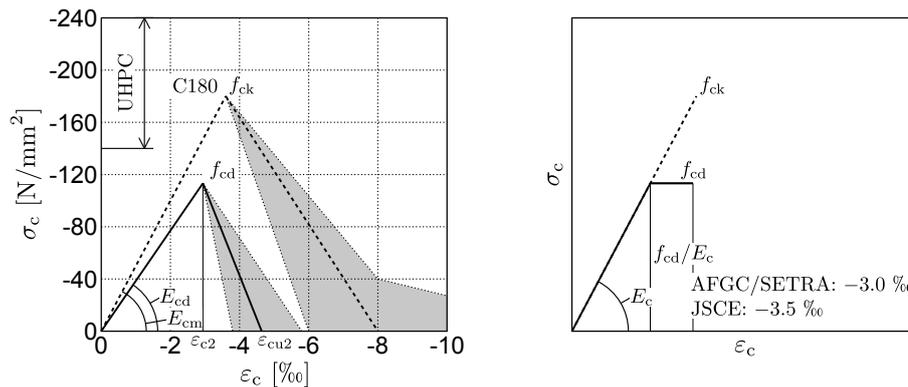
$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.34)$$

Sie unterscheiden sich nur in der Wahl des Teilsicherheitsfaktors  $\gamma_c$  und des Faktors  $\alpha_{cc}$  zur Berücksichtigung von Dauerbeanspruchung (siehe Tabelle 2.6).

Tabelle 2.6: Faktoren zur Berücksichtigung der Dauerbeanspruchung und Teilsicherheitsbeiwerte für UHPC

Norm/Richtlinie	$\alpha_{cc}$	$\gamma_c$
AFGC (2002)	$0.85/\theta^a$	Normalfall: 1.5 bes. Überwachung: 1.3
JSCE (2006)	0.85	1.3
DafStb Heft 561 - Schmidt et al. (2008), Basis: DIN1045-1 (2008)	0.85	ohne Fasern: Ortbeton: $\frac{1.5}{1.1 - f_{ck}/500} \leq 1.885$ Fertigteile: $\frac{1.35}{1.1 - f_{ck}/500} \leq 1.688$ mit Fasern: Ortbeton: $1.5 \cdot 1.11 = 1.665$ Fertigteile: $1.35 \cdot 1.11 = 1.499$

<sup>a</sup> Beanspruchung länger als 24 h:  $\theta = 1.0$   
 Beanspruchung zwischen 1 h und 24 h:  $\theta = 0.9$   
 Beanspruchung kürzer als 1 h:  $\theta = 0.85$



(a) Sachstandbericht UHPC, Schmidt et al. (2008) (b) Französische und japanische Richtlinie (AFGC (2002) und JSCE (2006))

Abbildung 2.14: Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die Bemessung

Die Form des ansteigenden Astes der Spannungs-Dehnungs-Linie für UHPC wird für Bemessungszwecke linear angesetzt. Im Sachstandbericht UHPC (Schmidt et al. (2008)) darf der abfallende Ast miteinbezogen werden. Trotz der beträchtlichen Streuungen variierender Fasergehalte sind auf charakteristischem Niveau Druckspannungen bis  $-8 \%$  ansetzbar (siehe Abbildung 2.14a). Für die Bemessungslinie gilt:

$$\varepsilon_{cu} = 0.85 \cdot \frac{0.008 - f_{ck}/E_{c0}}{1.35} + \frac{f_{cd}}{E_{cd}} \quad (2.35)$$

$$E_{cd} = \frac{E_{c0}}{1 + \varphi} = \frac{E_{c0}}{1.3} \quad (2.36)$$

In der französischen und japanischen Richtlinie (AFGC (2002) und JSCE (2006)) wird auf den

abfallenden Ast auf der sicheren Seite liegend verzichtet. Dafür wird der ansteigende Ast bi-linear mit Spannungsplateau festgelegt (siehe Abbildung 2.14b).

## 2.2.2 Beton und Faserbeton unter Zugbeanspruchung

Zugspannungen dürfen bei Beton für die Bemessung nicht herangezogen werden, daher gibt es keinen Bemessungsansatz für die Berücksichtigung des Zugverhaltens.

Durch die hohe Duktilität und die gesicherte und berechenbare Nachrisszugfestigkeit ist es zulässig das Zugtragverhalten von Faserbeton auch im Grenzzustand der Tragfähigkeit anzurechnen. Für die Bemessung nach der französischen und japanischen Richtlinie werden die markanten Spannungen der Zugarbeitslinie (Abbildungen 2.11 und 2.12) mit Teilsicherheitsfaktoren beaufschlagt.

### Bemessungsansatz nach der französischen Richtlinie

$$f_{ctd} = 0.85 \cdot \frac{f_{ctk}}{\gamma_{ct} \cdot \gamma_f} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_d(\varepsilon) = 0.85 \cdot \frac{\sigma_k(\varepsilon)}{\gamma_{ct} \cdot \gamma_f} \quad (2.37)$$

Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{ct}$  berücksichtigt Unsicherheiten bezüglich der Zugfestigkeit des Betons. Er beträgt 1.3 für Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit und 1.5 für außergewöhnliche Beanspruchungen. Mit dem Beiwert  $\gamma_f$  werden Unregelmäßigkeiten in der Faserorientierung berücksichtigt. Allgemein ist  $\gamma_f = 1.25$  zu setzen. Sollen lokale Effekte, wie Fehlstellen erfasst werden, muss  $\gamma_f = 1.75$  gewählt werden.

### Bemessungsansatz nach der japanischen Richtlinie

$$f_{td} = \frac{f_{tk}}{\gamma_c} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_d(\varepsilon) = \frac{\sigma_k(\varepsilon)}{\gamma_c} \quad (2.38)$$

Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_c$  ist mit 1.3 festgelegt.

### Eigener Bemessungsansatz auf Basis mechanischer Herleitung

Ein weiterer, im Zuge dieser Arbeit verwendeter Ansatz ist, die nach den Ansätzen von Leutbecher ermittelten Faserbetonspannungen  $\sigma_{cf}$  (Gleichung 2.24) durch Anrechnen eines Teilsicherheitsbeiwertes auf Bemessungsniveau zu bringen (siehe Abbildung 2.15b). Der allgemeine Spannungs-Rissöffnungs-Verlauf kann hierbei multi-linear oder wie Reichel (2010) vorschlägt linear (bis zur Rissbreite  $w = l_f/4$ ) angenähert werden.

Wird gleiche Streuung der Zugfestigkeit und Fasertragwirkung vorausgesetzt, kann der 5 %-Fraktilwert des Spannungsverlaufs wie folgt angegeben werden:

$$\sigma_{cf,k}(w) = \underbrace{(1 - 1.645 \cdot \nu)}_{=0.7 \text{ bei } \nu=18 \%} \cdot \sigma_{cf,m}(w) \quad (2.39)$$

Wobei  $\sigma_{cf,m}(w)$  der Spannungsverlauf nach der Gleichung 2.24 ist. Falls die Streuung der Zugfestigkeit und der Fasertragwirkung unterschiedlich angesetzt werden sollten, könnten die Fraktilwerte der Entfestigung und der Fasertragwirkung getrennt von einander ermittelt und superponiert werden. Der Bemessungswert der Faserbetonspannung lautet:

$$\sigma_{cf,d}(w) = \alpha_{ct} \cdot \frac{\sigma_{cf,k}(w)}{\gamma_{cf}} \tag{2.40}$$

Der Beiwert  $\alpha_{ct}$  zur Berücksichtigung von Langzeitauswirkungen auf die Betonzugfestigkeit wird im Zuge dieser Arbeit mit 1.0 angesetzt. Der Teilsicherheitsbeiwert für Faserbeton unter Zugbeanspruchung ist in Anlehnung zu Schmidt et al. (2008) mit 1.5 festgelegt.

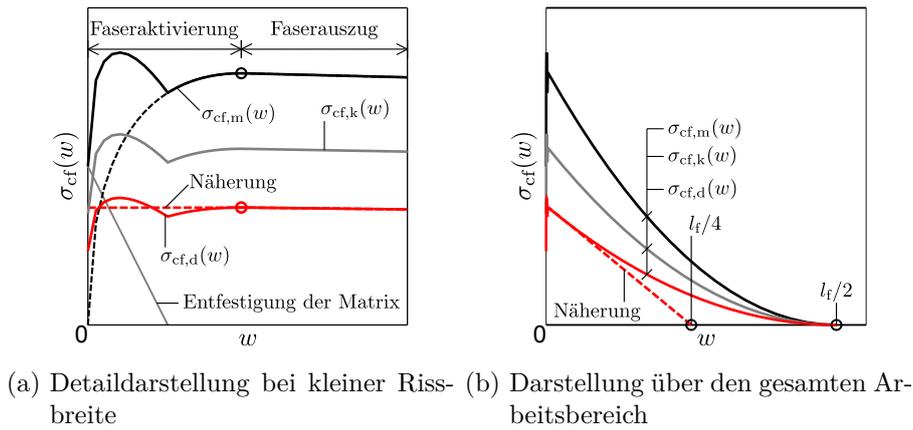


Abbildung 2.15: Bemessungsniveau der Zugspannung auf Grundlage des mechanischen Fasermodells nach Leutbecher (2007)

Die Überführung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung in eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung kann näherungsweise nach den Beziehungen ab Seite 25 erfolgen.

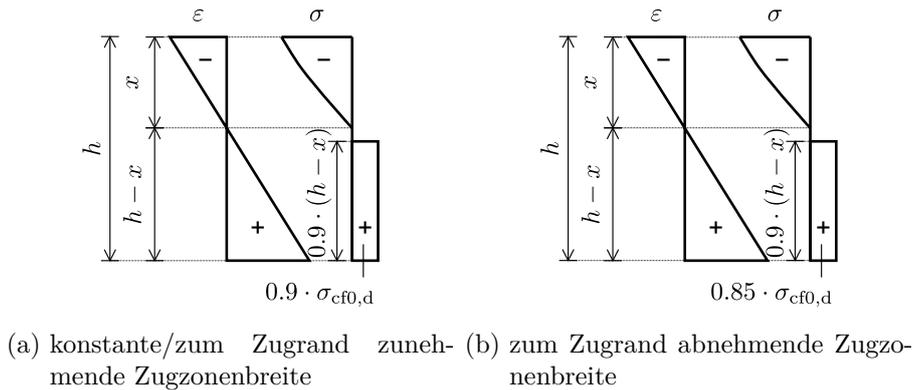


Abbildung 2.16: Bemessung von faserbewehrten UHPC mittels Zugspannungsblock nach Fehling et al. (2013)

Fehling et al. (2013) schlägt für Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit die Verwendung eines Spannungsblocks in der Zugzone vor, wobei die Spannung bei konstanter und zum Zugrand zunehmender Zugzonenbreite mit 90 % der Faserwirksamkeit auf Bemessungsniveau angesetzt

werden kann. Verjüngt sich die Zugzone zum Zugrand, schlägt Fehling vor, die Faserwirksamkeit auf Bemessungsniveau auf 85 % zu beschränken. Weiter ist der Spannungsbereich vom Zugrand weg gerechnet nur über 90 % der Zugzonenhöhe anzusetzen (siehe Abbildung 2.16).

## 2.3 Zeitabhängiges Verhalten von Beton

Die Phänomene Kriechen, Relaxation und Schwinden hängen vom Belastungszeitraum ab. Während Schwinden von der Belastung unabhängig verläuft, besteht bei Kriechen und Relaxation ein zusätzlicher Einfluss des aufgetragenen Spannungsniveaus. Der Großteil der hier kurz zusammengefassten Erkenntnisse wurde aus Gröbl et al. (2001) entnommen.

### Kriechen

Unter Kriechen wird die zeitliche Verformungszunahme bei konstanter Spannung verstanden. Das Kriechverhalten ist ein sehr komplexes Phänomen, das trotz intensiver Forschungen immer noch nicht restlos aufgeklärt ist. Nahezu alle (Teil)-Ansätze beschreiben das in Versuchen beobachtete Verhalten empirisch. Mechanisch hergeleitete Beziehungen sind kaum vorhanden.

### Druckkriechen

Nach derzeitigem Stand der Forschung ist anzugehen, dass das Kriechen hauptsächlich vom Zementstein bestimmt wird und durch die Bewegung des ungebundenen Wassers (Auspressen des Wassers) und interkristallines Gleiten hervorgerufen wird. Kriechverformungen des Zuschlags stellen in der Regel eine untergeordnete Rolle dar. Folgende Einflussgrößen bestimmen das Kriechverhalten:

- **W/Z-Wert und Zementgehalt:** Mit steigendem W/Z-Verhältnis und steigendem Zementgehalt steigt auch das Kriechen.
- **Feuchte (ungebundenes Wasser, Feuchte durch Bewitterung):** Vollständig trockener Beton hat ein geringes Kriechvermögen. Ein in trockenen Umgebungsbedingungen gelagerter und belasteter Körper weist allerdings größere Kriechverformungen, als in feuchten Umgebungsbedingungen oder unter Wasser auf.
- **Erhärtingsgrad:** Je höher der Erhärtingsgrad, desto geringer sind die Kriechverformungen.
- **Belastungsalter:** Diese Einflussgröße geht mit dem Erhärtingsgrad einher. Je früher Spannungen aufgebracht werden, desto geringer ist die Erhärtingung und Hydratation des Betons und desto größer fällt demnach auch die Kriechverformung aus.
- **Spannungsniveau:** Bis ca. 40 bis 50 % der Druckfestigkeit ist der Kriechverformungszuwachs proportional zur Spannungserhöhung. Bei UHPC liegt diese Proportionalitätsgrenze etwas höher und reicht bis ca. 50 bis 60 %.

Einen zusätzlichen, nicht zu verachtenden Einfluss auf Kriechverformungen hat die Temperatur. Ein Bauteil unter Spannung kriecht bei konstanter, hoher Temperatur mehr als bei 20° C. Die Kriechverformungen wachsen hierbei mit steigender Temperatur an. In Versuchen wird bei 80° C mit einer im Vergleich zu 20° C 1.5 bis 5-fachen Kriechverformung berichtet (siehe Grübl et al. (2001)), wobei hier die Verformungszunahme bei unversiegelten Körpern aufgrund des Trocknungskriechens höher ist. Beim Erhitzen belasteter Probekörper konnte der Effekt des Übergangskriechens beobachtet werden (siehe Abbildung 2.17). Das Übergangskriechen weist folgende Charakteristik auf:

- Der Verlauf ist zeitlich sehr schnell.
- Übergangskriechen entsteht jedes mal, wenn eine neue Höchsttemperatur erstmalig erreicht wird.
- Wiedererwärmungen auf bereits erreichte Temperaturen verursachen kein Übergangskriechen
- Abkühlungen verursachen kein Übergangskriechen.
- Übergangskriechen ist nahezu unabhängig vom Erhärtungszustand des Betons und der Aufheizgeschwindigkeit.
- Verformungen aus dem Übergangskriechen sind nahezu irreversibel.

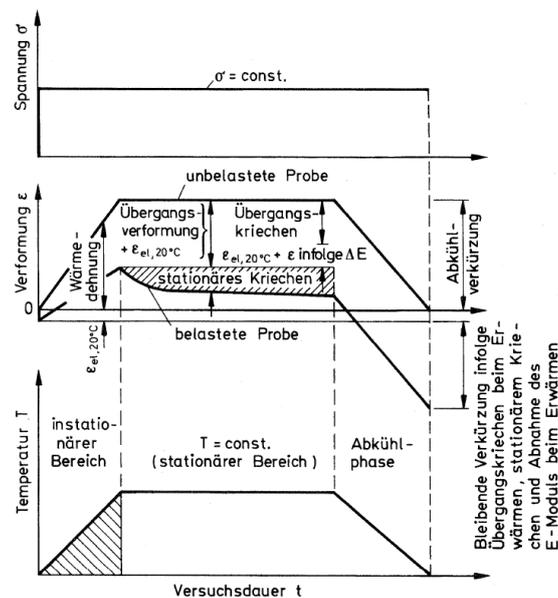


Abbildung 2.17: Effekt des Übergangskriechens aus Grübl et al. (2001)

Im Fertigteilbau wird die Temperaturbehandlung oft zur Beschleunigung des Erhärtungsprozesses angewendet. Bei Bauteilen die bereits vor der Temperaturbehandlung vorgespannt werden, können aus dem stationären Kriechen und Übergangskriechen beachtliche Spannkraftverluste entstehen. In eigenen Versuchen (siehe Anhang A) konnten derartige Effekte beobachtet werden.

## Zugkriechen

Zum Zugkriechen sind sehr wenige gut dokumentierte Forschungsberichte verfügbar. Kordina et al. (2000) kommen zum Ergebnis, dass das Zugkriechen in der Größenordnung des 1 bis 1.2-fachen des Druckkriechens liegt. Die Ursache hierfür dürfte der erhöhte Einfluss der Mikrorissbildung sein. Hierbei zeigt sich bei zentrischer Zugbelastung eine Spannungsproportionalität bis ca. 70 % und eine Dauerstandsfestigkeit von ungefähr 75 % der Zugfestigkeit.

## Kriechvorhersage nach dem Eurocode 2

Um Kriechvorgänge zu beschreiben finden Summations- und Produktansätze Verwendung. Beim Summationsansatz werden Verformungsanteile aus Kriechen (rasche Anfangsverformung, Grundkriechen und Trocknungskriechen) und verzögert elastische Verformungen aufsummiert, während beim Produktansatz diese multiplikativ verknüpft werden. In den aktuellen Normungen (ON-EN1990 (2013), DIN-EN1992-1-1 (2011)) wird Kriechen mit dem Produktansatz beschrieben:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (2.41)$$

Mit der Grundzahl des Kriechens  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (2.42)$$

$$\text{mit: } \varphi_{RH} = \begin{cases} 1 + \frac{1 - RH/100}{0.1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} & \dots \text{ für } f_{cm} \leq 35 \\ \left(1 + \frac{1 - RH/100}{0.1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right) \cdot \alpha_2 & \dots \text{ für } f_{cm} > 35 \end{cases}$$

$$\beta(f_{cm}) = 16.8 / \sqrt{f_{cm}}$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{1.2}}$$

Und der zeitlichen Entwicklung des Kriechens  $\beta_c(t, t_0)$ :

$$\beta_c(t, t_0) = \left( \frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right)^{0.3} \quad (2.43)$$

Ist die Druckfestigkeit  $f_{cm} \leq 35$  gilt für  $\beta_H$ :

$$\beta_H = 1.5 \cdot \left(1 + (0.012 \cdot RH)^{18}\right) \cdot h_0 + 250 \leq 1500 \quad (2.44)$$

Für  $f_{cm} > 35$ :

$$\beta_H = 1.5 \cdot \left(1 + (0.012 \cdot RH)^{18}\right) \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad (2.45)$$

Die Einflussfaktoren der Betondruckfestigkeit  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  lauten:

$$\alpha_1 = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.7} ; \alpha_2 = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.2} ; \alpha_3 = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0.5} \quad (2.46)$$

In den obigen Gleichungen entspricht  $h_0$  der wirksamen Bauteildicke, die sich aus der Querschnittsfläche  $A_c$  und dem Umfang  $u$  ergibt:

$$h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} \quad (2.47)$$

Der Temperatureinfluss im Bereich von  $0 \leq T \leq 80^\circ \text{C}$  auf den Erhärungsgrad des Betons wird mit dem temperaturbezogenen Betonalter erfasst:

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \exp\left(13.65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)}\right) \quad (2.48)$$

Der Einfluss des Zementtyps auf den Erhärungsgrad zum Zeitpunkt des Belastungsbeginns wird ebenfalls über das Betonalter angerechnet:

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left(\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1.2}} + 1\right)^\alpha \geq 0.5 \text{ Tage} \quad (2.49)$$

mit:  $\alpha = \begin{cases} -1 & \dots \text{ Zement des Typs S} \\ 0 & \dots \text{ Zement des Typs N} \\ 1 & \dots \text{ Zement des Typs R} \end{cases}$

### Kriechen bei UHPC

Ultrahochfest-Beton hat ein geringeres Kriechvermögen als Normal- oder Hochfestbetone. Im Bereich linearen Kriechens liegen die Endkriechzahlen bei Belastungsalter von 7 Tagen in der Größenordnung von 2.0 und bei Belastungsalter von 28 Tagen bei ca. 1.1 (siehe Schmidt et al. (2008)). Durch Wärmebehandlung kann die Kriechzahl mehr als halbiert werden. Die Endkriechzahl bei linearem Kriechen und Belastungsbeginn bei 28 Tagen liegt dann im Bereich von 0.2 bis 0.4.

### Kriechvorhersage für UHPC

Das Vorhersagemodell nach dem Eurocode 2 unterschätzt die Kriechzahl für UHPC. Ma (2010) stellt in seiner Arbeit ein zur DIN1045-1 (2008) modifiziertes Vorhersagemodell auf, um die Kriechzahlen für UHPC genauer beschreiben zu können. Die Kriechzahl errechnet sich über den Produktansatz:

$$\varphi(t, t_0) = \underbrace{\beta(V_{\text{Matrix}}) \cdot \varphi_{RH} \cdot \beta(f_c)}_{\varphi_0} \cdot \beta(t_0) \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (2.50)$$

Der Anteil des Trocknungskriechens am Grundkriechen wird über die Faktoren  $\beta(V_{\text{Matrix}})$  und  $\varphi_{RH}$  berücksichtigt:

$$\beta(V_{\text{Matrix}}) = \begin{cases} 1.84 & \dots \text{ für freien UHPC} \\ 2.52 & \dots \text{ für abgedichteten UHPC} \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\varphi_{RH} = \left(1 + \frac{10 \cdot (RH_{\text{in}} - RH)}{\sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1\right) \cdot \alpha_2 \quad (2.52)$$

Mit dem inneren Feuchtegehalt:

$$RH_{in} = 1.13 \cdot (1 - 0.065 \cdot \ln(t_0/30)) \cdot (w/z)^{0.24 \cdot (1 - 0.1 \cdot \ln(t_0/30))} \quad (2.53)$$

Der Beiwert  $\beta(t_0)$  zur Berücksichtigung des Belastungsbeginns auf die Kriechzahl lautet:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{0.2}} \quad (2.54)$$

Die Kriechzahlentwicklung quantifiziert Ma zu:

$$\beta_c(t, t_0) = \left( \frac{t - t_0}{\beta_H} + t - t_0 \right)^{0.5} \quad (2.55)$$

Alle restlichen Faktoren ( $\beta_H, \beta(f_c)$ ) sowie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $t_0$  können nach dem Kriechvorhersagemodell des EC 2 bestimmt werden.

### Relaxation

Der Spannungsabbau bei konstanter Verformung wird als Relaxation bezeichnet und ist auf das Kriechen zurückzuführen. Die Abbildung 2.18 zeigt die Auswirkungen von Kriechen und (teilweiser) Relaxation an einem zentrisch bewehrten, normalkraftbeanspruchten Querschnitt. Ist der Querschnitt unbewehrt, ändert sich die Betonspannung nicht, es liegt reines Kriechen vor. Die Dehnung zum Zeitpunkt  $t_\infty$  (Punkt ②) beträgt das  $(1 + \varphi(t, t_\infty))$ -fache der Dehnung zum Zeitpunkt  $t_0$ . Ist der Querschnitt bewehrt, wird der Beton an der Ausbildung der Kriechverformung teilweise behindert. Es kommt zu einer Kräfteumlagerung vom Beton auf den Stahl. Mit steigendem Bewehrungsgrad nähert sich der Spannungsabbau im Beton dem Grenzfall der Relaxation (Punkt ③).

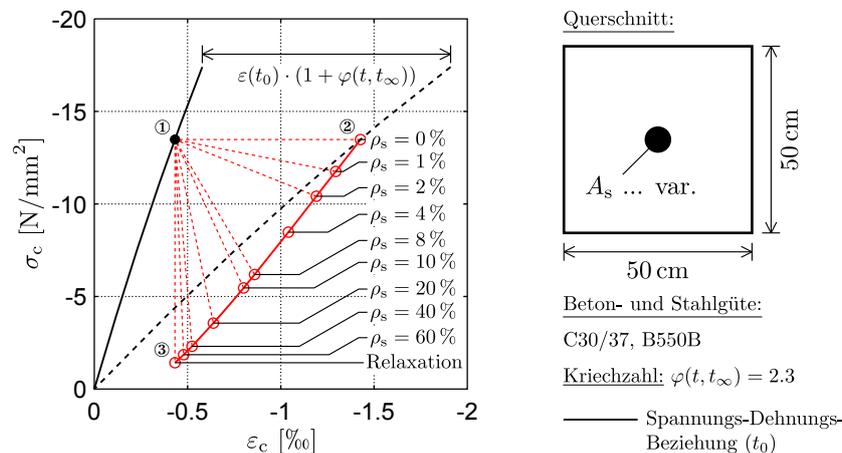


Abbildung 2.18: Übergang von reinem Kriechen zur reinen Relaxation in Abhängigkeit des Bewehrungsgrades

### 2.3.1 Schwinden bzw. Quellen

Schwinden bezeichnet die Verkleinerung des Volumens durch Feuchtigkeitsabgabe, während unter Quellen die Vergrößerung des Volumens durch Feuchtigkeitsaufnahme verstanden wird. Das

Schwinden wird maßgebend vom Zementstein geprägt. Nur in wenigen Fällen hat auch der Zuschlag einen Anteil am Schwindmaß. Es können folgende Schwindanteile unterschieden werden:

1. **plastisches Schwinden:** Tritt im jungen Beton im Anfangsstadium während des Zeitraums des Erstarrens auf und liegt bei unbehandeltem Beton in der Größenordnung von 2 bis 6 ‰. Wird der Beton im Zeitraum des Erstarrens vor Austrocknung geschützt, kann das plastische Schwinden fast zur Gänze unterbunden werden. Da Nachbehandlung grundsätzlich vorausgesetzt wird, bleibt das plastische Schwinden im Eurocode 2 unberücksichtigt.
2. **Autogenes Schwinden:** Das Selbstschwinden entsteht durch die Umwandlung von freiem Wasser in chemisch gebundenes Wasser.
3. **Trocknungsschwinden:** Volumenverringerung durch Wasserabgabe.

### Schwindmodelle nach dem EC2

Das Schwindmodell nach dem Eurocode 2 (ON-EN1992-1-1 (2011), DIN-EN1992-1-1 (2011)) erfasst die Anteile aus autogenem Schwinden und Trocknungsschwinden für den Betrachtungszeitpunkt  $t$ :

$$\varepsilon_{\text{shr}}(t) = \varepsilon_{\text{ca}}(t) + \varepsilon_{\text{cd}}(t) \quad (2.56)$$

Mit dem Anteil des autogenen Schwindens:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{ca}} &= \beta_{\text{as}}(t) \cdot \varepsilon_{\text{cc}}(\infty) \\ \text{mit: } \beta_{\text{as}}(t) &= 1 - \exp(-0.2 \cdot t^{0.5}) \\ \varepsilon_{\text{cc}}(\infty) &= 2.5 \cdot (f_{\text{ck}} - 10) \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Und dem Anteil aus dem Trocknungsschwinden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{cd}} &= \beta_{\text{ds}}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{\text{cd},0} \\ \text{mit: } \beta_{\text{ds}}(t, t_s) &= \frac{t - t_s}{t - t_s + 0.04 \cdot \sqrt{h_0^3}} \\ \varepsilon_{\text{cd},0} &= 0.85 \cdot \left( (220 + 110 \cdot \alpha_{\text{ds}1} \cdot \exp(-\alpha_{\text{ds}2} \cdot \frac{f_{\text{cm}}}{10})) \right) \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{\text{RH}} \\ \beta_{\text{RH}} &= 1.55 \cdot \left( 1 - \left( \frac{\text{RH}}{100} \right)^3 \right) \\ \alpha_{\text{ds}1} &= \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 6 \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha_{\text{ds}2} = \begin{cases} 0.13 \dots \text{Zement des Typs S} \\ 0.12 \dots \text{Zement des Typs N} \\ 0.11 \dots \text{Zement des Typs R} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Der Zeitpunkt  $t_s$  bezeichnet den Beginn des Trocknungsschwindens bzw. des Quellens und wird mit dem Ende der Nachbehandlung gleichgesetzt. Der Faktor  $k_h$  berücksichtigt den Einfluss der Körpergeometrie am Trocknungsschwinden über die wirksame Bauteildicke (siehe Gleichung 2.47):

Tabelle 2.7:  $k_h$ -Faktoren in Abhängigkeit der wirksamen Bauteildicke

$h_0$	$\leq 100$	200	300	$\geq 500$
$k_h$	1.00	0.85	0.75	0.70

## Schwinden von UHPC

Mit Steigerung der Druckfestigkeit von Beton kann auch eine Steigerung des autogenen Schwindens verzeichnet werden. UHPC zeigt dieses Phänomen aufgrund der Menge reaktiver Bestandteile (Zement, Mikrosilika, ...) deutlich. Ultra-hochfeste Betone weisen einen geringen W/B-Wert ( $\leq 0.25$ ) und hohe Dichtigkeit auf. Dadurch ist das Trocknungsschwinden nur gering ausgeprägt. Die hohe Dichtigkeit hat jedoch auch den Nachteil, dass äußere Nachbehandlung wie zum Beispiel das Feuchthalten der Betonoberfläche zur Reduktion des autogenen Schwindens bei weitem nicht so effektiv ist, wie dies bei Normalbeton der Fall ist. Deswegen wird bei UHPC versucht, das autogene Schwinden durch spezielle Rezepturen (Verwendung von  $C_3A$ -armen Zement, mäßiger Einsatz von Mikrosilika, Zugabe von Quellmittel, ...) und sogenannter innerer Nachbehandlung (Zugabe von wassergesättigten Substanzen, die den Wasserbedarf bei der Hydratation sichern) zu minimieren. Die Gesamtschwinddehnung kann nach Schmidt (2008) in der Größenordnung von  $-0.7$  bis  $-1.1$  ‰ eingeordnet werden. Schwinden führt bei Verformungsbekämpfung zu Zwangszugspannungen im Beton und kann zur Rissbildung führen. Vor allem bei stabbewehrten Bauteilen ist daher auf geringe autogene Schwindmaße Acht zu legen. Mit Wärmebehandlung kann das Trocknungsschwinden fast zur Gänze vorweggenommen werden. Durch erhöhtes Kriechen und den verringerten E-Modul während der Wärmebehandlung sind die dabei entstehenden Zwangszugspannungen geringer als ohne Wärmebehandlung.

## Genauigkeit der Vorhersagemodelle für Kriechen und Schwinden

Die hohe Anzahl an Einflussfaktoren und die Tatsache, dass sich diese im Bauwerk nur schwer quantifizieren lassen, führen zu dementsprechend hohen Streuungen in der Vorhersage von Kriechen und Schwinden. Die Kriechvorhersage nach dem Eurocode 2 weist einen Variationskoeffizienten von 20 % auf. Für Schwinden dürfte dieser ähnlich hoch sein.

## 2.4 Stahl

Im Stahlbetonbau kommen vorwiegend naturharte und kaltverformte Stähle zum Einsatz (siehe Abbildung 2.19). Naturharte Stähle weisen ein ausgeprägtes Fließplateau, mit anschließendem Verfestigungsbereich und großem Verformungsvermögen auf. Die Zugfestigkeit kann einerseits durch Legieren und/oder zusätzliche Kaltverformung erhöht werden. Kaltverformte Stähle haben keine ausgeprägte Streckgrenze. Bei wachsender Festigkeit und Kaltverformung ist ein Rückgang des Verformungsvermögens zu verzeichnen.

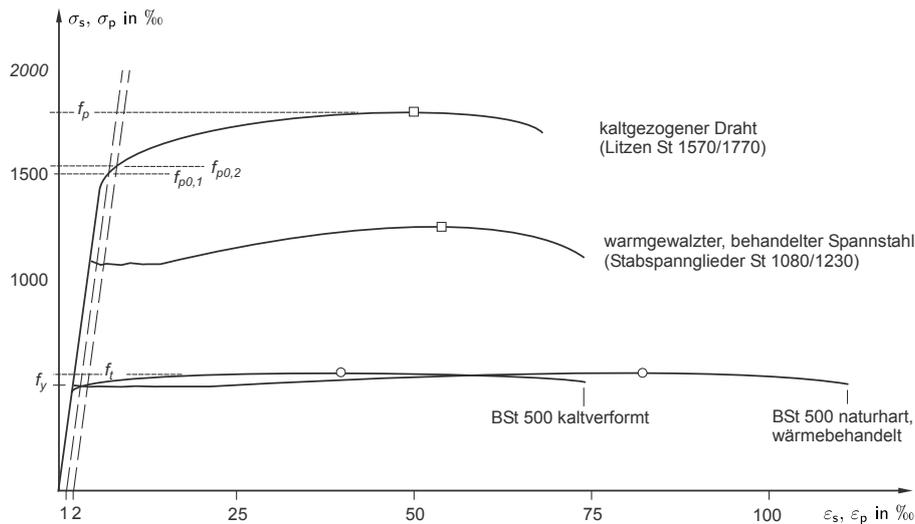


Abbildung 2.19: Spannungs-Dehnungs-Linien von Stählen im Massivbau (aus Zilch und Zehetmaier (2009))

Bei nichtlinearen Berechnungen und Nachweisen im Grenzzustand der Tragfähigkeit ist es in vielen Fällen ausreichend, die Spannungs-Dehnungs-Beziehung linear elastisch-ideal plastisch oder bi-linear mit Verfestigung anzusetzen (siehe Abbildung 2.20, ① und ②). Näherungsweise darf das Druckverhalten von Stahl affin zum Zugverhalten angesetzt werden. Sollten höhere Anforderungen an die Genauigkeit der Arbeitslinien bestehen, können den Berechnungen Materialversuche zugrunde gelegt werden. Bei kaltverformten Stählen kann gemäß ON-EN1992-1-1 (2011) die Spannung, bei der nach Entlastung eine 0.1 %-ige plastische Dehnung verbleibt, als Fließgrenze festgelegt werden.

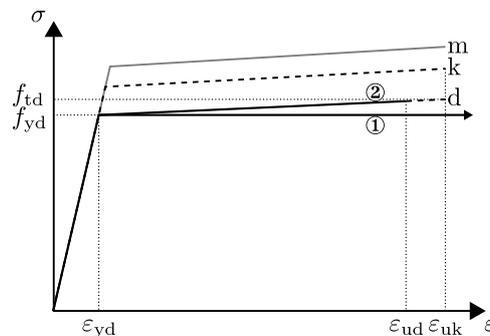


Abbildung 2.20: Vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach ON-EN1992-1-1 (2011)

Im Zuge dieser Arbeit werden der Mittelwert der Streckgrenze und der Zugfestigkeit für nichtlineare Berechnungen wie folgt bestimmt:

$$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{1 - 1.645 \cdot \nu} \quad (2.59)$$

mit:  $\nu = 5\%$

Die mittlere Zugfestigkeit lautet:

$$f_{tm} = k \cdot f_{ym} \quad (2.60)$$

mit:  $k = \begin{cases} 1.05 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse A} \\ 1.08 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse B} \\ 1.15 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse C} \end{cases}$

Der Faktor  $k$  ist der ON-EN1992-1-1 (2011) entnommen.

Die Bemessung erfolgt gemäß ON-EN1992-1-1 (2011). Hierbei ergibt sich der Bemessungswert der Fließspannung zu:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.61)$$

mit:  $\gamma_s = 1.15$

Wird für die Bemessung die linear elastische-ideal plastische Arbeitslinie angesetzt, ist keine Grenzdehnung  $\varepsilon_{ud}$  einzuhalten. Bei Verwendung der bi-linearen Arbeitslinie mit Verfestigung darf der Stahl nur bis zur Grenzdehnung  $\varepsilon_{ud} = 0.9 \cdot \varepsilon_{uk}$  ausgenutzt werden. Die Werte für  $\varepsilon_{uk}$  sind von der Duktilitätsklasse abhängig:

$$\varepsilon_{uk} = \begin{cases} 25 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse A} \\ 50 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse B} \\ 75 \dots \text{ bei Duktilitätsklasse C} \end{cases} \quad (2.62)$$

Der E-Modul bis zur Streckgrenze liegt bei Stäben und Drähten im Bereich von 200000 bis 210000 N/mm<sup>2</sup> und beträgt bei Litzen ca. 195000 N/mm<sup>2</sup>.

### Zeitabhängiges Verhalten von Stahl

Baustahl zeigt im Gebrauchslastbereich nur geringe Kriechenschaften, daher können sie im Allgemeinen vernachlässigt werden. Spannstähle, die durch die Vorspannung auch im Gebrauchslastbereich hoch beansprucht sind, zeigen hier deutlich höhere zeitliche Effekte. Bei vorgespannten Bauteilen müssen daher Spannkraftverluste infolge Relaxation berücksichtigt werden. Nach der ON-EN1992-1-1 (2011) werden diese wie folgt quantifiziert:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = f_1 \cdot \rho_{1000} \cdot \exp\left(f_2 \cdot \sigma_{pi}/f_{pk}\right) \cdot \left(\frac{t}{1000}\right)^{0.75 \cdot (1 - \sigma_{pi}/f_{pk})} \cdot 10^{-5} \quad (2.63)$$

Die Spannung  $\sigma_{pi}$  bezeichnet hier die Spannung unmittelbar nach dem Spannen bzw. der Krafteinleitung, wobei bei sofortigem Verbund die maximale Spanngliedspannung abzüglich der unmittelbaren Verluste während des Spannvorganges in Rechnung gestellt wird. Die Faktoren  $f_1$  und  $f_2$  hängen von der verwendeten Stahlklasse ab:

Tabelle 2.8: Spannstahlklassen und Faktoren zur Relaxation

Klasse	Beschreibung	$f_1$	$f_2$	$\rho_{1000}$
1	Drähte oder Litzen mit normaler Relaxation	5.39	6.7	0.08
2	Drähte oder Litzen mit niedriger Relaxation	0.66	9.1	0.025
3	warmgewalzte und vergütete Stäbe	1.98	8.0	0.04

Die ON-EN1992-1-1 (2011) gibt im Anhang D auch eine genauere Methode zur Berechnung der Spannkraftverluste infolge Relaxation an. Diese wird hier jedoch nicht beschrieben.

Bei Wärmebehandlung vorgespannter Bauteile wird der Ablauf der Relaxationsverluste beschleunigt. Das für Wärmebeanspruchung der Dauer  $\Delta t_i$  umgerechnete Beanspruchungsalter kann nach Fingerloos (2012) wie folgt abgeschätzt werden:

$$t_{\text{eff}} = \frac{1.14^{(T_{\text{max}}-20)}}{T_{\text{max}} - 20} \cdot \sum_{i=1}^n (T_{\Delta t_i} - 20) \cdot \Delta t_i \quad (2.64)$$

Hier ist die Temperatur in Grad Celsius einzusetzen.

#### **Anmerkung zur Bezeichnung von Bewehrungsstahl**

Die Einführung der ON-B4707 (2010) brachte eine Änderung der Gütebezeichnung mit sich. Ein hochduktiler Stahl mit der charakteristischen Streckgrenze von  $550 \text{ N/mm}^2$  lautet fortan B550B. Für Stähle normaler Duktilität ist am Ende der Gütebezeichnung das B durch A und bei sehr hoher Duktilität mit C zu ersetzen.

# 3 Die versteifende Mitwirkung des Betons

## 3.1 Allgemeines

Im Kapitel 2 wurde auf das Zugtragverhalten des unbewehrten und des faserbewehrten Betons eingegangen. Folgend soll das Tragverhalten eines bewehrten Zugkörpers betrachtet werden. In der Abbildung 3.1 ist das Verhalten eines bewehrten Betonzugstabes in der Kraft-Dehnungs-Darstellung abgebildet. Es ist zu erkennen, dass sich der bewehrte Betonzugstab steifer als der Stahlzugstab alleine (reiner Zustand II) verhält. Dieses steifere Verhalten resultiert aus der Mitwirkung des Betons. Der Effekt ist auf den Verbund zwischen Stahl und Beton zurückzuführen. Gleichzeitig findet in jedem Riss eine mit anwachsender Rissbreite fortschreitende Entfestigung des Betons statt (Softening-Eigenschaft). Das im Vergleich zum reinen Zustand II steifere Verhalten kann nicht nur bei Zugstäben, sondern auch bei Biegebalken beobachtet werden. Zur Darstellung wird dann die Momenten-Krümmungs-Beziehung gewählt.

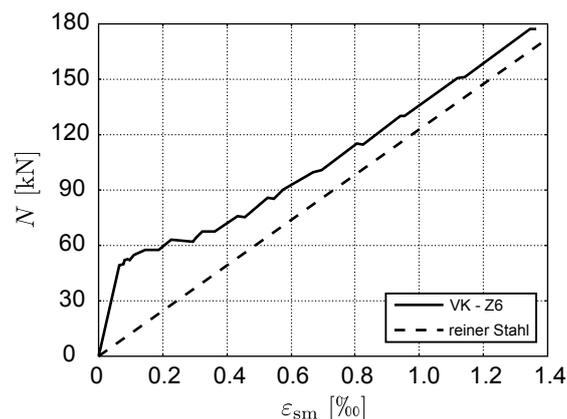


Abbildung 3.1: Stahlbetonstab im Zugversuch (Empelmann (1995))

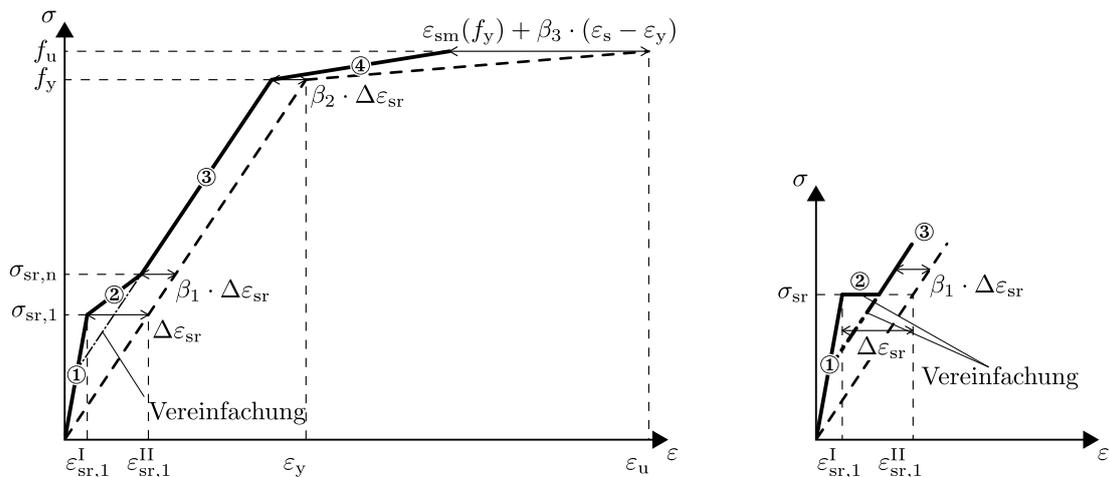
Abhängig von der Aufgabenstellung können unterschiedliche Modelle zur Berücksichtigung der Zugversteifung entwickelt werden, die sich in drei Hauptgruppen einteilen lassen. Die Berücksichtigung der Zugversteifung kann folgendermaßen erfolgen:

- Modifikation der Stahlarbeitslinie
- Modifikation der Betonarbeitslinie
  - Modelle mit konstanten Betonzugspannungen
  - Modelle mit abnehmenden Betonzugspannungen
  - Modelle mit effektiven Betonzugspannungen
- Modifikation der Beton- und Stahlarbeitslinie

Die Vielfalt der in den letzten Jahrzehnten entwickelten Modelle, speziell unter Berücksichtigung der Zugversteifung in den konstitutiven Eigenschaften des Betons, würde bei gesamtheitlicher Diskussion den Rahmen der Arbeit sprengen. Vergleiche und Diskussion einzelner Verfahren können gegebenenfalls aus Quast (2010) entnommen werden. In weiterer Folge wird die Berücksichtigung des Tension-Stiffenings durch Modifikation der Stahlarbeitslinie und ein Verfahren zur Berücksichtigung auf der Betonseite angesprochen. Zusätzlich wird ein eigenes Modell vorgestellt, das die Zugversteifung in Form einer modifizierten Stahl- und Betonarbeitslinie berücksichtigt. Anschließend wird dieses Modell anhand von Versuchsnachrechnungen verifiziert.

### 3.2 Modifikation der Stahlarbeitslinie

Die am weitesten verbreitete Methode, die Zugversteifung zu berücksichtigen, liegt in der Modifikation der Stahlarbeitslinie. Diese Art der Berücksichtigung wird unter anderem im Eurocode 2 (ON-EN1992-1-1 (2011)), in CEB-fib (2013), DafStb (2003), Kreller (1990) und Empelmann (1995) beschrieben. Der Grundgedanke des Konzeptes besteht darin, die Betonzugfestigkeit nur bis zum Auftreten des rechnerischen Erstrisses zu berücksichtigen. Danach wird an der Stelle des Risses die gesamte Zugkraft dem Stahl angerechnet (reiner Zustand II). Die Mitwirkung des Betons zufolge des Verbunds wird durch eine um den Betrag  $\beta \cdot \Delta \varepsilon_{sr}$  kleinere Dehnung berücksichtigt. Die Abbildung 3.2a zeigt die Modifikation in allgemeiner Form, die Abbildung 3.2b im CEB-fib (1993) und CEB-fib (2013) zusätzlich angegebene Vereinfachungsmöglichkeiten.



(a) Allgemeiner Ansatz

(b) Vereinfachungen

Abbildung 3.2: Modifizierte Stahlarbeitslinie für Kurzzeitbeanspruchung

Für den ungerissenen Stab ( $0 \leq \sigma_s \leq \sigma_{sr,1}$  - Bereich ①) gilt:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^I \quad (3.1)$$

Für den gerissenen Stab im Intervall  $\sigma_{sr,1} \leq \sigma_s \leq \sigma_{sr,n}$  (Bereich ②) gilt:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{II} - \frac{\beta_1 \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr,1}) + (\sigma_{sr,n} - \sigma_s)}{(\sigma_{sr,n} - \sigma_{sr,1})} \cdot \Delta \varepsilon_{sr} \quad (3.2)$$

Für den gerissenen Stab im Intervall  $\sigma_{sr,n} \leq \sigma_s \leq f_y$  (Bereich ③) gilt:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{\text{II}} - \frac{\beta_2 \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr,n}) + \beta_1 \cdot (f_y - \sigma_s)}{(f_y - \sigma_{sr,n})} \cdot \Delta\varepsilon_{sr} \quad (3.3)$$

Im plastischen Bereich der Bewehrung ( $f_y \leq \sigma_s \leq f_u$  - Bereich ④) gilt:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sm}(f_y) - \beta_3 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}) \quad (3.4)$$

Mit der Annahme einer konstanten Zugfestigkeit entlang der Stabachse, eines parabelförmigen Stahldehnungsverlaufs im Bereich  $s_r$  (siehe Abbildung 3.3) und  $s_r = s_{rm} = 2/3 \cdot s_{r,max}$  ergibt sich nach CEB-fib (1993) folgender Zusammenhang für den  $\beta$ -Wert:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sr}^{\text{II}} - \underbrace{2/3 \cdot \alpha_b}_{0.6} \cdot \Delta\varepsilon_s = \varepsilon_{sr}^{\text{II}} - \underbrace{0.4}_{\beta} \cdot \Delta\varepsilon_s \quad (3.5)$$

Nachdem Parameter wie der Variationskoeffizient  $v_k$  der Zugfestigkeitsverteilung, Stabdurchmesser, Bewehrungsgrad und Verbundgüte einen Einfluss auf das Spannungs-Dehnungsverhalten eines Zugstabes haben, können in der Literatur abweichende Werte für  $\beta$  gefunden werden. Die Tabellen 3.1 und 3.2 geben einen Auszug für Kurzzeit- bzw. Langzeitbelastung wieder. Empelmann (1995) hat seine Formulierung durch Simulationsrechnungen mit anschließender linearer Regression entwickelt. Während oftmals Fixwerte für  $\beta$  angegeben werden, koppelt Empelmann den  $\beta$ -Wert für Kurzzeitbelastung an einen Ansatz zur Berücksichtigung des Variationskoeffizienten  $v_k$ . Für wiederholte Belastung bzw. Langzeitbelastung gibt Empelmann zusätzlich einen Ansatz zur Berücksichtigung des Spannungsniveaus und der Verbundkriechzahl an.

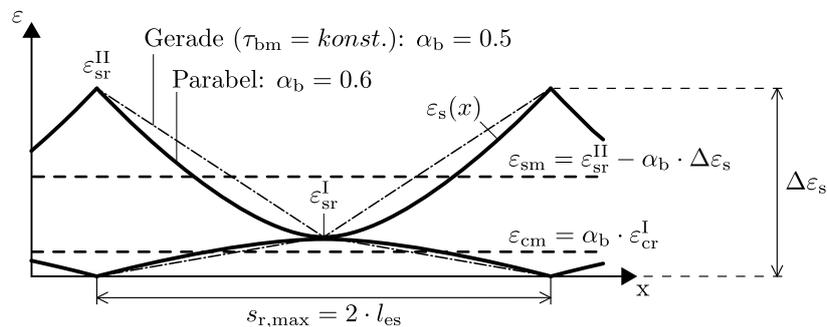


Abbildung 3.3: Dehnungsverlauf im Bereich  $s_r = 2 \cdot l_{es} = s_{r,max}$

Tabelle 3.1:  $\beta$ -Werte bei Kurzzeitbeanspruchung

Ansatz nach	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
Kreller (1990)	0.4	0.2	$0.8 \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{sr,1}}{f_y}\right)$
DAfStb (2003)	0.4	0.4	$\delta_d \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{sr,1}}{f_y}\right)^a$
CEB-fib (1993)	0.4	0.4	$\delta \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{sr,1}}{f_y}\right)^b$
Empelmann (1995)	$0.35 + 2 \cdot v_k$	$0.25 + 1 \cdot v_k$	$0.7 \cdot \left(1 - 0.85 \cdot \frac{\sigma_{sr,1}}{f_{yk}}\right) (A,B)^c$

<sup>a</sup>  $\delta_d = 0.6(A)$ ,  $\delta_d = 0.8(B)$  (A ... normalduktil, B ... hochduktil, C ... sehr hoch duktil)

<sup>b</sup>  $\delta = 0.8$ , für Stähle des Typs A und  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$

<sup>c</sup> für Stähle des Typs A und B,  $\sigma_{sr,1}/f_{yk} \leq 1.0$

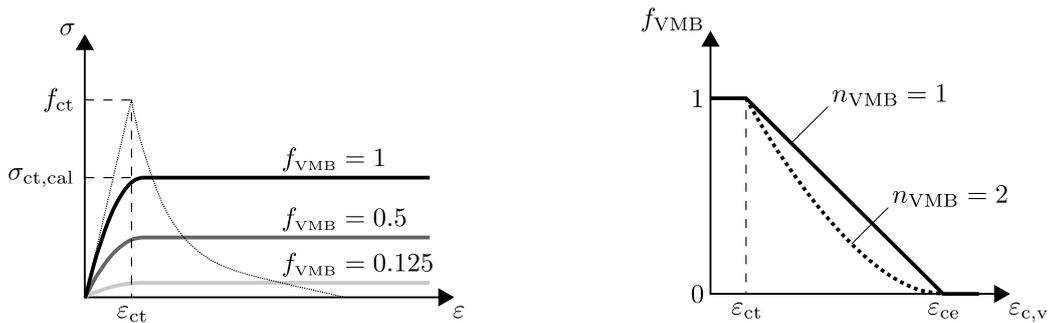
Tabelle 3.2:  $\beta$ -Werte bei Langzeitbeanspruchung

Ansatz nach	$\beta_1$	$\beta_2$
Kreller (1990)	-	-
DAfStb (2003), CEB-fib (1993)	0.25	0.25
Empelmann (1995)	$0.35 + 2 \cdot v_k \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k \cdot \varphi_v(t)}}$	$0.25 + 1 \cdot v_k \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k \cdot \varphi_v(t)}}$

$k = \frac{\sigma_s}{\sigma_{sr}} \cdot \frac{30[\text{N/mm}^2]}{f_c}$   
 $\varphi_v(t)$  ... Verbundkriechzahl

### 3.3 Modifikation der Betonarbeitslinie

Ein bekanntes Verfahren die Zugversteifung auf der Betonseite zu berücksichtigen, kommt von Quast (1981). Er bildet die Zugspannungslinie als Parabel-Rechteck-Funktion ab, wobei der Parabelteil beliebiger Ordnung  $n_{PR}$  sein darf. Die rechnerisch maximale Zugspannung, die die Parabel im Scheitelpunkt haben kann, wird mit  $\sigma_{ct,cal}$  festgelegt. Quast gibt an, mit  $\sigma_{ct,cal} \approx f_{cm}/20$  gute Ergebnisse erzielt zu haben. Pfeiffer (2004) wählt alternativ  $\sigma_{ct,cal} \approx 0.6 \cdot f_{ctm}$ . Die Ordnung  $n_{PR}$  der Parabel sollte in Kombination mit  $\varepsilon_{ct}$  so gewählt werden, dass der Ursprungs-E-Modul im Zugbereich ähnlich dem des Druckbereiches ist. Eine konstante, übertragbare Zugspannung der Größe  $\sigma_{ct,cal}$  für beliebige Dehnungszustände anzusetzen, würde die Mitwirkung des Betons auf Zug überschätzen. Quast führt daher einen Multiplikator  $f_{VMB}$  ein, der die rechnerisch angesetzte Betonspannung abhängig vom Dehnungszustand verändert. Er wählt als Referenzgröße für den Faktor  $f_{VMB}$  die Betondehnung  $\varepsilon_{c,v}$  in der Zugfaser der äußersten Bewehrung. Zusätzlich definiert er eine Grenzdehnung  $\varepsilon_{ce}$ , ab der vom Beton keine Spannungen mehr übertragen werden. Die Grenzdehnung sollte laut Quast im Bereich von 2 ‰ bis 3 ‰ liegen. Er wählt für seine Nachrechnungen immer  $\varepsilon_{ce} = \varepsilon_y$ . Der Verlauf des Faktors  $f_{VMB}$  kann generell beliebig angepasst werden. Die besten Ergebnisse erzielt Pfeiffer (2004) für den Ansatz nach der Gleichung 3.7 mit Werten von  $n_{VMB} = 1$  bis  $n_{VMB} = 2$ .



(a) Form der Betonarbeitslinie

(b) Verlauf des Abminderungsfaktors  $f_{VMB}$

Abbildung 3.4: Modifikation der Betonarbeitslinie nach Quast (1981)

$$\sigma_{ct,re} = \max \left( \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ct}} \right)^{n_{PR}} \right], 1 \right) \cdot \underbrace{\sigma_{ct,cal} \cdot f_{VMB}}_{f_{ct,re}(\varepsilon_{c,v})} \quad (3.6)$$

$$f_{\text{VMB}} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \varepsilon_{c,v} \leq \varepsilon_{ct} \\ \left(1 - \frac{\varepsilon_{c,v} - \varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ce} - \varepsilon_{ct}}\right)^{n_{\text{VMB}}} & \text{für } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{c,v} \leq \varepsilon_{ce} \\ 0 & \text{für } \varepsilon_{ce} \leq \varepsilon_{c,v} \end{cases} \quad (3.7)$$

Der Modellansatz mit der zur Druckarbeitslinie affinen Zugarbeitslinie liefert vor allem bei Biegung mit Normalkraft sehr gute Ergebnisse. Der Ansatz ist leicht in Berechnungsprogrammen implementierbar. Da es während der Berechnung mit diesem Modell nicht zu sprunghaften Steifigkeitsänderungen kommt, zeichnet sich die Methode durch eine hohe numerische Stabilität aus. Der Preis, der für die numerische Robustheit bezahlt wird, ist, dass der Dehnungs- und Spannungszustand bei Rissbildung nicht exakt abgebildet werden kann. Quast hat die Parameter seines Ansatzes im Zuge von Versuchsnachrechnungen optimiert. In seiner heutigen Form wurde das Modell an insgesamt 39 Versuchen kalibriert (siehe Quast (1981)), wobei unterschiedliche Querschnittsformen und auch vorgespannte Querschnitte untersucht wurden. Querschnitte und Bauteile aller in der ON-EN1992-1-1 (2011) angegebenen Betongüten können mit dem Modell wirklichkeitsnah berechnet werden. Für die Anwendung mit faserbewehrtem Beton oder Hochfest- bzw. Ultrahochfestbeton müssten die Ansatzwerte des Modells neu kalibriert werden.

### 3.4 Modifikation der Beton- und Stahlarbeitslinie

Die Berücksichtigung der Zugversteifung durch die kombinierte Modifikation der Beton- und Stahlarbeitslinie wurde in der Literatur bisher wenig behandelt. Der Grund hierfür liegt zum einen in der Annahme, dass unmittelbar nach der Rissbildung die Spannung im Beton am Riss auf Null abfällt und zum anderen am etwas höheren Berechnungsaufwand gegenüber der alleinigen Modifikation der Stahl- oder Betonarbeitslinie.

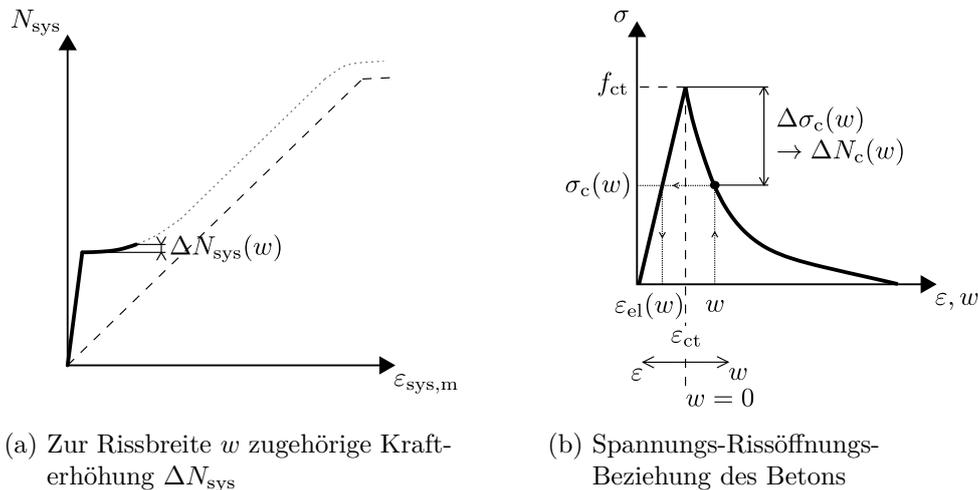


Abbildung 3.5: Qualitative Darstellung des Zusammenhangs  $\Delta N_{\text{sys}}(w)$  und  $\Delta N_c(w)$

Das Modell bietet aber den Vorteil, dass für alle Einwirkungskombinationen von  $N_E$  und  $M_E$  realitätsnahe Berechnungsergebnisse erzielt werden können. Zudem lassen sich die Auswirkungen durch zusätzliche Faserbewehrung leicht implementieren. Alle abgeleiteten Formeln sind so aufgebaut, dass zu jeder angesetzten Rissbreite  $w$  eine zur Erstrisskraft  $N_{cr}$  bezogene Zusatzkraft

$\Delta N_{\text{sys}}(w)$  berechnet werden kann, die notwendig ist um diesen Riss auf die angesetzte Rissbreite zu öffnen. Hierbei werden sowohl die mit wachsender Rissbreite  $w$  abnehmenden Betonspannungen  $\Delta N_c$  im Riss (Tension-Softening), als auch der Beitrag des Betons zwischen den Rissen (Tension Stiffening) berücksichtigt. Aus der Abbildung 3.5 kann der qualitative Zusammenhang zwischen  $\Delta N_c(w)$  und  $\Delta N_{\text{sys}}(w)$  entnommen werden.

### Berechnungsablauf

Ausgehend von der angesetzten Rissbreite  $w$  wird jene äußere Kraft  $\Delta N_{\text{sys}}$  ermittelt, die sowohl das Kräftegleichgewicht als auch die Verformungskompatibilität erfüllt. Mit Kenntnis von  $\Delta N_{\text{sys}}$  kann die Länge  $l_{e,\text{erf}}$  ermittelt werden, ab der wieder der Zustand I herrscht. Die Modellierung betrachtet einen Stababschnitt der Länge  $s_{\text{rm}}$ , der das mittlere Verhalten des Zugstabes widerspiegelt. Solange  $2 \cdot l_{e,\text{erf}} \leq s_{\text{rm}}$  ist, wird angenommen, dass sich benachbarte Risse nicht gegenseitig beeinflussen, also die Einzelrissbildung gültig ist. Ist  $2 \cdot l_{e,\text{erf}}$  rechnerisch größer als  $s_{\text{rm}}$ , wird  $2 \cdot l_{e,\text{erf}} = s_{\text{rm}}$  gesetzt und die Berechnung unter Berücksichtigung des gegenseitigen Einflusses benachbarter Risse durchgeführt (Phase der fortgeschrittenen Rissbildung). Der Zustand der abgeschlossenen Rissbildung ist erreicht, wenn die rechnerisch maximal mögliche Rissanzahl erreicht ist und an keiner Stelle des Zugstabes mehr Dehnungsgleichheit zwischen Stahl und Beton herrscht. Die Längenänderung und damit auch die Dehnung  $\varepsilon_{\text{sys},m}$  des Zugstabes wird über die zur jeweiligen Kraft vorhandene Rissanzahl  $n_{r,i}$  ermittelt. Die Rissanzahl ergibt sich aus einer Rissansatzfunktion, die die Materialstreuung berücksichtigt. Ein fortschreitender Rissbildungsprozess nach Erreichen der rechnerischen abgeschlossenen Rissbildung (sukzessive Rissbildung) wird nicht berücksichtigt.

Gegeben sei ein Stahlbetonstab mit der Länge  $l_{\text{sys}}$ , der Stahlfläche  $A_s$ ,  $n_s$  Bewehrungsstäben mit einem Umfang von jeweils  $u_s$ , der Betonnettofläche  $A_{c,\text{net}} = A_c - A_s$  und der ideellen Querschnittsfläche  $A_{\text{id}}$  gemäß Gleichung 3.8, der mit einer Zugkraft  $N$  belastet wird (Abbildung 3.6). Die kleinste über die gesamte Bauteillänge vorhandene Zugfestigkeit sei mit  $f_{\text{ct}}$  definiert.

$$A_{\text{id}} = A_{c,\text{net}} + \alpha_e \cdot A_s \quad (3.8)$$

$$\alpha_e = E_{s1}/E_{cm} \quad (3.9)$$

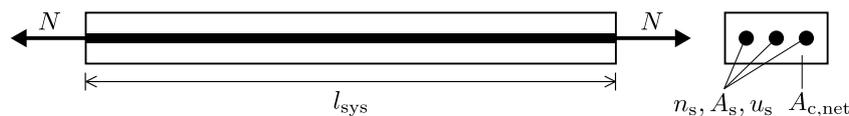


Abbildung 3.6: Definierter Zugstab

### Der mittlere Rissabstand $s_{\text{rm}}$

Die Abstände zwischen zwei Rissen entlang eines Zugstabes sind von der Verteilung der Zugfestigkeiten entlang des Bauteils und den Verbundkriterien abhängig. Ein neuer Riss kann nur an jenen Stellen entstehen, an denen der ungestörte Verbund wiederhergestellt und die örtliche Zugfestigkeit erreicht ist. Als Näherung wird hier der Ansatz übernommen, den mittleren Rissabstand aus der Einleitungslänge  $l_{\text{es}}$  zu ermitteln, die notwendig wäre, um den gesamten Betonkraftanteil beim Erstriss über Verbund wieder in den umgebenden Beton einleiten zu können. Krips (1984) zeigt, dass die Rissabstände von Stahlbetonzugstäben bei abgeschlossener Rissbildung zwischen der einfachen und der doppelten Einleitungslänge  $l_{\text{es}}$  liegen. Er leitet analytisch

her, dass der mittlere Rissabstand  $1.443 \cdot l_{es}$  beträgt. Dies begründet auf der Tatsache, dass kleinere Rissabstände eine höhere Auftretenswahrscheinlichkeit haben, als größere. Der CEB-fib (1993) gibt mit  $s_{rm} = 1.33 \cdot l_{es}$  einen geringeren Wert an. Oftmals wird  $s_{rm}$  vereinfachend zu  $1.5 \cdot l_{es}$  gesetzt. Der mittlere Rissabstand des hier vorgestellten Modells wird wie folgt berechnet:

$$l_{es} = \frac{N_{cr,c}}{n_s \cdot u_s \cdot \tau_{bm}} = \frac{f_{ct} \cdot \varnothing_s}{4 \cdot \rho_s \cdot \tau_{bm}} \quad (3.10)$$

$$l_{es} \leq s_{rm} \leq 2 \cdot l_{es} \quad (3.11)$$

$$s_{rm} = k_{srm} \cdot l_{es} \quad (3.12)$$

mit:  $k_{srm} = 1.443$

Die maximal auftretende Rissanzahl  $n_{r,max}$  bei vorgegebener Stablänge  $l_{sys}$  und Kenntnis des mittleren Rissabstandes lautet:

$$n_{r,max} = \frac{l_{sys}}{s_{rm}} \quad (3.13)$$

### Die mittlere Verbundspannung $\tau_{bm}$

Mit dem Übergang vom Zustand I in den Zustand II gibt es um jeden Riss einen Bereich des aktivierten Verbundes. Innerhalb dieses Bereichs, mit dem Abstand  $l_{e,erf}$  beidseits vom Riss, besteht ein Unterschied zwischen der Beton- und der Stahldehnung. Die Länge  $l_{e,erf}$ , ab der die Dehnungsgleichheit wieder hergestellt ist, ergibt sich allgemein durch Berücksichtigung des verschieblichen Verbundes. Die erforderliche Krafterleitungslänge ist gefunden, wenn das Kräftegleichgewicht und die Verformungskompatibilität erfüllt sind. Bei einer analytischen Berechnung führt dies zu einer Differentialgleichung, die jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen geschlossen lösbar ist. Deshalb werden statt der analytischen Lösungsverfahren oftmals iterative numerische Methoden benutzt. Wird anstelle des allgemeinen Verbundgesetzes (Abbildung 3.7a) ein vereinfachtes Verbundgesetz (Abbildung 3.7b) verwendet, kann die erforderliche Einleitungslänge sehr leicht bestimmt werden (Gleichung 3.10 bzw. 3.29) und das entwickelte Modell ist in geschlossener Form anwendbar. Die Verwendung einer konstanten Verbundspannung ist für die meisten Problemstellungen durchaus ausreichend. In der Literatur werden für gerippten Betonstahl häufig Werte in der Größenordnung von  $\tau_{bm} = 1.8 \cdot f_{ctm}(t)$  (CEB-fib (2013)) und  $\tau_{bm} = 2.0 \cdot f_{ctm}(t)$  (Sigrist (1995)) angegeben. Für den Einsatz glatter Bewehrungsstäbe, Litzen oder Drähte gibt der CEB-fib (2013) Abminderungsfaktoren  $\xi$  an (Tabelle 3.3). Befindet sich die Bewehrung bereits im Verfestigungsbereich, liefert der Ansatz  $\tau_{bm} = 1.8$  bis  $2.0 \cdot f_{ctm}(t)$  zu ungenaue Resultate. Hier schlägt Sigrist (1995) vor, die mittlere Verbundspannung um 50 % zu reduzieren.

Tabelle 3.3: Verbundfaktoren  $\xi$  verschiedener Spannstähle nach CEB-fib (2013)

Oberfläche	sofortiger Verbund	nachträglicher Verbund	ohne Verbund
glatter Draht	0.4	0.2	0
Litze	0.6	0.4	0
profilierte Litze	0.8	0.6	0
gerippter Stab	-	1.0	0

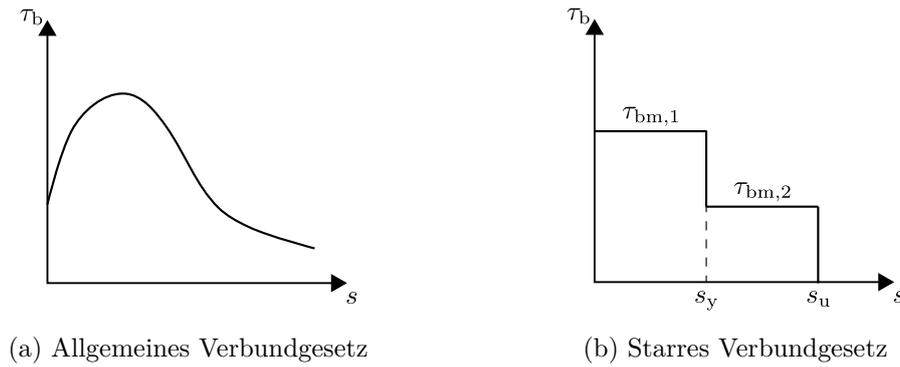


Abbildung 3.7: Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen

### Der ungerissene Stab

Solange die einwirkende Zugkraft unterhalb der Risskraft  $N_{cr}$  ist, befindet sich der Stab im Zustand I. Die Dehnung des Betons ist ident mit jener der Bewehrung ( $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon_{sys}$ ), die Aufteilung der inneren Kräfte erfolgt gemäß Gleichung 3.14.

$$N_E = N_{R,c} + N_{R,s} \quad (3.14)$$

$$N_{R,c} = A_{c,net} \cdot \sigma_c(\varepsilon) \quad (3.15)$$

$$N_{R,s} = A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon) \quad (3.16)$$

Der ungerissene Zustand endet mit Erreichen der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  an der schwächsten Stelle. Wird linear elastisches Verhalten bis zum Erreichen der Zugfestigkeit angenommen, so stellen sich am Ende des Zustandes I folgende Kraftanteile ein:

$$N_{cr} = N_{cr,c} + N_{cr,s} \quad (3.17)$$

$$N_{cr,c} = A_{c,net} \cdot f_{ct} \quad (3.18)$$

$$N_{cr,s} = A_s \cdot f_{ct} \cdot \alpha_e \quad (3.19)$$

### Der gerissene Stab in der Phase der Einzelrissbildung ( $l_{e,erf} \leq s_{rm}/2$ )

Mit dem Erreichen der Zugfestigkeit geht der Zugstab in den Zustand II über. Um an der Stelle des Risses eine Rissbreite  $w$  erzeugen zu können, bedarf es einer Steigerung der äußeren Zugkraft  $\Delta N_{sys}(w)$ . Gleichzeitig stellt sich ein Abfall der Betonspannungen gemäß der vorhandenen Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung (Abbildung 3.5b) ein. Der Spannungsabfall  $\Delta \sigma_c(w)$  führt zu einem frei werdendem Betonkraftanteil  $\Delta N_c(w)$ , der im Riss zusätzlich von der Bewehrung aufgenommen werden muss. Die Differenzspannung bzw. Differenzkraft wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \sigma_c(w) = \sigma_c(w) - f_{ct} \quad (3.20)$$

$$\Delta N_c(w) = \sigma_c(w) \cdot A_{c,net} \quad (3.21)$$

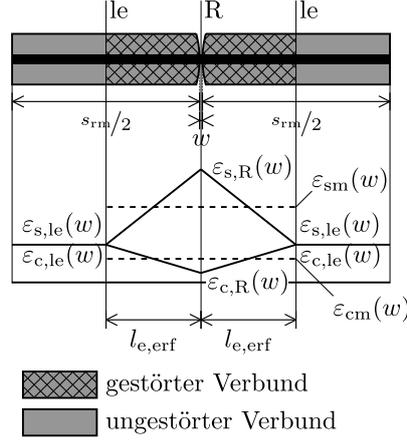


Abbildung 3.8: Dehnungsverlauf während der Einzelrissbildung

Solange die Einzelrissbildung Gültigkeit hat, gibt es im Bereich  $s_{rm}$  eine Stelle, ab der wieder der Zustand I herrscht (Abbildung 3.8). Die Länge  $l_{e,erf}$  ergibt sich beim Ansatz einer konstanten Verbundspannung unabhängig vom Schlupf rein aus der Betrachtung der Differenz der Stahlkraft  $N_{s,R}$  am Riss und  $N_{s,le}$  am Beginn des ungerissenen Zustands. Diese Kraftdifferenz steht mit der über die Mantelfläche aller Bewehrungsstäbe innerhalb der Länge  $l_{e,erf}$  aufgebauten Verbundkraft im Gleichgewicht ( $N_{s,R} - N_{s,le} = \tau_{bm} \cdot n_s \cdot u_s \cdot l_{e,erf}$ ). In Abbildung 3.9 sind die qualitativen Spannungen am Riss und am Ende der Krafteinleitungslänge abgebildet. Sie können gemäß den Gleichungen 3.22 bis 3.28 berechnet werden.

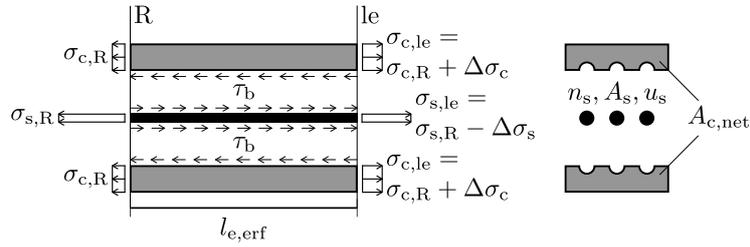


Abbildung 3.9: Spannungen am Rissufer „R“ und am Ende der Lasteinleitungslänge „le“

Am Riss gilt:

$$\sigma_{c,R} = \frac{N_{cr,c} + \Delta N_c(w)}{A_{c,net}} \quad (3.22)$$

$$\sigma_{s,R} = \frac{N_{cr,s} + \Delta N_{sys}(w) - \Delta N_c(w)}{A_s} \quad (3.23)$$

Am Ende der Krafteinleitungslänge gilt:

$$\sigma_{c,le} = \frac{N_{cr,c} + \Delta N_{sys}(w)}{A_{id}} = \frac{N_{cr,c} + \Delta N_{sys}(w)}{A_{c,net}} \cdot f \quad (3.24)$$

$$\sigma_{s,le} = \frac{N_{cr,s} + \Delta N_{sys}(w)}{A_{id}} \cdot \alpha_e = \frac{N_{cr,s} + \Delta N_{sys}(w)}{A_s} \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \cdot f \quad (3.25)$$

$$\text{mit: } f = \frac{1}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} \quad (3.26)$$

Einzuleitende Differenzspannungen:

$$\Delta\sigma_c = \sigma_{c,le} - \sigma_{c,R} = \frac{\Delta N_{sys}(w) \cdot f - \Delta N_c(w)}{A_{c,net}} \quad (3.27)$$

$$\Delta\sigma_s = \sigma_{s,R} - \sigma_{c,le} = \frac{\Delta N_{sys}(w) \cdot f - \Delta N_c(w)}{A_s} \quad (3.28)$$

Mit Annahme einer konstanten Verbundspannung ( $\tau_{bm} = \text{konst.}$ ) folgt für die erforderliche Kraftereinleitungslänge:

$$l_{e,erf} = \frac{\Delta N_{sys}(w) \cdot f - \Delta N_c(w)}{n_s \cdot u_s \cdot \tau_{bm}} \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

Die Ermittlung der notwendigen Kraftsteigerung  $\Delta N_{sys}(w)$  ist erst möglich wenn neben dem Kräftegleichgewicht (Gleichung 3.31) auch die Verformungskompatibilität (Gleichung 3.32) eingehalten wird.

$$N_{sys}(w) = N_c(w) + N_s(w) \quad (3.31)$$

$$w = 2 \cdot l_{e,erf} \cdot (\varepsilon_{sm}(w) - \varepsilon_{cm}(w)) \quad (3.32)$$

Um die Verformungskompatibilität zu erreichen, muss eine Beziehung zwischen der mittleren Betondehnung  $\varepsilon_{cm}$ , der mittleren Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  sowie der inneren Kraftanteile  $\Delta N_s(w)$  und  $\Delta N_c(w)$  hergestellt werden. Im Riss gilt:

$$\varepsilon_{s,R} = \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_{sys}(w) - \Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{c,R} = \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta\sigma_c(w)}{E_{cm}} = \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \quad (3.34)$$

Am Ende der Lasteinleitungslänge stellt sich, soweit  $l_{e,erf} \leq s_{rm}/2$  erfüllt ist, Dehnungsgleichheit zwischen Stahl und Beton ein. Es gilt:

$$\varepsilon_{s,le} = \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_{sys}(w)}{E_{cm} \cdot A_{id}} = \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_{sys}(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_{c,le} = \varepsilon_{s,le} \quad (3.36)$$

Die im Verbundbereich gemittelte Stahl- und Betondehnung ( $\varepsilon_{sm}$  und  $\varepsilon_{cm}$ ) kann nach Gleichung 3.37 und 3.38 ermittelt werden. Die mittlere Dehnungsdifferenz ergibt sich nach Gleichung 3.39.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{s,R} - \alpha_b \cdot (\varepsilon_{s,R} - \varepsilon_{s,le}) \\ &= \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_{sys}(w) - \Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} - \alpha_b \cdot \frac{\Delta N_{sys}(w) \cdot f - \Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cm} &= \varepsilon_{c,R} + \alpha_b \cdot (\varepsilon_{c,le} - \varepsilon_{c,R}) \\ &= \varepsilon_{cr} + \frac{\Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \cdot \alpha_e \cdot \rho_s + \alpha_b \cdot \frac{\Delta N_{sys}(w) \cdot f - \Delta N_c(w)}{E_{s1} \cdot A_s} \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{(1 - \alpha_b)}{E_{s1} \cdot A_s} \cdot \left( \Delta N_{sys}(w) - \frac{\Delta N_c(w)}{f} \right) \quad (3.39)$$

Einsetzen von Gleichung 3.39 und 3.29 in 3.32 liefert die quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{sys}}(w)^2 \cdot f + 2 \cdot \Delta N_{\text{sys}}(w) \cdot (-\Delta N_c(w)) \\ + \frac{(\Delta N_c(w))^2}{f} - \frac{w \cdot \tau_{\text{bm}} \cdot n_s \cdot u_s \cdot A_s \cdot E_{s1}}{2 \cdot (1 - \alpha_b)} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Diese hat aus mechanischer Sicht eine mögliche Lösung nämlich:

$$\Delta N_{\text{sys}}(w) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (3.41)$$

mit:  $a = f$

$$b = -2 \cdot \Delta N_c(w)$$

$$c = \frac{(\Delta N_c(w))^2}{f} - \frac{w \cdot \tau_{\text{bm}} \cdot n_s \cdot u_s \cdot A_s \cdot E_{s1}}{2 \cdot (1 - \alpha_b)}$$

### Der gerissene Stab in der Phase fortgeschrittener und abgeschlossener Rissbildung ( $l_{e,\text{erf}} \geq s_{\text{rm}}/2$ , $\sigma_s \leq f_y$ )

Ist der ermittelte Wert der erforderlichen Krafterleitungslänge größer als der halbe mittlere Rissabstand so bedeutet das, dass sich der Zugstab bereits in der fortgeschrittenen Rissbildungsphase befindet. In dieser Phase kann davon ausgegangen werden, dass sich einzelne Risse bereits gegenseitig beeinflussen. Rechnerisch können noch Bereiche im Zustand I existieren. Die Phase der fortgeschrittenen Rissbildung geht in die Phase der abgeschlossenen Rissbildung über, wenn gemäß der Rissansatzfunktion die maximale Anzahl der möglichen Risse erreicht ist.

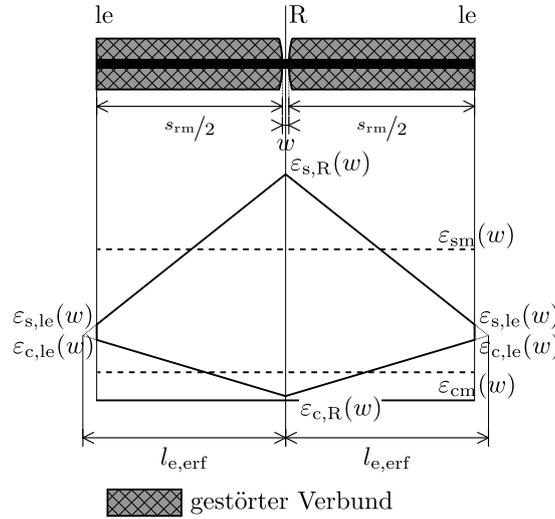


Abbildung 3.10: Dehnungsverlauf bei abgeschlossener Rissbildung

Die mittleren Dehnungen im Rissabschnitt können wie folgt ermittelt werden:

$$\epsilon_{\text{sm}} = \epsilon_{\text{s,R}} - \alpha_b \cdot (\epsilon_{\text{s,R}} - \epsilon_{\text{s,le}}) = \epsilon_{\text{s,R}} - \alpha_b \cdot \frac{s_{\text{rm}}/2 \cdot \tau_{\text{bm}} \cdot n_s \cdot u_s}{E_{s1} \cdot A_s} \quad (3.42)$$

$$\epsilon_{\text{cm}} = \epsilon_{\text{c,R}} + \alpha_b \cdot (\epsilon_{\text{c,le}} - \epsilon_{\text{c,R}}) = \epsilon_{\text{c,R}} + \alpha_b \cdot \frac{s_{\text{rm}}/2 \cdot \tau_{\text{bm}} \cdot n_s \cdot u_s \cdot \alpha_e \cdot \rho_s}{E_{s1} \cdot A_s} \quad (3.43)$$

Durch Ersetzen von  $2 \cdot l_{e,er}$  mit  $s_{rm}$  in Gleichung 3.32 folgt:

$$w = s_{rm} \cdot (\varepsilon_{sm}(w) - \varepsilon_{cm}(w)) \quad (3.44)$$

Einsetzen von  $\varepsilon_{sm}$  und  $\varepsilon_{cm}$  aus den Gleichungen 3.42 und 3.43 in die Gleichung 3.44 liefert die Lösungsgleichung für  $\Delta N_{sys}(w)$ :

$$\Delta N_{sys}(w) = \frac{w \cdot E_{s1} \cdot A_s}{s_{rm}} + \frac{\Delta N_c(w)}{f} + \alpha_b \cdot \frac{s_{rm} \cdot \tau_{bm} \cdot n_s \cdot u_s}{2 \cdot f} \quad (3.45)$$

### Der gerissene Stab in der Phase fortgeschrittener und abgeschlossener Rissbildung im Verfestigungsbereich ( $l_{e,erf} \geq s_{rm}/2$ , $\sigma_s \geq f_y$ )

Bei Stahlspannungen  $\sigma_s > f_y$  nehmen die Dehnungen stark zu. Da die Spannungen aber mit zunehmender Entfernung vom Riss durch die Verbundwirkung wieder abnehmen, beschränkt sich dieser Effekt auf einen lokalen Bereich, der mit zunehmender Stahlspannung immer größer wird. Aus diesem Grund zeigt die Zugversteifung in diesem Bereich große Wirkung. Die Abbildung 3.11 verdeutlicht diesen Sachverhalt.

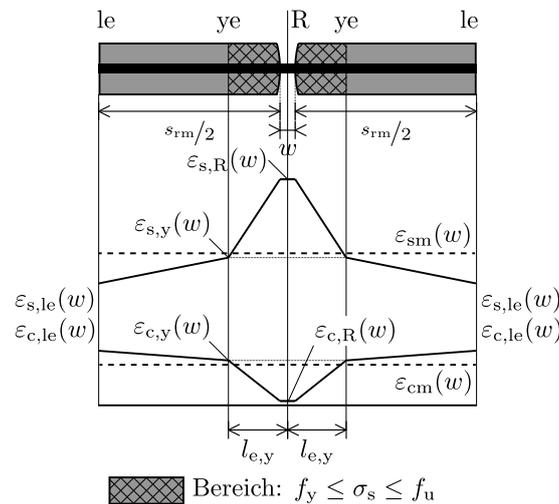


Abbildung 3.11: Dehnungsverlauf bei teilweiser Plastizierung

Im plastischen Bereich der Bewehrung wird am Ansatz konstanter Verbundspannungen festgehalten und der Vorschlag von Sigrist (1995) übernommen, die mittleren Verbundspannungen im plastischen Bereich auf die Hälfte jener im elastischen Bereich zu reduzieren (siehe Abbildung 3.7b). Damit sind die grundsätzlichen Überlegungen des Modells auf den plastischen Bereich übertragbar. Die mittleren Dehnungen errechnen sich wie folgt:

$$\varepsilon_{s,R} = \frac{\Delta N_{sys}(w) - f_y \cdot A_s}{E_{s2} \cdot A_s} + \varepsilon_{sy} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{s,ye} = \varepsilon_{s,R} - \frac{l_{e,y} \cdot \tau_{bm,2} \cdot n_s \cdot u_s}{E_{s2} \cdot A_s} \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{s,le} = \varepsilon_{sy} - \frac{(l_{e,erf} - l_{e,y}) \cdot \tau_{bm2} \cdot n_s \cdot u_s}{E_{s1} \cdot A_s} \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{c,R} = \varepsilon_{ct} + \frac{\Delta N_c(w)}{E_{cm} \cdot A_{c,net}} \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{c,ye} = \varepsilon_{c,R} + \frac{l_{e,y} \cdot \tau_{bm,2} \cdot n_s \cdot u_s}{E_{cm} \cdot A_{c,net}} \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_{c,le} = \varepsilon_{c,ye} + \frac{(l_{e,erf} - l_{e,y}) \cdot \tau_{bm,2} \cdot n_s \cdot u_s}{E_{cm} \cdot A_{c,net}} \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{[\varepsilon_{s,R} - \alpha_b \cdot (\varepsilon_{s,R} - \varepsilon_{s,ye})] \cdot l_{e,y} + [\varepsilon_{s,ye} - \alpha_b \cdot (\varepsilon_{s,ye} - \varepsilon_{s,le})] \cdot (l_{e,erf} - l_{e,y})}{l_{e,erf}} \quad (3.52)$$

$$\varepsilon_{cm} = \frac{[\varepsilon_{c,R} + \alpha_b \cdot (\varepsilon_{c,ye} - \varepsilon_{c,R})] \cdot l_{e,y} + [\varepsilon_{c,ye} + \alpha_b \cdot (\varepsilon_{c,le} - \varepsilon_{c,ye})] \cdot (l_{e,erf} - l_{e,y})}{l_{e,erf}} \quad (3.53)$$

Einsetzen der Gleichungen 3.52 und 3.52 in die Gleichung 3.32 bzw. 3.44 führt zur erforderlichen Kraft  $\Delta N_{sys}(w)$ . Wie aus den Gleichungen 3.52 und 3.53 erahnt werden kann, ist die Lösung dieses Problems wesentlich komplexer als für den Bereich vor dem Fließen der Bewehrung. Im Zuge dieser Arbeit wurde auf die Formulierung einer geschlossenen Lösung zur Ermittlung von  $\Delta N_{sys}(w)$  verzichtet und  $\Delta N_{sys}(w)$  für den plastischen Bereich der Bewehrung numerisch ermittelt.

### Die Rissansatzfunktion

Um mit den Ergebniswerten eines Rissabschnittes die Dehnungsänderung des Gesamtstabes ermitteln zu können, bedarf es einer Festlegung der zu jeder Laststufe vorhandenen Rissanzahl. Die Entstehung jedes Risses ist von der Verteilung der Zugfestigkeiten entlang der Stabachse und den Stellen vorhergehender Risse abhängig. Die Verteilung der Zugfestigkeiten in Stablängsrichtung kann a priori nicht angegeben werden, da sie einem Zufallsprozess unterliegt. Eine Ausnahme stellen bügelbewehrte Stäbe dar. Jede Querbewehrung stellt eine Schwachstelle dar, womit sich die Wahrscheinlichkeit der Rissbildung an diesen Stellen vergrößert. Die einzige Aussage, die getroffen werden kann, ist die Auftretenswahrscheinlichkeit einer Zugfestigkeit. Schwennicke (1983) bringt den Rissentwicklungsgrad  $\psi = n_{r,i}/n_{nr,max}$  mit der Summenfunktion der Standardnormalverteilung im Bereich des 5 % bis 95 % Fraktilwerts in Zusammenhang. Nachdem die Summenfunktion nur mit hohem Aufwand zu entwickeln ist, wählt er zur Approximation ein Polynom 8. Grades (schwarze Kurve in Abbildung 3.12). In der Abbildung 3.12 sind neben dieser Näherung weitere Approximationen angegeben, die im Zuge der Modellbildung als sinnvoll erachtet werden. Der sinusoidale, sowie der lineare Verlauf fügen sich hinreichend genau an die Summenfunktion der Standardnormalverteilung an. Die quadratische Rissentwicklungsfunktion gibt eine beschleunigte Rissbildung vor (siehe Abbildung 3.13). Die Rissentwicklungsfunktionen können den Gleichungen 3.54 bis 3.56 entnommen werden. Wird vorausgesetzt, dass mit Erreichen des 5 % Fraktilwerts der Zugfestigkeit der erste Riss kommt und mit Erreichen des 95 % Fraktilwerts die maximale Rissanzahl  $n_{r,max}$  im Stab vorhanden ist, ergibt sich die von  $N_{sys}(w)$  abhängige Rissentwicklung gemäß der Gleichung 3.57.

Sinus - Form:

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sin \left( \frac{f_N - 1}{\frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}} - 1} \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right] \quad (3.54)$$

Lineare - Form:

$$\psi = \frac{f_N - 1}{\frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}} - 1} \quad (3.55)$$

Quadratische - Form:

$$\psi = 1 - \frac{\left(f_N - \frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}}\right)^2}{\left(1 - \frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}}\right)^2} \quad (3.56)$$

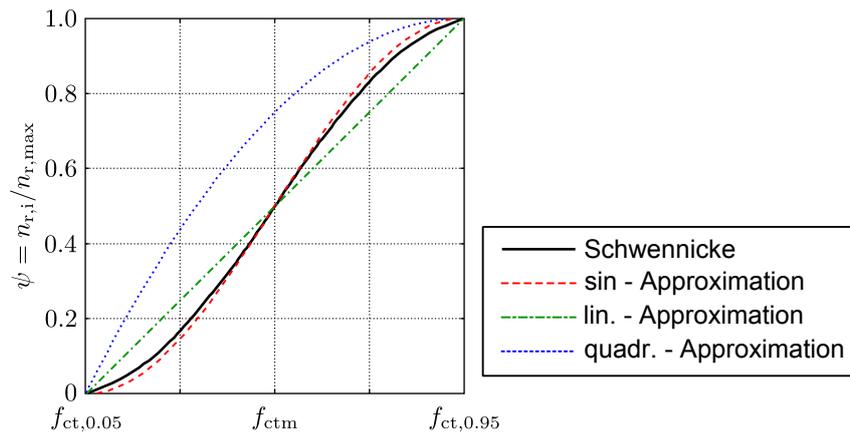


Abbildung 3.12: Rissansatzfunktion nach Schwennicke (1983) und Approximation

mit:  $f_N = \frac{N_{sys}(w)}{N_{cr}}$

und:  $1 \leq f_N \leq \frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}}$

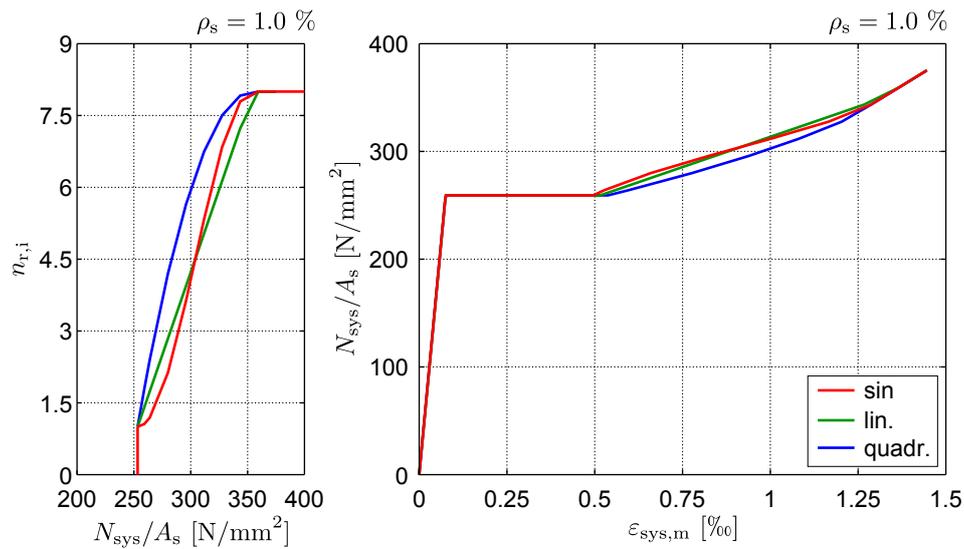


Abbildung 3.13: Vergleich der Rissansatzfunktionen ( $f_{ctm} = 2.9 \text{ N/mm}^2$ ,  $v = 10 \%$ ,  $l_{sys} = 1.5 \text{ m}$ )

Die Anzahl der Risse in Abhängigkeit der aktuellen Zugkraft lautet:

$$n_{r,i} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq f_N \leq 1 \\ 1 + \psi \cdot (n_{r,\max} - 1) & \text{für } 1 \leq f_N \leq \frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}} \\ n_{r,\max} & \text{für } \frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}} \leq f_N \end{cases} \quad (3.57)$$

### Ermittlung der Dehnung $\varepsilon_{\text{sys},m}$ des Zugstabes:

Die Längenänderung und damit auch die Dehnungsänderung eines Stahlbetonstabes unter Zug wird von der mittleren Dehnung der Bewehrung bestimmt, da diese größer als jene des umgebenden Betons ist. Sind die mittleren Stahldehnungen  $\varepsilon_{\text{sm}}$  in Bereichen des gestörten Verbundes (Zustand II) und in den verbleibenden ungerissenen Bereichen ( $\varepsilon_{\text{s,le}}$ ) bekannt, kann unter Einbeziehung der kraftabhängigen Rissanzahl  $n_{r,i}$  die Dehnung  $\varepsilon_{\text{sys},m}$  des Zugstabes ermittelt werden. Sie ergibt sich wie folgt:

$$\varepsilon_{\text{sys},m} = \frac{2 \cdot l_{e,\text{erf}} \cdot n_{r,i} \cdot \varepsilon_{\text{sm}} + (L_{\text{sys}} - 2 \cdot l_{e,\text{erf}} \cdot n_{r,i}) \cdot \varepsilon_{\text{s,le}}}{L_{\text{sys}}} \quad (3.58)$$

$$2 \cdot l_{e,\text{erf}} \cdot n_{r,i} \leq L_{\text{sys}}$$

### Das Verhältnis $f_N$ der Zugkraft bei Letztrissbildung zur Erstrissbildung

Unter der Annahme einer konstanten Zugfestigkeit entlang der gesamten Stabachse eines Zugstabes würden bei Erreichen dieser alle Risse auf einmal eintreten. Da aber die Zugfestigkeiten entlang des Stabes unterschiedlicher Größenordnung sind, bedarf es für den Erstriss und Letztriss unterschiedlicher Kraftniveaus. Wird der Ansatz normalverteilter Festigkeiten von Schwennicke (1983) übernommen und weiters festgelegt, dass der Erstriss bei Erreichen des 5 % Fraktilwertes und der Letztriss bei Erreichen des 95 % Fraktilwertes der Zugfestigkeit entstehen, hängt das Zugkraftverhältnis nur mehr vom Variationskoeffizienten „ $v$ “ ab (Abbildung 3.14). Schwennicke (1983) weist auf, dass die Variationskoeffizienten der zentrischen Zugfestigkeit zwischen 8.6 % und 18 % liegen. Hierbei hängt es stark davon ab, ob man Zugversuche einer Betongüte eines Forschungsinstitutes oder unterschiedlicher Betongüten unterschiedlicher Forschungsinstitute zugrundelegt. Empelmann (1995) begründet den großen Variationskoeffizienten von 18 % durch die Überlagerung der Streuung der Zugfestigkeiten mit Eigenspannungszuständen aus Schwinden und Hydratation. Er wählt für seine Berechnungen  $v = 10\%$ . Die ON-EN1992-1-1 (2011) gibt einen Variationskoeffizienten von 18 % vor. Grundsätzlich sind alle Werte für  $v$  zwischen 10 und 20 % realistisch. Die Tabelle 3.4 zeigt Verhältnismerte Letztrisskraft/Erstrisskraft bei unterschiedlichen Variationskoeffizienten.

Tabelle 3.4: Verhältnismerte  $N_{r,n}/N_{r,1}$  in Abhängigkeit von  $v$

$v$ [%]	0	10	18	20
$\frac{f_{ct,0.95}}{f_{ct,0.05}}$	1	1.4	1.84	1.98

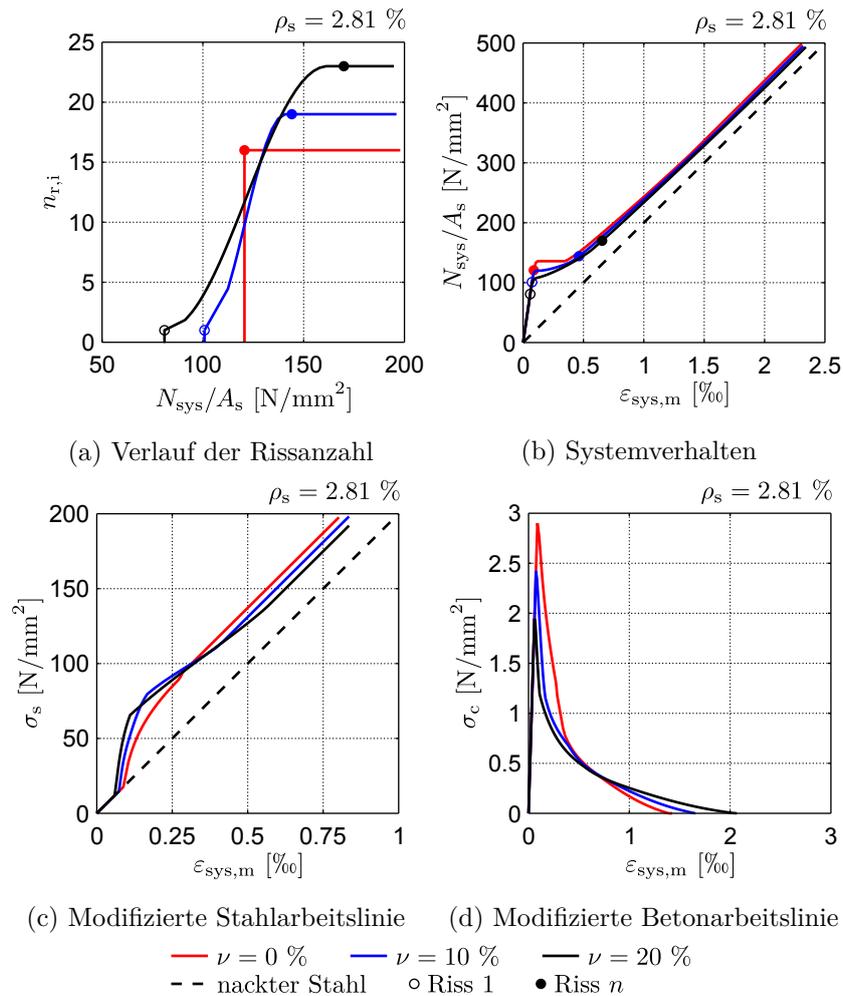


Abbildung 3.14: Einfluss des Variationskoeffizienten auf die Berechnungsergebnisse ( $f_{ctm} = 2.9 \text{ N/mm}^2$ ,  $\rho_s = 2.81\%$ ,  $l_{sys} = 1.5 \text{ m}$ )

### 3.5 Die mitwirkende Zugzone

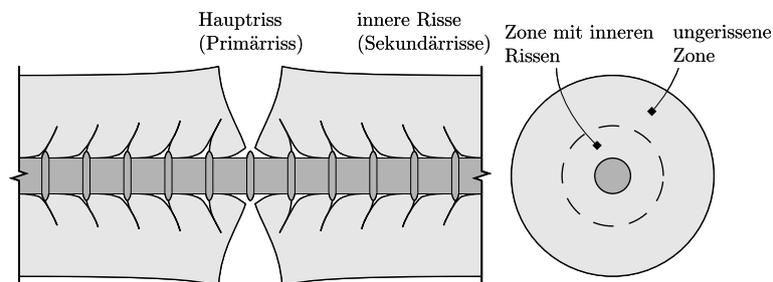


Abbildung 3.15: Verformungs- und Rissbild um den Bewehrungsstab nach Goto (1971) (aus Alvarez (1998))

Wie in Abschnitt 3.4 erläutert, sind die Stahlspannungen im Riss und am Ende der Einleitungslänge verschieden. Durch die Verbundwirkung werden die Stahlspannungen mit wachsendem Abstand zum Riss ab- und die Betonspannungen gleichzeitig aufgebaut. Die Verbundwirkung wird maßgeblich durch den Verzahnungseffekt der Rippen realisiert (mechanischer Verbund, siehe Abbildung 3.15).

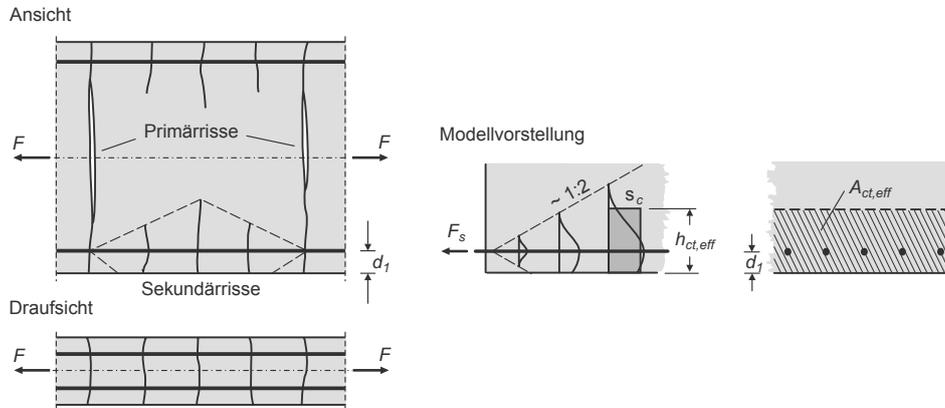


Abbildung 3.16: Primär- und Sekundärrisse aus Zilch und Zehetmaier (2009)

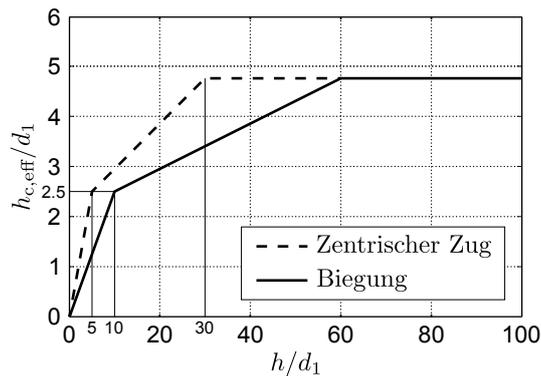


Abbildung 3.17:  $h_{c,eff}$  in Abhängigkeit von  $d_1$  nach König und Tue (1996)

Da die Bewehrung in Betonbauteilen aus Effektivitäts- und Dauerhaftigkeitsgründen im allgemeinen im Randbereich angeordnet wird, konzentriert sich die Einleitung der Verbundkraft in dieser Zone. Die Zugspannung im Randbereich ist daher größer als die mittlere Zugspannung über die gesamte Zugzonenhöhe. Mit anwachsender Bauteilhöhe kommt es daher neben der Ausbildung von Primärrissen auch zur Entstehung von Sekundärrissen. Primäre Risse erstrecken sich über die gesamte Zugzone während sekundäre Risse nur einen Teil der Zugzone erfassen. Zum Erzeugen eines Sekundärrisses ist im allgemeinen eine geringere Zugkraft als zum Erzeugen des Primärrisses notwendig. Dies ist dann der Fall, wenn die Bauteilhöhe zunimmt und die Bewehrung, bezogen auf die Bauteilhöhe, nahe am Bauteilrand angeordnet wird (siehe Abbildung 3.16). In diesen Fällen wird der Bewehrung eine umgebende Betonfläche  $A_{c,eff}$  zugeschrieben, die genau die Zugkraft zur Bildung des Sekundärrisses erreichen kann. König und Tue (1996) entwickeln basierend auf finite Elemente Berechnungen den in der Abbildung 3.17 dargestellten Vorschlag zur Bestimmung der effektiven Höhe  $h_{c,eff}$  rechteckiger Querschnitte. Für

die Berechnung der zugversteifenden Wirkung als auch für die Berechnung der Rissbreite ist der kleinere Wert aus Primärrisskraft und Sekundärrisskraft maßgebend:

$$A_{c,eff} \cdot f_{ct} \leq \alpha_R \cdot A_{ct} \cdot f_{ct} \quad (3.59)$$

Der Wert  $\alpha_R$  in der obigen Gleichung spiegelt die Völligkeit der Zugspannungsverteilung im Zustand I unmittelbar vor der Rissbildung wieder (Bsp.: reine Biegung:  $\alpha_R = 0.5$ , zentrischer Zug:  $\alpha_R = 1.0$ ).

### 3.6 Einfluss des Schwindens

Durch das Schwinden und der Verkürzungsbehinderung durch die Bewehrung entstehen in einem Stahlbetonkörper Eigenspannungen. Hierbei werden in der Bewehrung Druckspannungen und im Beton Zugspannungen aufgebaut. Die durch den Eigenspannungszustand resultierenden Kraftanteile im Stahl und Beton stehen miteinander im Gleichgewicht. Die durch das Schwinden erzeugten Zugspannungen im Beton führen in einem Stahlbetonzugstab zu einer früheren Erstrissbildung, da die Eigenspannungen einen Teil des aufnehmbaren Zugspannungspotentials aufbrauchen. Die rote Linie in den Abbildungen 3.18a und 3.18b verdeutlicht diesen Sachverhalt. Die zeitlich anwachsenden Zwangsspannungen durch das Schwinden werden durch das Kriechen des Betons teilweise wieder abgebaut. Die aus dem inneren Zwang aufgebaute Zugspannung im Beton ist somit kleiner, die Erstrissbildung in einem Zugstab tritt bei einer höheren Kraft ein (blaue Linie in den Abbildungen 3.18a und 3.18b). Der Eigenspannungszustand kann durch den Versatz  $\varepsilon_{s,shr}/\sigma_{s,shr}$  (Gleichung 3.60 und 3.61) beschrieben werden.

$$\varepsilon_{s,shr} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi)} \quad (3.60)$$

$$\sigma_{s,shr} = \varepsilon_{s,shr} \cdot E_{s1} \quad (3.61)$$

In der obigen Gleichung ist  $\varepsilon_{cs}$  die freie Schwinddehnung und  $\rho(t)$  der Relaxationsbeiwert (auch als Relaxationskennwert, Alterungsbeiwert oder Alterungskennwert bezeichnet). Dieser liegt zwischen 0.5 und 1.0, wird aber näherungsweise häufig mit 0.8 festgelegt (Zerna (1986)).

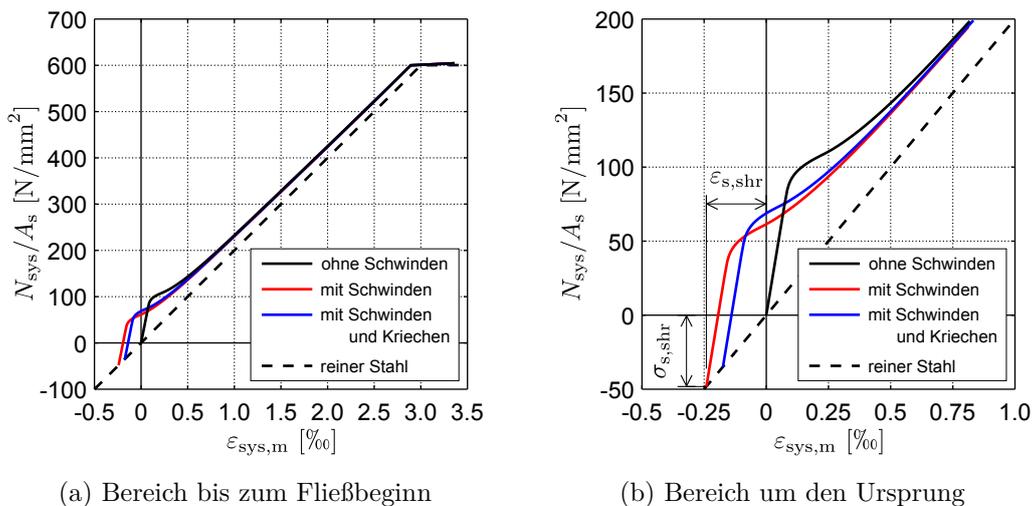


Abbildung 3.18: Auswirkung des Schwindens auf das Verhalten des Zugstabs

### 3.7 Ergebnisse, Vergleichsrechnungen

Mit dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Zugversteifungsmodell wurden charakteristische Versuche aus der Literatur nachgerechnet. Die Anwendbarkeit des Modells wird an von Zug- und Biegeversuchen (mit/ohne Normalkraft) demonstriert. Hierbei werden aus der Literatur Versuchskörper unterschiedlicher Bewehrungsgrade und Querschnittsformen gewählt. Auch Zugstäbe mit Kombibewehrung (Stabstahl und Fasern) werden nachgerechnet.

Die Abbildungen 3.20 bis 3.24 bestätigen, dass das Modell geeignet ist, die zugversteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen zufriedenstellend abzubilden. Die Qualität der Berechnungsergebnisse hängt vom realitätsnahen Erfassen der Erstrisszugfestigkeit ab. Bei Querschnitten, die durch Momente mit/ohne Normalkraft belastet sind, ist es wichtig die Sekundär-rissbildung (Ansatz:  $A_{c,eff}$ ) zu berücksichtigen. Bei Querschnitten mit Rundumbewehrung unter Momentenbelastung (hier: Biegeversuche von Schlaich und Schober (1985)) hat sich gezeigt, dass die über die Querschnittshöhe verteilte Bewehrung das Aufreißen des Querschnitts bremst. Um das reale Verformungsverhalten abbilden zu können, muss diese Wirkung in die Nachrechnung miteinbezogen werden.

Allen Versuchsnachrechnungen wurde ein mittlerer Rissabstand von  $s_{rm} = 1.443 \cdot l_{e,erf}$  und ein sinus-förmiger Verlauf der Rissansatzfunktion zu Grunde gelegt.

#### 3.7.1 Zugversuche

Die nachgerechneten Zugversuche mit einmaliger Kurzzeitbelastung von Hartl (1977) und EmpeImann (1995) weisen Bewehrungsgrade von 0.75 % bis 7.09 % auf.

##### Versuche von Hartl (1977)

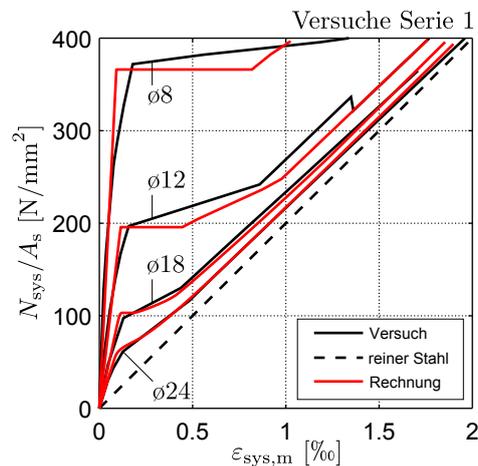


Abbildung 3.19: Serie 1 von Hartl (1977)

Tabelle 3.5: Kennwerte für die Nachrechnung der Kurzzeitversuche aus Hartl (1977)

	Daten der Probekörper			Daten der Nachrechnung		
	$h/b$ [cm]	Bew. [Stk.] $\varnothing$ [mm]	$\rho_s$ [%]	$f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\nu$ [%]	$L_{sys}$ [m]
Serie 1- $\varnothing 8$	8/8	1 $\varnothing 8$	0.75	3.3	10	0.5
Serie 1- $\varnothing 12$	8/8	1 $\varnothing 12$	1.75	3.6	10	0.5
Serie 1- $\varnothing 18$	8/8	1 $\varnothing 18$	4.03	3.5	10	0.5
Serie 1- $\varnothing 24$	8/8	1 $\varnothing 24$	7.09	3.1	10	0.5

Versuche von Empelmann (1995)

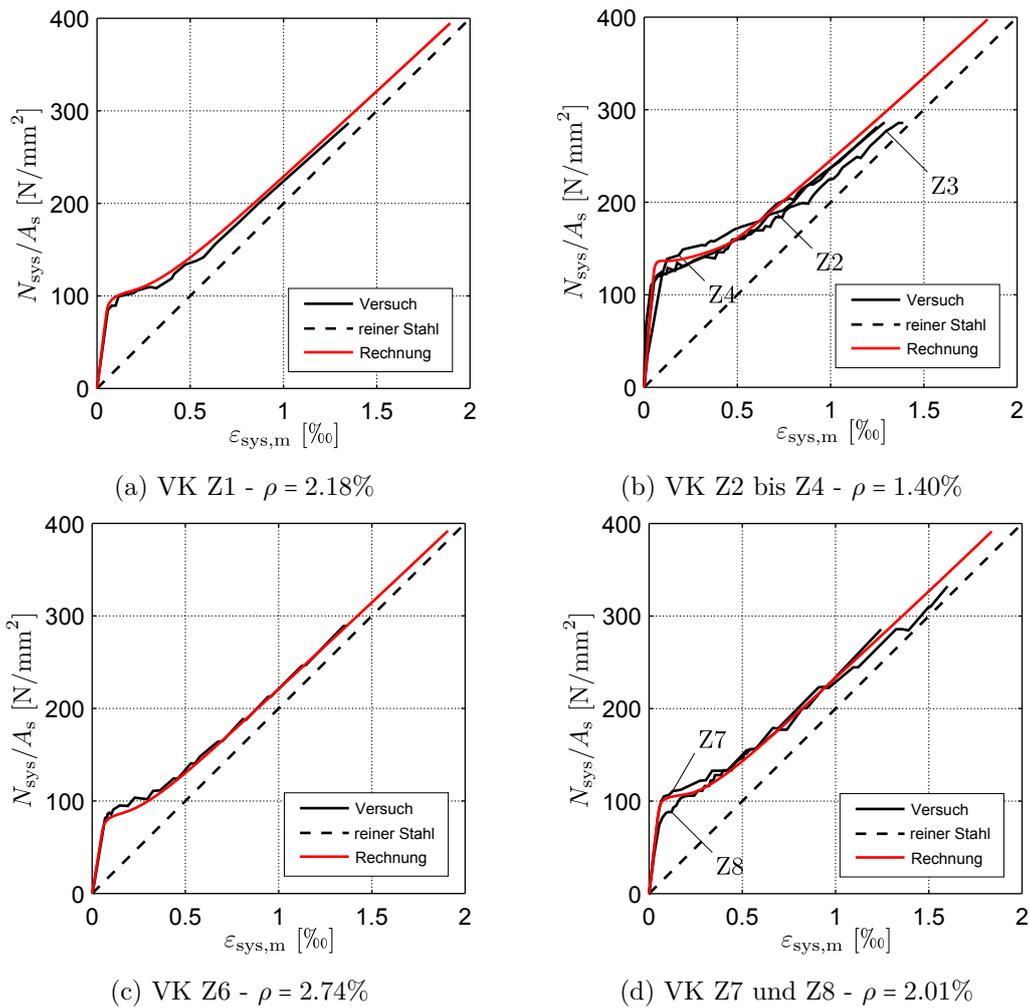


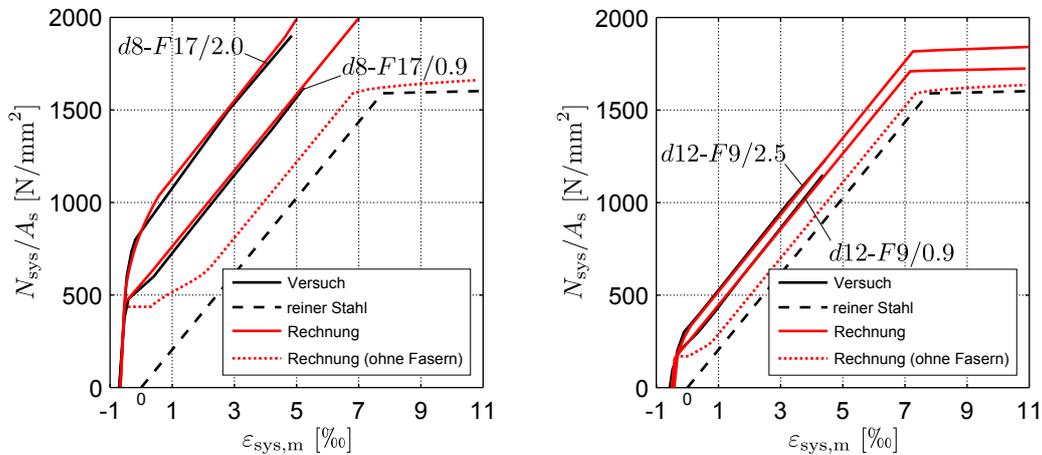
Abbildung 3.20: Kurzzeitversuche von Empelmann (1995)

Tabelle 3.6: Kennwerte für die Nachrechnung der Kurzzeitversuche aus Empelmann (1995)

Daten der Probekörper				Daten der Nachrechnung		
	$h/b$ [cm]	Bew. [Stk.]∅[mm]	$\rho_s$ [%]	$f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$v$ [%]	$L_{sys}$ [m]
Z1	12/12	4∅10	2.18	2.0	10	1.1
Z2	12/12	4∅8	1.40	2.0	10	1.1
Z3	12/12	4∅8	1.40	2.0	10	1.1
Z4	12/12	4∅8	1.40	2.0	10	1.1
Z6	15/15	4∅14	2.74	2.0	10	1.1
Z7	15/15	4∅12	2.01	2.0	10	1.1
Z8	15/15	4∅14	2.01	2.0	10	1.1

### Versuche von Leutbecher (2008)

Die betrachteten Versuchskörper zeigen den Einfluss zusätzlicher Faserbewehrung auf das Last-Verformungsverhalten von bewehrten Zugstäben. Die nachgerechneten Versuchskörper wurden mit hochfester Stabbewehrung der Güte St 1420/1570 bewehrt. Der Bewehrungsgrad der Stabbewehrung betrug 1.3 und 3.0 %, der Faserbewehrungsgrad zwischen 0.9 und 2.5 Vol.-% mit Faserschlankheiten  $l_f/d_f$  von 113.3 bzw. 60. Es zeigt sich, dass die Fasern einen sehr hohen Einfluss auf die zugversteifende Wirkung des Betons haben. In den Nachrechnungen (Abbildung 3.21a und 3.21b) wurde das Schwinden berücksichtigt, das speziell bei hochfesten Betonsorten nicht unterschätzt werden darf. Deshalb sind die Versuchs- und Nachrechnungskurven horizontal vom Ursprung versetzt dargestellt.



(a) Zugstäbe  $\rho_s = 1.3\%$ ,  $\rho_f = 0.9$  und  $2.0\%$

(b) Zugstäbe  $\rho_s = 3.0\%$ ,  $\rho_f = 0.9$  und  $2.5\%$

Abbildung 3.21: Kurzzeitversuche von Leutbecher (2008)

Tabelle 3.7: Kennwerte für die Nachrechnung der Kurzzeitversuche aus Leutbecher (2008)

Daten der Probekörper					Daten der Nachrechnung				
$h/b$ [cm]	Bew. [Stk.]Ø[mm]	$[l_f/\varnothing_f]$ [mm]	$\rho_s/\rho_f$ [%]		$f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$v$ [%]	$L_{sys}$ [m]	$s_{rm}^a$ [mm]	$\eta_f/g_f^b$ [-]
d8-F17/0.9	22/7	4Ø8	17/0.15	1.3/0.9	8.5	10	0.75	42.5	0.75/1.13
d8-F17/2.0	22/7	4Ø8	17/0.15	1.3/2.0	8.5	10	0.75	42.5	0.75/0.76
d12-F9/0.9	22/7	4Ø12	9/0.15	3./0.9	8.5	10	0.75	22.5	0.5/2.40
d12-F9/2.5	22/7	4Ø12	9/0.15	3./2.5	8.5	10	0.75	22.5	0.5/1.24

<sup>a</sup> Entspricht  $l_t/4$

<sup>b</sup> Berücksichtigung der Faserorientierung und der Faserwirksamkeit nach Leutbecher (2008)

### 3.7.2 Biegeversuche - Vergleich der M- $\kappa$ -Kurven

#### Versuche von Fritsche (1980)

Fritsche prüfte aufbauend auf den Versuchen von Hartl (1977) Rechteckquerschnitte und Plattenbalken mit variierendem Bewehrungsgrad von 0.2 % bis 2.0 % auf Biegung. Das Ziel seiner Versuche war die zugversteifende Wirkung unter Biegebeanspruchung zu untersuchen. Er wählte für die Versuchsdurchführung einen 4-Punkt-Biegezugversuch mit einem Abstand von 4.5 m der Auflager und zwei Lasteinleitungsstellen in den Drittelpunkten. Die wesentlichsten Parameter der Versuche und der Nachrechnung sind in der Tabelle 3.8 dargestellt. In allen Nachrechnungen war die Sekundärrisskraft ( $A_{c,eff}$ ) maßgebend. Insgesamt kann die Qualität der Nachrechnungsergebnisse als zufriedenstellend eingestuft werden. Einzig bei sehr geringen Bewehrungsgraden zeigt die Nachrechnung ein deutlich weiches Verhalten als der Versuch.

Tabelle 3.8: Kennwerte für die Nachrechnung der Versuche aus Fritsche (1980)

Daten der Probekörper					Daten der Nachrechnung			
$h/h_0/b/b_0/d$ [cm]	Bew. [Stk.]Ø[mm]	$\rho_s$ [%]	$N$ [kN]		$E_{cm}/f_{cm}/f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$v$ [%]	$A_{c,eff}^a$ [cm <sup>2</sup> ]	$L_{sys}$ [m]
R1	33.5/-/15.0/-/30.6	2Ø12	0.5	0	28500/-28.2/2.3	10	107	1.5
R2a	33.5/-/14.8/-/30.6	2Ø18	1.0	0	28500/-28.2/2.3	10	105	1.5
R2b	33.5/-/14.7/-/30.6	2Ø18	1.0	0	28500/-28.2/2.3	10	108	1.5
R3	33.6/-/14.9/-/30.5	2Ø24	2.0	0	28500/-28.2/2.3	10	116	1.5
R4	33.9/-/14.9/-/30.6	2Ø8	0.2	0	28500/-28.2/2.3	10	123	1.5
PB1	33.5/7.0/37.6/15.1/30.8	2Ø12	0.5	0	28500/-28.2/2.3	10	104	1.5
PB2	33.7/7.1/37.6/15.1/30.9	2Ø18	1.0	0	28500/-28.2/2.3	10	104	1.5

<sup>a</sup> Gilt pro Bewehrungsstab

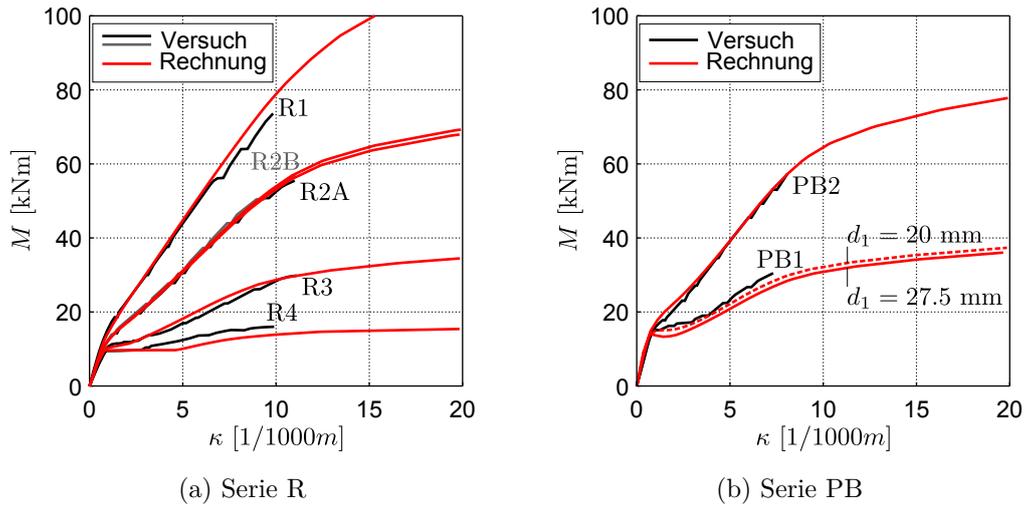


Abbildung 3.22: Kurzzeitversuche von Fritsche (1980)

### Versuche von Schlaich und Schober (1985)

In dieser Veröffentlichung wurden fünf Röhren mit drei unterschiedlichen Bewehrungsgraden unter Biegebeanspruchung geprüft. Um den Einfluss der Normalkraft quantifizieren zu können, wurde ein Bewehrungsgrad unter variierender Normalkraft getestet. Bei allen Versuchskörpern wurde die Schnittgrößenkombination  $N_E, M_E$  bei Erstrissbildung ermittelt. Ausgehend davon wurde überprüft, ob die Primärrisszugkraft (Kraft der Zugzone) größer als die Sekundärrisszugkraft (Kraft von  $A_{c,eff}$ ) ist. Dies war bei allen Probekörpern der Fall. Um die bremsende Wirkung der verteilten Bewehrung gegenüber des Aufreißens des Querschnitts zu erfassen, wurde bei allen Versuchskörpern die in der Zugzone des Zustandes I befindliche Bewehrung proportional der in  $A_{c,eff}$  befindlichen Bewehrung angerechnet (Gleichung 3.62). Bis auf den Probekörper V4 konnten sehr gute Ergebnisse in der Nachrechnung erzielt werden.

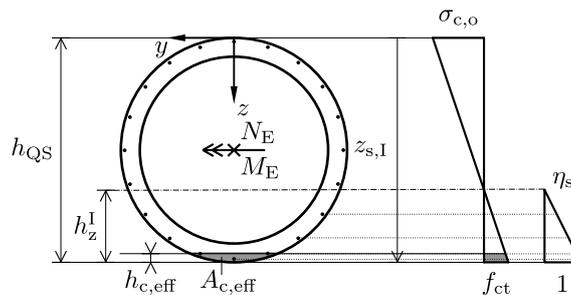


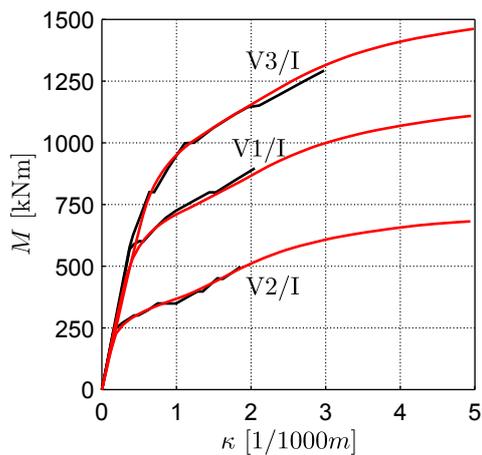
Abbildung 3.23: Qualitativer Dehnungszustand einer Röhre im Zustand I

$$A_{s,eff} = \sum_{i=1}^n \eta_{s,i} \cdot A_{s,i} \quad \text{mit} \quad \eta_{s,i} = \frac{z_{s,i} + h_z^I - h_{QS}}{z_{sI} + h_z^I - h_{QS}} \quad (3.62)$$

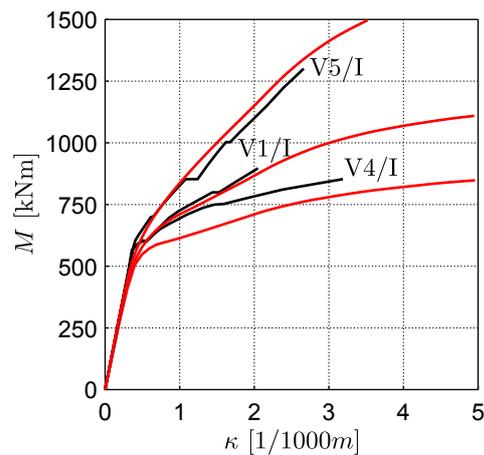
Tabelle 3.9: Kennwerte für die Nachrechnung der Versuche aus Schlaich und Schober (1985)

	Daten der Probekörper				Daten der Nachrechnung			
	$r_a/r_i/r_s$ [cm]	Bew. [Stk.]∅[mm]	$\rho_s$ [%]	$N$ [kN]	$E_{cm}/f_{cm}/f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$v$ [%]	$A_{c,eff}^a$ [cm <sup>2</sup> ]	$L_{sys}$ [m]
VK1	60/50/58	36∅10	0.818	-1000	26000/-24.0/2.0	10	23.3	5.0
VK2	60/50/58	36∅10	0.818	0	26000/-24.0/2.0	10	13.9	5.0
VK3	60/50/58	36∅10	0.818	-2000	26000/-24.0/2.0	10	31.6	5.0
VK4	60/50/58	20∅10	0.454	-1000	26000/-24.0/2.0	10	58.0	5.0
VK5	60/50/58	72∅10	1.636	-1000	26000/-24.0/2.0	10	15.8	5.0

<sup>a</sup> Gilt pro Bewehrungsstab



(a) Röhren V1, V2 und V3 bei Erstbelastung



(b) Röhren V1, V4 und V5 bei Erstbelastung

Abbildung 3.24: Kurzzeitversuche an Stahlbetonröhren von Schlaich und Schober (1985)

## 4 Berechnungen am Querschnitt

Querschnittsberechnungen bilden die Grundlage jeder Bemessung, nichtlinearen Schnittgrößen-ermittlung und Verformungsberechnung. Das Verhalten von Querschnitten stellt nach dem Stoffgesetz die zweite Integrationsstufe des allgemeinen Bauteilverhaltens dar. Demnach ist die realitätsnahe Beschreibung des Verhaltens von Querschnitten nur mit entsprechend genauen Materialmodellen möglich. Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der Querschnittsberechnungen. Ausgehend von Abbildungsmöglichkeiten beanspruchter Querschnitte werden Algorithmen zur Berechnung reaktiver Schnittgrößen  $\vec{s}_R = (N_x, M_y, M_z)_R$  und zum Finden von Dehnungszuständen vorgestellt und diskutiert. Die Betrachtung am Querschnitt wird genutzt, um die Zeitschrittmethod zur Beschreibung der zeitlichen Effekte Kriechen und Schwinden ausführlich zu erläutern und mit bekannten Verfahren (Verfahren nach Trost, Verfahren effektiver Steifigkeiten) zu vergleichen.

### 4.1 Bestandteile von Querschnitten, Definitionen

Die Abbildung 4.1 zeigt einen allgemeinen Verbundquerschnitt, der aus beliebig umrandeten und punktförmigen Teilflächen zusammengesetzt ist. Punktförmige Teilflächen stellen einen Sonderfall allgemeiner Teilflächen dar. Sie weisen vernachlässigbare Flächenmomente erster oder zweiter Ordnung auf ( $S_{y,eig}, S_{z,eig}, I_{y,eig}, I_{z,eig}$ ) und werden daher nur durch ihre Fläche und Position definiert.

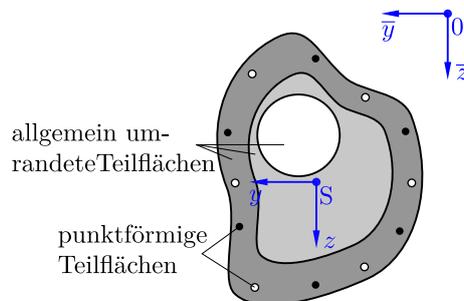


Abbildung 4.1: Allgemeiner Verbundquerschnitt

### 4.2 Charakteristische Kennwerte von Querschnitten

Der ideelle Schwerpunkt  $S_{id}$  ist ein zentraler Kennwert für Querschnitts- und Stabwerksberechnungen, da dieser den Bezugspunkt der Schnittgrößen darstellt. Er kann bezüglich eines beliebigen  $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -Koordinatensystems aus den Flächenmomenten erster Ordnung und dem Flächeninhalt ermittelt werden ( $\bar{y}_s = S_z/A, \bar{z}_s = S_y/A$ ). Die Fläche und die Trägheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  werden bei linear elastischen Berechnungen zur Ermittlung der Dehn- und Biegesteifigkeiten

herangezogen. Bei nichtlinearem Materialverhalten können nur die Startwerte der Steifigkeiten über Querschnittskennwerte ermittelt werden. Die Berechnung beanspruchungsabhängiger Steifigkeiten erfolgt über die Beziehungen  $\partial N/\partial \varepsilon_0$  bzw.  $\partial M/\partial \kappa$  (siehe Abschnitt 4.5).

Die Ermittlung der ideellen Querschnittswerte eines allgemeinen Verbundquerschnittes erfolgt nach den Gleichungen 4.1 bis 4.5. Hier stellen  $n_p$  die Anzahl allgemein umrandeter Teilflächen  $A_i$  ( $A_i < 0 \vee A_i > 0$ ),  $n_f$  die Anzahl punktförmiger Füllungen  $A_j$  ( $A_j > 0$ ) und  $n_o$  die Anzahl punktförmiger Öffnungen  $A_k$  ( $A_k < 0$ ) dar. Füllungen werden durch positive, Öffnungen durch negative Flächeninhalte beschrieben. Die Umrechnung von Brutto- auf Nettowerte erfolgt über den Faktor  $\eta_e$ . Jede beliebige Fläche kann in eine andere Fläche mit einem ungleichen Material (hier: Basismaterial) eingebettet sein. Die Basisfläche wird dann verdrängt bzw. ersetzt. Dies wird über die  $\eta_e$ -Faktoren berücksichtigt. Gibt es zu einer Fläche keine verdrängte Basisfläche, so gilt  $\alpha_{eB} = 0$ .

$$A_{id} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \eta_{e,i} \cdot \int dA_i \right) + \sum_{j=1}^{n_f} \eta_{e,j} \cdot A_j + \sum_{k=1}^{n_o} \alpha_{eB,k} \cdot A_k \quad (4.1)$$

$$S_{y,id} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \eta_{e,i} \cdot \int z dA_i \right) + \sum_{j=1}^{n_f} \eta_{e,j} \cdot A_j \cdot z_j + \sum_{k=1}^{n_o} \alpha_{eB,k} \cdot A_k \cdot z_k \quad (4.2)$$

$$S_{z,id} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \eta_{e,i} \cdot \int y dA_i \right) + \sum_{j=1}^{n_f} \eta_{e,j} \cdot A_j \cdot y_j + \sum_{k=1}^{n_o} \alpha_{eB,k} \cdot A_k \cdot y_k \quad (4.3)$$

$$I_{y,id} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \eta_{e,i} \cdot \int z^2 dA_i \right) + \sum_{j=1}^{n_f} \eta_{e,j} \cdot A_j \cdot z_j^2 + \sum_{k=1}^{n_o} \alpha_{eB,k} \cdot A_k \cdot z_k^2 \quad (4.4)$$

$$I_{z,id} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \eta_{e,i} \cdot \int y^2 dA_i \right) + \sum_{j=1}^{n_f} \eta_{e,j} \cdot A_j \cdot y_j^2 + \sum_{k=1}^{n_o} \alpha_{eB,k} \cdot A_k \cdot y_k^2 \quad (4.5)$$

mit:  $n_p$  ... Anzahl allgemein umrandeter Teilflächen (Füllungen, Öffnungen)

$n_f$  ... Anzahl punktförmiger Füllungen

$n_o$  ... Anzahl punktförmiger Öffnungen

$\alpha_e$  ...  $E_i/E_{ref}$  bzw.  $E_j/E_{ref}$

$\alpha_{eB}$  ...  $E$ -Modul-Verhältnis des verdrängten/ausgesparten Basismaterials

es gilt: Füllungen:  $A_i$  bzw.  $A_j$  ... pos.

Öffnungen:  $A_i$  bzw.  $A_k$  ... neg.

$$\eta_e = \begin{cases} (\alpha_e - \alpha_{eB}) & \dots \text{Lochanteil wird berücksichtigt} \\ \alpha_e & \dots \text{Lochanteil bleibt unberücksichtigt} \end{cases}$$

Lochanteil entspricht der verdrängten Fläche des Basismaterials

Der Referenzwert des E-Moduls  $E_{ref}$  kann grundsätzlich beliebig gewählt werden (Bsp.: 1, 10, 1000, E-Modul einer Teilfläche, ...). In vielen Fällen ist ein Hauptmaterial vorhanden, das dann als Referenz gewählt wird.

### Der Integralsatz von Green zur Flächenberechnung

Die Ermittlung des Flächeninhalts und der Flächenmomente kann eine durchaus komplexe Aufgabe darstellen. Mit dem Integralsatz von Green lassen sich diese sehr einfach bestimmen. Er besagt, dass sich ein allgemeines Doppelintegral zweier Funktionen  $f(y, z)$  und  $g(y, z)$  in ein Ring- bzw. Kurvenintegral überführen lässt:

$$\iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) \right) dz dy = \oint_C (g(y, z)dy + f(y, z)dz) \quad (4.6)$$

Mit  $f(x, y) = y$  und  $g(x, y) = -z$  lässt sich der Flächeninhalt durch Integration entlang der Umrandungskurve  $C$  wie folgt bestimmen:

$$A = \oint_C y dz = - \oint_C z dy = \frac{1}{2} \cdot \left( \oint_C y dz - \oint_C z dy \right) \quad (4.7)$$

Für  $y = \gamma_1(\lambda)$ ,  $dy = \gamma_1'(\lambda)$  und  $z = \gamma_2(\lambda)$ ,  $dz = \gamma_2'(\lambda)$  kann die zuvor angeschriebene Gleichung auch in die Parameterdarstellung übergeführt werden:

$$A = \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2'(\lambda) d\lambda = - \int_a^b \gamma_2(\lambda) \cdot \gamma_1'(\lambda) d\lambda \quad (4.8)$$

Die Fläche  $A$  wird hierbei positiv, wenn die Umrandungskurve gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) umfahren wird, und negativ bei Umfahrung im Uhrzeigersinn.

### Spezialfall Polygonzug

Die Abbildung 4.2 zeigt das Teilstück  $p_i$  eines umrandenden Polygonzugs, mit dem Anfangspunkt  $A$  und dem Endpunkt  $E$ . Die Parameterdarstellung von  $p_i(\lambda)$  für  $0 \leq \lambda \leq 1$  lautet:

$$p_i : \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda) \\ \gamma_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_E - y_A \\ z_E - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Mit der ersten Ableitung von  $p_i(\lambda)$  nach  $\lambda$ :

$$p_i' : \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda)' \\ \gamma_2(\lambda)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

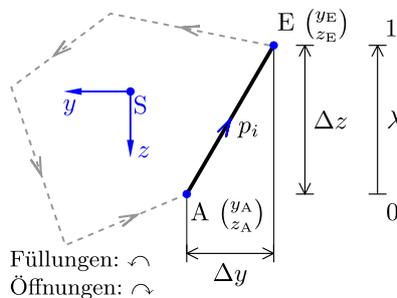


Abbildung 4.2: Darstellung eines Polygonabschnitts

Die eingeschlossene Fläche dieses Teilstückes ergibt sich durch Einsetzen der Beziehungen aus den Gleichungen 4.9 und 4.10 in die Gleichung 4.8:

$$A_{p_i} = \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2(\lambda)' \, d\lambda = \int_0^1 (y_A + \Delta y \cdot \lambda) \cdot \Delta z \, d\lambda = \left( y_A + \frac{1}{2} \cdot \Delta y \right) \cdot \Delta z \quad (4.11)$$

Aufsummieren der Flächen aller Teilstücke liefert die eingeschlossene Gesamtfläche des Polygonzugs:

$$A = \sum_{i=1}^{n_p} A_{p_i} \quad (4.12)$$

Analog zur obigen Gleichung folgt für  $S_{y,p_i}$ ,  $S_{z,p_i}$ ,  $I_{y,p_i}$ ,  $I_{z,p_i}$  und  $I_{yz,p_i}$ :

$$\begin{aligned} S_{y,p_i} &= \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2(\lambda)' \cdot z(\lambda) \, d\lambda = \int_0^1 (y_A + \Delta y \cdot \lambda) \cdot (z_A + \Delta z \cdot \lambda) \cdot \Delta z \, d\lambda \\ &= \left( y_A \cdot z_A + \frac{1}{2} \cdot \Delta y \cdot z_A + \frac{1}{2} \cdot y_A \cdot \Delta z + \frac{1}{3} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} S_{z,p_i} &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2(\lambda)' \cdot y(\lambda) \, d\lambda = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (y_A + \Delta y \cdot \lambda)^2 \cdot \Delta z \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( y_A^2 + y_A \cdot \Delta y + \frac{1}{3} \cdot \Delta y^2 \right) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} I_{y,p_i} &= \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2(\lambda)' \cdot z(\lambda)^2 \, d\lambda \\ &= \int_0^1 (y_A + \Delta y \cdot \lambda) \cdot (z_A + \Delta z \cdot \lambda)^2 \cdot \Delta z \, d\lambda \\ &= \left( y_A \cdot z_A^2 + y_A \cdot z_A \cdot \Delta z + \frac{1}{3} \cdot y_A \cdot \Delta z^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot z_A^2 \cdot \Delta y + \frac{2}{3} \cdot z_A \cdot \Delta y \Delta z + \frac{1}{4} \cdot \Delta y \cdot \Delta z^2 \right) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} I_{z,p_i} &= \frac{1}{3} \cdot \int_a^b \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma_2(\lambda)' \cdot y(\lambda)^2 \, d\lambda \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (y_A + \Delta y \cdot \lambda)^3 \cdot \Delta z \, d\lambda \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( y_A^3 + y_A^2 \cdot \Delta y + \frac{1}{3} \cdot y_A \cdot \Delta y^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot y_A^2 \cdot \Delta y + \frac{2}{3} \cdot y_A \cdot \Delta y^2 + \frac{1}{4} \cdot \Delta y^3 \right) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.3 Spannungsintegration

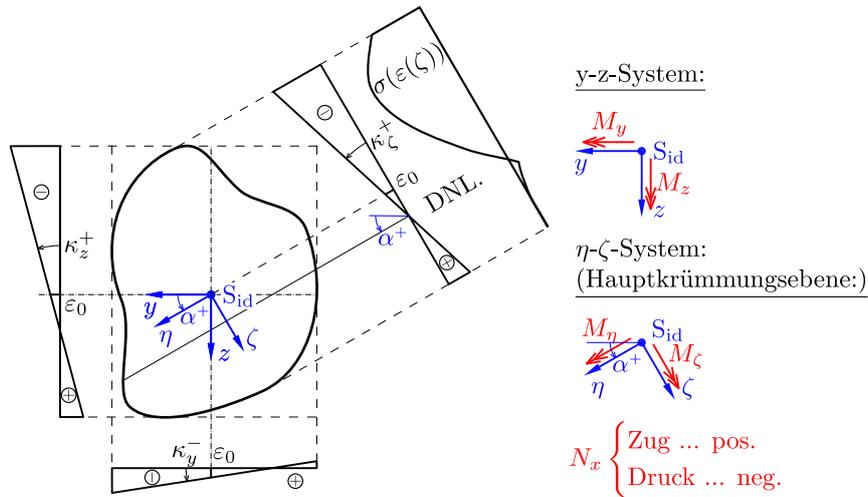


Abbildung 4.3: Querschnitt unter zweiachsiger Biegebeanspruchung

Der Dehnungszustand bei biaxialer Biegebeanspruchung mit Normalkraft kann wie folgt eindeutig beschrieben werden:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 + k_y \cdot y + k_z \cdot z + \varepsilon_{\text{add}}(y, z) \quad (4.17)$$

Mit dem Term  $\varepsilon_{\text{add}}(y, z)$ , der für jeden Teilquerschnitt anders sein kann, werden Anteile aus Vorspannung, Schwinden, Kriechen (siehe Unterabschnitt 4.6.3) etc. berücksichtigt.

Die reaktiven Schnittgrößen für einen beliebigen Dehnungszustand lauten:

$$N = \sum_{i=1}^{n_p} \int \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z)) \, dA_i + \sum_{j=1}^{n_f} \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z))_j \cdot A_j + \sum_{k=1}^{n_o} \sigma(\varepsilon(y, z))_{B,k} \cdot A_k \quad (4.18)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n_p} \int \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z)) \cdot z \, dA_i + \sum_{j=1}^{n_f} \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z))_j \cdot z \cdot A_j + \sum_{k=1}^{n_o} \sigma(\varepsilon(y, z))_{B,k} \cdot z \cdot A_k \quad (4.19)$$

$$M_z = - \left( \sum_{i=1}^{n_p} \int \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z)) \cdot y \, dA_i + \sum_{j=1}^{n_f} \bar{\sigma}(\varepsilon(y, z))_j \cdot y \cdot A_j + \sum_{k=1}^{n_o} \sigma(\varepsilon(y, z))_{B,k} \cdot y \cdot A_k \right) \quad (4.20)$$

mit:  $n_p$  ... Anzahl allgemein umrandeter Teilflächen

$n_f$  ... Anzahl punktförmiger Füllungen

$n_o$  ... Anzahl punktförmiger Öffnungen

Es gilt:

Füllungen:  $A_i$  bzw.  $A_j$  ... pos.

Öffnungen:  $A_i$  bzw.  $A_k$  ... neg.

$$\bar{\sigma}(\varepsilon(y, z)) = \begin{cases} (\sigma(\varepsilon(y, z)) - \sigma(\varepsilon(y, z))_B) & \dots \text{Lochanteil wird berücksichtigt} \\ \sigma(\varepsilon(y, z)) & \dots \text{Lochanteil bleibt unberücksichtigt} \end{cases}$$

$\sigma(\varepsilon(y, z))_B$  ... zugehörige Spannung des verdrängten Basismaterials

Die Spannungsintegration kann analytisch oder numerisch erfolgen, wobei in beiden Fällen der Green'sche Integralsatz anwendbar ist. Bei linear elastischem Materialverhalten stellt die analytische Ermittlung der reaktiven Schnittgrößen kein Problem dar. Sie wäre aus der sinngemäßen Erweiterung der Gleichungen 4.11 bis 4.14 mit  $\sigma(y, z)$  herleitbar. Bei einem allgemeinen Stoffgesetz, auch wenn der Spannungs-Dehnungs-Verlauf analytisch erfassbar ist, kann die analytische Spannungsintegration zu numerischen Problemen führen. Pfeiffer (2004) macht in seiner Dissertation darauf aufmerksam. Daher empfiehlt es sich eigentlich immer, die Spannungsintegration numerisch durchzuführen, wenngleich diese Maßnahme mit längerer Rechendauer und unter Umständen geringerer Genauigkeit verbunden ist. In weiterer Folge wird die numerische Spannungsintegration für allgemein nichtlineare Stoffgesetze vorgestellt.

### Spannungsintegration mit dem Integralsatz von Green in Kombination mit numerischer Quadratur

Der Satz von Green kann mit jedem numerischen Quadraturverfahren kombiniert werden. Zu den bekanntesten Methoden zählen die Simpsonregel, Trapezregel oder auch das Verfahren nach Gauss-Legendre. Aufgrund der hohen Genauigkeit, bei vergleichsweise geringer Stützstellenanzahl, ist die Quadratur nach Gauss-Legendre besonders zu empfehlen. Weitere Verfahren und eine Entscheidungshilfe für die Wahl des geeigneten Verfahrens lassen sich aus Engeln-Müllges et al. (2011) entnehmen.

Die Gauss-Quadratur erfolgt nach folgender Regel :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{g=1}^n c_{n,g} \cdot f\left(\frac{(b-a) \cdot r_{n,g} + b + a}{2}\right) \quad (4.21)$$

mit:  $n$  ... Anzahl der Integrationspunkte

$c_{n,g}$  ... Positionen der Integrationspunkte im Intervall  $-1 \rightarrow 1$

$r_{n,g}$  ... Wichtungsfaktoren der Integrationspunkte im Intervall  $-1 \rightarrow 1$

Ein Auszug der Stützstellen und Wichtungsfaktoren für unterschiedliche Anzahlen an Stützstellen ist der unten angeführten Tabelle zu entnehmen. Werte für andere Anzahlen an Stützstellen können Schwarz (1988), Engeln-Müllges et al. (2011), Faires und Burden (1994) oder ähnlicher Literatur entnommen werden.

Tabelle 4.1: Stützstellen und Gewichtungsfaktoren der Gauss-Quadratur für das Intervall a:b = -1:1

$n$	$r_{n,g}$	$c_{n,g}$
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	$\pm$ 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	$\pm$ 0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88888
...	...	...
5	$\pm$ 0.90617 98459 38664 $\pm$ 0.56846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88888
...	...	...

Bei Kombination des Green'schen Integralsatzes mit numerischer Quadratur empfiehlt es sich, das Koordinatensystem in die Hauptkrümmungsebene ( $\eta$ - $\zeta$ -Ebene, Gleichung 4.27) zu transformieren. Dadurch ist die Spannung nur mehr von einer Koordinate abhängig ( $\sigma = f(\zeta)$ ) und die numerische Integration muss nur einmal durchgeführt werden - siehe Abbildung 4.4. Für jeden Teilabschnitt  $p_i$  des Polygonzugs werden die Teilschnittgrößen nach den Gleichungen 4.22 bis 4.24 berechnet. Diese jeweils für  $N_{x,p_i}$ ,  $M_{\eta,p_i}$  oder  $M_{\zeta,p_i}$  angegebene Funktion wird bei der Quadratur mit  $n$  Stützstellen  $n$ -mal ausgewertet, gewichtet und aufsummiert. Im Falle der Gauss'schen Quadratur werden die Positionen  $\lambda_{n,g}$  durch die Faktoren  $r_{n,g}$  und die Gewichtungen durch  $c_{n,g}$  bestimmt.

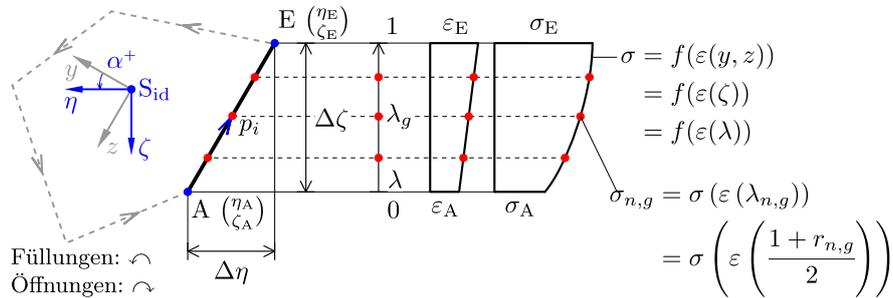


Abbildung 4.4: Anwendung der Gauss-Legendre Quadratur auf einen Polygonabschnitt (Hier dargestellt: 3 Stützstellen)

$$N_{x,p_i} = \sum_{g=1}^n (\eta_A + \Delta\eta \cdot \lambda_{n,g}) \cdot \Delta\zeta \cdot \sigma(\varepsilon(\lambda_{n,g})) \cdot c_{n,g} \quad (4.22)$$

$$M_{\eta,p_i} = \sum_{g=1}^n (\eta_A + \Delta\eta \cdot \lambda_{n,g}) \cdot (\zeta_A + \Delta\zeta \cdot \lambda_{n,g}) \cdot \Delta\zeta \cdot \sigma(\varepsilon(\lambda_{n,g})) \cdot c_{n,g} \quad (4.23)$$

$$M_{\zeta,p_i} = \sum_{g=1}^n -\frac{1}{2} \cdot (\eta_A + \Delta\eta \cdot \lambda_{n,g})^2 \cdot \Delta\zeta \cdot \sigma(\varepsilon(\lambda_{n,g})) \cdot c_{n,g} \quad (4.24)$$

$$\text{mit: } \lambda_{n,g} = \frac{1+r_{n,g}}{2} \quad \dots \text{ für das Intervall } 0 \rightarrow 1 \quad (4.25)$$

Die Gesamtschnittgrößen  $N_x$ ,  $M_\eta$  bzw.  $M_\zeta$  ergeben sich durch Summation der Teilschnittgrößen  $N_{x,p_i}$ ,  $M_{\eta,p_i}$  bzw.  $M_{\zeta,p_i}$  aller  $n_p$  Polygonabschnitte:

$$\vec{s} = \begin{Bmatrix} N_x \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_p} \begin{Bmatrix} N_{x,p_i} \\ M_{\eta,p_i} \\ M_{\zeta,p_i} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Die Momente  $M_y$  und  $M_z$  bezüglich der  $y$ - $z$ -Ebene erfolgen durch Rücktransformation nach Gleichung 4.28.

Transformation von  $P$  (Punkt, Momentenvektor) von der  $y$ - $z$ -Ebene in die  $\eta$ - $\zeta$ -Ebene:

$$P(\eta, \zeta) = T \cdot P(y, z) \quad (4.27)$$

Rücktransformation von  $P$  von der  $\eta$ - $\zeta$ -Ebene in die  $y$ - $z$ -Ebene ( $M_y, M_z$ ):

$$P(y, z) = T' \cdot P(\eta, \zeta) \quad (4.28)$$

mit:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$T' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

### Genauigkeit des Verfahrens

Die meisten Querschnittsformen im Bauwesen lassen sich im kartesischen Koordinatensystem als Polygonzug exakt beschrieben (Rechteck, Kasten, Plattenbalken, Trapez, ...). Alle anderen Formen, für die dies nicht zutrifft (Kreis, Ellipse, ...), lassen sich durch Polygonzüge zumindest beliebig genau annähern (siehe Abbildung 4.5). Daher erscheint es vertretbar auch allgemeine Kurvenformen durch Polygonzüge zu modellieren. Die Tabelle 4.2 demonstriert an einem Kreis die Abweichungen des Flächeninhalts bei unterschiedlicher Modellierung des Umfangspolygons. Die Näherung des Kreises erfolgt hier durch eingeschriebene, umschriebene oder aus beiden Varianten gemittelte, regelmäßige,  $n$ -Ecke. Erwartungsgemäß sinkt die Abweichung mit steigender Anzahl der Eckpunkte, wobei sich eingeschriebene  $n$ -Ecke von „unten“ und umschriebene  $n$ -Ecke von „oben“ der realen Kreisfläche annähern. Die Differenz der Flächen bei gleicher Eckanzahl kann durch Mittelung beider Varianten deutlich gesenkt werden. Für ingenieurmäßige Berechnungen sollte die Modellierung eines Kreises mit 16 bis 64 Eckpunkten ausreichend genau sein.

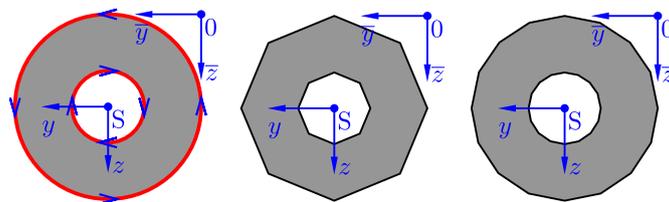


Abbildung 4.5: Polygonale Annäherung eines Ringquerschnitts (von links nach rechts: Originalquerschnitt, Polygonzug mit 8 Eckpunkten, Polygonzug mit 16 Eckpunkten).  
 Füllungen: ◐, Öffnungen: ◑

Tabelle 4.2: Differenz  $\delta A$  [%] einer Kreisfläche in Abhängigkeit der Teilung und Abbildung

Teilungen	Polygonzug		
	eingeschrieben	umgeschrieben	gemittelt
4	-363.4	273.2	-72.4
8	-99.7	54.8	-24.0
16	-25.5	13.1	-6.3
32	-6.4	3.2	-1.6
64	-1.6	0.8	-0.4

$\delta A = (A_{\text{num.}}/A_{\text{exakt}} - 1) \cdot 1000$

Mit der numerischen Quadratur nach Gauss-Legendre können bei der Wahl von  $n$  Stützstellen Polynome bis  $(2n-1)$ -ten Grades exakt integriert werden. Werden für das Stoffgesetz Funktionen von maximal zweitem Grad (parabelförmige Arbeitslinie) und die Umrandung als Polygonzug festgelegt, so ist die Funktion der Normalkraft maximal quadratisch bzw. jene des Moments maximal kubisch. Somit reichen bei der Quadratur nach Gauss für diese Fälle drei Stützstellen aus.

Tabelle 4.3: Genauigkeit der Gauss'schen Quadratur

	rechteckig			dreieckig			halbkreisförmig <sup>b</sup>		
PRD als Polygon ( $\Delta\varepsilon = 0.5\%$ ), $\sigma(\varepsilon)$ aus linearer Interpolation:									
$n$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\delta N$ [%] <sup>a</sup>	-12.3	-12.9	-19.9	-16.4	-17.2	-26.5	-19.5	-19.9	-20.0
$\delta M_y$ [%] <sup>a</sup>	-9.8	-10.3	-15.9	-59.3	-7.4	-19.2	-15.4	-15.5	-14.8
PRD als Polygon ( $\Delta\varepsilon = 0.1\%$ ), $\sigma(\varepsilon)$ aus linearer Interpolation:									
$n$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\delta N$ [%] <sup>a</sup>	-0.7	-0.4	-0.9	-0.9	-0.5	-1.2	-2.6	-2.7	-2.6
$\delta M_y$ [%] <sup>a</sup>	-0.5	-0.3	-0.7	-48.2	-0.2	-0.9	-2.1	-2.2	-2.0
PRD als analytische Funktion, $\sigma(\varepsilon)$ exakt berechnet:									
$n$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\delta N$ [%] <sup>a</sup>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.9	-1.9	-1.9
$\delta M_y$ [%] <sup>a</sup>	0.0	0.0	0.0	-47.6	0.0	0.0	-1.6	-1.6	-1.6

<sup>a</sup>  $\delta s = (s_{\text{num.}}/s_{\text{exakt}} - 1) \cdot 1000$ ,  $s \dots$  Schnittgröße

<sup>b</sup> Der Halbkreis wurde durch ein flächengleiches, regelmäßiges 16-Eck angenähert.

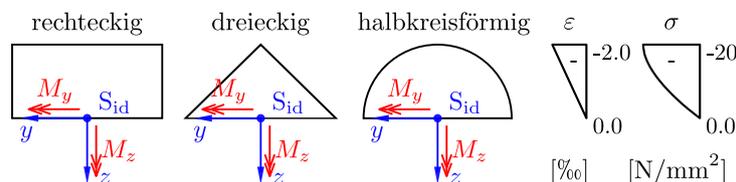


Abbildung 4.6: Form der Druckzonen und Bezugspunkte der Schnittgrößen aus Tabelle 4.3

Die Tabelle 4.3 zeigt den Vergleich der numerisch und analytisch ermittelten reaktiven Schnittgrößen für drei unterschiedliche Druckzonenformen. Am Druckrand wurde jeweils eine Stauchung

von  $-2.0 \text{ ‰}$  eingepreßt. Das Arbeitsgesetz wurde parabelförmig mit einem Scheitelwert von  $-20.0 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Es entspricht dem für die Bemessung gemäß ON-EN1992-1-1 (2011) anzusetzenden Arbeitsgesetz für Beton der Güte C30/37. Die Verhältniswerte in der Tabelle sind in Promille angegeben.

Es ist zu erkennen, dass beim Ansatz der analytischen Funktion des Parabel-Rechteck-Diagrammes für jede Druckzonenform maximal drei Stützstellen ausreichen, um sowohl Normalkräfte, als auch Momente exakt zu bestimmen. Die Tabelle veranschaulicht aber auch, dass die Genauigkeit der Schnittgrößenberechnung nicht alleine von der Anzahl der Stützstellen abhängt. Das Potential der Gauss'schen Quadratur kann nur dann ausgeschöpft werden, wenn die Funktionswerte von  $f(\lambda_{n,g})$  an den Stützstellen  $\lambda_{n,g}$  (Gleichung 4.22 bis 4.24) genau ausgewertet werden können. Eine polygonal angenäherte Arbeitslinie mit grober Auflösung kann bei einfacher linearer Interpolation zu verhältnismäßig großen Abweichungen führen. Die Genauigkeit ist über die Diskretisierung sehr effektiv beeinflussbar. Dieser Effekt könnte bei Stabwerksberechnungen trotz feiner Diskretisierung des Systems Ursache für Abweichungen in den Last-Verformungs-Kurven sein. Interpolationen höherer Ordnung (quadratisch, kubisch, spline, ...) können die Abweichungen auch bei grober Auflösung minimieren. Sie sind bei der Programmierung von Algorithmen jedoch mit Vorsicht einzusetzen, da diese Methoden zwischen den Stützstellen der Interpolation auch überdurchschnittlich abweichen können.

#### 4.4 Finden des Dehnungszustandes zu einwirkenden Schnittgrößen

Jedem Dehnungszustand  $\varepsilon(y, z)$  (Gleichung 4.17) kann eine eindeutige Schnittgrößenkombination  $\vec{s}_R = (N_x, M_y, M_z)_R$  zugewiesen werden. Soll nun der zu einer einwirkenden Schnittgrößenkombination gehörige Dehnungszustand gefunden werden, müssen die drei Komponenten  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$  so lange verändert werden, bis das Kräftegleichgewicht erfüllt ist ( $\vec{s}_E = \vec{s}_R$ ). Aus mathematischer Sicht ist die Lösung eines mehrdimensionalen nichtlinearen Gleichungssystems zu finden, wofür sich das Newton-Verfahren (siehe Engeln-Müllges et al. (2011)) sehr gut eignet. Hierbei handelt es sich um ein iteratives Verfahren, das den aktuellen Vektor  $\vec{p}^{(\nu)} = (\varepsilon_0^{(\nu)}, \kappa_y^{(\nu)}, \kappa_z^{(\nu)})$  in jedem Schritt  $\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) um einen Korrekturvektor  $\vec{\Delta p}^{(\nu+1)} = (\Delta\varepsilon_0^{(\nu+1)}, \Delta\kappa_y^{(\nu+1)}, \Delta\kappa_z^{(\nu+1)})$  verbessert, bis die gewollte Genauigkeit  $\varepsilon_{\text{tol}}$  erreicht ist (siehe Gleichung 4.31 und Abbildung 4.7). Das Abbruchkriterium kann entweder absolut oder relativ formuliert werden. In vielen Fällen ist es am zweckmäßigsten, die Iteration so lange durchzuführen, bis die euklidische Norm des Residuen-Vektors kleiner als ein Absolutwert ist.

$$\|\vec{s}_{\text{res}}\|_2 = \|\vec{s}_E - \vec{s}_R\|_2 = \left\| \begin{Bmatrix} N_{x,E} \\ M_{y,E} \\ M_{z,E} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{x,R} \\ M_{y,R} \\ M_{z,R} \end{Bmatrix} \right\|_2 \leq \varepsilon_{\text{tol}}. \quad (4.31)$$

Durch Aufstellen der Funktionalmatrix  $J_f$  (Jacobi-Matrix) und Lösen des linearen Gleichungssystems  $J_f(\vec{p}^{(\nu)}) \cdot \vec{\Delta p}^{(\nu+1)} = -\vec{s}_{\text{res}}^{(\nu)}$  kann der Korrekturvektor  $\vec{\Delta p}^{(\nu+1)}$  bestimmt werden. Die Funktionalmatrix lautet:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N_x}{\partial \kappa_y} & \frac{\partial N_x}{\partial \kappa_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_y}{\partial \kappa_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \kappa_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_z}{\partial \kappa_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \kappa_z} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Jedes Argument der Funktionalmatrix entspricht der Neigung einer Tangente an das  $n$ -dimensionale Gebiet. Bei numerischen Berechnungen können die partiellen Differentialquotienten  $\partial f_i / \partial x_j$  nur durch partielle Differenzenquotienten  $\Delta f_i / \Delta x_j$  ( $i = 1 : 1 : n$ ,  $j = 1 : 1 : n$ ) beschrieben werden und sind über Interpolationspolynome, -splines, spezielle Verfahren (Romberg-Verfahren) oder adaptive numerische Methoden bestimmbar (vgl. Engeln-Müllges et al. (2011)). Da das Newton-Verfahren auch bei ungenau ermittelten Tangentenneigungen konvergiert, sind die Anforderungen an die numerische Differenziation nicht ausgesprochen hoch. Deshalb reicht es zumeist aus, die Differenzenquotienten aus der Rückwärts-, Vorwärts- oder zentralen Mittelpunkt-Differenziation mit drei Punkten zu bestimmen (Gleichungen 4.33 bis 4.35). Im Ablauf der eigenen Berechnungsroutine wurde die Rückwärts-Differenziation als Methode festgelegt.

Rückwärtsdifferenziation:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + F(h) \quad (4.33)$$

Vorwärtsdifferenziation:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + F(h) \quad (4.34)$$

Dreipunkte-Mittelpunkt-Formel:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2 \cdot h} + F(h^2) \quad (4.35)$$

$F(h^n)$  ... Fehlerterm, der von der Wahl der Schrittweite  $h$  abhängt

Durch die „aufrauende“ Wirkung der Differenziation ist eine ausreichende Genauigkeit numerischer Verfahren schwerer zu erzielen als bei der Integration. Die Ergebnisqualität hängt stark von der Wahl der Schrittweite  $h$  ab, deren optimale Größe nicht bestimmbar ist. Mit sinkendem  $h$  minimiert sich der Diskretisierungsfehler (Abbruchfehler), während gleichzeitig der Rundungsfehler zunimmt. In der Arbeit wurde der Vorschlag nach Busjaeger und Quast (1990) übernommen, die Schrittweite als Relativwert zu formulieren und mit absolutem Mindestwert festzulegen:

$$h = \Delta \varepsilon_0 = f_1 \cdot \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad |\Delta \varepsilon_0| \geq f_2 \quad [\%] \quad (4.36)$$

$$h = \Delta \kappa_y = f_1 \cdot \kappa_y \quad \text{und} \quad |\Delta \kappa_y| \geq f_2 \quad [1/1000\text{m}] \quad (4.37)$$

$$h = \Delta \kappa_z = f_1 \cdot \kappa_z \quad \text{und} \quad |\Delta \kappa_z| \geq f_2 \quad [1/1000\text{m}] \quad (4.38)$$

Gute Ergebnisse konnten mit Werten für  $f_1$  und  $f_2$  zwischen 0.001 und 0.01 erzielt werden.

Neben der allgemeinen Form existieren auch Variationen des Newtonverfahrens, die angewendet werden können, um sowohl die Performanz als auch das Konvergenzverhalten positiv zu beeinflussen:

- **Primitivform des Newtonverfahrens:** Hier wird die Funktionalmatrix  $J_f$  über alle Iterationsschritte konstant gehalten.
- **Variation der Primitivform:** Die Funktionalmatrix  $J_f$  wird immer für eine definierte Anzahl an Iterationsschritten konstant gehalten und dann immer wieder aktualisiert.
- **gedämpftes Newtonverfahren:** Hier wird der verbesserte Lösungsvektor  $\vec{p}^{(\nu+1)}$  durch einen gedämpften Korrekturvektor berechnet:

$$\vec{p}^{(\nu+1)} = \vec{p}^{(\nu)} + r_{\nu+1} \cdot \vec{\Delta p}^{(\nu+1)} \quad (4.39)$$

Für den Dämpfungsbeiwert gilt:  $0 \leq r_{\nu+1} \leq 1$ . Das Dämpfen ist bei allen Formen des Newtonverfahrens anwendbar und kann zu sichererer Konvergenz verhelfen.

Verglichen mit der allgemeinen Form des Newtonverfahrens, sind bei der Primitivform oder auch der Variation der Primitivform mehr Iterationsschritte notwendig, um die Lösung für ein Problem zu finden. Ob die Performanz jedoch trotzdem höher ausfällt, ist bei jeder Problemstellung zu überprüfen.

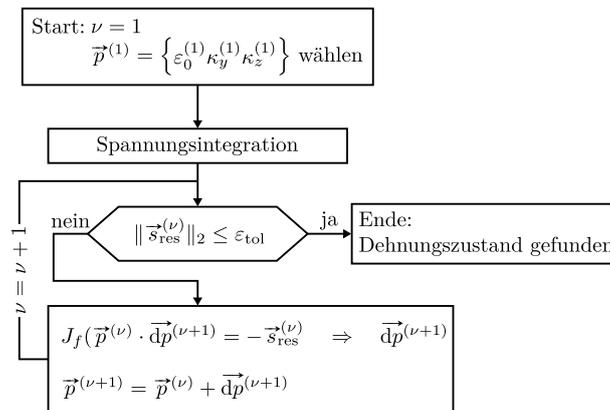


Abbildung 4.7: Flussdiagramm des allgemeinen Newtonverfahrens (ohne Abbruchkriterium)

Die schnelle Konvergenz des allgemeinen Newton-Verfahrens wird anhand eines Beispiels demonstriert:

**Beispiel 4.1:** Ein Rechteckquerschnitt aus Beton der Güte C30/37, der mit  $2 \cdot 7\varnothing 26$  Stahlstäben der Güte B550B bewehrt ist, wird mit einer Schnittgrößenkombination  $N_{x,E}/M_{y,E}/M_{z,E} = -2000 \text{ kN}/600 \text{ kNm}/200 \text{ kNm}$  belastet (siehe Abbildung 4.8). Als Startwert für das Newtonverfahren wird der Dehnungszustand  $\varepsilon_0/\kappa_y/\kappa_z = -0.2 \text{ ‰}/0.0 \text{ km}^{-1}/0.0/\text{km}^{-1}$  gewählt. Anhand der beiden Tabellen 4.5 und 4.6 kann der Verlauf des Newtonverfahrens abgelesen werden. Obwohl der Startwert des Dehnungszustandes weit von der Lösung entfernt war, konvergiert das Verfahren schnell. Der Abbruch erfolgt im Schritt sechs, nachdem die gewählte Genauigkeitsschranke  $\|\Delta \vec{s}_{\text{res}}\|_2 \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ , mit  $\varepsilon_{\text{tol}} = 0.01$ , unterschritten wurde.

Tabelle 4.4: Annahmen des Querschnitts

Querschnitt	Beton	Stahl
$h_{\text{QS}} = 50 \text{ cm}$	$h_{\text{eff}} = 12.5 \text{ cm}$	$f_{\text{ym}} = 600 \text{ N/mm}^2$
$b_{\text{QS}} = 50 \text{ cm}$	$f_{\text{cm}} = -38.0 \text{ N/mm}^2$	$f_{\text{um}} = 650 \text{ N/mm}^2$
$d_1 = d_2 = 5.3 \text{ cm}$	$\varepsilon_{\text{c1}} = -2.2 \text{ ‰}$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$
$A_{s1} = A_{s2} = 7\varnothing 26$	$\varepsilon_{\text{cu1}} = -3.5 \text{ ‰}$	
	$f_{\text{ctm}} = 2.9 \text{ N/mm}^2$	
	$\nu = 10 \text{ ‰}$	
	$E_{\text{cm}} = 33000 \text{ N/mm}^2$	

Tabelle 4.5: Dehnungszustände während des Newton-Verfahrens

Step	$\alpha$	$\varepsilon_0$	$\kappa_y$	$\kappa_z$	$\Delta\varepsilon_0$	$\Delta\kappa_y$	$\Delta\kappa_z$
[-]	[°]	[‰]	[1/km]	[1/km]	[‰]	[1/km]	[1/km]
1	0.00	-0.2000	0.0000	0.0000	-0.01497	-1.07887	2.82297
2	20.92	-0.2150	-1.0789	2.8230	0.14935	-0.95738	1.60425
3	24.70	-0.0656	-2.0363	4.4272	0.04962	-0.17573	0.26208
4	25.25	-0.0160	-2.2120	4.6893	0.00158	-0.00465	0.00504
5	25.28	-0.0144	-2.2166	4.6943	7.6E-06	-4.9E-05	1.7E-05
6	25.28	-0.0144	-2.2167	4.6944	-	-	-

Tabelle 4.6: Kraftzustände während des Newton-Verfahrens

Step	$N_{x,R}$	$M_{y,R}$	$M_{z,R}$	$\ \Delta\vec{s}_{res}\ _2$
[-]	[kN]	[kNm]	[kNm]	[-]
1	-1901.25	0.00	0.00	640.12
2	-2358.42	469.15	129.16	388.07
3	-2141.84	589.08	191.24	142.52
4	-2005.30	599.99	199.78	5.30
5	-2000.03	600.00	200.00	2.5E-02
6	-2000.00	600.00	200.00	2.6E-05

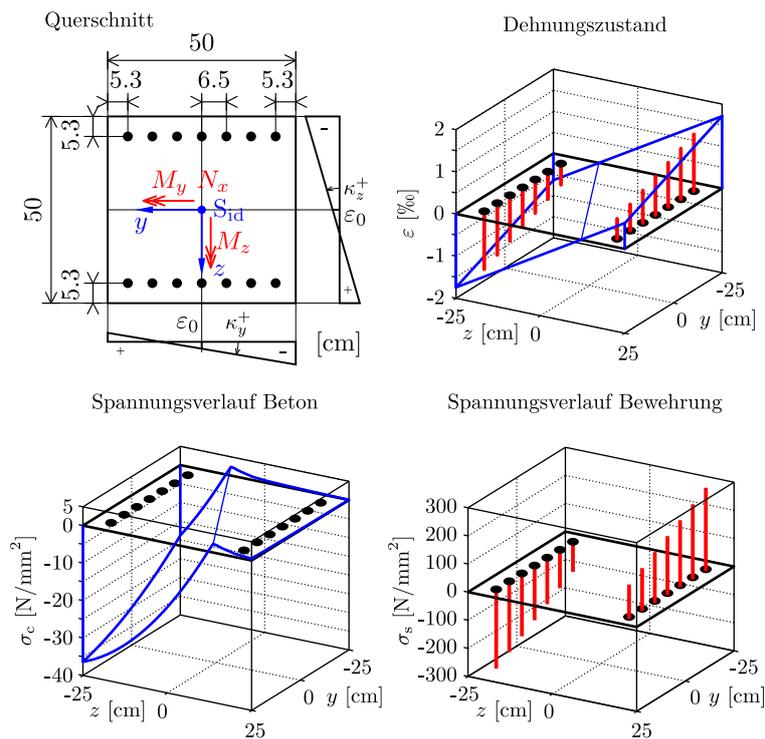


Abbildung 4.8: Querschnitt, Dehnungsebene und Spannungsverteilung (Beton und Bewehrung) des 2-achsig beanspruchten Querschnitts

## 4.5 Bestimmung der beanspruchungsbedingten Steifigkeit

Die im vorigen Abschnitt gezeigte Methode, Dehnungszustände zu einwirkenden Schnittgrößenkombinationen zu finden, kann benutzt werden, um die aktuellen Größen der Dehn- und Biegesteifigkeiten zu ermitteln.

$$D_{II}(\varepsilon_0) = \frac{\partial N_{x,R}}{\partial \varepsilon_0} \approx \frac{\Delta N_{x,R}}{\Delta \varepsilon_0} \quad (4.40)$$

$$B_{II,y}(\kappa_z) = \frac{\partial M_{y,R}}{\partial \kappa_z} \approx \frac{\Delta M_{y,R}}{\Delta \kappa_z} \quad (4.41)$$

$$B_{II,z}(\kappa_y) = -\frac{\partial M_{z,R}}{\partial \kappa_y} \approx -\frac{\Delta M_{z,R}}{\Delta \kappa_y} \quad (4.42)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten die Steifigkeiten zu ermitteln:

- **Möglichkeit 1:** Eine Schnittgröße  $N_{x,E}$ ,  $M_{y,E}$  oder  $M_{z,E}$  wird variiert und in Relation zur Änderung der zugehörigen kinematischen Bezugsgröße  $\Delta \varepsilon_0$ ,  $\Delta \kappa_z$  oder  $\Delta \kappa_y$  gebracht.
- **Möglichkeit 2:** Eine kinematische Größe wird variiert und in Relation zur Änderung der zugehörigen Schnittgröße gebracht.

## 4.6 Die Berücksichtigung zeitlicher Phänomene

Die Auswirkungen von Kriechen und Schwinden auf die kinematischen Zustandsgrößen können durch mehrere Modelle beschrieben werden (siehe Rüschi und Jungwirth (1976), Strohhusch (2010), u.a.). Zu den bekanntesten Modellen zählen das Verfahren nach Trost und der Ansatz mit effektiven Steifigkeiten. Zusätzlich werden zwei, im Zuge dieser Arbeit umgesetzte, Varianten der Zeitschrittmethode vorgestellt und mit oben genannten Verfahren verglichen.

### 4.6.1 Verfahren nach Trost

Nach dem Boltzmann'schen Superpositionsprinzip gilt bei linearer Kriechtheorie und stetig veränderlicher Spannung:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E(\tau)} \cdot [1 + \varphi(t, \tau)] d\tau \quad (4.43)$$

Wird der E-Modul konstant angenommen, folgt:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E} + \frac{1}{E} \cdot \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \varphi(t, \tau) d\tau \quad (4.44)$$

Das Integral der Gleichung 4.44 ist im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar. Trost umgeht das Problem, indem er den Relaxationsbeiwert  $\rho(t)$  der folgenden Form einführt:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\sigma(\tau_i) \cdot \varphi(t, \tau_i)}{[\sigma(t) - \sigma(t_0)] \cdot \varphi(t, t_0)} \\ &= \frac{1}{[\sigma(t) - \sigma(t_0)] \cdot \varphi(t, t_0)} \cdot \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau} \cdot \varphi(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.45)$$

Der Relaxationskennwert (auch als Alterungskennwert bezeichnet) kann aus Versuchen, numerischen Berechnungen oder für Ansatzfunktionen des  $\Delta\sigma(\tau)$ -Verlaufs auch analytisch bestimmt werden und liegt im Bereich  $0.5 \leq \rho(t) \leq 1.0$  (siehe Trost et al. (1978)). Für baupraktische Anwendungsfälle wird  $\rho(t)$  näherungsweise mit 0.8 festgelegt. Ausgehend von der Gleichung 4.44 folgt für die Dehnung zum Zeitpunkt  $t$  mit dem Belastungsbeginn  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)] \\ &= \underbrace{\frac{\sigma(t_0)}{E}}_{\varepsilon(t_0)} + \underbrace{\frac{\sigma(t_0) \cdot \varphi(t, t_0)}{E} + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)]}_{\Delta\varepsilon(t)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

### Berechnung der zeitlichen Änderung innerer Weggrößen unter Normalkraft- und einachsiger Momentenbeanspruchung für linear elastisches Materialverhalten nach Trost

Gegeben sei ein beliebiger Verbundquerschnitt aus einem kriechenden und einem nicht kriechenden Material (Beton und Stahl). Beide Materialien verhalten sich vollkommen linear elastisch. Der im Verbund stehende Stahlanteil kann in beliebig vielen Lagen angeordneter Stabstahl oder Profilstahl sein. Auch die Berücksichtigung von Vorspannung ist grundsätzlich möglich, wird hier jedoch nicht berücksichtigt.

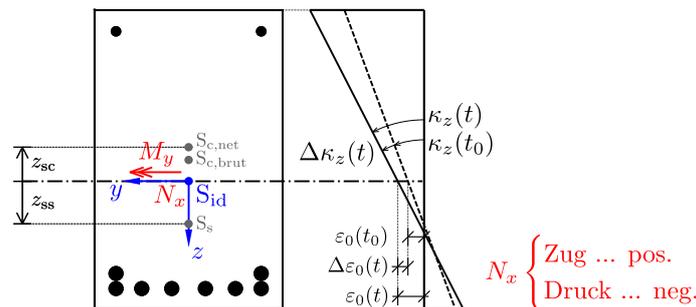


Abbildung 4.9: Darstellung Querschnitt

Jede einwirkende Schnittgrößenkombination  $N_{x,E}$  und  $M_{y,E}$  (Indices werden in weiterer Folge weggelassen) greift im ideellen Schwerpunkt des Querschnitts an und führt unter Berücksichti-

gung der Stoffgesetze zu folgenden kinematischen Zustandsgrößen:

$$\varepsilon_0(t_0) = \frac{N_E}{EA_{id}} \quad (4.47)$$

$$\kappa_z(t_0) = \frac{M_E}{EI_{id}} \quad (4.48)$$

Die einwirkende Schnittgrößenkombination lässt sich in einen zugehörigen reaktiven Betonanteil  $(N_{c,R}, M_{c,R})$  und Stahlanteil  $(N_{s,R}, M_{s,R})$  aufteilen.

Im Nettoschwerpunkt des Betons wirkend:

$$N_{c,R}(t_0) = \varepsilon_0(t_0) \cdot EA_{c,net} \quad (4.49)$$

$$M_{c,R}(t_0) = \kappa_z(t_0) \cdot EI_{c,net} \quad (4.50)$$

Im Schwerpunkt des Stahls wirkend:

$$N_{s,R}(t_0) = \varepsilon_0(t_0) \cdot EA_s \quad (4.51)$$

$$M_{s,R}(t_0) = \kappa_z(t_0) \cdot EI_s \quad (4.52)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen bezüglich  $S_{id}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  lauten:

$$N_E = N_{c,R}(t_0) + N_{s,R}(t_0) \quad (4.53)$$

$$M_E = M_{c,R}(t_0) + N_{c,R}(t_0) \cdot z_{sc} + M_{s,R}(t_0) + N_{s,R}(t_0) \cdot z_{ss} \quad (4.54)$$

Im Laufe der Zeit führt das Kriechen trotz gleichbleibender Einwirkung zu einer Vergrößerung der inneren Weggrößen. Ist der Querschnitt unbewehrt, so kann sich dieser Zustand ungehindert einstellen:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(t) \\ \kappa_z(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(t_0) \\ \kappa_z(t_0) \end{Bmatrix} \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) \quad (4.55)$$

Der im Verbund stehende Stahl hindert den Beton an der Vergrößerung der inneren Weggrößen im vollen Umfang. Es kommt zu einer Umlagerung von Betonkraftanteilen auf den Stahl. Auch zum Zeitpunkt  $t$  müssen die Gleichgewichtsbedingungen und die Verträglichkeitsbedingungen unter Einhaltung der Stoffgesetze erfüllt sein. Die Gleichgewichtsbedingungen der umgelagerten Schnittgrößenanteile lauten:

$$\Delta N_{c,R}(t) + \Delta N_{s,R}(t) = 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{c,R}(t) + \Delta N_{c,R}(t) \cdot z_{sc} + \Delta M_{s,R}(t) + \Delta N_{s,R}(t) \cdot z_{ss} &= 0 \\ \Delta M_{c,R}(t) - \Delta N_{s,R}(t) \cdot z_{sc} + \Delta M_{s,R}(t) + \Delta N_{s,R}(t) \cdot z_{ss} &= 0 \\ \Delta M_{c,R}(t) + \Delta M_{s,R}(t) + \Delta N_{s,R}(t) \cdot \underbrace{(z_{ss} - z_{sc})}_a &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Mit folgenden Verträglichkeitsbedingungen:

$$\Delta \varepsilon_0^a(t) = \Delta \varepsilon_{0,c}(t) = \Delta \varepsilon_{0,s}(t) \quad (4.58)$$

$$\Delta \kappa_z^a(t) = \Delta \kappa_{z,c}(t) = \Delta \kappa_{z,s}(t) \quad (4.59)$$

Der Index  $a$  steht hier für die charakterisierende, also durch Verformungsänderungen sichtbare kinematische Zustandsgröße. Ausgehend vom Ansatz nach Trost (Gleichung 4.46) folgt:

$$\Delta\varepsilon_{0,c}(t) = \varepsilon_0(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \underbrace{\left( \frac{\Delta N_{c,R}(t)}{EA_{c,net}} - \frac{\Delta M_{c,R}(t)}{EI_{c,net}} \cdot z_{sc} \right)}_{\varepsilon_{c,net}(t) \text{ in } S_{id}} \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)) + \varepsilon_{shr} \quad (4.60)$$

$$\Delta\varepsilon_{0,s}(t) = \underbrace{\frac{\Delta N_{s,R}(t)}{EA_s} - \frac{\Delta M_{s,R}(t)}{EI_s}}_{\varepsilon_s(t) \text{ in } S_{id}} \cdot z_{ss} \quad (4.61)$$

$$\Delta\kappa_{z,c}(t) = \kappa_z(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \frac{\Delta M_{c,R}(t)}{EI_c} \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)) \quad (4.62)$$

$$\Delta\kappa_{z,s}(t) = \frac{\Delta M_{s,R}(t)}{EI_s} \quad (4.63)$$

Auflösen der Gleichgewichtsbedingungen nach  $\Delta N_s(t)$  und  $\Delta M_s(t)$  unter Einhaltung der Verträglichkeit führt zu folgenden Beziehungen:

$$\Delta N_{s,R}(t) = \frac{\varepsilon_{0,c}(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{shr} + \Delta M_{s,R}(t) \cdot f_M(t)}{f_N(t)} \quad (4.64)$$

$$\Delta M_{s,R}(t) = \frac{M_{c,R}(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) - \frac{\varepsilon_{0,c}(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{shr}}{f_N(t)} \cdot a \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0))}{\frac{EI_{c,net}}{EI_s} + (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)) \cdot \left( 1 + \frac{f_M(t)}{f_N(t)} \cdot a \right)} \quad (4.65)$$

$$\text{mit: } f_N(t) = \frac{1}{EA_s} + \frac{1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)}{EA_{c,net}} - \frac{a \cdot z_{sc} \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0))}{EI_{c,net}}$$

$$f_M(t) = \frac{z_{sc} \cdot (1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0))}{EI_{c,net}} + \frac{z_{ss}}{EI_s}$$

#### 4.6.2 Methode mit effektiven Steifigkeiten

Die zeitabhängige Dehnung  $\varepsilon(t)$  der Gleichung 4.46 kann in einen Dehnungsanteil konstanter Spannungen  $\varepsilon(\sigma(t_0))$  und einen Anteil veränderlicher Spannungen  $\varepsilon(\Delta\sigma(t, t_0))$  aufgeteilt werden.

Anteil konstanter Spannungen:

$$\varepsilon(\sigma(t_0)) = \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (4.66)$$

Der Vergleich  $\varepsilon(\sigma(t_0)) = \sigma(t_0)/E_{\text{eff}}$  mit der obigen Gleichung ergibt:

$$E_{\text{eff}} = \frac{E}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.67)$$

Anteil veränderlicher Spannungen:

$$\varepsilon(\Delta\sigma(t, t_0)) = \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)] \quad (4.68)$$

Der Vergleich  $\varepsilon(\Delta\sigma(t, t_0)) = [\sigma(t) - \sigma(t_0)]/E'_{\text{eff}}$  mit der obigen Gleichung ergibt:

$$E'_{\text{eff}} = \frac{E}{1 + \rho(t) \cdot \varphi(t, t_0)} \quad (4.69)$$

Wird  $\rho(t) = 1.0$  gesetzt, so lautet der Ansatz für die effektive Steifigkeit zum Zeitpunkt  $t$ :

$$E_{\text{eff}}(t) = \frac{E}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.70)$$

Für  $\rho(t) = 1.0$  sind die Ergebnisse des Verfahrens nach Trost mit jenem der effektiven Steifigkeit ident. Weiter kann der Gleichung 4.68 entnommen werden, dass das Verfahren mit effektiven Steifigkeiten bei zeitlich konstanter Spannung exakte Lösungen liefert. Dies wäre bei unbewehrten Querschnitten in statisch bestimmten Systemen der Fall.

### 4.6.3 Verfahren mit Zeitschritten - Die Zeitschrittmethode ZSM

Bei diesem numerischen Näherungsverfahren werden die Auswirkungen infolge zeitlicher Phänomene abschnittsweise (durch Kriechintervalle) ermittelt.

Vorteile:

- Beliebige Stoffgesetze (linear, nichtlinear, Rissbildung) können implementiert werden.
- Lastgeschichten können Berücksichtigung finden.
- Beliebige Genauigkeit.

Nachteile:

- Höhere Rechenzeit (und höherer Speicherbedarf).
- Zum Teil komplexe Formulierung des Algorithmus (vor allem bei zweiachsiger Biegung).
- Komplexere Spannungsintegration

Der in dieser Arbeit ausformulierte Algorithmus der ZSM basiert auf den Beschreibungen und Erkenntnissen aus Sparowitz (1974) und Jaritz (1988). Die eben genannten Literaturquellen berücksichtigen nur die Druckzone während der Zeitberechnung. In dieser Arbeit wird neben der Druckzone auch die Zugzone in die Berechnung eingebunden. Die Implementation der ZSM in den Algorithmus der Stabwerksberechnung erfolgt in Kapitel 5. Hierbei wurden folgende Annahmen getroffen:

- Die Werkstoffgesetze sind zeitlich invariant ( $E(t), f_{\text{cm}}(t), f_{\text{ct}}(t) \dots \text{konst.}$ ).
- Die Werkstoffgesetze sind nichtlinear-elastisch.
- Rückkriechen bleibt vorerst unberücksichtigt.

**Grundidee des Verfahrens**

Ein Belastungszeitraum  $t_0 \rightarrow t$  wird in  $n_t$  Zeitintervalle aufgeteilt. Jedes Zeitintervall  $\Delta t(i, i+1)$  beginnt zum Zeitpunkt  $t_i$  und endet mit dem Zeitpunkt  $t_{i+1}$ . Die Zeitintervalle können beliebig aufgeteilt werden. In der Regel ist es jedoch sinnvoll die Einteilung so zu wählen, dass die Kriechzahlen  $\Delta\varphi(i, i+1)$  jedes Zeitintervalles  $\Delta t(i, i+1)$  gleich groß sind. Allgemein gilt:

$$\Delta t(i, i+1) = t_{i+1} - t_i \tag{4.71}$$

$$\Delta\varphi(i, i+1) = \varphi(t_{i+1}, t_0) - \varphi(t_i, t_0) \tag{4.72}$$

Im Weiteren wird zwischen charakterisierender, (teil)plastischer, spannungswirksamer und kriechwirksamer Dehnung unterschieden - siehe Abbildung 4.10:

- **charakterisierende Dehnung(sebene):** Dehnungsebene  $\varepsilon^a$ , die auch zu Verformungen führt.
- **(teil)plastische Dehnung:** Summe aller durch Kriechen und Schwinden erzeugter Dehnungen. Die äußere Dehnung abzüglich der (teil)plastischen Dehnung ergibt die spannungswirksame Dehnung.
- **spannungswirksame Dehnung:** Dehnung  $\varepsilon^\sigma$ , die auch zu einer Spannung führt ( $\sigma = f(\varepsilon^\sigma)$ ).
- **kriechwirksame Dehnung:** Dehnungsanteil  $\varepsilon^\varphi$ , der auch tatsächlich kriecht.

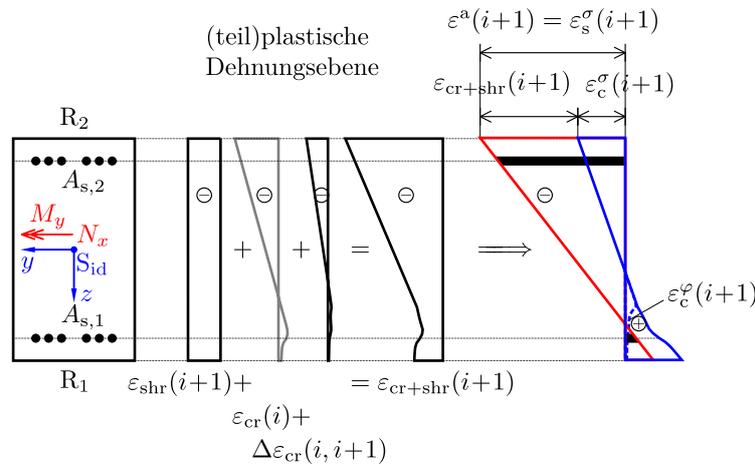


Abbildung 4.10: Veranschaulichung der Zeitschrittmethod anhand eines Zeitschrittes (allgemeine Methode)

Die kriechwirksame Dehnung kann von der spannungswirksamen Dehnung differieren. Folgende Festlegungen wurden getroffen:

- Im Druckbereich ist die spannungswirksame Dehnung ident mit der kriechwirksamen Dehnung (Abbildung 4.11a).
- Im Zugbereich wird nur die zu einer Spannung zugehörige Dehnung des ungerissenen Zustandes als kriechwirksam angenommen (Abbildung 4.11b).

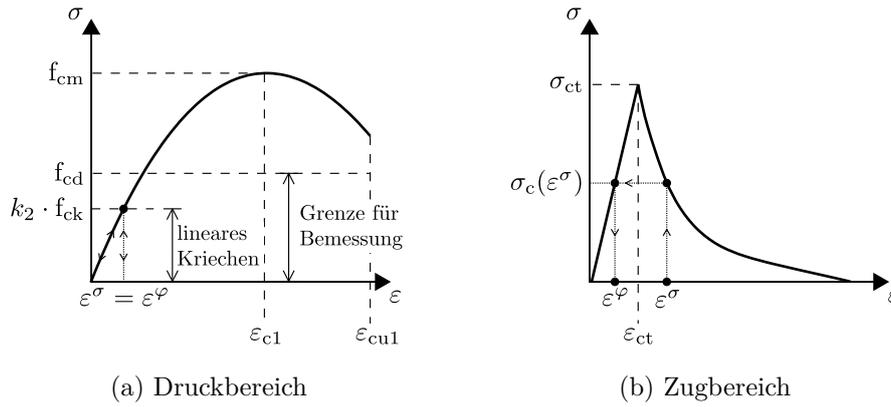


Abbildung 4.11: Spannungs- und kriechwirksame (Beton-)Dehnungen unter Druck und Zug

### Vorgehensweise - allgemeines Modell der ZSM

Folgend wird immer eine Faser des Querschnitts betrachtet ( $\varepsilon^a(i) \equiv \varepsilon^a(y, z, i)$ ). Für die Berechnungen im Zeitintervall  $\Delta t(i, i+1)$  wird vorausgesetzt, dass der zur Einwirkung im Gleichgewicht stehende Dehnungszustand  $\varepsilon^a(i)$  bereits gefunden ist. Dem Zeitabschnitt gehen  $i-1$  Zeitintervalle voraus. Somit ist der (teil)plastische Dehnungsanteil aus Kriechen ( $\varepsilon_{cr}(i)$ ) bekannt:

$$\varepsilon_{cr}(i) = \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon_{cr}(j) = \sum_{j=0}^{i-1} \underbrace{\frac{\varepsilon^\varphi(j) + \varepsilon^\varphi(j+1)}{2}}_{\varepsilon_m^\varphi(j,j+1)} \cdot \Delta\varphi(j, j+1) \quad (4.73)$$

Mit dem zum Zeitpunkt  $i$  bekannten Dehnungszustand  $\varepsilon^a(i)$  und den Anteilen  $\varepsilon_{cr}(i)$  und  $\varepsilon_{shr}(i)$  folgt für den spannungswirksamen Dehnungsanteil:

$$\varepsilon^\sigma(i) = \varepsilon^a(i) - \varepsilon_{cr}(i) - \varepsilon_{shr}(i) \quad (4.74)$$

Unter Berücksichtigung des Stoffgesetzes kann aus der vorhandenen spannungswirksamen Dehnung die zugehörige kriechwirksame Dehnung ermittelt werden:

$$\varepsilon^\sigma(i) \xrightarrow{\text{Stoffgesetz}} \varepsilon^\varphi(i) \quad (4.75)$$

Die Berechnung nach der Zeitschrittmethode erfolgt zentral. Das bedeutet, dass in jedem Zeitschritt die mittlere kriechwirksame Dehnung in Rechnung gestellt wird:

$$\varepsilon^\sigma(i+1) = \varepsilon^a(i+1) - \underbrace{\varepsilon_{cr}(i) - \varepsilon_m^\varphi(i, i+1) \cdot \Delta\varphi(i, i+1)}_{\varepsilon_{cr}(i+1)} - \varepsilon_{shr}(i+1) \quad (4.76)$$

Am Anfang eines neuen Zeitintervalls ist die mittlere kriechwirksame Dehnung jedoch noch nicht bekannt. Sie muss zunächst mit einem Schätzwert  $\tilde{\varepsilon}_m^\varphi(i, i+1)$  angenommen und in einem Iterationsprozess immer wieder verbessert werden. Mit dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen Ablauf zur Spannungsintegration kann der zeitabhängige Dehnungszustand ermittelt werden, für den das Kräftegleichgewicht erfüllt ist. In der Gleichung 4.17 sind für jeden Zeitpunkt die Anteile  $\varepsilon^a(i+1) = \varepsilon_0^a + \kappa_y^a \cdot y + \kappa_z^a \cdot z$  und  $\varepsilon_{add}(i+1) = -\varepsilon_{cr}(i+1) - \varepsilon_{shr}(i+1)$  zu verwenden. Falls eine kriechfähige Teilfläche des Querschnitts auch vorgespannt sein sollte, kann  $\varepsilon_{add}(i+1)$  zusätzlich mit der Vordehnung  $\varepsilon_p(i+1)$  erweitert werden. Am Ende jedes Zeitintervalls erfolgt

eine Überprüfung, wie gut die Schätzung der mittleren Kriechdehnung war. Der Iterationsprozess kann abgebrochen werden, wenn die Differenz der mittleren Kriechdehnung ein zuvor definiertes Toleranzmaß  $\varepsilon_{\text{tol}}$  unterschreitet:

$$|\tilde{\varepsilon}_m^\varphi(i, i+1) - \varepsilon_m^\varphi(i, i+1)| \leq \varepsilon_{\text{tol}} \quad (4.77)$$

Vereinfachend wird die Iteration nur einmal durchgeführt, wodurch die Berechnungsergebnisse von der Zeitschrittanzahl abhängig werden. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass bereits wenige Zeitschritte ausreichen, um den dadurch verursachten Fehler vernachlässigbar zu halten (siehe Beispiel 4.2). Für die meisten Berechnungen im Zuge dieser Arbeit wurden mindestens zehn Zeitschritte gewählt. Zur besseren Veranschaulichung ist der Programmablauf in der Abbildung 4.12 als Flussdiagramm dargestellt.

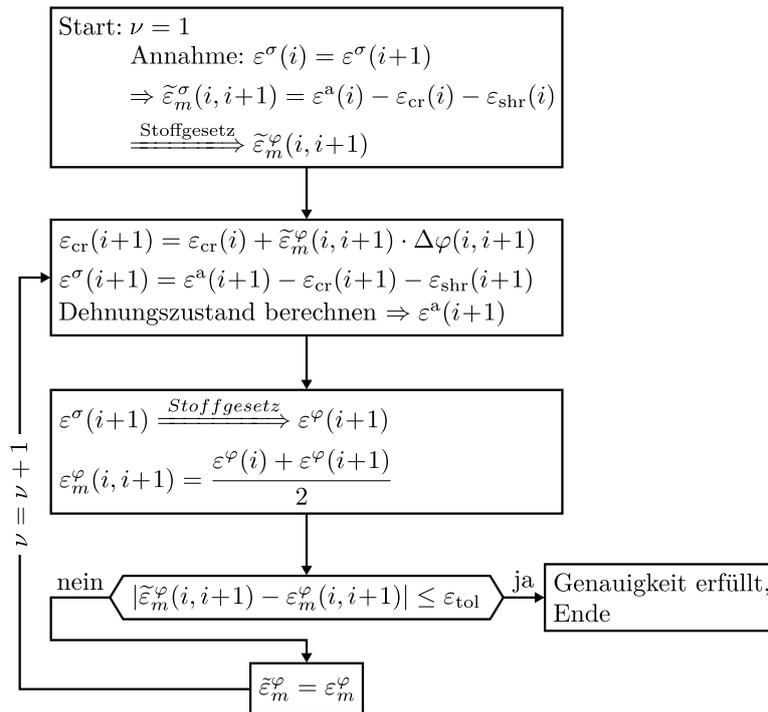


Abbildung 4.12: Flussdiagramm der Zeitschrittmethode

**Beispiel 4.2:** Ein zentrisch, mit Druck- und Zugbewehrung der Güte B550B, bewehrter Rechteckquerschnitt der Güte C30/37 ( $h = b = 50$  cm,  $A_{s,1} = A_{s,2} = 7\varnothing 14$ ,  $d_1 = d_2 = 4.7$  cm), wird 28 Tage nach der Herstellung mit einer Schnittgrößenkombination  $N_{x,E}/M_{y,E}/M_{z,E} = -798.2$  kN/158.8 kNm/0.0 kNm belastet. Die Kriechzahl sei  $\varphi(t_0 = 28$  d,  $t_\infty) = 2.3$ , die Schwindzahl  $\varepsilon_{cs}(t_\infty) = -0.4092$  ‰. Die Beton- und Stahlkennwerte gleichen jenen des Beispiels 4.1. Die Abbildungen 4.13 und 4.14 zeigen in den mittig angeordneten Darstellungen die spannungswirksamen Dehnungsebenen  $\varepsilon^\sigma$  für den Bewehrungsstahl und den Beton zu den Zeitpunkten  $t = t_0$  (graue Linien) und  $t = t_\infty$  (rote und blaue Linien). Da die Bewehrung nicht vorgespannt ist, entspricht die charakterisierende Dehnungsebene dem spannungswirksamen Dehnungsverlauf. Das rechte Bild enthält jeweils die Spannungsverläufe des Betons zu den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_\infty$ . Abschließend ist jeweils im linken Bild die (teil)plastische Dehnungsebene durch das

Kriechen und Schwinden zum Zeitpunkt  $t_\infty$  dargestellt (schwarze Linien).

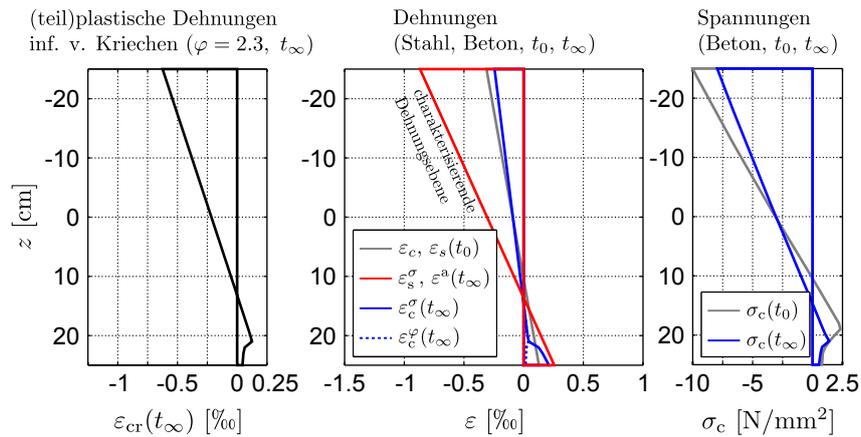


Abbildung 4.13: Darstellung der Dehnungs- und Spannungsebene zu den Zeitpunkten  $t = t_0$  und  $t = t_\infty$  ohne Berücksichtigung des Schwindens

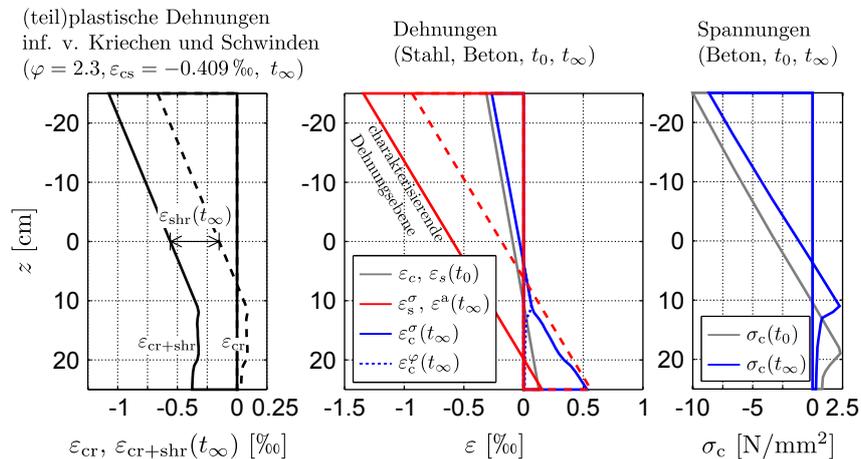


Abbildung 4.14: Darstellung der Dehnungs- und Spannungsebene zu den Zeitpunkten  $t = t_0$  und  $t = t_\infty$  mit Berücksichtigung des Schwindens

Die Abbildungen 4.15 und 4.16 geben einen Überblick über den zeitlichen Verlauf der spannungswirksamen Randdehnungen für den Stahl und den Beton. Wird nur das Kriechen berücksichtigt (Abbildung 4.13 und 4.15), ist eine Abnahme der Betonspannungen in der Druck- und Zugzone erkennbar. Die Kräfteumlagerung vom Beton auf den Stahl führt zu einer Vergrößerung der charakterisierenden Dehnungsebene mit einem „nach unten Wandern“ der Dehnungsnul-Linie. Schwinden führt zum Aufreißen der Zugzone wodurch die Dehnungsnul-Linie „nach oben wandert“ (siehe Abbildung 4.14).

Die Abbildung 4.17 stellt die Krümmung  $\kappa_z^a$  in Abhängigkeit der gewählten Zeitschrittzahl dar. Das Ergebnis bei 100 Zeitschritten wurde hierbei als echte Lösung angenommen und daher als Referenz festgelegt. Hier ist zu erkennen, dass bereits fünf Zeitschritte die Krümmung im schlechtesten Fall auf 0.2 % genau berechnen.

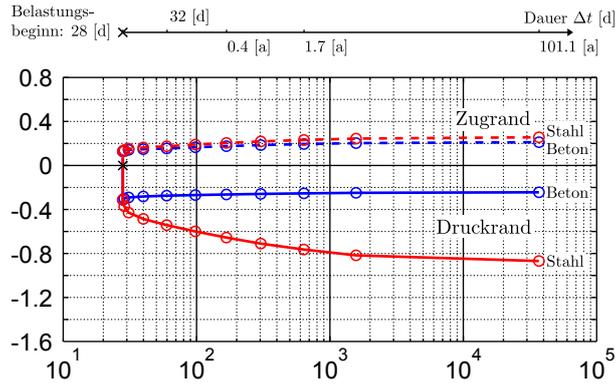


Abbildung 4.15: Darstellung des zeitlichen, spannungswirksamen Dehnungsverlaufs ohne Berücksichtigung des Schwindens

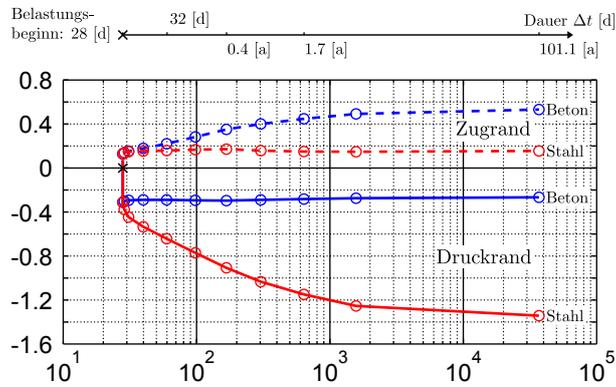


Abbildung 4.16: Darstellung des zeitlichen, spannungswirksamen Dehnungsverlaufs mit Berücksichtigung des Schwindens

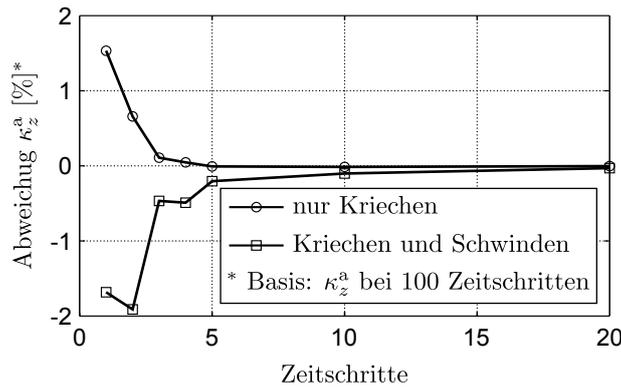


Abbildung 4.17: Einfluss der Zeitschritte auf die Krümmung  $\kappa_z^a(t_\infty)$

### Vereinfachtes Modell der ZSM

Um den Dehnungs- bzw. Spannungsverlauf des Betons wie zuvor in Beispiel 4.2 zu generieren, bedarf es einer feinen Auflösung der Stützstellen im Querschnitt. Um Systemberechnungen in ihrer Rechenzeit zu verkürzen, wurde daher eine Vereinfachung vorgenommen. Anstelle der Auswertung der spannungs- und kriechwirksamen Dehnungen an beliebig vielen Stellen über den Querschnitt erfolgt diese nur an den äußersten Querschnittsfasern. Weiter wird angesetzt, dass in jedem neuen Zeitschritt die Lage der Null-Linie der charakterisierenden Dehnungsebene abzüglich der Schwinddehnung mit jener der spannungs- und kriechwirksamen Dehnungsebene zusammenfällt.

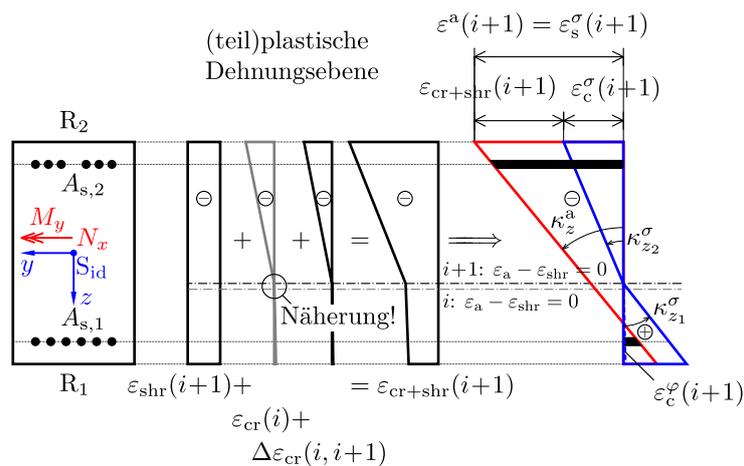


Abbildung 4.18: Veranschaulichung der Zeitschrittmethode anhand eines Zeitschrittes (Vereinfachung)

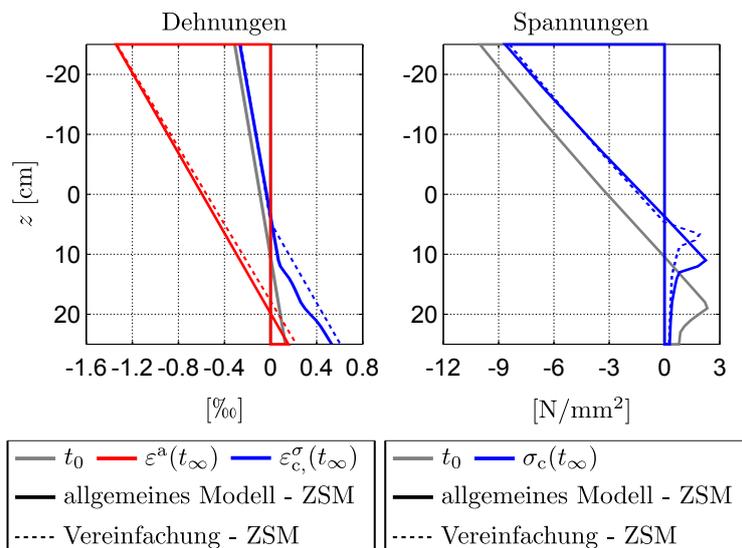


Abbildung 4.19: Vergleich des allgemeinen und vereinfachten Modells der Zeitschrittmethode anhand des Dehnungs- und Spannungsverlaufs (Querschnittsdaten - siehe Beispiel 4.2)

Ausgehend von der charakterisierenden Dehnungsebene ( $\varepsilon^a$ ,  $\kappa_z^a$ ) ist im Falle der einachsigen Biegung der zeitabhängige Dehnungs- und Spannungszustand für jedes Material über die Kennwerte  $\varepsilon_{shr}$ ,  $\varepsilon_{cr}^{R1}$ ,  $\varepsilon_{cr}^{R2}$ ,  $\kappa_{z1}^\sigma$  und  $\kappa_{z2}^\sigma$  bestimmbar (siehe Abbildung 4.18). Die Indices  $z_1$  und  $z_2$  stehen hier für die Zug- und Druckzone. Die Abbildung 4.19 zeigt den direkten Vergleich der allgemein formulierten Zeitschrittmethod und der Vereinfachung (Querschnitt, Belastung, ... - siehe Beispiel 4.2). Es ist zu erkennen, dass die Krümmung  $\kappa_z^a$ , die Randdehnungen sowie die Randspannungen in diesem Fall kaum abweichen. Der Verlauf der spannungswirksamen Dehnungen sowie der Betonspannungen weicht besonders in der Zugzone ab. Je nach Bewehrungsverteilung und Belastung können die Unterschiede der Krümmung  $\kappa_z^a$  bis  $\pm 10\%$  betragen. Diese Abweichungen sind dann besonders groß, wenn die Betonranddehnung in der Zugzone während der Zeitschrittberechnung gerade etwas größer als die Erstrissdehnung ist.

#### 4.6.4 Vergleich der Methoden zur Berücksichtigung zeitlicher Phänomene

In den vorhergehenden Unterabschnitten wurden das Verfahren von Trost, das Verfahren effektiver Steifigkeiten sowie die Zeitschrittmethod vorgestellt. Folgend werden diese Methoden miteinander verglichen.

##### Zeitlicher Verlauf der Krümmung bei linear elastischem Materialverhalten unter einachsiger Biegung mit Normalkraft

Anhand der Abbildung 4.20 kann der mit den drei vorgestellten Verfahren errechnete, zeitliche Krümmungsverlauf verglichen werden. Die hier zugrunde gelegten Annahmen sind der Tabelle 4.7 zu entnehmen. Die rote Kurve zeigt den mit der Zeitschrittmethod errechneten Krümmungsverlauf, die blaue jenen, der mit der Methode der effektiven Steifigkeiten ermittelt wurde. Das Verfahren von Trost ist für drei unterschiedliche Relaxationskennwerte gemäß den Gleichungen 4.64 und 4.65 ausgewertet (schwarze Linien). Hier zeigt sich deutlich, dass für  $\rho(t) = 1.0$  idente Ergebnisse wie mit der Methode effektiver Steifigkeiten erhalten werden. Mit effektiven Steifigkeiten ergeben sich die kleinsten, mit der Zeitschrittmethod die größten Endkrümmungen. Die Differenz beträgt in diesem Fall  $\approx 6\%$ . Das Verfahren nach Trost liegt mit  $\rho(t) = 0.8$  zwischen dem Ergebnis der Zeitschrittmethod und der effektiven Steifigkeitsmethod.

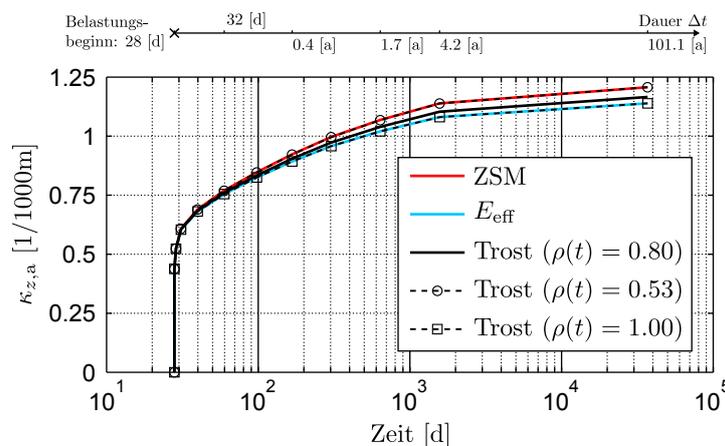


Abbildung 4.20: Vergleich ZSM (allgemeine Variante), Methode effektiver Steifigkeiten und Verfahren nach Trost für Querschnitt nach Tabelle 4.7

Tabelle 4.7: Annahmen des Querschnitts

Querschnitt	Belastung <sup>a</sup>	Beton
$h_{QS} = 70 \text{ cm}$	$N_{x,Eqp} = -1000.0 \text{ kN}$	$E_{cm} = 33000 \text{ N/mm}^2$
$b_{QS} = 50 \text{ cm}$	$M_{y,Eqp} = 250.0 \text{ kNm}$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$
$d_1 = d_2 = 5.5 \text{ cm}$	$M_{z,Eqp} = 0.0 \text{ kNm}$	$\varphi(t_\infty) = 2.3$
$A_{s1} = 8\emptyset 30$		$\varepsilon_{cs}(t_\infty) = 0.0 \text{ ‰}$
$A_{s2} = 2\emptyset 30$		

<sup>a</sup> Eqp ... quasi-ständig

### Mk-Beziehung bei nichtlinearem Materialverhalten

In der Abbildung 4.21 sind die  $M$ - $\kappa$ -Kurven für einen Rechteckquerschnitt mit Zugbewehrung (RE1) abgebildet. Die Querschnitts- und Materialkennwerte können der Tabelle 4.8 entnommen werden. Die graue  $M$ - $\kappa$ -Kurve gilt für den Zeitpunkt  $t_0$ . Die schwarze  $M$ - $\kappa$ -Kurve für den Zeitpunkt  $t_\infty$ . Diese Kurve wurde mit dem Verfahren effektiver Steifigkeiten ermittelt. Die orange und die rote  $M$ - $\kappa$ -Kurve wurden mit der Zeitschrittmethodem entwickelt. Die orange Kurve zeigt die Momenten-Krümmungs-Beziehung bei alleiniger Berücksichtigung des Kriechens, während für den roten Verlauf Kriechen und Schwinden angesetzt wurden. Als Referenzpunkt für das Kräftegleichgewicht wurde in allen Fällen der ideale Schwerpunkt zum Zeitpunkt  $t_0$  gewählt.

Tabelle 4.8: Annahmen des Querschnitts

Querschnitt	Belastung	Beton	Stahl
$h_{QS} = 50 \text{ cm}$	$N_{x,Eqp} = -733.5 \text{ kN}$	$h_{eff} = 12.5 \text{ cm}$	$f_{ym} = 600 \text{ N/mm}^2$
$b_{QS} = 50 \text{ cm}$	$M_{y,Eqp} = 152.5 \text{ kNm}$	$f_{cm} = -38.0 \text{ N/mm}^2$	$f_{um} = 650 \text{ N/mm}^2$
$d_1 = 5.3 \text{ cm}$	$M_{z,Eqp} = 0 \text{ kNm}$	$\varepsilon_{c1} = -2.2 \text{ ‰}$	$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$
$A_{s1} = 7\emptyset 26$	Eqp ... quasi-ständig	$\varepsilon_{cu1} = -3.5 \text{ ‰}$	
		$f_{ctm} = 2.9 \text{ N/mm}^2$	
		$\nu = 10 \text{ ‰}$	
		$E_{cm} = 33000 \text{ N/mm}^2$	
		$\varphi(t_\infty) = 2.3$	
		$\varepsilon_{cs}(t_\infty) = -4.092 \text{ ‰}$	

An der orangenen Kurve ist zu erkennen, dass sich die Biegesteifigkeit durch Kriechen nicht wesentlich ändert. Bei zusätzlicher Berücksichtigung von Schwinden wird die Zugfestigkeit erreicht. Es kommt zum Aufreißen des Querschnitts, wodurch die Steifigkeit abnimmt. Dieses Verhalten wird mit effektiven Steifigkeiten nicht korrekt abgebildet, wie die schwarze Kurve im Vergleich deutlich beweist. Trotzdem werden die zum angesetzten quasi-ständigen Moment gehörenden Endkrümmungen hinreichend genau ermittelt, wie die Krümmungsdifferenz der orangenen und schwarzen Kurven bei  $M_{y,qp}$  zeigt.

Für die gleichen Annahmen der Tabelle 4.8 wurde die Zeitschrittmethodem für unterschiedliche quasi-ständige Momente  $M_{y,Eqp}$  bei konstanter Normalkraft  $N_{x,Eqp}$  angewendet und die Ergebnisse zum Zeitpunkt  $t_\infty$  in der Abbildung 4.22 eingetragen (hell- und dunkelgraue Punkte). Mit den über die Zeitschrittmethodem ermittelten (teil)plastischen Dehnungen wurden die Momenten-Krümmungs-Beziehungen entwickelt (hell- und dunkelgraue Linien). Die rote Linie ist die mit

der Methode effektiver Steifigkeit entwickelte  $M$ - $\kappa$ -Beziehung. Abschließend wurde das Querschnittsverhalten zum Zeitpunkt  $t_0$  ebenfalls im Diagramm eingetragen (grüne Linie).

Die Übereinstimmung der mit den effektiven Steifigkeiten ermittelten  $M$ - $\kappa$ -Kurven mit den Ergebnissen der Zeitschrittmethod ist über den gesamten, für die Gebrauchstauglichkeit relevanten, Bereich als sehr gut zu bezeichnen.

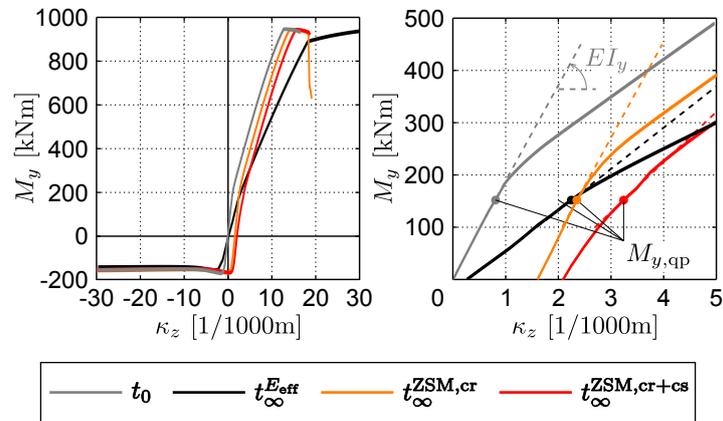


Abbildung 4.21: Vergleich Zeitschrittmethod (allgemeine Variante) und Methode effektiver Steifigkeiten

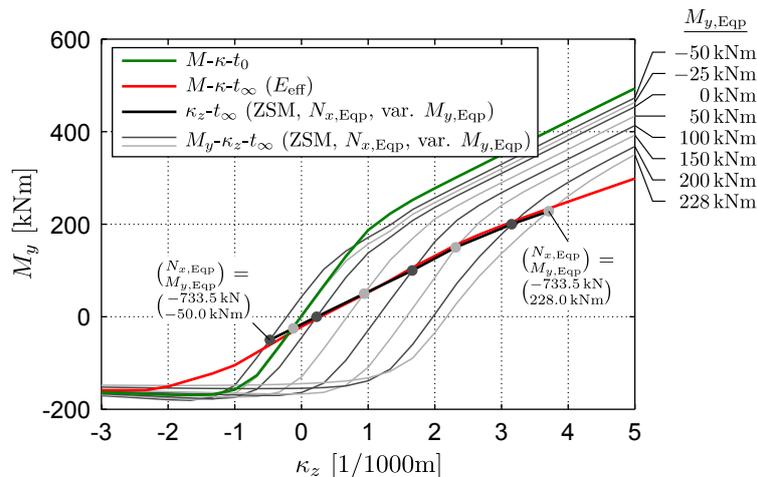


Abbildung 4.22: Vergleich Zeitschrittmethod (allgemeine Variante) und Methode effektiver Steifigkeiten

### 4.6.5 Bewertung der Verfahren

Alle drei vorgestellten Verfahren sind geeignet, um die Auswirkungen von Kriechen und Schwinden auf Querschnittsebene zum Zeitpunkt  $t_\infty$  zu bestimmen.

Beim Verfahren nach Trost ist die Anwendung allgemeiner nichtlinearer Werkstoffgesetze jedoch nicht möglich. Der Zustand II kann mit einigen Überlegungen näherungsweise berücksichtigt werden (siehe Strobusch (2010)).

Das Verfahren mit effektiven Steifigkeiten kann für linear elastisches und nicht lineares Materialverhalten für den Zustand I und II verwendet werden. Hierbei ist nur darauf zu achten, dass die Modifikation der Steifigkeit nur auf der Druckseite erfolgt. Ein „Strecken“ der Zugarbeitslinie führt im Entfestigungsbereich zu höheren anrechenbaren Zugspannungen bei gleicher Dehnung. Dies hätte ein Überschätzen der Zugversteifung und somit auch ein zu steifes Last-Verformungsverhalten zur Folge. Weiter ist auch darauf zu achten, stets den Schwerpunkt zum Zeitpunkt  $t_0$  als Bezugspunkt der Schnittgrößen beizubehalten.

Bei der Zeitschrittmethod sind in der Regel keine Einschränkungen vorhanden. Bei ausreichender Rechenleistung und entsprechender Programmierung kann jeder gewünschte Effekt implementiert werden (Alterung des Materials, Hysteresekurven, Belastungsgeschichten, ...).

Wird nach Theorie II. Ordnung gerechnet, oder soll zu einem Zeitpunkt  $t$  eine Traglastanalyse durchgeführt werden, ist die Zeitschrittmethod die einzige Method die Auswirkungen zeitlicher Phänomene adäquat und mechanisch sauber zu beschreiben. Die Method der effektiven Steifigkeiten kann für solche Zwecke zwar näherungsweise auch verwendet werden, jedoch ist hier mit ungenauen Ergebnissen zu rechnen. Der Grund: Die effektive Steifigkeit wird über den gesamten Lastpfad angesetzt. Dadurch fällt die Systemantwort stets zu weich aus (siehe Kapitel 6, Seite 141 ff.).

# 5 Berechnung von Stäben und Stabwerken

Dieses Kapitel beschreibt die letzte Integrationsstufe, das Systemverhalten. Im Zuge dieser Arbeit werden nur Stäbe und Stabwerke behandelt, daher wird die Stabtheorie zur Systembeschreibung herangezogen. Als Berechnungsmethode kommt das allgemeine Weggrößenverfahren (Deformationsmethode) für ebene Systeme zur Anwendung, das in MATLAB<sup>®</sup> umgesetzt wurde. Eine Erweiterung auf den räumlichen Fall sollte grundsätzlich möglich sein. Folgend werden der allgemeine Berechnungsablauf, die Bestimmung und der Aufbau der Element-, und Systemsteifigkeitsbeziehungen, die Berücksichtigung von Rand- und Zwischenbedingungen sowie die Auswirkungen materieller und geometrischer Nichtlinearität und deren Berechnung genauer beschrieben. Abschließend erfolgt die Verifikation der eigenen Routine anhand von Vergleichsrechnungen mit dem bestehenden Programm Stab2dNL von Pfeiffer (2004) und exemplarischen Versuchsnachrechnungen.

## 5.1 Grundidee des Verfahrens

Beim Weggrößenverfahren werden Systeme kinematisch bestimmt gemacht, indem alle Bewegungsmöglichkeiten sämtlicher Knoten durch Festhaltungen gesperrt werden. Im sogenannten Volleinspannzustand sind alle Weggrößen  $w$  null ( $\vec{w} = \vec{0}$ ). Die Schnittgrößen infolge äußerer Belastungen können sehr leicht über Schnittgrößentabellen angegeben werden. Der Volleinspannzustand ist in der Regel mit dem tatsächlichen Grundsystem kinematisch unverträglich. Bei bekannter Auswirkung jeder Weggröße der Größe eins (Einheitsweggröße) auf die inneren Kraftgrößen des Systems, kann der zum Kräftegleichgewicht führende, kinematisch kompatible Verformungszustand über folgende Grundgleichung bestimmt werden:

$$\bar{K} \cdot \vec{w} + \vec{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Lösen des Gleichungssystems} \quad \rightarrow \quad \vec{w} \quad (5.1)$$

Wobei hier die Randbedingungen (Auflager, Zwangsverformungen, etc.) berücksichtigt sind.

Die Abbildung 5.1 - ① zeigt einen Zweifeldträger mit voll eingespannten Randlagern, bei dem nur das linke Feld durch eine Gleichlast  $q$  beansprucht wird. Unter der Annahme, dass die Verformungen im Knoten b komplett behindert sind (②), ergibt sich der Schnittgrößen- und Verformungsverlauf des Volleinspannzustandes ③. In diesem Beispiel ist schnell erkennbar, dass der Momentenverlauf des Volleinspannzustandes nicht zum ursprünglichen System passt ( $M_{b,li} + M_{b,re} \neq 0$  in ③ für das System nach ①). Nachdem nur die gesperrte Verdrehung  $\varphi_{y,b}$  im Knoten b einen Momentenbeitrag liefert, kann auch nur diese Weggröße das Gleichgewicht herstellen. Die tatsächlichen Schnittgrößen in den Knoten a, b und c setzen sich letztendlich durch Superposition der Schnittgrößen des Volleinspannzustandes und der Verdrehung  $\varphi_{y,b}$  zusammen ( $\vec{s} = \vec{s}^\circ + \vec{s}(\varphi_{y,b})$  in ⑤).

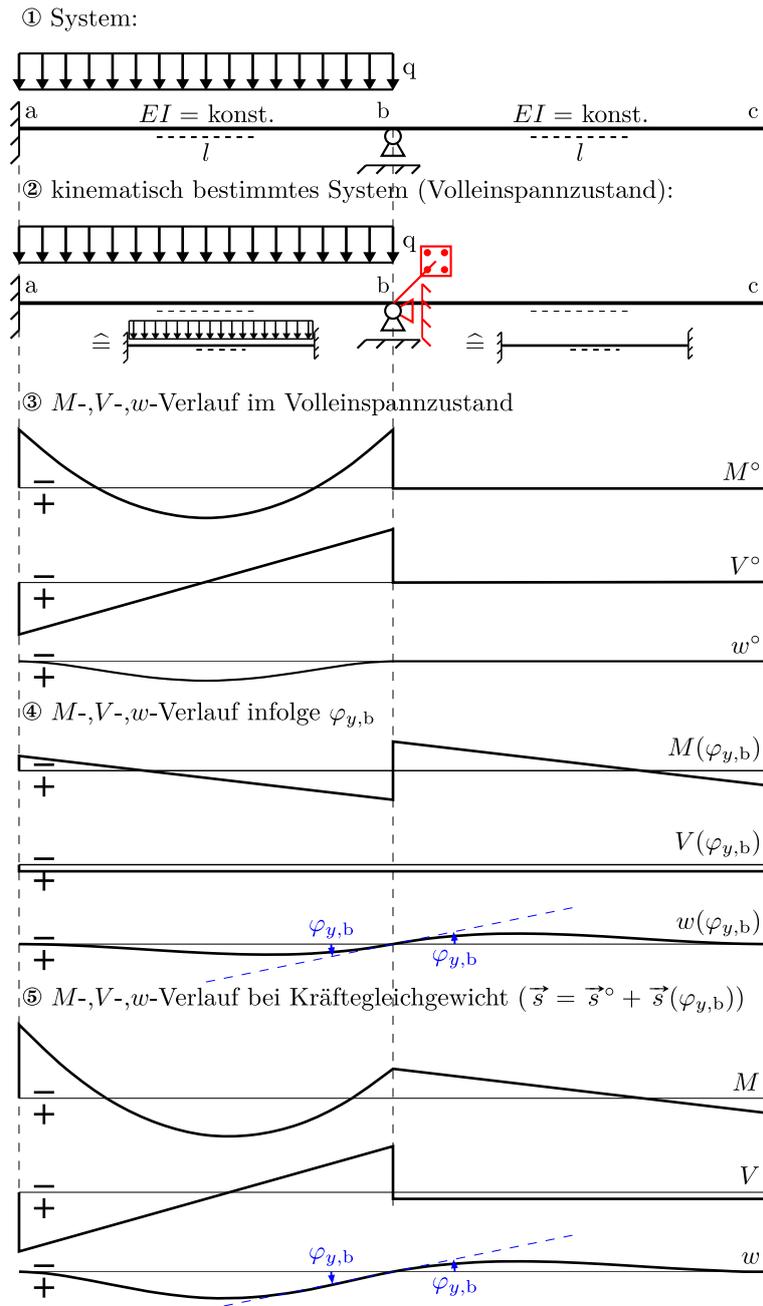


Abbildung 5.1: Grundprinzip des Weggrößenverfahrens an einem Zweifeldträger

## 5.2 Definitionen

### Vorzeichenkonventionen

- **Vorzeichenkonvention I:** Am positiven Schnittufer wirken positive Schnittgrößen in Richtung positiver lokaler Koordinaten, am negativen Schnittufer wirken positive Schnittgrößen entgegen der Richtung positiver lokaler Koordinaten (siehe Abbildung 5.2a).

- **Vorzeichenkonvention II:** Positive Schnittgrößen wirken stets in Richtung positiver lokaler Koordinaten (siehe Abbildung 5.2b).

Das Weggrößenverfahren ist nach der Vorzeichenkonvention II aufgebaut und hergeleitet. Die Umrechnung zwischen beiden Konventionen erfolgt durch Änderung der Vorzeichen der Schnittgrößen am Stabanfang.

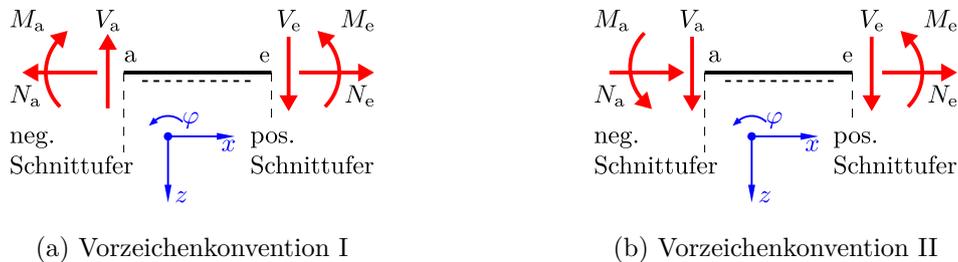


Abbildung 5.2: Definition positiver Schnittgrößen nach der Vorzeichenkonvention I und II

### Bezugskoorinatensystem für die Schnittgrößen

In der Statik sind die Schnittkräfte  $N$  und  $V$  am Schnittufer entlang bzw. normal auf die Stabachse gerichtet (Abbildung 5.3a). Wird das Kräftegleichgewicht am verformten System gebildet, sind die Kräfte  $N$  und  $V$  an den Stabenden abhängig von der jeweiligen Knotenverdrehung. Eine Beibehaltung dieser Betrachtungsweise würde die Herleitung differenzieller Beziehungen sehr kompliziert ausfallen lassen. Daher wird für die Krafrichtung bei Anwendung der Theorie II. Ordnung am lokalen Koordinatensystem des unverformten Stabes festgehalten (Abbildung 5.3b). Die zugeordneten Schnittkräfte  $S$  (Stablängskraft) und  $R$  (Transversalkraft) bleiben dabei unabhängig von der Knotenverdrehung  $\varphi_a$  bzw.  $\varphi_b$ .

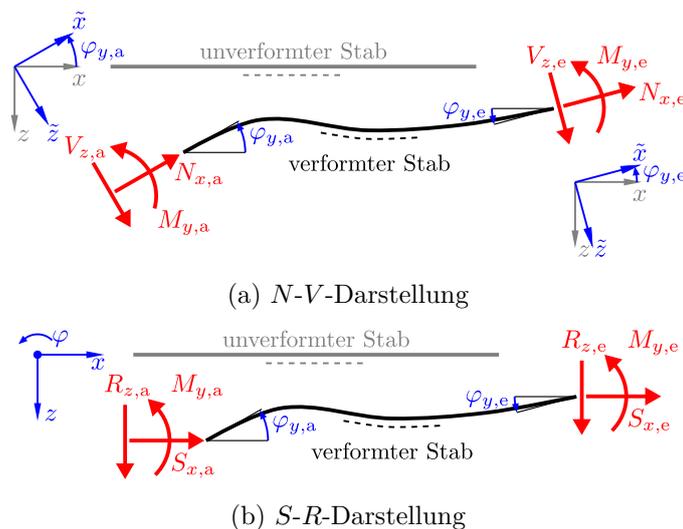


Abbildung 5.3: Bezugskonventionen der Schnittkräfte

Mit der Transformationsmatrix gemäß Gleichung 4.29 können die Schnittkräfte von der  $S$ - $R$ -

Form in die  $N$ - $V$ -Form übergeführt werden:

$$\begin{Bmatrix} V \\ N \end{Bmatrix} = T \cdot \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Für kleine Verformungen kann eine Linearisierung der Winkelfunktionen vorgenommen werden ( $\cos \varphi \approx 1$  und  $\sin \varphi \approx \varphi$ ). Sie lautet:

$$\begin{Bmatrix} V \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Ist neben  $\varphi$  auch das Verhältnis von Querkraft zu Stablängskraft klein ( $|R| \ll |S|$ ) kann in guter Näherung zusätzlich  $N \approx S$  gesetzt werden.

### 5.3 Aufbau eines Stabes

Der Grundstab des Weggrößenverfahrens ist der beidseitig eingespannte Stab (Volleinspannungszustand, siehe Abbildung 5.4). Die Schnittgrößen  $\vec{s}$  (innere Kraftgrößen) setzen sich aus Anteilen infolge aufgezwungener Stabendverformungen  $\vec{w}$  (äußere Weggrößen) und Anteilen  $\vec{s}^\circ$  infolge äußerer Stablasten zusammen (Gleichung 5.4). Der erste Index bezieht sich auf die Wirkungsrichtung, der zweite auf den zugehörigen Knoten. In diesem Kapitel wird nur auf die einachsige Biegung Bezug genommen, daher wird bei den Schnittgrößen in weiterer Folge auf den Index der Wirkungsrichtung verzichtet ( $N_a \equiv N_{x,a}$ , usw.).

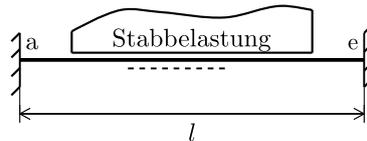


Abbildung 5.4: Grundstab des Weggrößenverfahrens

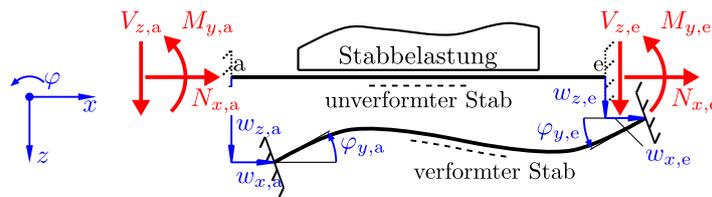


Abbildung 5.5: Stab mit positiven inneren Kraft- und Weggrößen (Vorzeichenkonvention II)

$$\begin{aligned} \vec{s} = & \vec{s}(w_{x,a}) + \vec{s}(w_{z,a}) + \vec{s}(\varphi_{y,a}) + \\ & \vec{s}(w_{x,e}) + \vec{s}(w_{z,e}) + \vec{s}(\varphi_{y,e}) + \vec{s}^\circ \end{aligned} \quad (5.4)$$

Exemplarisch wird die Querkraft am Stabanfang nach Theorie I. Ordnung in Abhängigkeit der Weggrößen angegeben:

$$V_a = \frac{12 \cdot EI_y}{l^3} \cdot w_{z,a} - \frac{6 \cdot EI_y}{l^2} \cdot \varphi_{y,a} - \frac{12 \cdot EI_y}{l^3} \cdot w_{z,e} - \frac{6 \cdot EI_y}{l^2} \cdot \varphi_{y,e} \quad (5.5)$$

Der erste Term der Gleichung 5.5 stellt den Anteil der Querkraft  $V_a$  einer am Stabanfang eingepprägten Verschiebung  $w_{z,a}$  dar. Der Faktor mit dem jede Weggröße multipliziert wird, gibt die vorhandene Steifigkeit an, die der voll eingespannte Grundstab dieser Weggröße entgegenbringt. Alle Steifigkeitswerte können in einfacher Weise, z.B. durch Lösen der Differentialgleichung der Biegelinie, bestimmt werden (siehe Beispiel 5.1).

**Beispiel 5.1:** Es werden die Kraftgrößen eines voll eingespannten, schubstarren Stabes mit konstanter Biegesteifigkeit für den Fall hergeleitet, dass das Stabende in  $w_z$ -Richtung um den Wert "1" verformt wird (siehe Abbildung 5.6). Die Herleitung erfolgt nach Theorie I. Ordnung.

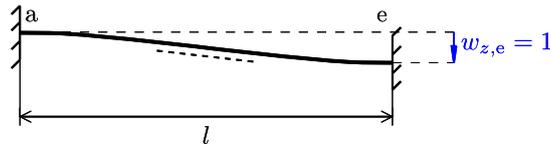


Abbildung 5.6: Stabelement mit Einheitsverformung  $w_{z,e} = 1$

Bei Vernachlässigung der Schubverformung und Formulierung des Gleichgewichts am unverformten Stab gilt die folgende Differentialbeziehung:

$$(EI(x) \cdot w(x)''')' = q(x) \quad (5.6)$$

Unter der Voraussetzung konstanter Biegesteifigkeit  $EI$  und  $q = 0$  folgt:

$$EI \cdot w^{(4)} = 0 = q \quad (5.7)$$

$$EI \cdot w''' = c_1 = -V \quad (5.8)$$

$$EI \cdot w'' = c_1 \cdot x + c_2 = -M \quad (5.9)$$

$$EI \cdot w' = c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 \cdot x + c_3 = -\varphi \quad (5.10)$$

$$EI \cdot w = c_1 \cdot \frac{x^3}{6} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 \cdot x + c_4 \quad (5.11)$$

Die Randbedingungen des Stabes lauten:

$$w(x=0) = 0 \quad (5.12)$$

$$w'(x=0) = 0 \quad (5.13)$$

$$w(x=l) = 1 \quad (5.14)$$

$$w'(x=l) = 0 \quad (5.15)$$

Aus den Gleichungen 5.13 und 5.12 folgt  $c_3 = 0$  und  $c_4 = 0$ . Durch Einsetzen von 5.14 und 5.15 in 5.10 und 5.11 folgt:

$$c_1 = -\frac{12 \cdot EI}{l^3} \quad (5.16)$$

$$c_2 = \frac{6 \cdot EI}{l^2} \quad (5.17)$$

Einsetzen von  $c_1$  und  $c_2$  in 5.8 und 5.9 ergibt:

$$V(x) = \frac{12 \cdot EI}{l^3} \quad (5.18)$$

$$M(x) = -\frac{6 \cdot EI}{l^2} + \frac{12 \cdot EI}{l^3} \cdot x \quad (5.19)$$

Die Schnittgrößen am Stabanfang und -ende lauten:

Tabelle 5.1: Querkräfte am Stabanfang und -ende nach den Vorzeichenkonventionen I und II

	$V_a$	$V_e$	$M_a$	$M_e$
Vorzeichenkonvention I	$\frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$\frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$-\frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$\frac{6 \cdot EI}{l^2}$
Vorzeichenkonvention II	$-\frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$\frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$\frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$\frac{6 \cdot EI}{l^2}$

Die Beziehungen aller Kraftgrößen in Abhängigkeit eingepprägter Weggrößen nach Theorie I. Ordnung können in Matrizenform dargestellt werden (Vorzeichenkonvention II):

$$K^I = \begin{bmatrix} \vec{s}(w_{x,a}=1) & \vec{s}(w_{z,a}=1) & \vec{s}(\varphi_{y,a}=1) & \vec{s}(w_{x,e}=1) & \vec{s}(w_{z,e}=1) & \vec{s}(\varphi_{y,e}=1) \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} & 0 & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{l^3} & \frac{6 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{2 \cdot EI}{l} & 0 & \frac{6 \cdot EI}{l^2} & \frac{4 \cdot EI}{l} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Der römische Index "I" der Steifigkeitsmatrix  $K^I$  steht für die Theorie I. Ordnung.

Bei Formulierung des Gleichgewichts am verformten Element lautet die Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung:

$$K^{II} = \begin{bmatrix} \vec{s}(w_{x,a}=1) & \vec{s}(w_{z,a}=1) & \vec{s}(\varphi_{y,a}=1) & \vec{s}(w_{x,e}=1) & \vec{s}(w_{z,e}=1) & \vec{s}(\varphi_{y,e}=1) \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1 \cdot EI}{l^3} & -\frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & 0 & -\frac{f_1 \cdot EI}{l^3} & -\frac{f_2 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & \frac{\alpha \cdot EI}{l} & 0 & \frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & \frac{\beta \cdot EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1 \cdot EI}{l^3} & \frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & 0 & \frac{f_1 \cdot EI}{l^3} & \frac{f_2 \cdot EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & \frac{\beta \cdot EI}{l} & 0 & \frac{f_2 \cdot EI}{l^2} & \frac{\alpha \cdot EI}{l} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

mit:

$$f_1 = -\varepsilon^2 + 2 \cdot (\alpha + \beta) \quad (5.22)$$

$$f_2 = \alpha + \beta \quad (5.23)$$

und:

$$\varepsilon = l \cdot \sqrt{|S|/EI} \quad (5.24)$$

bei Drucknormalkräften ( $S < 0$ ):

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cdot \cos \varepsilon}{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon} \quad (5.25)$$

$$\beta = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon}{2 \cdot (1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon} \quad (5.26)$$

für  $S = 0$ :

$$\alpha = 4.0 \quad (5.27)$$

$$\beta = 2.0 \quad (5.28)$$

und Zugnormalkräften ( $S > 0$ ):

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot \sinh \varepsilon - \varepsilon^2 \cdot \cosh \varepsilon}{2 \cdot (1 - \cosh \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon} \quad (5.29)$$

$$\beta = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon}{2 \cdot (1 - \cosh \varepsilon) - \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon} \quad (5.30)$$

Die Argumente der Steifigkeitsmatrix  $K^I$  eines Elementes hängen nur von den Steifigkeiten  $EI$  und  $EA$  ab. Daher wird sie auch als materielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet.  $K^{II}$  kann als Erweiterung der materiellen Steifigkeitsmatrix um einen von der Gleichgewichtsformulierung am verformten System verursachten Zusatzanteil (geometrischer Anteil) angesehen werden:

$$\begin{aligned} K^{II} &= K^I + K(S) \\ &= K^{\mathbf{m}} + K^{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aus der analytischen Lösung folgt:

$$K^{\mathbf{g}}(S) = K^{II}(S) - K^I \quad (5.32)$$

## 5.4 Aufbau des Systems

Die Steifigkeitsmatrix  $K$  ( $K^I$  bzw.  $K^{II}$ ) jedes Stabes kann folgendermaßen gruppiert werden:

$$K_{\text{lo}} = \begin{bmatrix} k_{\text{aa,lo}} & k_{\text{ae,lo}} \\ k_{\text{ea,lo}} & k_{\text{ee,lo}} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Der erste Index jeder Teilmatrix steht für den Ort der Auswirkung, der zweite für den Ort der Ursache. Die Untermatrix  $k_{\text{ae}}$  gibt demnach Auskunft über die Schnittgrößen am Stabanfang

für eingeprägte Verformungsgrößen am Stabende. Der Index „lo“ verdeutlicht den Bezug auf das lokale Koordinatensystem des Stabes. Die Steifigkeitsmatrix mit Bezug auf das globale Koordinatensystem eines um den Winkel  $\alpha$  gedrehten Stabes erfolgt durch Transponation:

$$K_{gl} = T^T \cdot K_{lo} \cdot T \quad (5.34)$$

mit:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

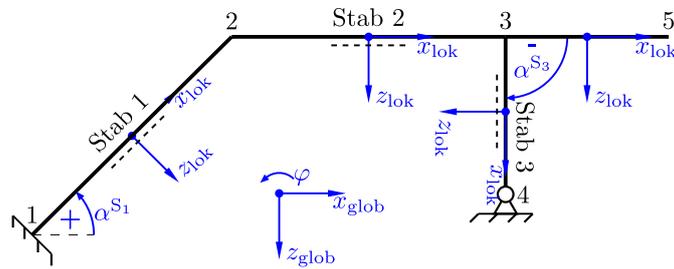


Abbildung 5.7: Stabzug

Stäbe werden über Knoten miteinander verbunden. Jeder Knoten, der entweder Anfangs- oder Endpunkt eines Stabes ist, wird in der Steifigkeitsmatrix des Systems erfasst. Ist ein Knoten Anfangs- und/oder Endpunkt mehrerer Stäbe, werden die diesem Knoten zugeordneten Teilmatrizen der lokalen Steifigkeitsmatrizen der betroffenen Stäbe addiert (Parallelschalten der Einzel-Steifigkeiten). Für einen Stabzug, wie in Abbildung 5.7 abgebildet, wird die Steifigkeitsmatrix wie folgt aufgebaut:

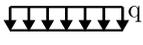
$$K_{sys,gl} = \begin{bmatrix} k_{aa}^{S1} & k_{ae}^{S1} & 0 & 0 & 0 \\ k_{ea}^{S1} & k_{ee}^{S1} + k_{aa}^{S2} & k_{ae}^{S2} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ea}^{S2} & k_{ee}^{S2} + k_{aa}^{S3} + k_{aa}^{S4} & k_{ae}^{S3} & 0 \\ 0 & 0 & k_{ea}^{S3} & k_{ee}^{S3} & k_{ae}^{S4} \\ 0 & 0 & 0 & k_{ea}^{S4} & k_{ee}^{S4} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Alle Teilmatrizen sind hier auf das globale Koordinatensystem bezogen.

### 5.4.1 Berücksichtigung von Stab- und Knotenbelastungen

Bisher wurden die Zusammenhänge des unbelasteten Grundstabes betrachtet. Neben den Weggrößen haben auch Stab- und Knotenbelastungen einen Anteil an den Schnittgrößen. Im Vollenspannzustand werden die Stablasten über den Schnittgrößenvektor  $\vec{s}^\circ$  (Gleichung 5.45) den Stabanfangs- bzw. Stabendknoten zugeordnet. Die Anteile können ähnlich des Beispiels 5.1 aus der Differentialgleichung der Biegelinie bestimmt werden. Exemplarisch sind in der Tabelle 5.2 die Schnittgrößen für den Grundstab nach Abbildung 5.4 für zwei Belastungen angegeben.

Tabelle 5.2: Schnittgrößen  $s_{lo}^\circ$  im Volleinspannzustand des Grundstabes nach Abbildung 5.4 für zwei Stabeinwirkungen nach Theorie I. und II. Ordnung (Vorzeichenkonvention II)

Lastfall	TH I. Ordnung		TH II. Ordnung	
	$V_a^\circ$ $V_e^\circ$	$M_a^\circ$ $M_e^\circ$	$R_a^\circ$ $R_e^\circ$	$M_a^\circ$ $M_e^\circ$
	$-q \cdot \frac{l}{2}$	$q \cdot \frac{l^2}{12}$	$-q \cdot \frac{l}{2}$	$q \cdot \frac{l^2}{2 \cdot (\alpha + \beta)}$
	$-q \cdot \frac{3 \cdot l}{20}$	$q \cdot \frac{l^2}{30}$	$-q \cdot \frac{3 \cdot l}{20}$	$q \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \left( \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{6 - (\alpha + \beta)}{3 \cdot \varepsilon^2} \right)$
	$-q \cdot \frac{7 \cdot l}{20}$	$-q \cdot \frac{l^2}{20}$	$-q \cdot \frac{7 \cdot l}{20}$	$-q \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \left( \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{6 - (\alpha + \beta)}{3 \cdot \varepsilon^2} \right)$

$\alpha$  und  $\beta$  gem. Gleichungen 5.25 bzw. 5.29  
Grundstab - siehe Abbildung 5.4

Der Gesamtlastvektor infolge Stablaster ( $\vec{s}_{lo}^\circ \rightarrow \vec{s}_{gl}^\circ$ ) und Knotenbelastungen ( $\vec{p}$ ) lautet:

$$\vec{f}_{gl} = \vec{s}_{gl}^\circ - \vec{p} \tag{5.37}$$

Positive Knotenbelastungen  $\vec{p}$  greifen wie in Abbildung 5.8 abgebildet in positive Koordinatenrichtung an.

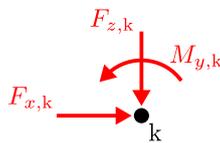


Abbildung 5.8: Positive Wirkungsrichtung von Knotenkraftgrößen

## 5.5 Berücksichtigung von Zwangsverschiebungen

Beim Weggrößenverfahren sind die Weggrößen die unbekannt Variablen. Wird an einem Knoten die Verschiebung in eine Richtung vorgegeben (Zwangsverschiebung), so ist nunmehr die zugehörige Kraftgröße in diese Richtung unbekannt. Durch Umstellen des Gleichungssystems (Spaltenmodifikation oder Zeilen- und Spaltenmodifikation) wird dies wieder korrigiert.

### Spaltenmodifikation

Die zur bekannten Weggröße  $\bar{w}_i$  gehörige Spalte der Steifigkeitsmatrix wird mit dem bekannten Wert multipliziert und dem Lastvektor  $\vec{f}$  zugeordnet. Dadurch ist die entsprechende Spalte der Steifigkeitsmatrix null. Das zugehörige Hauptdiagonalargument wird mit dem Wert eins besetzt.

Ausgehend von der Gleichung 5.1 demonstrieren die folgenden Gleichungen diesen Vorgang für ein System mit sechs Freiheitsgraden für eine bekannte Verschiebung  $\bar{w}_2$ .

$$\begin{array}{c}
 \text{bekannt} \qquad \qquad \qquad \text{unbekannt} \qquad \qquad \qquad \text{bekannt} \\
 \left[ \begin{array}{cccccc} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \boxed{\bar{w}_2 \dots \text{bek.}} \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ \boxed{f_2 \dots \text{unbek.}} \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (5.38)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{bekannt} \qquad \qquad \qquad \text{unbekannt} \qquad \qquad \qquad \text{bekannt} \\
 \left[ \begin{array}{cccccc} k_{1,1} & 0 & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & 1 & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & 0 & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & 0 & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & 0 & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & 0 & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \boxed{f_2} \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} f_1 + k_{1,2} \cdot \bar{w}_2 \\ \boxed{k_{2,2} \cdot \bar{w}_2} \\ f_3 + k_{3,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_4 + k_{4,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_5 + k_{5,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_6 + k_{6,2} \cdot \bar{w}_2 \end{array} \right\} \quad (5.39)
 \end{array}$$

Bei dieser Vorgehensweise steht an der Stelle von  $w_2$  nach dem Lösen des Gleichungssystems im eigentlichen Vektor der Weggrößen die zugehörige Knotenkraft in Zwangsverschiebungsrichtung und muss durch den Wert  $\bar{w}_2$  ersetzt werden.

### Zeilen- und Spaltenmodifikation

Hier wird ähnlich der Spaltenmodifikation vorgegangen, nur dass zusätzlich auch die zugehörige Zeile von  $\bar{w}_i$  mit Nullen besetzt wird. Da  $w_2$  beim Lösen des Gleichungssystems automatisch null wird, bleibt der Weggrößenvektor frei von Kraftgrößen. Am Ende des Berechnungsvorganges muss auch hier die Zwangsverschiebung  $\bar{w}_i$  im Weggrößenvektor eingetragen werden. Als Demonstration dient die Gleichung 5.40.

$$\begin{array}{c}
 \text{bekannt} \qquad \qquad \qquad \text{unbekannt} \qquad \qquad \qquad \text{bekannt} \\
 \left[ \begin{array}{cccccc} k_{1,1} & 0 & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{3,1} & 0 & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & 0 & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & 0 & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & 0 & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} f_1 + k_{1,2} \cdot \bar{w}_2 \\ 0 \\ f_3 + k_{3,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_4 + k_{4,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_5 + k_{5,2} \cdot \bar{w}_2 \\ f_6 + k_{6,2} \cdot \bar{w}_2 \end{array} \right\} \quad (5.40)
 \end{array}$$

## 5.6 Berücksichtigung von Lagerungen

Auflager stellen Randbedingungen im System dar, ohne dessen Berücksichtigung die in der Gleichung 5.36 dargestellte Steifigkeitsmatrix des Systems singulär ist. Erst durch das Einbeziehen von Lagerungsbedingungen wird die Systemsteifigkeitsmatrix regulär und das System kann berechnet werden (vorausgesetzt das zu berechnende System ist nicht kinematisch verschieblich).

### 5.6.1 Berücksichtigung von starren Lagerungen

Starre Lagerungen können auf drei Arten berücksichtigt werden:

- Reduktion des Gleichungssystems
- Spaltenmodifikation oder Zeilen- und Spaltenmodifikation
- Berücksichtigung durch Federn mit hoher Steifigkeit

#### Reduktion des Gleichungssystems

Diese Methode stellt die für Handrechnungen gängigste Vorgehensweise dar. Hier werden alle zugehörigen Spalten und Zeilen des Gleichungssystems gestrichen und das reduzierte Gleichungssystem gelöst. Diese Strategie ist bei kleinen Systemen und vor allem bei der Handrechnung insofern sehr praktisch, da der Berechnungsaufwand reduziert wird. Bei Computerprogrammen zahlt sich diese Methode jedoch meist nicht aus, da erstens die Struktur und der Aufbau des Gleichungssystems verändert wird und zweitens die Flexibilität in der Anwendung eingeschränkt ist.

#### Spaltenmodifikation oder Zeilen- und Spaltenmodifikation

An jedem Knoten mit einer starren Lagerung ist die Weggröße in Richtung der Lagerung null und somit bekannt. Die Modifikation des Gleichungssystems kann entsprechend der Vorgehensweise nach Gleichung 5.39 bzw. Gleichung 5.40 durchgeführt werden. Diese Methode hat den Vorteil, dass der Aufbau und die Struktur des Gleichungssystems erhalten bleibt und die Implementation sowie die Berechnung sehr einfach durchführbar ist.

#### Berücksichtigung durch Federn mit hoher Steifigkeit

Das Hauptdiagonalargument der Steifigkeitsmatrix jeder starren Lagerungsrichtung wird mit einem hohen Steifigkeitswert  $c_{\text{inf}}$  addiert. Dadurch wird die Steifigkeitsmatrix regulär und das Gleichungssystem lösbar. An den Stellen eigentlicher starrer Lagerung ergeben sich nun zwar Verformungen, die verschieden von Null, jedoch bei geeignet hohen Steifigkeitswerten  $c_{\text{inf}}$  vernachlässigbar klein sind. Trotz der großen Zahlenunterschiede stellen Werte von  $c_{\text{inf}}$  in der Größe von  $10^9$  bis  $10^{12}$  in der Regel keinerlei numerische Probleme dar. Diese Vorgehensweise wird in Pfeiffer (2004) auch als Penalty-Verfahren bezeichnet.

### 5.6.2 Berücksichtigung von nachgiebigen Lagerungen

Nachgiebige Auflager, deren Ausrichtung dem globalen Koordinatensystem entsprechen, können durch Addition der Eigen-Federsteifigkeiten zu den Hauptdiagonalargumenten berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise ist mit der Methode „Berücksichtigung durch Federn mit hoher Steifigkeit“ ident.

### 5.6.3 Berücksichtigung von gedrehten Lagerungen

Die Berücksichtigung eines zum globalen Koordinatensystem gedrehten Auflagers (siehe Abbildung 5.9), kann sehr einfach durch das Penalty-Verfahren (Pfeiffer (2004)) erfolgen. Hier wird die zum Auflagerknoten zugeordnete Teilmatrix der globalen Systemsteifigkeitsmatrix um die Zusatzsteifigkeiten  $k_{1,1}^L$ ,  $k_{2,2}^L$ ,  $k_{1,2}^L$ , und  $k_{2,1}^L$  erweitert.

$$k_{1,1}^L = (\bar{c}_1 \cdot \cos^2 \alpha^L + \bar{c}_2 \cdot \sin^2 \alpha^L) \cdot c_{\max} \quad (5.41)$$

$$k_{2,2}^L = (\bar{c}_1 \cdot \sin^2 \alpha^L + \bar{c}_2 \cdot \cos^2 \alpha^L) \cdot c_{\max} \quad (5.42)$$

$$k_{1,2}^L = k_{2,1}^L = \sin \alpha^L \cdot \cos \alpha^L \cdot (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \cdot c_{\max} \quad (5.43)$$

$$\text{mit: } \bar{c}_1 = c_1 / c_{\max}$$

$$\bar{c}_2 = c_2 / c_{\max}$$

$$c_{\max} = \max(c_1; c_2)$$

Die skalierten Lagersteifigkeiten  $\bar{c}_1$  und  $\bar{c}_2$  ( $0 \leq c_1 \wedge c_2 \leq 1$ ) bringen numerische Vorteile bei großen Steifigkeitsunterschieden (z.B. Das in  $x$ -Richtung offene und in  $z$ -Richtung starre und gedrehte Lager mit  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 10^{12}$ ).

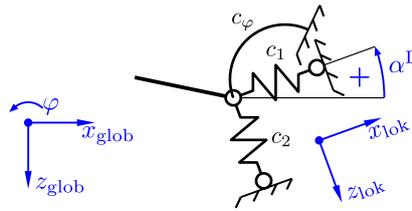


Abbildung 5.9: Um den Winkel  $\alpha^L$  gedrehtes nachgiebiges Lager

Die Gleichung 5.44 zeigt die Implementation der Zusatzsteifigkeiten für ein System mit sechs Freiheitsgraden für den Fall, dass durch die Verdrehung des Lagers die Freiheitsgrade vier und fünf betroffen sind. Eine Lagerverdrehung beeinflusst die Drehsteifigkeit  $k_{\varphi}^L$  nicht. Sie wird daher ohne Modifikation zum zugehörigen Freiheitsgrad addiert.

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} + k_{1,1}^L & k_{4,5} + k_{1,2}^L & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} + k_{2,1}^L & k_{5,5} + k_{2,2}^L & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} + k_{\varphi}^L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

## 5.7 Schnittgrößen und Auflagerreaktionen

Mit der aus der 5.20 bzw. 5.21 gewonnen Beziehung und der Gleichung 5.4 können die Schnittgrößen für ein Element  $e$  wie folgt angeschrieben werden:

$$\vec{s}_{10,e} = K_{10,e} \cdot \vec{w}_{10,e} + \vec{s}_{10,e}^{\circ} \quad (5.45)$$

Wird nach Theorie II. Ordnung gerechnet ( $K = K^{II}$ ) ist darauf zu achten, dass der Schnittgrößenvektor die  $S$ - $R$ -Form aufweist. Die Umrechnung auf  $N$ - $V$ -Form erfolgt nach Gleichung 5.2 bzw. Gleichung 5.3.

Die Knotenkräfte des Systems lauten:

$$\vec{c}_{\text{sys}} = K_{\text{sys}} \cdot \vec{w}_{\text{sys}} + \vec{s}_{\text{sys}}^{\circ} \quad (5.46)$$

Für jeden Freiheitsgrad mit einer Randbedingung entspricht die zugehörige Komponente von  $\vec{c}$  der Auflagerkraft. Wirkt an einem Knoten eine Kraftgröße, so entspricht die jeweilige Komponente von  $\vec{c}$  dieser Kraftgröße.

## 5.8 Gleichgewichtsiteration

Bei linear elastischem Materialverhalten sind die Biege- und Dehnsteifigkeiten stets konstant. Der mit dem Weggrößenverfahren berechnete Weg- und Kraftgrößenzustand ist daher immer mit dem Stoffgesetz kompatibel. Verhält sich das zugrunde gelegte Material nichtlinear (physikalische, bzw. materielle Nichtlinearität), wird die Steifigkeit belastungsabhängig. Die mit den Eingangswerten der Steifigkeiten ermittelten Weg- und Kraftgrößen stehen im Widerspruch zum Stoffgesetz (Abbildung 5.10,  $\tilde{s}^{(1)}$  und  $s^{(1)}$  bei  $w^{(1)}$ ). Für jeden Stab kann nun die Differenz zwischen der Kraftgröße  $\tilde{s}$  und der zur Weggröße zugehörigen Kraftgröße am Anfangs- und Endknoten bestimmt werden. Daraus wird für jedes Element  $e$  der Restkraftvektor  $\vec{f}_{\text{res,lo,e}}$  mit Bezug auf das lokale Koordinatensystem zusammengesetzt:

$$\vec{f}_{\text{res,lo,e}} = \tilde{\vec{s}} - \vec{s} \quad (5.47)$$

Die Umrechnung des Restkraftvektors vom lokalen zum globalen Bezug erfolgt durch die Transformationsbeziehung nach Gleichung 5.35. Durch Assemblieren aller Element-Restkraftvektoren entsteht der für weitere Berechnungsschritte notwendige Restkraftvektor  $\vec{f}_{\text{res,sys}}$  des Systems. Die Gleichgewichtsiteration kann mit dem Newton(-Raphson)-, Sekanten- oder Bogenlängenverfahren erfolgen (siehe Werkle (2008), Rust (2011), ...). Im Zuge dieser Arbeit wurde das Newtonverfahren umgesetzt. Das grundlegende Prinzip kann der Abbildung 5.10 entnommen werden. Die Gleichgewichtsiteration ist solange durchzuführen, bis ein festgelegtes Toleranzmaß  $\varepsilon_{\text{tol}}$  unterschritten wird. Hierbei kann die betragsmäßig größte verbleibende Restkraft von  $\vec{f}_{\text{res,sys}}$ , die euklidische Norm des verbleibenden Restkraftvektors  $\|\vec{f}_{\text{res,sys}}\|_2$  oder des letzten Differenzweggrößenvektors  $\|\Delta\vec{w}_{\text{sys}}\|_2$  zum Vergleich mit  $\varepsilon_{\text{tol}}$  herangezogen werden. Ausreichend genaue Ergebnisse wurden mit  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-3}$  bis  $10^{-6}$  erzielt, wobei stets beachtet werden sollte, dass die Rechendauer sehr stark vom gewählten Toleranzmaß abhängt. Die Grundgleichungen des Verfahrens für die  $\nu$ -te Iteration des  $i$ -ten Lastinkrements lauten:

$$K_{\text{sys}}^{(\nu)} \cdot \Delta\vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu+1)} + \vec{f}^{(\nu)} = 0 \rightarrow \Delta\vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu+1)} \quad (5.48)$$

$$\vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu+1)} = \vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu)} + \Delta\vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu+1)} \quad (5.49)$$

mit:

$$\vec{f}^{(\nu)} = \begin{cases} \vec{s}_{\text{sys}}^{\circ} - \vec{p} + \vec{p} w_i & \text{wenn } \nu = 1 \\ -\vec{f}_{\text{res,sys}}^{(\nu)} & \text{wenn } \nu > 1 \end{cases}$$

und:

$$\vec{w}_{\text{sys}}^{(\nu)} = \vec{w}_{\text{sys},i-1} \quad \text{wenn } \nu = 1$$

Bei Berechnungen mit Laststufen in inkrementeller Form müssen bei der Laststufe  $i$  die Verformungen der letzten Laststufe als Vorverformung für das nächste Lastinkrement mitberücksichtigt werden. Dies erfolgt durch den Anteil  $p_{w,i}$  im Gesamtlastvektor:

$$\vec{p}_{w_i} = (K_{\text{sys}}^{\text{g}}(S_i) - K_{\text{sys}}^{\text{g}}(S_{i-1})) \cdot \vec{w}_{\text{sys},i-1} \quad (5.50)$$

Auch bei Systemberechnungen sind die in Abschnitt 4.4 aufgelisteten Variationen des Newtonverfahrens realisierbar. Die allgemeine Form erreicht das Gleichgewicht bei der geringsten, die Primitivform bei der höchsten Anzahl an Iterationen. In der eigenen Berechnungsroutine wurde die allgemeine Form implementiert.

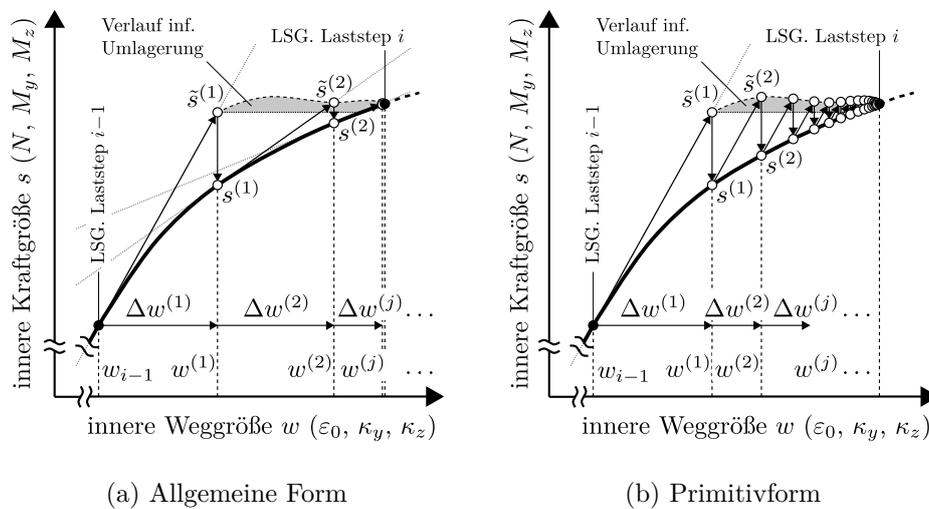


Abbildung 5.10: Prinzip des Newton-Verfahrens

**Beispiel 5.2:** Das Newton-Verfahren wird anhand eines Stabwerks bestehend aus zwei Dehnstäben demonstriert. Beide Stäbe haben idente Querschnittsflächen und Stablängen, jedoch unterschiedliche Stoffgesetze (Abbildung 5.11a und 5.11b). Die Tabelle 5.3 zeigt die Berechnungsergebnisse der einzelnen Iterationsschritte für das System, die Tabellen 5.4 und 5.5 jene für den Knoten  $b$  der Stäbe 1 und 2. An den Kraft-Weg-Verläufen der Stäbe 1 und 2 ist zu erkennen, dass die Zielkraft  $N_{\text{sol}}$  bei statisch unbestimmten Systemen nicht konstant verläuft, sondern von den Steifigkeitsverteilungen innerhalb des Systems abhängt. Das Newton-Verfahren konvergiert sehr schnell. Obwohl das System mit einem einzigen Lastschritt bereits fast bis auf die Systemtraglast beansprucht wird, ist der korrekte Weg- und Kraftgrößenzustand nach sieben Berechnungsschritten gefunden. Die größte Restkraft im System beträgt nach sechs bzw. sieben Iterationsschritten nur mehr  $1.68 \cdot 10^{-2}$  bzw.  $3.30 \cdot 10^{-4}$  kN. Der Stab 2 beginnt ab dem fünften Iterationsschritt zu fließen, womit die Dehnsteifigkeit grundsätzlich null ist. Die Bestimmung von  $\Delta \varepsilon_b$  hätte somit eine Division durch Null zur Folge. Um dies zu umgehen wurde festgelegt, dass die kleinste vorhandene Dehnsteifigkeit 1 MN beträgt. Formal wird hier beim Stab 2 auf die Primitivform des Newton-Verfahrens umgestellt.

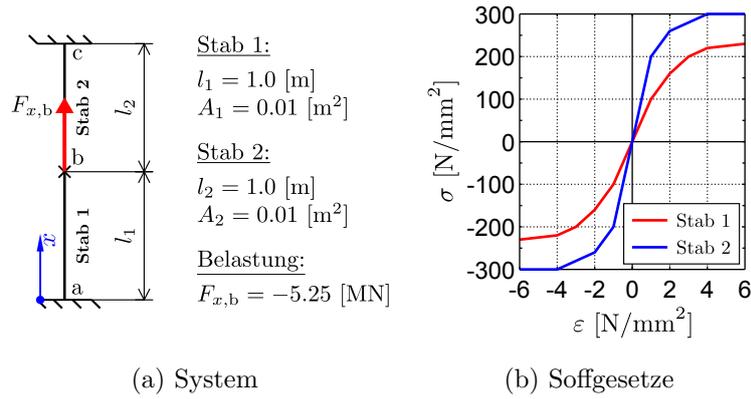


Abbildung 5.11: System und Stoffgesetz

Tabelle 5.3: Newton-Verfahren, Ergebnisse - System

Step	$EA_1$	$EA_2$	$\bar{K}_{\text{sys}}^{1)}$	$p$	$f_{\text{res}}$	$f$	$\Delta w_{x,b}$	$w_{x,b}$	$F_{x,b,\text{res}}$
[-]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[mm]	[mm]	[kN]
1	1000	1000	3000	5250.0	0.0	5250.0	-1.750	-1.750	-1350.00
2	600	600	1200	0.0	1350.0	1350.0	-1.125	-2.875	-525.00
3	400	200	600	0.0	525.0	525.0	-0.875	-3.750	-150.00
4	200	200	400	0.0	150.0	150.0	-0.375	-4.125	-43.75
5	50	1 <sup>2)</sup>	51	0.0	43.7	43.7	-0.858	-4.983	-0.86
6	50	1 <sup>2)</sup>	51	0.0	0.9	0.9	-0.017	-5.000	-0.02
7	50	1 <sup>2)</sup>	51	0.0	0.0	0.0	-0.000	-5.000	-0.00

<sup>1)</sup>  $\bar{K}_{\text{sys}} = EA_1 + EA_2$

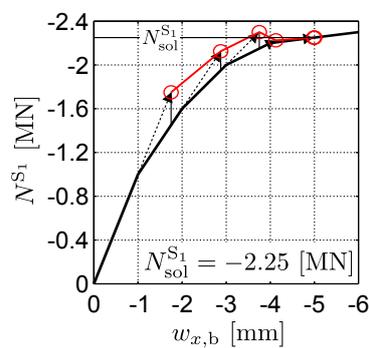
<sup>2)</sup> Tatsächliche Steifigkeit:  $EA_2 = 0$  [kN]. Um Division durch 0 zu vermeiden:  $EA_2 = 1$  [kN]

Tabelle 5.4: Newton-Verfahren, Ergebnisse - Stab 1

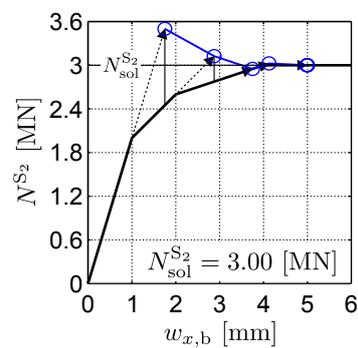
Step	Konv. I		Konv. II					Konv. I	
	$\Delta \tilde{N}_b$	$\tilde{N}_b$	$\Delta \tilde{N}_b$	$\tilde{N}_b$	$\Delta \varepsilon_b$	$\varepsilon_b$	$N_b$	$N_{b,\text{res}}$	$F_{x,b,\text{res}}$
[-]	[kN]	[kN]	[kN]	[‰]	[‰]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
1	-1750.0	-1750.0	-1750.0	-1750.0	-1.750	-1.750	-1450.0	-300.00	-300.00
2	-675.0	-675.0	-675.0	-2125.0	-1.125	-2.875	-1950.0	-175.00	-175.00
3	-350.0	-350.0	-350.0	-2300.0	-0.875	-3.750	-2150.0	-150.00	-150.00
4	-75.0	-75.0	-75.0	-2225.0	-0.375	-4.125	-2206.3	-18.75	-18.75
5	-42.9	-42.9	-42.9	-2249.1	-0.858	-4.983	-2249.1	-0.00	-0.00
6	-0.8	-0.8	-0.8	-2250.0	-0.017	-5.000	-2250.0	-0.00	-0.00
7	-0.0	-0.0	-0.0	-2250.0	-0.000	-5.000	-2250.0	-0.00	-0.00

Tabelle 5.5: Newton-Verfahren, Ergebnisse - Stab 2

Step [-]	Konv. I	Konv. II						Konv. I
	$\Delta \tilde{N}_b$ [kN]	$\Delta \tilde{N}_b$ [kN]	$\tilde{N}_b$ [‰]	$\Delta \varepsilon_b$ [‰]	$\varepsilon_b$ [kN]	$N_b$ [kN]	$N_{b,res}$ [kN]	$F_{x,b,res}$ [kN]
1	-3500.0	3500,0	3500.0	1.750	1.750	2450.0	1050.00	-1050.00
2	-675.0	675.0	3125.0	1.125	2.875	2775.0	350.00	-350.00
3	-175.0	175.0	2950.0	0.875	3.750	2950.0	0.00	-0.00
4	-75.0	75.0	3025.0	0.375	4.125	3000.0	25.00	-25.00
5	-0.9	0.9	3000.9	0.858	4.983	3000.0	0.86	-0.86
6	-0.0	0.0	3000.0	0.017	5.000	3000.0	0.02	-0.02
7	-0.0	0.0	3000.0	0.000	5.000	3000.0	0.00	-0.00



(a) Kraftverlauf Stab 1



(b) Kraftverlauf Stab 2

Abbildung 5.12: Kräfteverlauf im Knoten b der Stäbe 1 und 2 während des Newton-Verfahrens

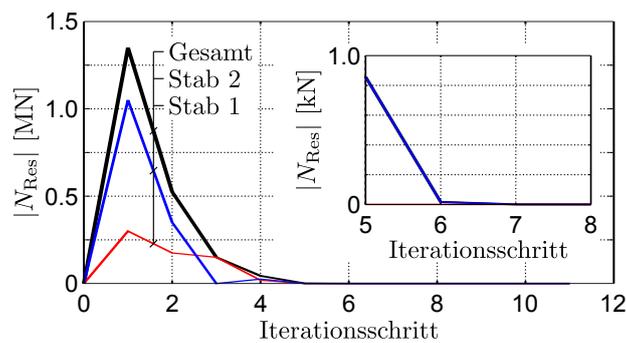


Abbildung 5.13: Restkräfte-Verlauf während des Newton-Verfahrens

**Gleichgewichtsiteration während der Zeitschrittmethode**

Durch Kriechen und Schwinden kommt es zu einer Veränderung der inneren Weggrößen (charakterisierende Dehnungsebene des Querschnitts - vgl. Unterabschnitt 4.6.3). Ein zum Zeitpunkt  $t$  gültiger Weg- und Kraftgrößenzustand ist dadurch zum Zeitpunkt  $t+1$  erneut im Widerspruch zum Stoffgesetz. Das Prinzip der Gleichgewichtsiteration, unabhängig mit welchem Verfahren diese durchgeführt wird, bleibt bestehen (Abbildung 5.14). Die Abbildungen 5.15 und 5.16 zeigen die Abläufe des erstellten Berechnungsprogramms während einer Zeit- und Laststufe.

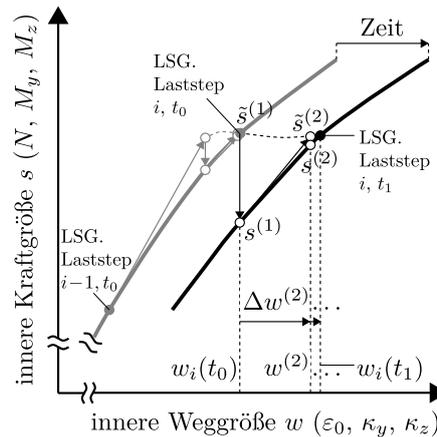


Abbildung 5.14: Newton-Verfahren bei Zeitstufenberechnung

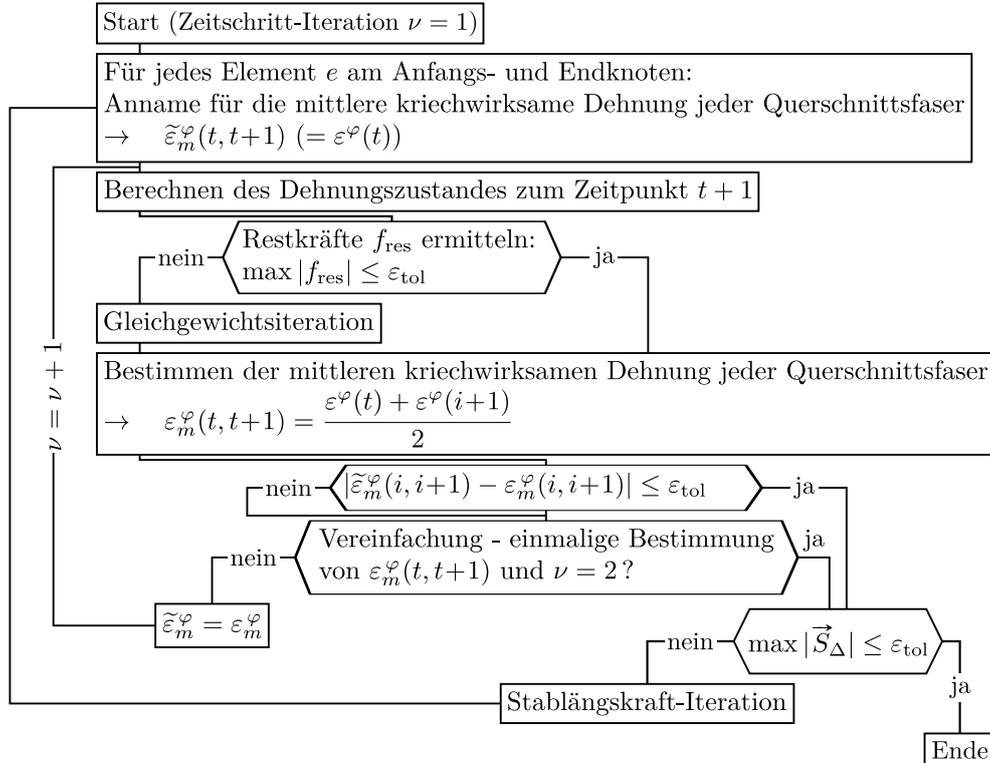


Abbildung 5.15: Flussdiagramm der Stabwerkberchnung während eines Zeitschrittes

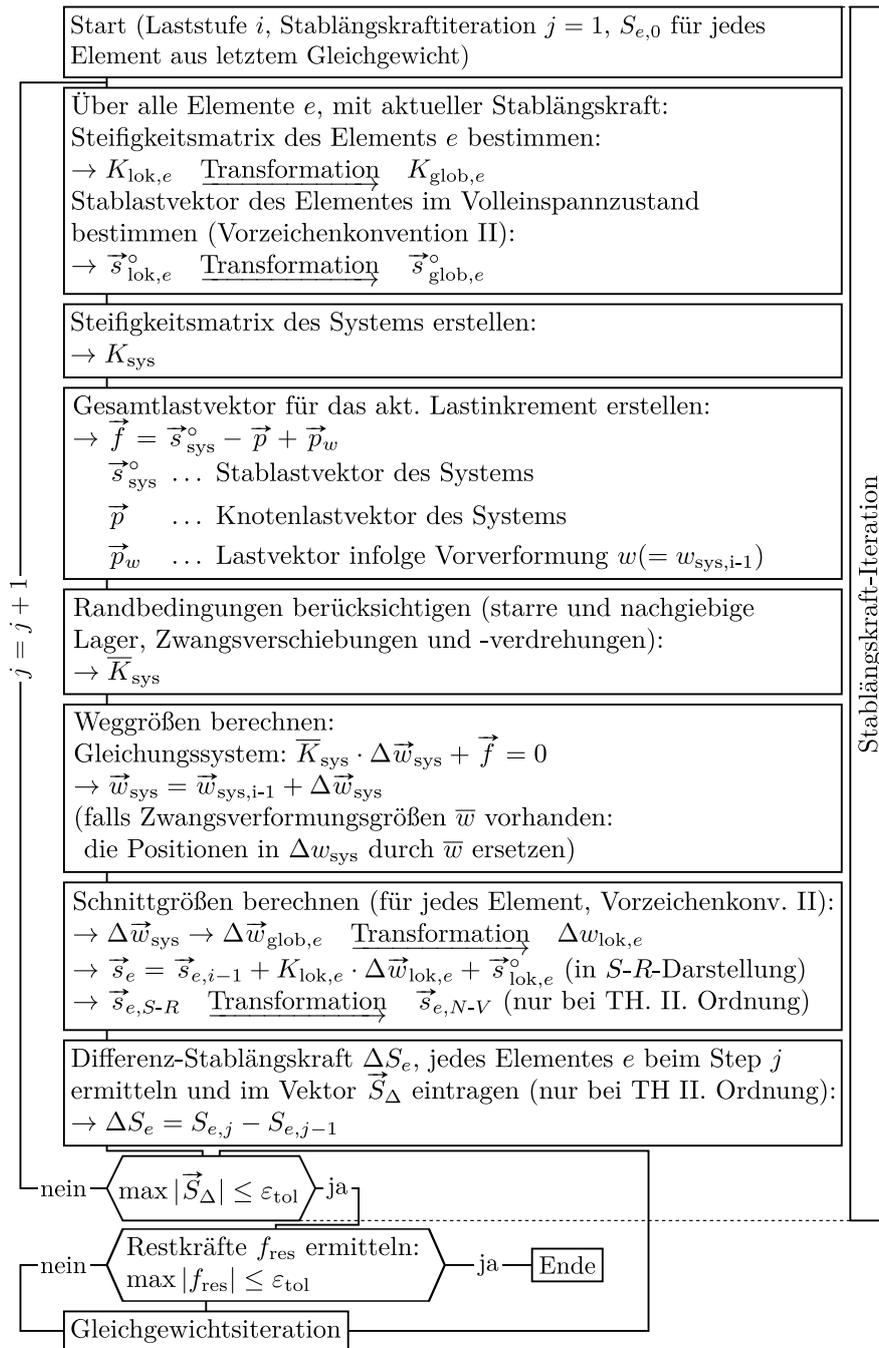


Abbildung 5.16: Flussdiagramm der Stabwerkberechnung während einer Laststufe

## 5.9 Verifikation der eigenen Routine

### 5.9.1 Vergleich mit Stab2dNL

#### Nichtlineare Berechnung einer Stütze

Für den Vergleich wurde der Eulerfall 3 mit einer Stützenlänge von 30 m ( $\lambda \approx 145$ ) gewählt. Als geplante Lastexzentrizität wurde  $e_0 = 25$  cm und als Imperfektion in Stabmitte  $e_i = 3.5$  cm (parabelförmiger Imperfektionsverlauf) angesetzt. Der rechteckige Querschnitt hat die Abmessungen  $h/b/d_1/d_2 = 50/50/5.5/5.5$  cm und ist auf der Druck- und Zugseite mit je  $12.38$  cm<sup>2</sup> bewehrt ( $\rho_s = 1.0$  %). Beton und Stahl entsprechen den Güten C30/37 und B550B. Bei der Berechnung mit der eigenen MATLAB<sup>®</sup>-Routine wurde die Imperfektion mit zehn Stützstellen angenähert. Die Stütze wurde mit 80 Teilstäben (Elemente) modelliert. Alle angesetzten Materialkennwerte können der Tabelle 5.6 entnommen werden. In den Abbildungen 5.17 bis 5.19 sind repräsentative Kenngrößen zum Vergleich dargestellt. Alle Verläufe, ausgenommen der  $F_x$ - $w_z$ -Kurve, gelten für die Kraft  $F_x = -900$  kN, die ca. 94 % der Traglast von  $\max|F_x| = -960$  kN entspricht.

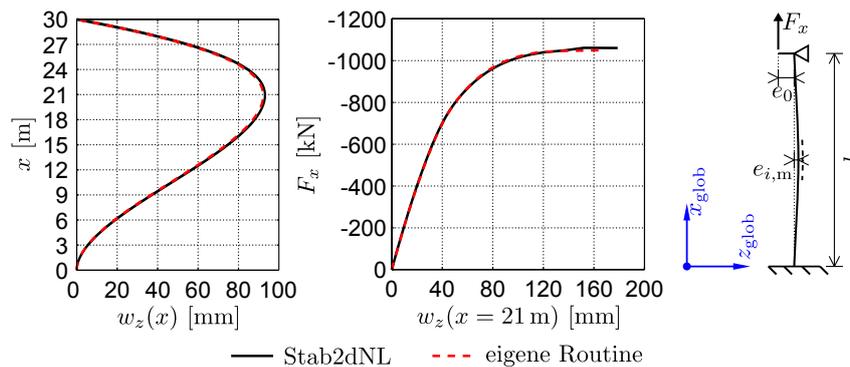


Abbildung 5.17: Vergleich von Stab2dNL mit der eigenen Routine - Verformungen und System (alle Grafiken außer der  $F_x$ - $w_z$ -Darstellung beziehen sich auf  $F_x = -900$  kN)

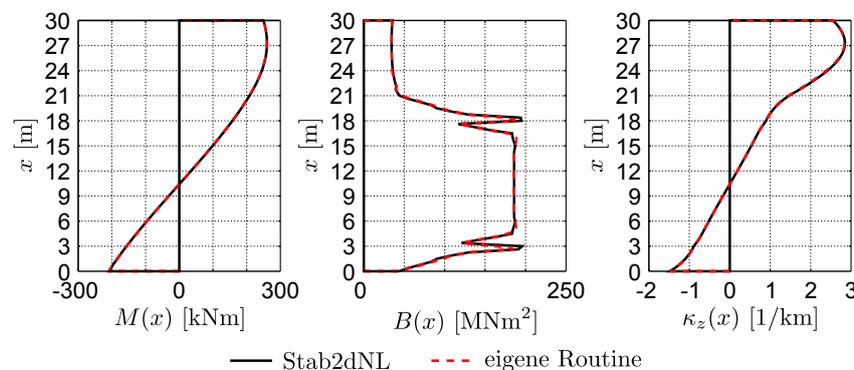


Abbildung 5.18: Vergleich von Stab2dNL mit der eigenen Routine -  $M$ ,  $B_{II}$  und  $\kappa$ -Verlauf bei  $F_x = -900$  kN

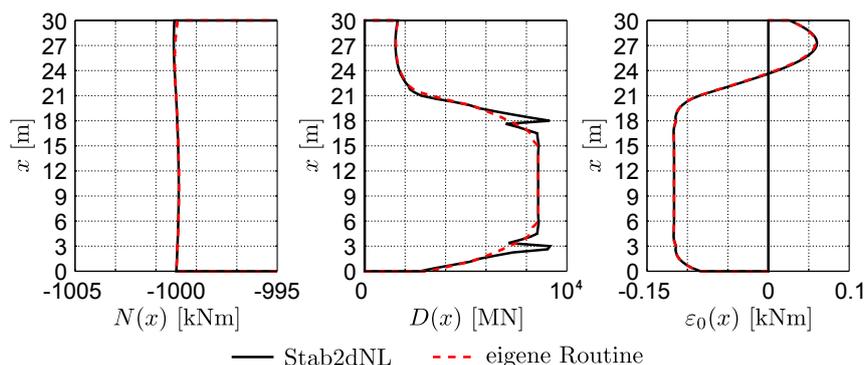


Abbildung 5.19: Vergleich von Stab2dNL mit der eigenen Routine -  $N$ ,  $D_{II}$  und  $\varepsilon_0$ -Verlauf bei  $F_x = -900 \text{ kN}$

Tabelle 5.6: Angesetzte Materialkennwerte für den Vergleich zwischen Stab2dNL und der eigenen Matlab-Routine

	Beton		Stahl	
$E_{cm}$	33000	$[\text{N}/\text{mm}^2]$	$E$	200000 $[\text{N}/\text{mm}^2]$
$f_{cm}$	-38	$[\text{N}/\text{mm}^2]$	$f_{ym}$	600 $[\text{N}/\text{mm}^2]$
$f_{ctm}$	2.9	$[\text{N}/\text{mm}^2]$	$f_{um}$	650 $[\text{N}/\text{mm}^2]$
$\nu_k$	18	$[\%]$	$\varepsilon_{um}$	50 $[\%]$
$\varepsilon_{c1}$	-2.2	$[\%]$		
$\varepsilon_{cu1}$	-3.5	$[\%]$		

## 5.9.2 Vergleich an Versuchen

### Versuche von Ramu et al. (1969)

Das vereinfachte Zeitschrittmodell nach Unterabschnitt 4.6.3 wird anhand von drei exemplarischen Versuchen unter Dauerlast verifiziert. Alle drei Probekörper weisen eine Schlankheit von  $\lambda = 100$  mit einem Bewehrungsgrad von  $\rho_s = 1.7 \%$  auf und unterscheiden sich entweder in der Lastausmitte oder der permanenten Belastungsgröße. Die Berechnungsannahmen können den Tabellen 5.7 und 5.8, die graphischen Ergebnisse den Abbildungen 5.21 und 5.20 entnommen werden. Allen Nachrechnungen wurde die Kriechfunktion der Abbildung 5.20a zugrunde gelegt, die dem dokumentierten Gesamtmittel aller begleitenden Kriechversuche entspricht. Die Stützen 12 und 23 wurden mit zehn Zeitschritten berechnet. Für die Nachrechnung des Prüfkörpers 13 wurden 100 Zeitschritte angesetzt, damit der Momenten-Zeit-Verlauf der Abbildung 5.20c möglichst fein aufgelöst wird.

Bei den Probekörpern 12 und 23 stellt sich im Versuch ein Abklingen der zeitabhängigen Verformungsänderung ein ( $dw/dt \rightarrow 0$ ). Daher kommt es bei diesen Stützen zu keinem durch Kriechen verursachten Stabilitätsversagen. Der Probekörper 13 verhält sich anders. Anfangs kann trotz Vergrößerung der Auslenkung ein Abklingen der zeitabhängigen Verformungsänderung beobachtet werden. Nach ungefähr acht Tagen nehmen die Abtriebskräfte aus der Verformung schneller zu, als das Kriechen abklingt. Dieser Vorgang führt nach 16 Tagen Dauerbeanspruchung zum kriechinduzierten Stabilitätsversagen.

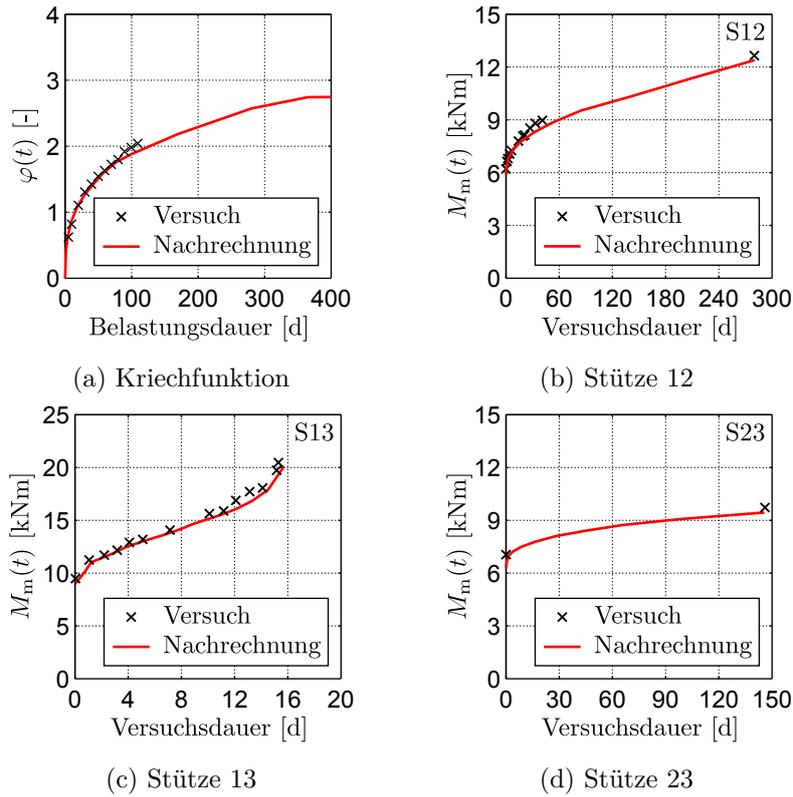


Abbildung 5.20: Angesetzte Kriechfunktion und  $M$ - $t$ -Verläufe der Stützen 12, 13 und 23

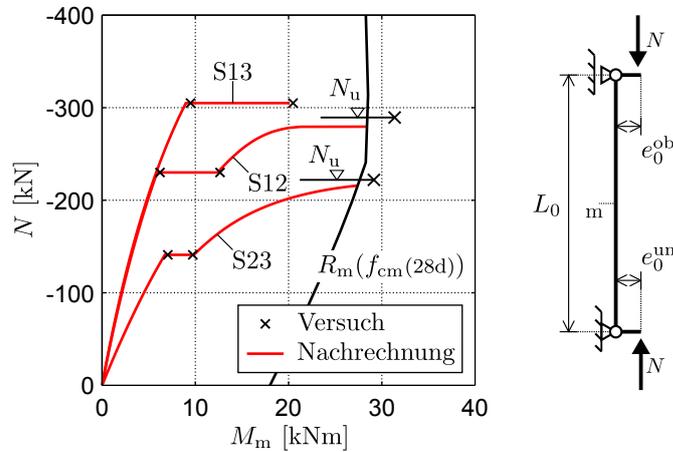


Abbildung 5.21: System und Ergebnisse in  $M$ - $N$ -Darstellung

Tabelle 5.7: Geometriedaten der Versuchskörper

Stütze	$b/h$ [cm]	$d_1/d_2$ [cm]	Bew. [Stk.] $\varnothing$ [mm]	$L_0$ [cm]	$e_0^{ob}/e_0^{un}$ [cm]	$e_i$ [cm]	$N_{qp}$ [kN]
S12	25/15	2.7/2.7	2x4 $\varnothing$ 10	433	1.9/1.9	-	-230
S13	25/15	2.7/2.7	2x4 $\varnothing$ 10	433	1.8/1.8	-	-305
S23	25/15	2.7/2.7	2x4 $\varnothing$ 10	433	4.0/4.4	-	-141

Tabelle 5.8: Angesetzte Materialkennwerte

Stütze	$E_{cm}/f_{cm}/f_{ctm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\nu$ [%]	$\varepsilon_{shr}$ [‰]	$A_{c,eff}^a$ [cm <sup>2</sup> ]	$E_s/f_{sy}/f_{su}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
S12	28000/31.0/1.7	10	-0.3	25	200000/500/550
S13	27000/31.0/1.5	10	-0.3	25	200000/500/550
S23	28000/31.0/1.7	10	-0.3	25	200000/500/550

<sup>a</sup> Gilt pro Bewehrungsstab

### Versuche von Berger (2012)

Ein mit 1400 kN zentrisch vorgespannter Zweifeldträger (VK1) mit gleicher Stützlänge von 7.5 m wurde durch Hebung des mittleren Auflagers um 6.25 mm Zwang ausgesetzt. Der Querschnitt ist rechteckig und aus Beton der Güte C30/37 und Spannstahl der Güte St1570/1770 hergestellt. Alle Geometrie- und Materialangaben können der Tabelle 5.9 entnommen werden. Der Systemaufbau mit Belastung ist der Abbildung 5.22 zu entnehmen. Die Zwangsbeanspruchung blieb elf Tage aufrecht. Dabei wurden kontinuierlich die Auflagerkräfte mitgemessen, woraus sich der zeitliche Verlauf der Zwangsschnittgrößen ableiten lässt. Die Abbildung 5.23 zeigt den Verlauf des Zwangsmomentes über dem Mittelaufleger (schwarze, strichlierte Linie). Da der Versuch im Freien (Sommer 2008) durchgeführt wurde, ist der Verlauf, bedingt durch die Temperaturunterschiede, sehr ungleichmäßig. Die schwarzen Punkte kennzeichnen Versuchsdaten ähnlicher Uhrzeit wie zum Versuchsbeginn ( $\pm 2h$ ). Weiter sind die numerische Nachrechnung mit der Methode effektiver Steifigkeiten (rote strichlierte Linie), mit dem Verfahren nach Trost (rote, strichpunktiierte Linie) und der Zeitschrittmethode nach Unterabschnitt 4.6.3 (rote Linie) eingetragen. Da der Versuchskörper während des gesamten Kriechversuchs im ungerissenen Zustand blieb, wurde für alle Verfahren linear-elastisches Materialverhalten angesetzt. Es ist zu erkennen, dass das Verfahren mit effektiven Steifigkeiten zu konservativen Ergebnissen führt, während das Zeitschrittverfahren den Versuch am Besten annähert. Die Differenz der beiden Verfahren beträgt ca. 15 % (Basis des Bezugs: ZSM). In der Abbildung 5.24 ist der theoretische Verlauf der Zwangsmomente am Mittelaufleger und in Feldmitte bis zu einer Belastungsdauer von 26.2 Jahren abgebildet. Der Momentenverlauf  $M_b(t)$  bzw.  $M_{l/2}(t)$  nähert sich mit fortschreitender Zeit immer mehr der jeweiligen zwangsfreien Momentengröße an. Hier kann sehr eindrucksvoll abgelesen werden, dass im Versuchszeitraum von elf Tagen schon fast die Hälfte des Zwangsmomentes abgebaut wurde.

Tabelle 5.9: Geometriedaten der Versuchskörper

	Beton		Spannstahl		
$E_{cm}^a$	33000	[N/mm <sup>2</sup> ]	$E_p$	200000	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{cm}/f_{ctm}$	40.0/3.0	[N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{py}/f_{pu}$	1690/1900	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\nu$	10	[-]	$N_{pm}^c$	-1250	[kN]
$\varepsilon_{shr}$	-0.3	[‰]	Bew. <sup>d</sup>	2x1Ø36.6	[Stk.]Ø[mm]
$\varphi(t_0, t_\infty)$	2.3	[-]			
$A_{ct,eff}^b$	787.5	[cm <sup>2</sup> ]			

<sup>a</sup>  $E_{cm}$  ... Sekantenmodul

<sup>b</sup> Für die Berechnung der modifizierten Arbeitslinien nach 3.4 erforderlich

<sup>c</sup> Pro Litze mit Verlusten aus Kriechen, Schwinden und Relaxation

<sup>d</sup> Effektiver Durchmesser des Spannbündels (7 Litzen à 1.50 cm<sup>2</sup>),  $A_p = 10.5$  cm<sup>2</sup>

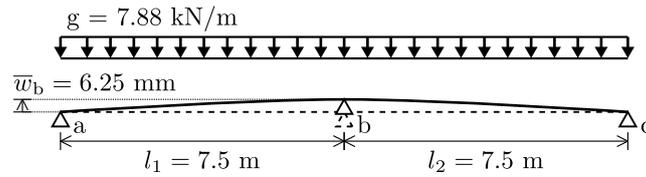


Abbildung 5.22: Versuchsdaten und Nachrechnung

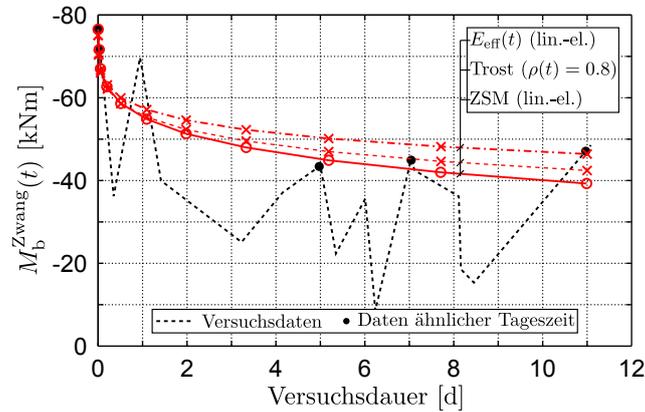


Abbildung 5.23: Versuchsdaten und Nachrechnung

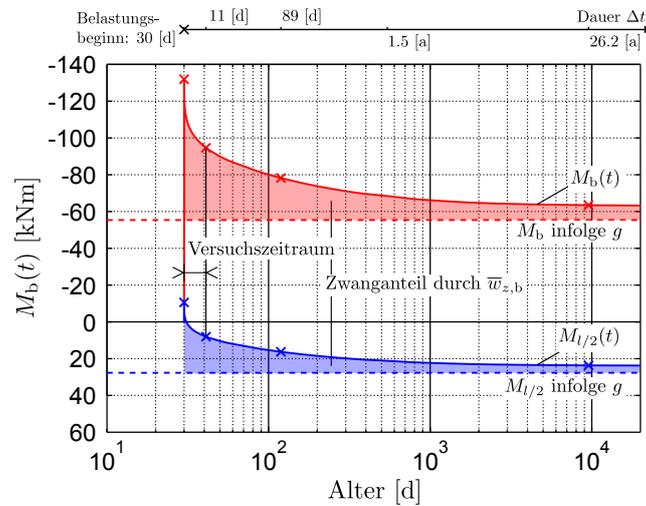


Abbildung 5.24: Verlauf der Momente bis zur Belastungsdauer  $t = 26.2$  Jahre



# 6 Bemessung

Dieses Kapitel befasst sich mit den in der ON-EN1992-1-1 (2011) und dem nationalen Anhang ON-B1992-1-1 (2011) angeführten Bemessungsansätzen. Die im Eurocode 2 geregelten Grundlagen für die nichtlineare Berechnung und alternative Ansätze der Literatur werden im Abschnitt 6.2 vorgestellt. Eine detaillierte Beschreibung der vereinfachten Bemessungsansätze, Nennkrümmungsverfahren und Nennsteifigkeitsverfahren, kann dem Abschnitt 6.3 entnommen werden. Der Abschnitt 6.4 beleuchtet das Tragverhalten von Bauteilen. Hier wird der Einfluss von Betongüte, Bewehrungsgrad, Vorspannung, Kriechen und Schwinden systematisch betrachtet und beschrieben. Weiter erfolgt der Vergleich und die Bewertung der Berechnungsergebnisse der oben genannten Verfahren.

## 6.1 Einführung

Normalkraftbeanspruchte Systeme bzw. Bauteile müssen im Allgemeinen unter Berücksichtigung des Einflusses der Verformungen auf die Schnittgrößen bemessen werden. Die Auswirkungen der Theorie II. Ordnung sind im wesentlichen von der einwirkenden Normalkraft, der Schlankheit, der Ausmitte und der Steifigkeit der Bauteile abhängig. Nach der ON-EN1992-1-1 (2011) darf der Einfluss der Theorie II. Ordnung in der Bemessung vernachlässigt werden, wenn dessen Auswirkungen auf die Schnittgrößen im Vergleich zur Berechnung nach Theorie I. Ordnung unter 10 % liegen. Ohne eine Berechnung sowohl nach Theorie I., als auch nach II. Ordnung durchzuführen und zu vergleichen, ist diese Beurteilung nicht leicht vorzunehmen. Daher wird im Eurocode 2 ein einfacher Ansatz für Einzeldruckglieder angegeben. Hiernach darf die Beurteilung der Notwendigkeit der Theorie II. Ordnung vereinfacht über die Einhaltung der Grenzschlankheit  $\lambda_{\text{lim}}$  erfolgen. Die Bemessung darf mit Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung geführt werden, wenn  $\lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$  ist. Die Schlankheiten  $\lambda$  und  $\lambda_{\text{lim}}$  errechnen sich wie folgt:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (6.1)$$

$i$  ... Trägheitsradius des ungerissenen Querschnitts ( $i = \sqrt{I/A}$ )

$$\lambda_{\text{lim}} = \frac{20 \cdot A \cdot B \cdot C}{\sqrt{n}} \quad (6.2)$$

$$\text{mit: } A = \frac{1}{1 + 0.2 \cdot \varphi_{\text{eff}}}; \quad B = \sqrt{1 + 2 \cdot \omega}; \quad C = 1.7 - r_m$$

$$\text{und: } \varphi_{\text{eff}} = \varphi(\infty, t_0) \cdot \frac{M_{0\text{EqP}}}{M_{0\text{Ed}}};$$
$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}; \quad n = \frac{N_{\text{Ed}}}{A_c \cdot f_{cd}}; \quad r_m = M_{01}/M_{02}$$

Der Faktor  $A$  liefert einen Ansatz für die Kriechauswirkungen in der Grenzschlankheit. Diese werden über die effektive Kriechzahl  $\varphi_{\text{eff}}$  abgeschätzt.  $M_{0\text{Eqp}}/M_{0\text{Ed}}$  steht für das Verhältnis des Momentes infolge Theorie I. Ordnung unter quasi-ständiger Lastkombination zu jenem Moment unter der Bemessungskombination (ULS). Variiert das Moment über die Stablänge, darf der Maximalwert oder ein anderer repräsentativer Mittelwert für  $M$  eingesetzt werden. Alternativ dürfen anstelle von  $M_{0\text{Eqp}}/M_{0\text{Ed}}$  auch die Verhältniswerte  $M_{\text{Eqp}}/M_{\text{Ed}}$  des Gesamtmomentes inklusive Theorie II. Ordnung verwendet werden. Dann aber ist eine iterative Bemessung unumgänglich. Nach der ON-EN1992-1-1 (2011) darf das Kriechen vernachlässigt werden, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- $\varphi(\infty, t_0) \leq 2.0$
- $\lambda \leq 75$
- $M_{0\text{Ed}}/N_{\text{Ed}} \geq h$  ( $h$  .. Querschnittshöhe)

Ein über die Stablänge veränderlicher Momentenverlauf wird über den Faktor  $C$  berücksichtigt. Hierbei ist  $r_m$  das Verhältnis der Stabendmomente, wobei  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$  eingehalten werden muss. Im Falle eines konstanten Momentenverlaufs nimmt  $r_m$  den Minimalwert von 0.7 an. Sind die Stabendmomente gleich groß, erzeugen aber Zug auf unterschiedlichen Seiten (Zimmermannstab), hat  $r_m$  den Maximalwert von 2.7.

### Berücksichtigung von Imperfektionen

Werden die Schnittgrößen nach der Theorie II. Ordnung ermittelt, müssen etwaige Imperfektionen in der Berechnung berücksichtigt werden. Sie sind ungünstig wirkend anzusetzen. Abweichungen in der Geometrie (Abmessungen, Lage der Bewehrung, Durchmesser der Bewehrung, Modellunsicherheiten,...) sind bereits in den Teilsicherheitsbeiwerten auf der Materialseite berücksichtigt. Abweichungen im System (Schiefstellung, Vorkrümmung) müssen in ihrer Größe ermittelt werden. Grundsätzlich dürfen Imperfektionen als Schiefstellung bzw. Vorkrümmung oder entsprechende Ersatzlast (Einzellast, Gleichlast) berücksichtigt werden (siehe Abbildung 6.1). In der ON-EN1992-1-1 (2011) erfolgt dies über die Neigung  $\theta_i$ . Sie setzt sich aus einem Grundwert  $\theta_0$ , einem Abminderungsbeiwert  $\alpha_h$  für die Höhe und einem Abminderungsbeiwert  $\alpha_m$  für die Anzahl der aussteifenden Bauteile im Grundriss zusammen. Es gilt:

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m \quad (6.3)$$

$$e_i = \theta_i \cdot l_0/2 \quad (6.4)$$

$$\text{mit: } \theta_0 = 1/200 \quad (6.5)$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l}} \text{ und } 2/3 \leq \alpha_h \leq 1 \quad (6.6)$$

$$\alpha_m = \sqrt{0.5 \cdot (1 + 1/m)} \quad (6.7)$$

Vereinfachend zur Gleichung 6.4 darf in ausgesteiften Systemen  $e_i$  immer mit  $l_0/400$  angenommen werden.

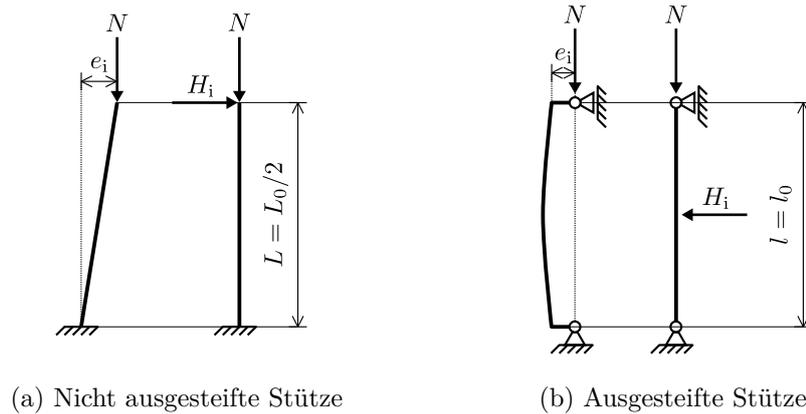


Abbildung 6.1: Berücksichtigungsmöglichkeiten der Imperfektion nach der ON-EN1992-1-1 (2011)

## 6.2 Allgemeine Nichtlineare Bemessung/Berechnung

Das Verformungsverhalten und somit auch das Tragverhalten von Bauteilen mit Einfluss der Theorie II. Ordnung kann nur mit nichtlinearen Berechnungen realitätsnah beschrieben werden. Dabei ist es von besonderer Bedeutung, realistische konstitutive Materialgesetze für die Berechnung zu verwenden. Speziell im Stahlbeton- und Verbundbau müssen die Rissbildung und die Zugversteifung möglichst korrekt erfasst werden. Hierbei spielen oftmals auch Zwangsspannungen aus Schwinden oder Temperaturbelastung und deren teilweiser Abbau durch Kriechen eine bedeutende Rolle.

Mit nichtlinearen Berechnungen können bei statisch unbestimmten Systemen neben Verformungen auch Schnittgrößenumlagerungen infolge belastungsabhängiger Steifigkeitsverteilungen automatisch erfasst werden. Nichtlineare Berechnungen sind sehr aufwändig, da das Kräftegleichgewicht unter Einhaltung der Verformungskompatibilität nur iterativ gefunden werden kann. Die Qualität der Ergebnisse hängt nicht zuletzt von der Systemabbildung, der Verwendung hinreichend genauer Materialmodelle und der Diskretisierung (Anzahl der Elemente im System und über den Querschnitt) ab. Da das Superpositionsgesetz bei einer nichtlinearen Berechnung seine Gültigkeit verliert, ist es nicht mehr möglich, unterschiedliche Lastfälle einzeln zu berechnen und anschließend zu überlagern. Deshalb muss der Nachweis der Tragfähigkeit für jede mögliche Lastfallkombination durchgeführt werden.

Eine Bemessung von statisch unbestimmten Tragwerken mittels nichtlinearer Berechnung ist eine sehr komplexe Aufgabe, da die Bewehrungsverteilung vor dem Beginn der nichtlinearen Berechnung bereits bekannt sein muss. Da die Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Systemen von der Bewehrung abhängt, ist bei der nichtlinearen Bemessung keine eindeutige Lösung mehr möglich. Sie läuft daher bei statisch unbestimmten Systemen immer auf eine Optimierungsaufgabe hinaus. In Ahner (2001), Andreatta (2004) und Six (2001) wird diese Thematik in Grundzügen behandelt.

**Nichtlineares Verfahren nach ON-EN1992-1-1 (2011) und ON-B1992-1-1 (2011)**

Die ON-EN1992-1-1 (2011) schreibt generell die Verwendung geeigneter Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zur Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen vor. Als geeignet werden konstitutive Materialgesetze auf Mittelwertniveau angesehen. Der Grenzzustand der Tragfähigkeit muss mit den Bemessungswerten der Baustofffestigkeiten nachgewiesen werden. Die Verwendung von Mittelwerten zur Schnittgrößenermittlung und Verwendung von Bemessungswerten zum Nachweis der Tragfähigkeit wird in der Literatur oft als „doppelte Buchführung“ bezeichnet. Bei der Berechnung stabilitätsgefährdeter Bauteile muss nach dem nationalen Anwendungsdokument ON-B1992-1-1 (2011), Abschnitt 5.8.6(3) nachgewiesen werden, dass die Bemessungslast hinreichend weit vom Stabilitätsversagen entfernt ist. Deshalb wird gefordert, dass die Bemessungslast um 30 % gesteigert werden können muss, ohne dass es rechnerisch zu einem Stabilitätsversagen kommt.

Vereinfachend erlaubt die ON-EN1992-1-1 (2011) im Abschnitt 5.8.6 auch die Berechnung der Traglast auf Bemessungsniveau mit der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Bild 3.2 in Abschnitt 3.1.5. Hierbei soll anstelle von  $f_{cm}$  der Bemessungswert  $f_{cd}$  und anstelle von  $E_{cm}$  der reduzierte Wert  $E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{cE}$  verwendet werden ( $\gamma_{cE} = 1.2$ ). Bei dieser Vorgehensweise entfällt der Nachweis  $N_b \leq 1.3 \cdot N_{Ed}$  des Abschnitts 5.8.6(3) der ON-B1992-1-1 (2011). Das vereinfachte Berechnungsmodell ist höchstens als Richtwert anzusehen und kann keinesfalls eine realitätsnahe nichtlineare Berechnung ersetzen. Quast (2000), Six (2001) u.a. haben gezeigt, dass Bemessungswerte nicht für die Traglastberechnung mit Verformungseinfluss geeignet sind.

Die doppelte Buchführung der momentanen Normenfassung wird stark kritisiert. Erfolgt die Berechnung mit den Mittelwerten der Materialkennwerte, stellen sich die Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Tragwerken auch auf Basis der mittleren Fließspannungen ein. Die somit erhaltene Schnittgrößenverteilung (Einwirkung) kann bei der anschließenden Nachweisführung mit Bemessungswerten (Widerstand) oftmals nicht ins Gleichgewicht gebracht werden. Bereichsweise müssen dann zusätzliche Bewehrung, Querschnittsänderungen oder alternative Maßnahmen vorgesehen werden, um ein lokales Versagen rechnerisch zu vermeiden. Damit ändert sich aber auch wieder die Grundlage der ursprünglichen Schnittgrößenermittlung. Der ursprüngliche Gedanke, örtliche Fehlstellen mittels um Teilsicherheitsbeiwerte abgeminderte Fraktilwerte zu erfassen führt oftmals zu Inkonsistenzen in der Nachweisführung. Daher wurden von einigen Wissenschaftlern alternative Nachweisformate vorgeschlagen, die nachfolgend angesprochen werden.

**Vorschlag von Eibl**

Grundsätzlich teilt auch Eibl die Meinung, dass Mittelwerte geeignet sind, das Last-Verformungsverhalten realitätsnah zu beschreiben. Für ihn ist es jedoch inkonsistent, die Schnittgrößen nichtlinear zu bestimmen und den Nachweis der Tragfähigkeit schließlich mit den Bemessungswerten der Materialeite zu führen (Eibl und Schmidt-Hurtienne (1995)). Die Annahme, dass ein Querschnittsversagen automatisch auch den Kollaps des Systems bedeutet, trifft nur bei statisch bestimmten Tragwerken zu. Erhöht sich der Grad der inneren und/oder äußeren statischen Unbestimmtheit ergibt sich ein nicht zu vernachlässigendes Potential für die Schnittgrößenumlagerung. Eibl schlägt daher vor, von der Nachweisführung auf Querschnittsebene zu einer Nachweisführung auf Systemebene überzugehen. Die mit Mittelwerten der Materialeigenschaften ermittelte Traglast  $R_m$  sollte dividiert durch einen globalen Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_R$  nicht kleiner als die Einwirkung  $E_d$  auf Bemessungslastniveau sein (Gleichung 6.8). Die Frage, wie groß der

Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_R$  sein muss, um die erforderliche Zuverlässigkeit zu gewährleisten, sollte mit Hilfe von probabilistischen Finite Elemente Methoden (PFEM, SFEM) geklärt werden.

$$E_k \cdot \gamma_E \leq \frac{R_m}{\gamma_R} \quad (6.8)$$

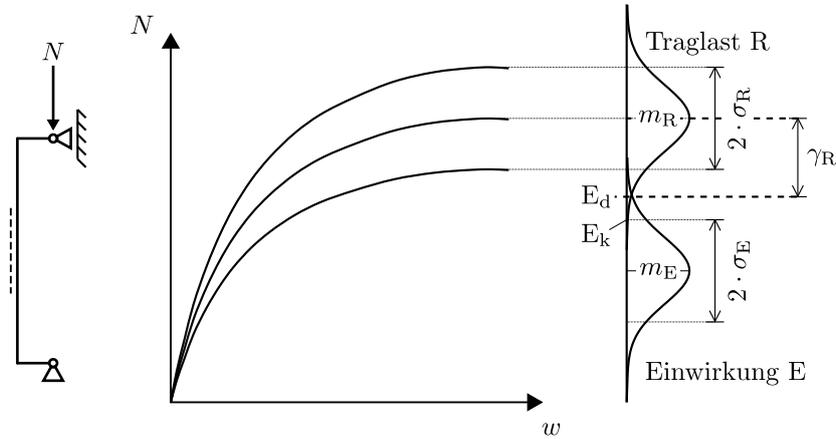


Abbildung 6.2: Sicherheitsformat nach Eibl und Schmidt-Hurtienne (1995)

### Vorschlag von König

Auch in König et al. (1999) wird auf die mechanische Widersprüchlichkeit der getrennten Baustoffeigenschaften zur Schnittgrößenermittlung und Bemessung bei statisch unbestimmten Tragwerken eingegangen. König schlägt zwei prinzipielle Sicherheitskonzepte vor, die für alle Bauteile ein konstantes Zuverlässigkeitsniveau bieten könnten. Das erste Konzept bedient sich eines konstanten Sicherheitsfaktors  $\gamma_R$ , den König mit 1.3 festlegt. Der rechnerische Mittelwert der Betondruckfestigkeit beträgt  $f_{cR} = 0.85 \cdot f_{ck}$  und jener der Stahlfließspannung  $f_{yR} = 1.1 \cdot f_{yk}$ . Den Faktor 0.85 zur Ermittlung der rechnerischen mittleren Betondruckfestigkeit begründet König mit der oftmals kleineren Druckfestigkeit am Bauteil im Vergleich zur Festbetonprüfung. Aus dieser Überlegung ergeben sich nach den Gleichungen 6.9 und 6.10 der gleiche Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_R$ . Der Vorteil ist hier, dass  $\gamma_R$  unabhängig von der Versagensart (Betonversagen, Stahlversagen) ist.

$$f_{cR} = 0.85 \cdot f_{ck} \text{ und } f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \Rightarrow \frac{f_{cR}}{f_{cd}} = 0.85 \cdot 1.5 = 1.3 \quad (6.9)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{ym}}{1.1 \cdot \gamma_s} \Rightarrow \frac{f_{ym}}{f_{yd}} = 1.1 \cdot 1.15 \approx 1.3 \quad (6.10)$$

mit  $\gamma_c = 1.5$ , und  $\gamma_s = 1.15$

Das zweite Konzept basiert auf einem variablen Sicherheitsbeiwert  $\gamma_R$ , der in Abhängigkeit zur erreichten Dehnungsverteilung im Grenzzustand ermittelt wird. Bei Gefahr eines Sprödversagens muss der Sicherheitsbeiwert  $\gamma_R$  größer als bei duktilem Versagen sein. Mit Hilfe von Optimierungsalgorithmen könnten Bauteilabmessungen bzw. Bewehrungsverteilungen so bestimmt werden, dass sich der geringste notwendige Sicherheitsbeiwert einstellt. Dadurch können duktilere Tragwerke geplant werden.

Das Verfahren von König wurde für die nichtlineare Berechnung und Bemessung von Tragwerken im nationalen Anwendungsdokument DIN-EN1992-1-1/NA (2011) der DIN-EN1992-1-1 (2011) aufgenommen (siehe Tabelle 6.1). Quast (2000) kritisiert, dass das Verfahren nur bei Systemen ohne Einfluss der Verformungen auf die Schnittgrößen gute Ergebnisse erzielt, weil nur die Verhältniswerte der Biegesteifigkeiten für die Schnittgrößenverteilung ausschlaggebend sind. Kommen Einflüsse der Theorie II. Ordnung hinzu, ist das Verfahren seiner Meinung nach wenig geeignet, da die Verformungen durch die Wahl abgeminderter Fraktilwerte der Betonkennwerte als Rechenwerte zu groß ermittelt werden.

Tabelle 6.1: Rechnerische Mittelwerte und Teilsicherheitsbeiwerte für die nichtlineare Tragwerksbemessung nach der DIN-EN1992-1-1/NA (2011)

Baustahl	$f_{yR} = 1.1 \cdot f_{yk}$	
	$f_{tR} = 1.05 \cdot f_{yR}$	B500A
	$f_{tR} = 1.08 \cdot f_{yR}$	B500B
Spannstahl	$f_{p0.1R} = 1.1 \cdot f_{p0.1k}$	
	$f_{pR} = 1.1 \cdot f_{pk}$	
Beton	$f_{cR} = 0.85 \cdot \alpha_{cc} \cdot f_{ck}$	
Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_R$ des Widerstandes		
$\gamma_R = 1.3$	ständige und vorübergehende Bemessungskombination	
$\gamma_R = 1.1$	außergewöhnliche Bemessungskombination	

## Vorschlag von Six

Unter der Voraussetzung nur die Nachweisführung anzupassen, jedoch nicht das Nachweiskonzept der aktuellen Normung zu verändern, entwickelt Six (2001) ein Konzept, das auf den Überlegungen von Eibl aufbaut. Er ist ebenfalls der Auffassung, dass die von Eibl und Schmidt-Hurtienne (1995) angesprochenen Probleme bzw. Inkonsistenzen eliminiert werden können, wenn die Nachweisführung bei nichtlinearer Berechnung nicht auf der Querschnittsebene sondern auf der Systemebene erfolgt. Das neue Sicherheitsformat muss für ihn folgende Punkte erfüllen:

- Einklang des Sicherheitsformates mit dem semi-probabilistischen Teilsicherheitskonzept
- Mindestanforderungen der Zuverlässigkeit gemäß DIN-V-ENV1991-1 (1992) müssen erfüllt sein
- Ausgeglichenes Zuverlässigkeitsniveau
- Sicherheitselemente fließen auf Bauteil- bzw. Systemebene in die Berechnung ein (der neue Teilsicherheitsbeiwert bezieht sich auf den für das System charakteristischen Widerstand, der durch die Nennwerte bestimmt wird)

Sein Lösungsansatz für das neue Sicherheitsformat lautet:

$$E_d \leq R_d = R(X_k, a_{\text{nom}}) / \gamma_R \quad \text{mit: } \gamma_R = \gamma_{cs} \cdot \gamma_{sys} \quad (6.11)$$

Hier steht  $X_k$  für den für das System charakteristischen Widerstand, der mit Nennwerten abgebildet wird. Die nominellen Querschnittskennwerte (Höhe, Breite, Stahlfläche, Randabstand der Bewehrung, statische Nutzhöhe der Bewehrung,...) gehen in  $a_{\text{nom}}$  ein. Unsicherheiten auf Querschnittsebene und bei der Systemabbildung werden durch die Beiwerte  $\gamma_{cs}$  und  $\gamma_{sys}$  erfasst.

Der Vorteil dieser Formulierung liegt darin, dass  $\gamma_{cs}$  an die Versagensart (Sprödbbruch, duktiles Versagen, Stabilitätsverlust) angepasst werden kann. In Fällen großer Empfindlichkeit gegenüber Modellunsicherheiten bringt die Anrechnung von  $\gamma_{sys}$  ebenfalls ein hohes Maß an Flexibilität, da dieser Beiwert an unterschiedliche Tragwerkstypen (Durchlaufträger, Einzelstützen, Stockwerksrahmen, ...) angepasst werden kann. Die Abbildung 6.3 zeigt die von Six vorgeschlagene Größe von  $\gamma_{cs}$  in Abhängigkeit des Dehnungszustandes beim Eintritt des globalen Versagens. Bei duktilem Versagen ( $\varepsilon_{s1} \geq 4\text{‰}$ ) wird  $\gamma_{cs} = 1.3$  gesetzt. Ist der Querschnitt komplett überdrückt, liegt ein sprödes Versagen vor. Hier wird  $\gamma_{cs} = 2.1$  angesetzt. Zwischen duktilem und sprödem Versagen ist der Beiwert  $\gamma_{cs}$  linear veränderlich. Mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode leitet Six den Teilsicherheitsfaktor  $\gamma_{cs}$  auf Querschnittsebene für unterschiedliche, variierte Parameter (variabler Bewehrungsgrad, variable Betongüte,...) ab. Die Nennwerte der Festigkeiten ergeben sich wie folgt:

$$f_{cN} = 1.1 \cdot f_{ck} \tag{6.12}$$

$$f_{yN} = 1.1 \cdot f_{yk} \tag{6.13}$$

Six kalibriert  $\gamma_{cs}$  an den Ergebnissen seiner Parameterstudie und entwickelt folgende Beziehung:

$$\varepsilon_{s1} \geq 4\text{‰} : \gamma_{cs} = \gamma_{cs,ductile} = 1.3 \tag{6.14}$$

$$\varepsilon_{s1} \leq 0\text{‰} : \gamma_{cs} = \gamma_{cs,brittle} = 1.1 \cdot \gamma_c \cdot \gamma'_c \cdot \left( \frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^{-0.085 \cdot \rho_2 / \rho_1} \quad \text{mit: } \rho_0 = 1\% \tag{6.15}$$

In die Gleichung 6.15 geht der Randabstand der Bewehrung ( $d_1 = d_{1,nom}$ ,  $d_2 = d_{2,nom}$ ) mit den nominellen Werten ein. Wird der Randabstand ebenfalls als streuend angesehen und mit den Bemessungswerten erfasst ( $d_{1d} = d_{1,nom} + 5\text{ mm}$ ,  $d_{2d} = d_{2,nom} + 5\text{ mm}$ ), folgt:

$$\varepsilon_{s1} \leq 0\text{‰} : \gamma_{cs} = \gamma_{cs,brittle} = 1.1 \cdot \gamma_c \cdot \gamma'_c \cdot \left( \frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^{-0.070 \cdot \rho_2 / \rho_1} \quad \text{mit: } \rho_0 = 0.3\% \tag{6.16}$$

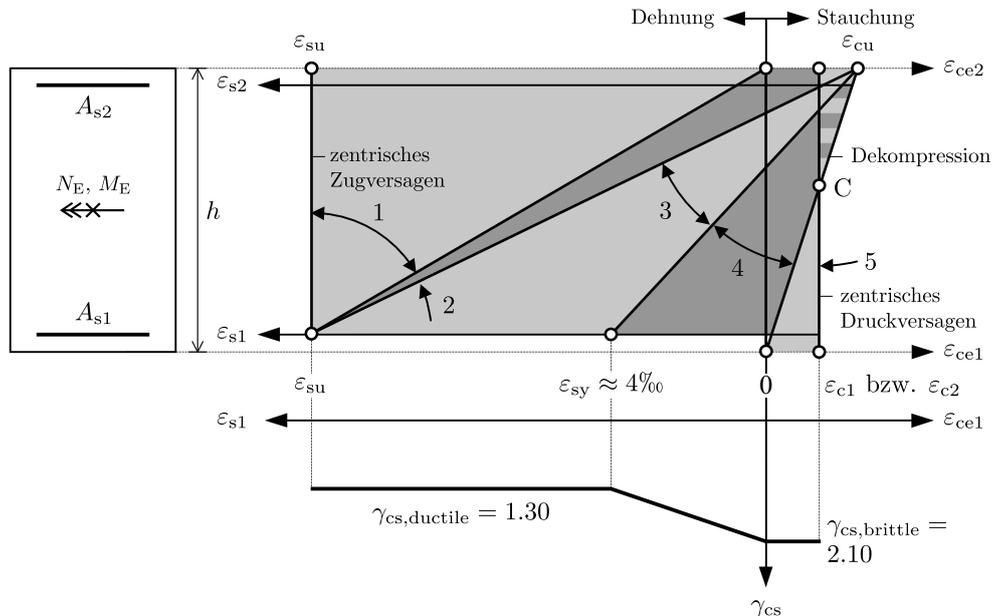


Abbildung 6.3: Teilsicherheitsfaktor  $\gamma_{cs}$  in Abhängigkeit des Dehnungszustandes bei Erreichen der Traglast nach Six (2001) (auf Nennwerte  $f_{yN}$  und  $f_{cN}$  bezogen)

### 6.3 Vereinfachte Bemessungsverfahren

Die ON-EN1992-1-1 (2011) stellt dem Anwender zwei vereinfachte Verfahren zur Bemessung druckbeanspruchter Bauteile mit Einfluss der Theorie II. Ordnung zur Verfügung. Ein Verfahren basiert auf der Verwendung von Nennkrümmungen, das andere auf der Verwendung von Nennsteifigkeiten.

#### 6.3.1 Das Verfahren mit Nennkrümmungen - NKV

Dem Verfahren mit Nennkrümmungen liegt nach der ON-EN1992-1-1 (2011) eine Kragstütze, wie in Abbildung 6.4 dargestellt, zugrunde. Die Bemessung jeder realen Stütze erfolgt mit den für diese Modellstütze hergeleiteten Beziehungen. Deshalb wird das Verfahren auch als Modellstützenverfahren bzw. Ersatzstabverfahren bezeichnet. Ziel ist es, den eigentlichen Stabilitätsnachweis in eine Querschnittsbemessung für das Gesamtmoment  $M_{Ed} = M_{0Ed} + |N_{Ed}| \cdot e_2$  überzuführen.

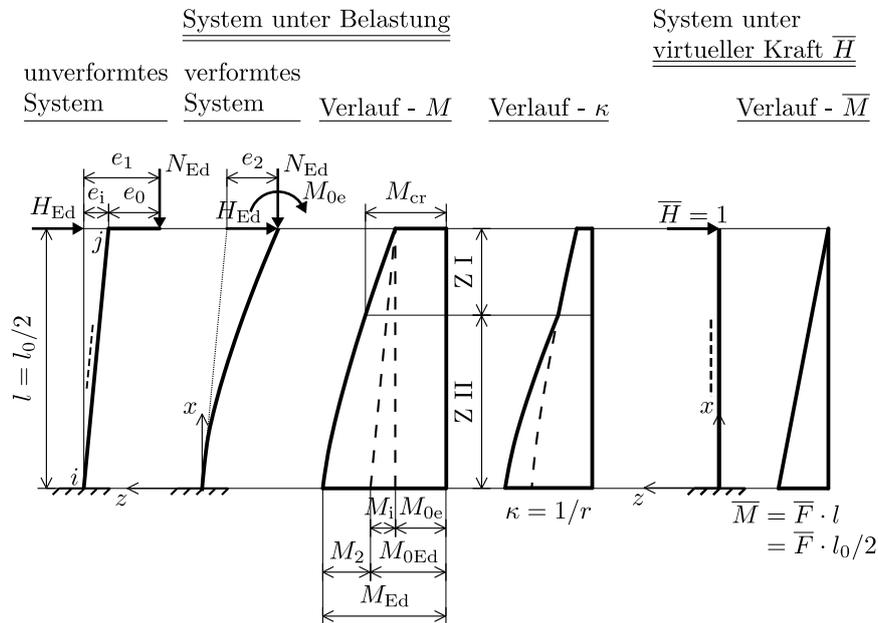


Abbildung 6.4: Modellstütze mit Momentenlinie, Krümmungsverteilung und virtueller Momentenlinie - Nennkrümmungsverfahren

Die Zusatzausmitte  $e_2$  aus der Theorie II. Ordnung ist von der Knicklänge  $l_0$ , der Rechenkrümmung  $1/r$  und der Krümmungsverteilung (Faktor  $1/c$ ) abhängig. Die Rechenkrümmung  $1/r$  wird auf Basis einer Referenzkrümmung  $1/r_0$ , einem Abminderungsbeiwert  $K_r$  für die Normalkraft und einem Vergrößerungsbeiwert  $K_\varphi$  zur Berücksichtigung des Kriechens ermittelt. Das Zusatzmoment  $M_2 = N_{Ed} \cdot e_2$  ergibt sich zu:

$$M_2 = |N_{Ed}| \cdot K_\varphi \cdot l_0^2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{r} = |N_{Ed}| \cdot K_\varphi \cdot K_r \cdot l_0^2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{r_0} \quad (6.17)$$

Das zu bemessende Gesamtmoment  $M_{Ed}$  lautet:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (6.18)$$

### Grundidee des Verfahrens

Will man die Tragfähigkeit einer Stütze bestimmen, muss die Auswirkung der Verformung auf die Schnittgrößen mitberücksichtigt werden. Das Gesamtmoment  $M_{\text{Ed}}$  im maximal belasteten Querschnitt setzt sich aus dem Moment  $M_{0\text{Ed}}$  nach Theorie I. Ordnung und dem Zusatzmoment  $M_2$  zusammen ( $M_{\text{Ed}} = M_{0\text{Ed}} + M_2 = N_{\text{Ed}} \cdot (e_0 + e_1 + e_2)$ ). Die Verformung  $e_2$  hängt wiederum von der Krümmungsverteilung entlang der Stabachse ab und kann (im Allgemeinen iterativ) mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte (PvK) bestimmt werden. Sie ergibt sich zu:

$$w = e_2 = \int_0^l \frac{M(x) \cdot \overline{M}(x)}{EI(x)} dx = \int_0^l \kappa(x) \cdot \overline{M}(x) dx \quad (6.19)$$

Bei bekanntem Krümmungsverlauf und bekanntem Maximalwert  $\kappa_{\text{max}}$  der Krümmung kann die obige Gleichung auch wie folgt dargestellt werden:

$$w = e_2 = \frac{1}{c} \cdot \kappa_{\text{max}} \cdot l^2 \quad (6.20)$$

Hier steht  $1/c$  für einen Faktor zur Berücksichtigung der Krümmungsverteilung. Dieser wird für einfache Grundfälle mit linear-elastischem Materialverhalten aus Integrationstabellen entnommen. Bei speziellen Krümmungsverteilungen oder nichtlinearem Materialverhalten ist  $1/c$  analytisch oder numerisch zu bestimmen. Das Beispiel 6.1 zeigt die Herleitung von  $1/c$  für eine Krümmungsverteilung in Form einer sinus-Halbwellen an einer Kragstütze.

**Beispiel 6.1:** Es wird ein auskragender und am Fuß fest eingespannter Stab der Länge  $l$  (Knicklänge  $l_0 = 2 \cdot l$ ) betrachtet. Der Krümmungsverlauf entlang des Stabes sei sinusförmig mit dem Maximalwert  $\kappa_{\text{max}}$  am Stützenfuß. Die Verformung am Stützenkopf lautet:

$$w = \int_0^l \kappa_{\text{max}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2 \cdot l} \cdot x\right) \cdot \underbrace{x}_{\overline{M}(x)} dx = \kappa_{\text{max}} \cdot \frac{4 \cdot l^2}{\pi^2} = \kappa_{\text{max}} \cdot \frac{l_0^2}{\pi^2}$$

Durch Vergleich erhält man für  $1/c$ :

$$\kappa_{\text{max}} \cdot \frac{l_0^2}{\pi^2} \equiv \frac{1}{c} \cdot \kappa_{\text{max}} \cdot l_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{\pi^2} \approx \frac{1}{10}$$

Die Gleichung wurde in Abhängigkeit der Knicklänge  $l_0$  hergeleitet. Es wäre auch denkbar diese in Abhängigkeit der Bauteillänge  $l$  anzuschreiben.

Bei linear elastischem Materialverhalten ist der Krümmungsverlauf proportional zum Momentenverlauf ( $\kappa(x) = M(x)/EI$ , mit  $EI = \text{konst.}$ ). Das Last-Verformungsverhalten eines Stahlbetonstabes verhält sich jedoch nicht linear. Diese Nichtlinearität setzt sich aus einer materiellen (physikalischen) Komponente (Rissbildung, nichtlineare konstitutive Materialgesetze) und einer geometrischen Komponente (Verformungseinfluss) zusammen. Sie verursachen ein überproportionales Anwachsen der Krümmungen mit größer werdendem Moment. Dadurch kann der Beiwert  $1/c$  nur mehr numerisch abgeleitet werden. Für die Bemessung mit dem Modellstützenverfahren wird  $1/c$  daher aus Grenzbetrachtungen angesetzt. Die Abbildung 6.5a zeigt vier häufig auftretende Grenzfälle:

- Mit anwachsender Schlankheit und sinkendem  $H/N$ -Verhältnis wird die Krümmungsverteilung immer parabelförmiger, es ergibt sich der Grenzwert  $1/c = 5/48 = 0.104$ . Wird für die Biegelinie eine sinus-Halbwellenlänge angesetzt, ergibt sich  $1/c = 1/\pi^2 = 0.101$ . Für baupraktische Zwecke wird näherungsweise  $1/c = 1/10$  verwendet.
- Bei steigendem  $H/N$  - Verhältnis und sinkender Schlankheit wird sich die Krümmungsverteilung immer mehr dem dreieckigen Verlauf annähern, es gilt:  $1/c = 1/12$ .
- Steigen sowohl das  $H/N$  - Verhältnis, als auch die Schlankheit, stellt sich der Grenzfall  $1/c = 1/16$  ein.
- Ist die Bewehrung optimal zum einwirkenden Moment abgestuft oder die Ausmitte  $e_{0+i}$  groß, wird der Krümmungsverlauf nahe am rechteckigen Verlauf ( $1/c = 1/8$ ) sein.

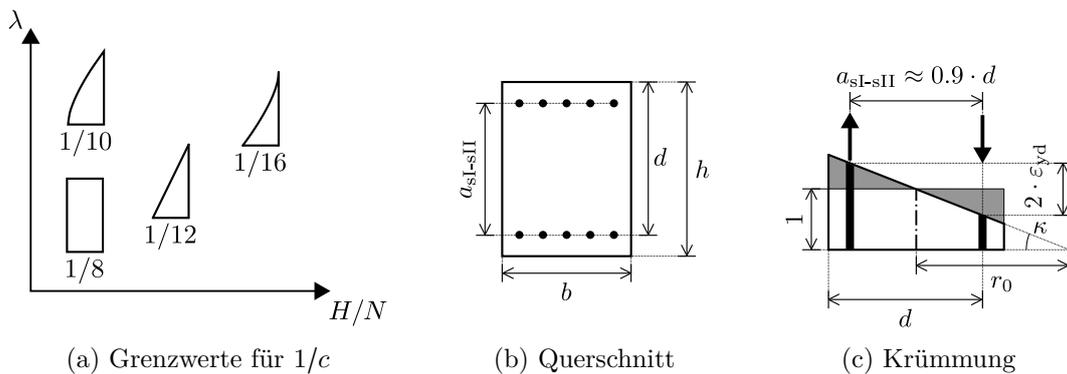


Abbildung 6.5: Einzelheiten des Modellstützenverfahrens

Das Gesamtmoment kann nun wie folgt angegeben werden:

$$M_{\text{Ed}} = M_{0\text{Ed}} + M_2 = M_{0\text{Ed}} + |N_{\text{Ed}}| \cdot l_0^2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{r} \quad (6.21)$$

Die voranstehende Gleichung kann in der  $M$ - $\kappa$ -Darstellung als Einwirkung in Form einer Gerade abgebildet werden (Abbildung 6.6). Schneidet die  $M$ - $\kappa$ -Kurve der Einwirkung jene des Widerstands, bedeutet dies, dass ein stabiler Gleichgewichtszustand möglich ist. Tangieren sich die Einwirkung und der Widerstand, zeigt das einen gerade noch gültigen Gleichgewichtszustand vor dem Stabilitätsverlust an (labiles Gleichgewicht). Gibt es keinen Berührungs- oder Schnittpunkt, so ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Der für die Bemessung mindestens erforderliche Bewehrungsgrad ist jener, bei dem die  $M$ - $\kappa$ -Kurve der Einwirkung jene des Widerstands gerade noch tangiert. Für eine Vielzahl an Stützen fällt der Berührungspunkt mit der Krümmung beim Fließbeginn der Druck- bzw. Zugsbewehrung zusammen, weshalb diese Krümmung beim Modellstützenverfahren angesetzt wird (Gleichung 6.23). Mit abnehmendem  $M_{0\text{Ed}}$  kann der Berührungspunkt auch bei einer kleineren Krümmung liegen. Auch in diesen Fällen wird beim Ersatzstabverfahren die größere Krümmung beim Fließbeginn der Bewehrung angesetzt. Somit sollte das Modellstützenverfahren bei steigender Schlankheit und sinkender Lastausmitte gegenüber einem allgemeinen nichtlinearen Verfahren sicherere Ergebnisse liefern. Ist der Momentenanteil  $M_{0\text{Ed}}$  im Vergleich zum Zusatzmoment  $M_2$  besonders groß ( $e_{0+i} \uparrow$ ), kann der Berührungspunkt auch bei größeren Krümmungen als der angenommenen liegen. In diesen Fällen ist mit sinkenden Sicherheiten zu rechnen.

Die Bewehrung wäre grundsätzlich so zu bestimmen, dass die errechnete Schnittgrößenkombination  $N_{Ed}$  und  $M_{Ed}$  mit der rechnerisch angesetzten Krümmung  $1/r$  aufgenommen werden kann. Nach der ON-EN1992-1-1 (2011) darf die für diese Schnittgrößenkombination erforderliche Bewehrung vereinfachend aus dem Grenzzustand der Tragfähigkeit ermittelt werden, was die Anwendung von  $N$ - $M$ -Interaktionsdiagrammen unterschiedlicher Bewehrungsgrade ermöglicht. Da das Moment nach dem Fließbeginn der Bewehrung nur mehr sehr wenig gesteigert werden kann, wird diese praktikable Vorgehensweise nach Kordina und Quast (2001) bzw. Quast (2004) als zulässig eingestuft.

Wichtig ist, dass die mit dem Modellstützenverfahren ermittelte Ausmitte  $e_2$  nicht die tatsächliche Verformung der Stütze, sondern nur eine Näherungslösung darstellt. Die tatsächliche Verformung kann mit diesem Verfahren wegen der getroffenen Vereinfachungen (Grenzbetrachtung der Krümmungsverteilung, Ansatz der rechnerischen Krümmung  $1/r, \dots$ ) gar nicht bestimmt werden.

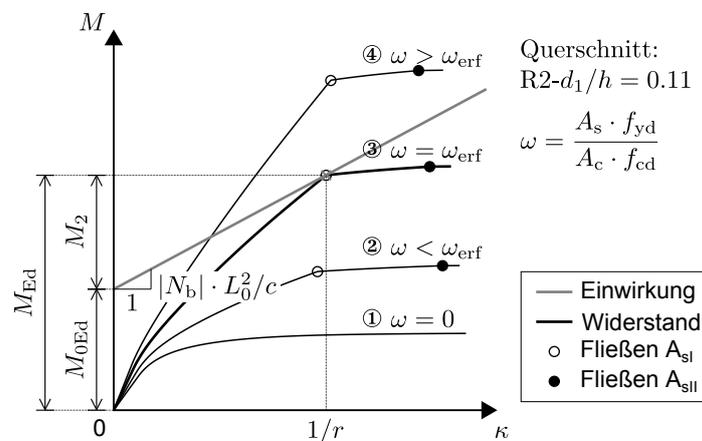


Abbildung 6.6: Darstellung Einwirkung (E) und Widerstand (R) des Modellstützenverfahrens in der  $M$ - $\kappa$ -Darstellung

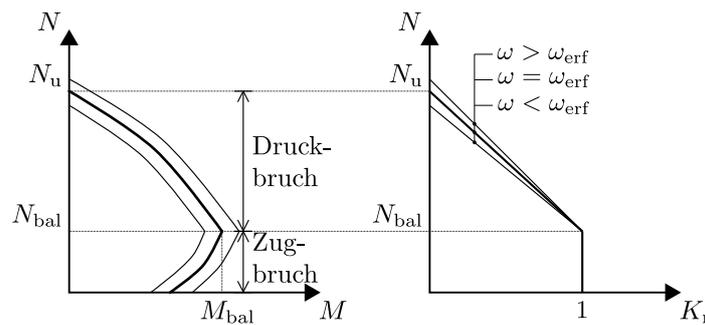


Abbildung 6.7: Abminderungsbeiwert  $K_r$

Die rechnerische Krümmung  $1/r$  wird ausgehend von der Grundkrümmung  $1/r_0$  unter Berücksichtigung der Bemessungsnormalkraft (Faktor  $K_r$ ) und der Krieचाuswirkung (Faktor  $K_\varphi$ ) ermittelt. Als Grundwert  $1/r_0$  wurde die Krümmung beim Fließbeginn der Bewehrung im „balanced point“  $N_{Ed} = N_{bal}$  gewählt, da dieser sehr leicht zu bestimmen ist (siehe Gleichung 6.23 und Abbildung 6.5c). Im Zugbruchbereich wird  $1/r$  vereinfachend konstant gehalten. Im Druckbruchbereich nimmt  $1/r$  linear von  $1/r = 1/r_0$  bei  $N_{Ed} = N_{bal}$  bis  $1/r = 0$  bei  $N_{Ed} = N_u$  ab. Diese

Abminderung wird durch den Faktor  $K_r$  geregelt. Da die Bruchnormalkraft  $N_u$  vom angesetzten Bewehrungsgrad abhängt, stellt das Modellstützenverfahren für Normalkräfte  $|N_{Ed}| > |N_{bal}|$  ein iteratives Verfahren dar. Die Abbildung 6.7 zeigt den Zusammenhang von Bemessungsnormalkraft und Abminderungsfaktor  $K_r$ .

$$1/r = K_r \cdot 1/r_0 \quad (6.22)$$

$$1/r_0 = \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd}}{a_{sI-sII}} \approx \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd}}{0.9 \cdot d} \approx \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45 \cdot d} \quad (6.23)$$

$$K_r = \frac{N_u - N_{Ed}}{N_u - N_{bal}} \leq 1 \quad (6.24)$$

Eine über die Querschnittshöhe verteilte Bewehrung wird durch Modifikation der statischen Nutzhöhe  $d$  berücksichtigt:

$$d = \frac{h}{2} + i_s \quad (6.25)$$

$$i_s = \sqrt{I_s/A_s} \quad (6.26)$$

Die Grundkrümmung  $1/r_0$  wird, wie in der Gleichung 6.23 angeschrieben, durch die Dehnung beim Beginn des Fließens der Druck- und Zugbewehrung und dem Abstand der Bewehrung zueinander ermittelt. Der Abstand  $a_{sI-sII}$  wird vereinfacht oft mit  $0.9 \cdot d$  angenommen. Durch Einsetzen des tatsächlichen Abstandes der Bewehrung kann das Verfahren verbessert werden.

### Berücksichtigung der Kriechauswirkungen im Modellstützenverfahren

Die bisherige Herleitung führte zur Gleichung 6.21. Sie deckt sich bis auf den Term  $K_\varphi$  bereits mit der Gleichung 6.18 der ON-EN1992-1-1 (2011). Um die Auswirkungen des Kriechens in der Bemessung zu berücksichtigen, wird der Abminderungsbeiwert  $K_\varphi$  eingeführt:

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{\text{eff}} \geq 1 \quad (6.27)$$

$$\text{Mit } \beta = 0.35 + f_{ck}/200 - \lambda/150 \geq 0 \quad (6.28)$$

### Berücksichtigung veränderlicher Stabmomente

Sollte der Verlauf der Stabmomente nach Theorie I. Ordnung veränderlich sein, darf mit einem äquivalenten konstanten Ersatzmoment  $M_{0e}$  gemäß Gleichung 6.29 gerechnet werden. Die Stabendmomente  $M_{01}$  und  $M_{02}$  hängen bei statisch unbestimmten Bauteilen von den Randbedingungen ab. Das mit dem Modellstützenverfahren ermittelte Zusatzmoment  $M_2$  hängt nur von der Knicklänge ab.

$$M_{0e} = 0.6 \cdot M_{02} + 0.4 \cdot M_{01} \geq 0.4 \cdot M_{02} \quad (6.29)$$

$$\text{mit: } |M_{02}| \geq |M_{01}|$$

### 6.3.2 Das Verfahren mit Nennsteifigkeiten - NSTV

Dieses Verfahren kann auch als Modellstützenverfahren angesehen werden, da die Bemessungsformeln ebenfalls für einen Stützentyp (Kragstütze) hergeleitet sind. Wie der Name des Verfahrens schon andeutet, verwendet dieses Verfahren rechnerische Biegesteifigkeiten für den Stabilitätsnachweis. Der eigentliche Nachweis gegen Versagen auf Stabilität wird wie beim Nennkrümmungsverfahren in eine Querschnittsbemessung übergeführt. Der Nachweis gilt als erbracht, wenn die Bewehrung zur Aufnahme der Schnittgrößen  $N_{Ed}$  und  $M_{Ed}$  gefunden ist.

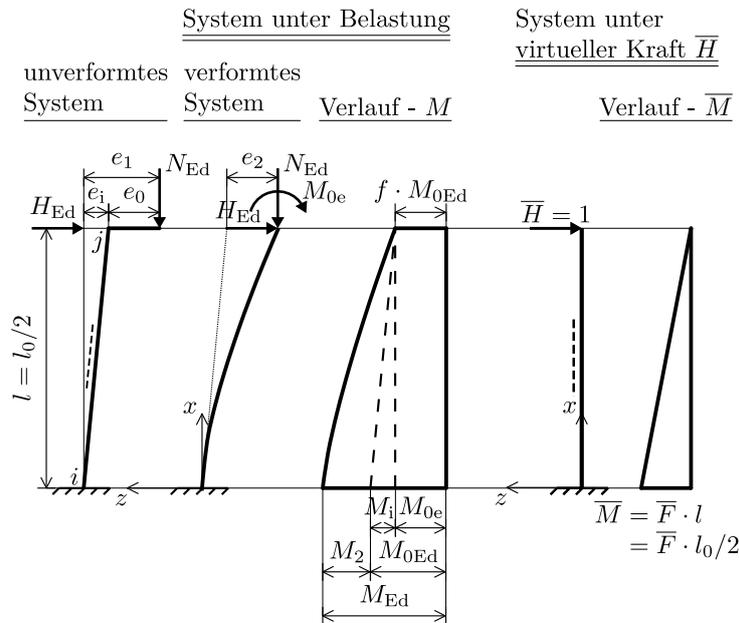


Abbildung 6.8: Modellstütze mit Momentenlinie und virtueller Momentenlinie - Nennsteifigkeitsverfahren

#### Grundidee des Verfahrens

Das Nennsteifigkeitsverfahren benutzt das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK), um die Zusatzausmitte  $e_2$  zu ermitteln. Betrachtet man einen über den Stab linear veränderlichen Momentenverlauf nach Theorie I. Ordnung (siehe Abbildung 6.8), kann das PvK zur Bestimmung der Kopfverschiebung folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f \cdot M_{0Ed}}{EI} \cdot \bar{M} \cdot \frac{l_0}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-f) \cdot M_{0Ed}}{EI} \cdot \bar{M} \cdot \frac{l_0}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{M_2}{EI} \cdot \bar{M} \cdot \frac{l_0}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{f \cdot N_{Ed} \cdot e_{0Ed}}{EI} \cdot \frac{l_0^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-f) \cdot N_{Ed} \cdot e_{0Ed}}{EI} \cdot \frac{l_0^2}{4} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot e_2}{EI} \cdot l_0^2
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Hier wurde angenommen, dass die Biegelinie und somit auch die  $M_2$ -Verteilung einer Sinus-Halbwellen entsprechen. Der Maximalwert  $e_2$  der Kopfverformung ist zunächst noch unbekannt. Wird die Gleichung 6.30 nach  $e_2$  aufgelöst folgt:

$$e_2 = \frac{\frac{N_{Ed} \cdot l_0^2}{4 \cdot EI} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot f\right) \cdot e_{0Ed}}{1 - \frac{N_{Ed} \cdot l_0^2}{\pi^2 \cdot EI}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot f\right) \cdot e_{0Ed}}{\frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{EI \cdot \pi^2}{l_0^2 \cdot N_{Ed}} - 1\right)} = \frac{\pi^2 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \cdot f\right) \cdot e_{0Ed}}{\left(\frac{EI \cdot \pi^2}{l_0^2 \cdot N_{Ed}} - 1\right)} \tag{6.31}$$

Wird der Beiwert  $\beta = \pi^2/c_0$  eingeführt und für  $\frac{EI \cdot \pi^2}{l_0^2} = N_B$  gesetzt folgt:

$$e_2 = \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \cdot e_{0Ed} \quad (6.32)$$

Es gilt:

$$c_0 = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \cdot f} = \frac{24}{f + 2} \quad (6.33)$$

Bei konstantem Momentenverlauf nach Theorie I. Ordnung ( $f = 1$ ) wird  $c_0 = 8$ , bei dreieckigem Verlauf ( $f = 0$ ) ist  $c_0 = 12$ . In gleicher Weise, wie in den obigen Gleichungen hergeleitet, kann gezeigt werden, dass für einen parabelförmigen Momentenverlauf nach Theorie I. Ordnung  $c_0 = 9.6$  und für einen sinus-förmigen Verlauf  $c_0 = \pi^2$  ist. Wie auch beim Verfahren mit Nennkrümmungen darf bei veränderlichem Momentenverlauf ohne Querlasten mit einem äquivalenten konstanten Moment  $M_{0e}$  (Gleichung 6.29) gerechnet werden. Hierbei ist stets  $c_0 = 8$  zu setzen. Die Gleichung 6.32 kann letztendlich auf die in der ON-EN1992-1-1 (2011) angegebene Form gebracht werden:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} \cdot \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \cdot e_{0Ed} = M_{0Ed} \cdot \left( 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right) \quad (6.34)$$

Die obige Gleichung behält ihre Gültigkeit, solange  $|N_B| > |N_{Ed}|$  gilt. Ist  $|N_B| < |N_{Ed}|$  ergeben sich über diese Gleichung negative Werte für das Zusatzmoment  $M_2$ . Dies ist aus mechanischer Sicht nicht möglich. Für den Grenzfall  $N_B = N_{Ed}$  wird das Zusatzmoment  $M_2$  unendlich groß.

### Ermittlung der rechnerischen Steifigkeit

Die Gleichung 6.32 bzw. 6.34 kann nur dann gelöst werden, wenn die Knicklast  $N_B = EI \cdot \pi^2/l_0^2$  ermittelt werden kann. Hierfür bedarf es einer realistischen Abschätzung der mittleren Biegesteifigkeit im Bereich  $N = 0$  bis  $N = N_{Ed}$ . Nach ON-EN1992-1-1 (2011) folgt:

$$EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_s I_s \quad (6.35)$$

$$\text{mit: } K_c = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \varphi_{\text{eff}}}; \quad k_1 = \sqrt{f_{ck}/20}; \quad k_2 = n \cdot \frac{\lambda}{170} \leq 0.20$$

$$E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{cE}; \quad \gamma_{cE} = 1.2 \text{ und } K_s = 1$$

Die oben beschriebenen Gleichungen gelten für Bewehrungsgrade  $\rho \geq 0.002$ . Ist der Bewehrungsgrad  $\rho \geq 0.01$  darf folgende Vereinfachung angenommen werden:

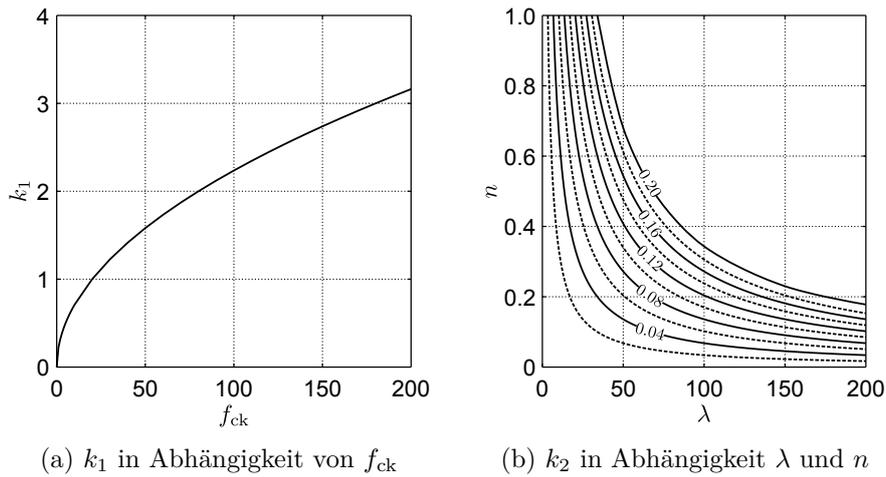
$$K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \cdot \varphi_{\text{eff}}} \quad (6.36)$$

$$K_s = 0 \quad (6.37)$$

Sollte die Schlankheit  $\lambda$  während der Bemessungsaufgabe noch nicht bekannt sein, kann

$$k_2 = n \cdot 0.3 \leq 0.20 \quad (6.38)$$

angesetzt werden. Die Abbildung 6.9 zeigt den Einfluss der charakteristischen Betondruckfestigkeit  $f_{ck}$  auf den Faktor  $k_1$  und den Einfluss der Schlankheit  $\lambda$  und der einwirkenden bezogenen Bemessungsnormalkraft  $n$  auf den Faktor  $k_2$ .

Abbildung 6.9: Verlauf von  $k_1$  und  $k_2$  in Abhängigkeit von  $f_{ck}$  bzw.  $\lambda$  und  $n$ 

## 6.4 Bauteilverhalten, Vergleich der Verfahren

In einer Parameterstudie wurden die Traglasten zahlreicher Bauteile unterschiedlicher Betongüten, Bewehrungsgrade, Bewehrungsausführungen (schlaff bewehrt, vorgespannt, RE2, RE4), Schlankheiten und Lastausmitten systematisch ermittelt. Die Berechnung der Traglasten erfolgte nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität und der Zugversteifung. Ziel der Parameterstudie war es eine Datenbasis zu generieren, die unter anderem folgende Fragen beantworten kann:

- In welchem Maß beeinflussen Betongüte, Bewehrungsgrad und Vorspannung die Traglast?
- Wie groß ist die Abweichung rechnerischer Traglasten zum Zeitpunkt  $t = \infty$  bei Berechnungen mit effektiven Steifigkeiten ( $E_{\text{eff}} = 1/(1 + \varphi)$ ) bzw. mit der Zeitschrittmethode?
- Gibt es einen zusätzlichen Einfluss des Schwindens auf die Traglast?
- Wie stark nimmt die Traglast durch zeitliche Effekte ab?
- Wie verhalten sich die Bemessungslasten aus einer nichtlinearen Berechnung zu jenen mit dem Nennkrümmungs- bzw. Nennsteifigkeitsverfahren?

### Berechnungsgrundlagen

Die nichtlinearen Berechnungen erfolgten zum Teil mit dem von Pfeiffer (2004) entwickeltem Programm Stab2dNL als auch einer im Zuge dieser Arbeit in MATLAB<sup>®</sup> programmierten Berechnungsroutine. Sie erlaubt die Berechnung von Stabtragwerken unter Berücksichtigung der geometrischen und materiellen Nichtlinearität. Zusätzlich können zeitliche Effekte mittels der Zeitschrittmethode berücksichtigt werden. Die Berechnung am Querschnitt ist in Kapitel 4, die Erweiterung auf Bauteile (Systeme) in Kapitel 5 beschrieben. Zusätzlich zu den nichtlinearen Berechnungen wurden die Bemessungstraglasten mit dem Nennkrümmungs- und Nennsteifigkeitsverfahren ermittelt.

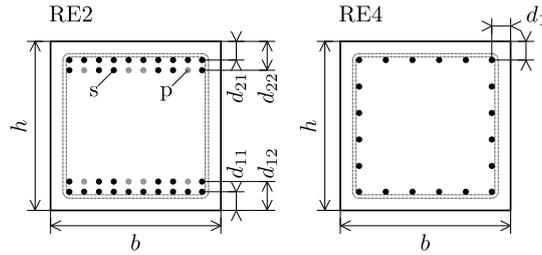


Abbildung 6.10: Querschnitte der Parameterstudie

Tabelle 6.2: Eingangsparameter - nicht vorgespannte Bauteile, Querschnitt RE2

Lagerung [-]	$\lambda$ [-]	Beton [-]	Stahl [-]	$\rho_s$ [%]	$e_{0,ob}$ (Kopf) [-]	$e_{0,un}$ (Fuß) [-]
	0	C30/37	B550B	1	$2.00 \cdot h_{QS}^a$	$1.00 \cdot e_{ob}$
	40	C90/105		4	$1.00 \cdot h_{QS}^a$	$0.50 \cdot e_{ob}^b$
	80	C150 ( $\rho_f = 2\%$ )			$0.50 \cdot h_{QS}$	$0.00 \cdot e_{ob}^b$
	120				$0.25 \cdot h_{QS}$	$-0.50 \cdot e_{ob}^b$
	160				$0.00 \cdot h_{QS}$	
	200					

<sup>a</sup> nur bei  $\rho_s = 4\%$ <sup>b</sup> nur für die Betongüten C30/37 und C90/105

Tabelle 6.3: Eingangsparameter - vorgespannte Bauteile, Querschnitt RE2

Lagerung [-]	$\lambda$ [-]	Beton [-]	Stahl [-]	$\rho_{s+p}$ [%]	$\sigma_{c,P}/f_{ck}$ [-]	$e_{0,ob}$ (Kopf) [-]	$e_{0,un}$ (Fuß) [-]
	0	C90/105	B550B	1	$0.05^a$	$2.00 \cdot h_{QS}$	$1.00 \cdot e_{ob}$
	40		+	4	$0.12^b$	$1.00 \cdot h_{QS}$	
	80		St1570/1770		$0.20^c$	$0.50 \cdot h_{QS}$	
	120					$0.25 \cdot h_{QS}$	
	160					$0.00 \cdot h_{QS}$	
	200						

<sup>a</sup> bei  $\rho_{s+p} = 1\%$  und  $\rho_{s+p} = 4\%$ <sup>b</sup> nur bei  $\rho_{s+p} = 1\%$ <sup>c</sup> nur bei  $\rho_{s+p} = 4\%$ 

Tabelle 6.4: Eingangsparameter - nicht vorgespannte Bauteile, Querschnitt RE4

Lagerung [-]	$\lambda$ [-]	Beton [-]	Stahl [-]	$\rho_s$ [%]	$e_{0,ob}$ (Kopf) [-]	$e_{0,un}$ (Fuß) [-]
	0	C30/37	B550B	4	$2.00 \cdot h_{QS}$	$1.00 \cdot e_{ob}$
	40			8	$1.00 \cdot h_{QS}$	
	80				$0.50 \cdot h_{QS}$	
	120				$0.25 \cdot h_{QS}$	
	160				$0.00 \cdot h_{QS}$	
	200					

Tabelle 6.5: Materialkennwerte der Parameterstudie

	Beton			Stahl				
	C30/37	C90/105	C150	B550B	St1570/1770			
$E_{cm}$	33000	44000	52000	[N/mm <sup>2</sup> ]	$E$	200000	200000	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{cm}$	-38	-98	-158	[N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ym}$	600	1700	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{ctm}$	2.9	5.0	7.0	[N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{um}$	650	1915.6	[N/mm <sup>2</sup> ]
$v_k$	18	18	18	[‰]	$\varepsilon_{um}$	50	50	[‰]
$\varepsilon_{c1}$	-2.2	-2.8	-3.5	[‰]	$f_{yk}$	550	1500	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\varepsilon_{cu1}$	-3.5	-2.8	-3.5	[‰]	$f_{uk}$	600	1770	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{ck}$	-30	-90	-150	[N/mm <sup>2</sup> ]	$\varepsilon_{uk}$	50	50	[‰]
$f_{cd}$	-20	-60	-100	[N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{yd}$	478	1304	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\varepsilon_{c2}$	-2.0	-2.6	-2.3	[‰]	$f_{ud}$	516	1512	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\varepsilon_{cu2}$	-3.5	-2.6	-2.3	[‰]	$\varepsilon_{ud}$	45	45	[‰]
$\varphi(\infty, t_0)$	2.3	1.0	$\sim 0^a$	[–]				
$\varepsilon_{cs}$	-0.40	-0.28	-0.4 <sup>a</sup>	[‰]				

<sup>a</sup> Beim C150 wurden keine zeitlichen Einflüsse berücksichtigt

Die Tabellen 6.2 bis 6.4 zeigen die variierten Parameter der Studie. Der hier angeführte Beton C150 (Tabelle 6.2) entspricht einem mit 2 Vol.-% Stahlfasern bewehrten UHPC. Durch die Zugabe von Fasern wird die Zugtragfähigkeit immens verbessert. Für die nichtlineare Berechnung wurde die angesetzte Zugfestigkeit vereinfachend bis zu einer Dehnung von 10 ‰ konstant gehalten. Im Bereich der Dehnung 10 ‰ bis 50 ‰ folgt eine lineare Entfestigung. Bei Dehnungen über 50 ‰ können keine Spannungen mehr übertragen werden. Für Querschnittsnachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit wurde die Zugfestigkeit in der Größe von 4.67 N/mm<sup>2</sup> angerechnet. Bei den Betongütern C30/37 und C90/105 wurde die Zugfestigkeit nur für die nichtlineare Ermittlung der Schnittgrößen angesetzt. Die Tabelle 6.5 enthält eine detaillierte Anführung der in der Studie angesetzten Materialkennwerte.

Die Geometriedaten der untersuchten Querschnitte können den Tabellen 6.6 und 6.7 und der Abbildung 6.10 entnommen werden. RE2 steht für einen Rechteckquerschnitt mit Zug- und Druckbewehrung, RE4 für einen Rechteckquerschnitt mit gleichmäßig angeordneter, rundum laufender Bewehrung.

Tabelle 6.6: Geometrie der Querschnitte RE2

	RE2						
	50/50			50/50			
$h_{QS}/b_{QS}$							[cm]
$\rho_{s+p}$		1			4		[‰]
$\sigma_{cp}/f_{ck}$	0.00	0.05	0.12	0.00	0.05	0.2	[–]
$d_{s11}$	5.5	5.5	-	5.5	5.5	5.5	[cm]
$d_{s12}$	-	-	-	8.5	8.5	-	[cm]
$d_{s22}$	-	-	-	8.5	8.5	-	[cm]
$d_{s11}$	5.5	5.5	-	5.5	5.5	5.5	[cm]
$d_{p1}$	-	5.5	5.5	-	8.5	8.5	[cm]
$d_{p2}$	-	5.5	5.5	-	8.5	8.5	[cm]
$A_s$	24.75	14.85	0.00	96.15	84.9	51.15	[cm <sup>2</sup> ]
$A_p$	0.00	9.90	24.75	0.00	11.25	45.00	[cm <sup>2</sup> ]
$A_{s+p}$	24.75	24.75	24.75	96.15	96.15	96.15	[cm <sup>2</sup> ]

Tabelle 6.7: Geometrie der Querschnitte RE4

RE4			
$h_{QS}/b_{QS}$	50/50		[cm]
$\rho_{s+p}$	4	8	[%]
$\sigma_{cp}/f_{ck}$	0.00	0.00	[-]
$d_{s1}$	5.5	5.7	[cm]
$n_s$	20	20	[cm]
$A_s$	96.15	185.2	[cm <sup>2</sup> ]
$A_p$	0.00	0.00	[cm <sup>2</sup> ]
$A_{s+p}$	96.15	185.2	[cm <sup>2</sup> ]

Die Imperfektion wurde in Form einer parabelförmigen Vorverformung der Bauteile angesetzt. Der Stich  $e_i$  der Parabel in Bauteilmitte wurde auf Grundlage der Gleichung 6.4 ermittelt. Die berechneten Werte von  $e_i$  können der Tabelle 6.8 entnommen werden.

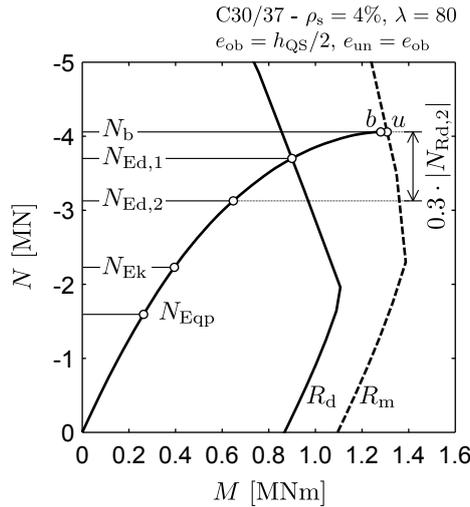
Tabelle 6.8: Stablängen und Imperfektionen der Bauteile

Schlankheit	$\lambda$	40	80	120	160	200	
Eulerfall 2	$l$	5.8	11.6	17.3	23.1	28.9	[m]
	$e_i$	12.0	19.3	28.9	38.5	48.2	[mm]

Bei der nichtlinearen Berechnung wurden die Mittelwerte der Materialkennwerte nach der Tabelle 6.5 angesetzt. Die Traglast  $N_{Rm}$  ergab sich somit entweder durch Erreichen der mittleren Querschnittstragfähigkeit (Spannungsproblem n. Th. II. Ordng.) oder durch den Stabilitätsverlust ( $N_{Rm} = N_b$ , Stabilitätsproblem n. Th. II. Ordng.). Die Bemessungstraglast wurde in Übereinstimmung mit der ON-B1992-1-1 (2011) ermittelt. Grundsätzlich wird die Bemessungstraglast durch den Schnittpunkt der Einwirkungskurve mit dem Querschnittswiderstand auf Bemessungsniveau bestimmt ( $N_{Ed} = N_{Ed,1}$ ). Nach dem nationalen Anhang (ON-B1992-1-1 (2011)) muss sichergestellt werden, dass der Stabilitätsverlust mindestens um das 1.3-fache von der Bemessungstraglast entfernt ist. Es gilt:

$$N_{Ed,2} = \min\left(N_{Ed,1}, \frac{N_b}{1.3}\right) \quad (6.39)$$

Die Abbildung 6.11 zeigt die Ermittlung der Bemessungsnormalkraft anhand eines Beispiels in  $M$ - $N$ -Darstellung. Der Stabilitätsverlust tritt hier mit dem Fließen der Bewehrung ein. Dadurch liegt der Punkt  $b$  nahe dem mittleren Querschnittsversagen  $R_m$ .


 Abbildung 6.11: Definition von  $N_{Ed,1}$  und  $N_{Ed,2}$  nach ON-B1992-1-1 (2011)

### Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden

Für die Berücksichtigung der Kriechauswirkungen wurden folgende Annahmen getroffen: Das Verhältnis ständiger Lasten zu veränderlichen Lasten beträgt  $G_k : Q_k = 60\% : 40\%$ . Die Gesamtlast, die sich aus dem ständigen und dem veränderlichen Lastanteil zusammensetzt, wirkt bei jedem Bauteil im gleichen Kräfteangriffspunkt. Zusätzlich wird angenommen, dass 100 % der veränderlichen Lasten im Grenzzustand der Tragfähigkeit in voller Größe wirken ( $\psi_0 = 1.0$ ) und 30 % der veränderlichen Lasten ständig vorhanden sind ( $\psi_2 = 0.3$ ). Somit ergeben sich gemäß ON-EN1990 (2013) folgende mittlere Teilsicherheitsbeiwerte:

Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{Sd}$  :

$$\gamma_{Sd} = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} \cdot \gamma_{G,j} + Q_{k,1} \cdot \gamma_{Q,1} + \sum_{i > 1} Q_{k,i} \cdot \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} = 0.6 \cdot 1.35 + 0.4 \cdot 1.5 = 1.41 \approx 1.4 \quad (6.40)$$

Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_2$  :

$$\gamma_2 = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} + \sum_{i \geq 1} Q_{k,i} \cdot \psi_{2,i} = 0.6 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.72 \quad (6.41)$$

Hier sind  $\gamma_{Sd}$  der Abstand der charakteristischen Einwirkung zum Bemessungswert und  $\gamma_2$  der Abstand der quasi-ständigen Einwirkung zum charakteristischen Wert. Unter den getroffenen Annahmen ergibt sich die quasi-ständige Last zu 51.4 % der Bemessungslast ( $0.72/1.4 = 0.514$ ). Dieser Faktor wurde zur Ermittlung der effektiven Kriechzahl  $\varphi_{eff}(t, t_0) = 0.514 \cdot \varphi(t, t_0)$  verwendet. Die jeweils mit der gestreckten Arbeitslinie ermittelte Bemessungstraglast  $N_{Ed,2}$  wurde verwendet, um das quasi-ständige Lastniveau für die Berechnung nach der Zeitschrittmethode festzulegen.

Im Falle vorgespannter Bauteile wurde angenommen, dass die gesamte Vorspannkraft gleichzeitig mit der ständigen Last aufgebracht wird. Somit gelten sowohl für die Vorspannung als auch für die kriechwirksamen Lastanteile die gleichen Kriechintervalle.

Die Ermittlung der Kriech- und Schwindzahlen erfolgte nach der ON-EN1992-1-1 (2011). Für die Bestimmung der Kriechzahlen wurde das Erstbelastungsalter des Betons mit 28 Tage festgelegt.

Die Schwindzahlen enthalten die Dehnung  $\varepsilon_{cd}$  infolge Trocknungsschwinden und die Dehnung  $\varepsilon_{ca}$  aus dem autogenen (chemischen) Schwinden mit den Dehnungsanteilen  $\varepsilon_{cd}$  und  $\varepsilon_{ca}$  nach den Gleichungen 2.57 und 2.58. Allen Betongütern wurde Zement der Klasse N zu Grunde gelegt ( $\alpha_{ds1} = 4$ ,  $\alpha_{ds2} = 0.12$ ). Für die Berechnung wurde angenommen, dass nur 50% der autogenen Schwinddehnungen zu Zwangsspannungen im bewehrten Beton führen:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \underbrace{0.50}_{\text{Annahme}} \cdot \varepsilon_{ca} \quad (6.42)$$

### 6.4.1 Auswirkungen verschiedener Einflussgrößen und Berechnungsansätze auf die Ergebnisse nichtlinearer Berechnungen

#### Einfluss der Betongüte und des Bewehrungsgrades auf die Traglast

Die Traglast eines mit einer Drucknormalkraft beanspruchten Stabes kann durch zwei Versagensarten bestimmt werden.

Eine Versagensart stellt das Materialversagen dar. Das sogenannte Spannungsproblem Theorie II. Ordnung wird maßgebend, je kleiner die Schlankheit einer Stütze wird.

Bei kleiner Lastexzentrizität  $e_1$  wird das Spannungsproblem durch das Betonversagen (Druckbruch) bestimmt. In diesen Fällen kann die Traglast effektiv durch Vergrößerung der Betondruckfestigkeit gesteigert werden. Für den Grenzfall des zentrisch gedrückten Stabes mit der Schlankheit  $\lambda = 0$  (Querschnittsbetrachtung) und dem Bewehrungsgrad  $\rho_s = 0$  % entspricht das Steigerungspotential genau dem Verhältnis der Druckfestigkeiten. Das Steigerungspotential nimmt mit wachsender Schlankheit ab. Die durchgezogenen Linien der Abbildung 6.12 zeigen die mögliche Traglaststeigerung durch Erhöhung der Betondruckfestigkeit bei kleinen Lastausmitten und sinkender Schlankheit, wo das Versagen durch die Betonfestigkeit bestimmt wird. Durch zusätzliche Vergrößerung des Bewehrungsgrades (gestrichelte Linien) kann die Traglast nochmals gesteigert werden. Diese Maßnahme ist aber aufgrund des geringeren übertragbaren Druckkraftanteils der Bewehrung im Vergleich zum Druckkraftanteil der Betonfläche weniger effektiv als die Erhöhung der Betondruckfestigkeit.

Steigt die Lastausmitte  $e_1$  gewinnt das Stahlversagen (Zugbruch) an Bedeutung. Hier wird die Tragfähigkeit effektiv durch die Vergrößerung des Bewehrungsgrades erhöht. Die Abbildung 6.13 verdeutlicht dies durch den Vergleich der durchgezogenen Linien (Erhöhung der Druckfestigkeit) mit den gestrichelten Linien (Vergrößerung des Bewehrungsgrades) im Bereich der Schlankheiten  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = 40$ . Im Falle einer Schlankheit  $\lambda \geq 40$  und der Lastausmitte  $e_1 = 0.50 \cdot h + e_i$  kann ein Bauteil mit einem C30/37 und  $\rho_s = 4$  % ähnliche Traglasten übertragen wie ein Bauteil mit einem C150 und  $\rho_s = 1$  %.

Eine weitere Versagensart stellt der Stabilitätsverlust dar. Da bei diesem Versagensmodus die Grenzspannungen des Materials nicht erreicht werden, beeinflusst die vorhandene Druckfestigkeit das Versagen nicht. Die Steifigkeit ist hier eine entscheidende Kenngröße.

Bei Stabilitätsversagen und geringen Lastausmitten können Bauteile ohne auftretende Rissbildung die Standsicherheit verlieren. In solchen Fällen muss die Biegesteifigkeit im Zustand I erhöht werden, wenn die Traglast gesteigert werden soll. Wird angenommen, dass die Geometrie des Bauteils ( $h_{QS}, b_{QS}$ ) nicht geändert werden soll, kann die Biegesteifigkeit des ungerissenen

Zustands entweder durch Erhöhung der Betongüte (höherer E-Modul) und/oder durch Vergrößerung des Bewehrungsgrades (größerer Steiner-Anteil am Trägheitsmoment) erhöht werden. Zu erkennen ist dies bei den großen Schlankheiten ( $\lambda > 120$ ) in der Abbildung 6.12.

Ist die Lastausmitte groß und liegt Stabilitätsversagen vor, so ist die Rissbildung ein maßgebender Faktor der Tragfähigkeit. Die Steifigkeit im Zustand II und somit auch die Tragfähigkeit kann durch Bewehrung erhöht werden (siehe Abbildung 6.13). Auch die zusätzliche Zugabe von Faserbewehrung wirkt hier positiv dem Standverlust entgegen. Eine weitere (zusätzliche) Maßnahme stellt die zentrische Vorspannung dar. Sie wird im folgenden Unterabschnitt betrachtet.

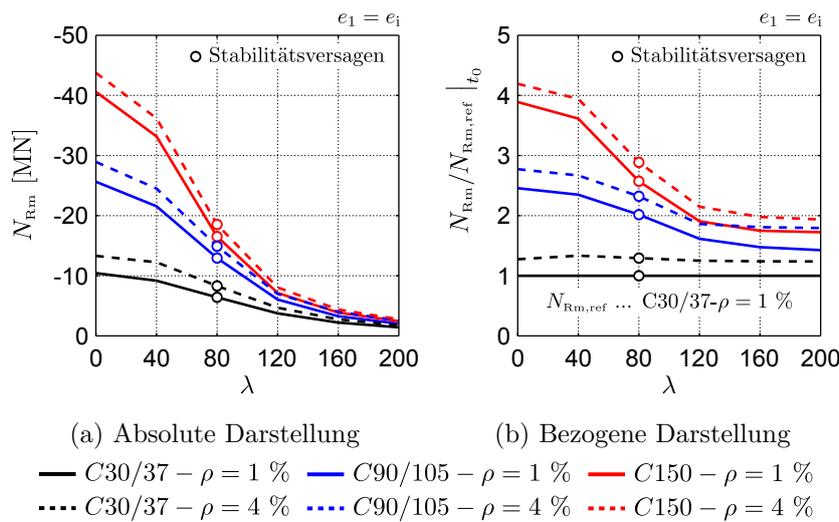


Abbildung 6.12: Einfluss von Betongüte, Bewehrungsgrad und Schlankheit auf die Traglast bei einer Lastausmitte  $e_1 = e_i$  (Bild (b): Referenz  $C30/37 - \rho_s = 1 \%$ )

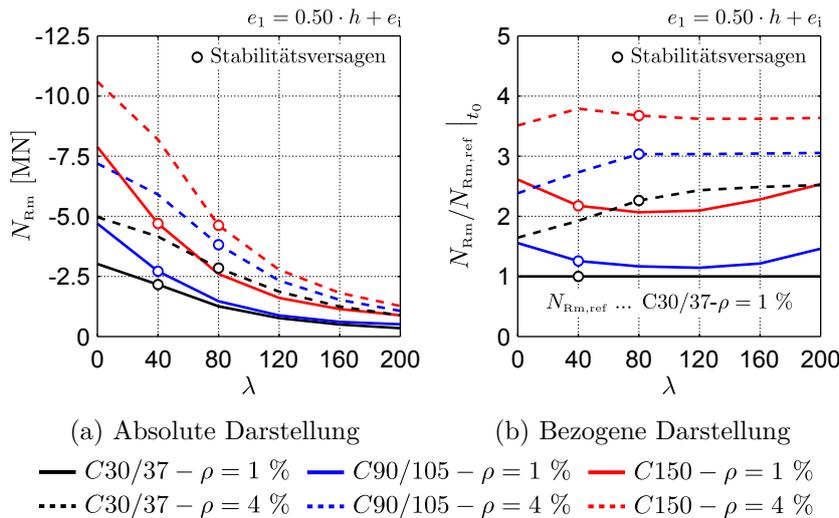


Abbildung 6.13: Einfluss von Betongüte, Bewehrungsgrad und Schlankheit auf die Traglast bei einer Lastausmitte  $e_1 = 0.50 \cdot h + e_i$  (Bild (b): Referenz  $C30/37 - \rho_s = 1 \%$ )

### Einfluss der Vorspannung auf die Traglast

Zentrische Vorspannung reduziert die Drucktragfähigkeit, verzögert aber gleichzeitig die Rissbildung und somit auch eine überproportionale Verformungszunahme. Eine Traglaststeigerung ist die Folge. Am Beispiel einer Stütze der Schlankheit  $\lambda = 100$  mit einem Bewehrungsgrad  $\rho_s = 4\%$  und einer Lastexzentrizität  $e_1 = h_{QS}/6$  ( $e_i = 0$ ), siehe Abbildung 6.14, kann dies nachvollzogen werden. Um den Fokus auf das Wesentliche zu richten, wurde hierbei auf die Angabe von Zahlenwerten für  $M$  und  $N$  verzichtet. Das Steigerungspotential ist umso höher, je größer die Schlankheit und die Lastausmitte ist (siehe Abbildung 6.15). Bei hohen Schlankheiten und kleinen Lastausmitten ist das Steigerungspotential durch Vorspannung sehr klein. Der Grund: Je schlanker ein Bauteil ist und je kleiner die Lastausmitte wird, desto weiter entfernt sich der  $M$ - $N$ -Punkt beim Stabilitätsverlust ( $N_b$ ) vom Querschnittsversagen. In Extremfällen tritt der Stabilitätsverlust vor der Rissbildung ein. Hier ist die Vorspannung absolut wirkungslos!

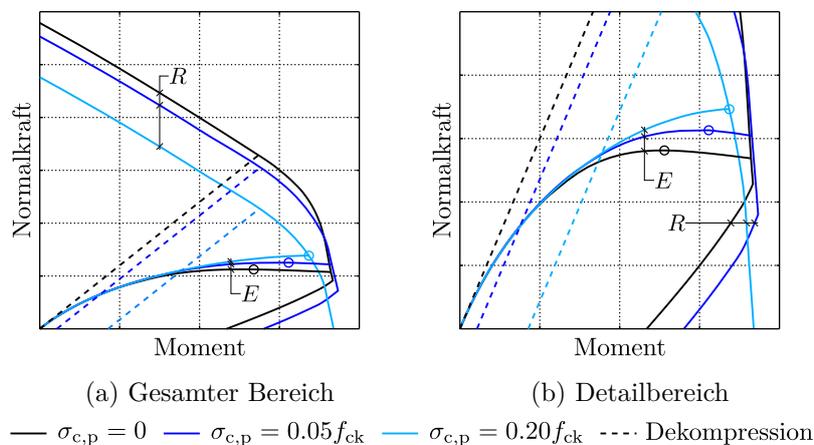


Abbildung 6.14: Einfluss der Vorspannung am Beispiel einer Stütze ( $\lambda = 100$ ,  $\rho_s = 4\%$ ,  $e_i = 0$ ,  $e_0 = h_{QS}/6$ )

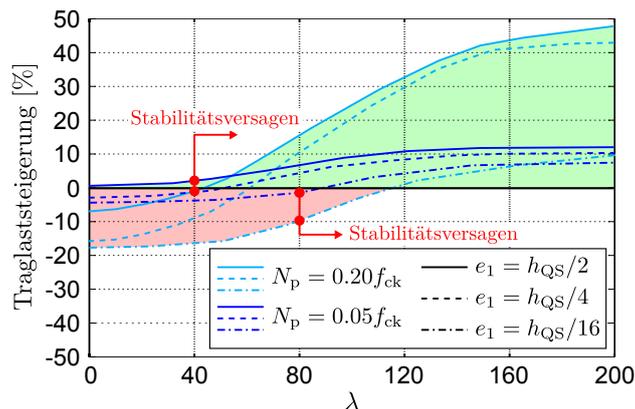


Abbildung 6.15: Rechnerische Traglaststeigerung durch Vorspannung

Der eben beschriebene Extremfall bedeutet im Umkehrschluss jedoch nicht, dass die Vorspannung bei hochschlanken Stützen ohne gewollte Lastausmitte ( $e_0 = 0$ ) immer nutzlos ist. Im

Hochbau erfreuen sich sogenannte Architekturstützen immer größer werdender Beliebtheit. Diese Architekturstützen überbrücken meist einige Stockwerke und erzielen durch geringe Querschnittshöhen große Schlankheiten. Auch bei modularen Fachwerken, bei denen UHPC-Stäbe durch gegenseitiges verspannen zu Fachwerken zusammengesetzt werden, können die Druckstäbe sehr große Schlankheiten erreichen (Tue (2010)). Sowohl bei Architekturstützen, als auch bei Fachwerkstäben kann die Lastexzentrizität  $e_1 = e_0 + e_i$  unter planmäßig zentrischer Belastung ( $e_1 = e_{0,\min} + e_i = 2 \text{ cm} + e_i$ ) größer als die Kernweite des Querschnitts sein. Die hier angeführte Mindestausmitte von 2 cm wird in der ON-EN1992-1-1 (2011) gefordert ( $e_{0,\min} = \min(h/30, 2 \text{ cm})$ ).

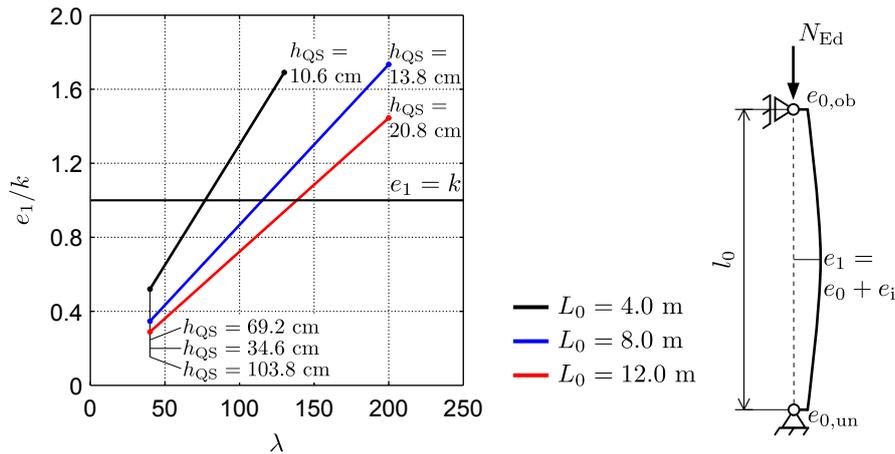


Abbildung 6.16: Lastausmitte  $e_1$  mit Bezug auf die Kernweite  $k = h_{QS}/6$  des Querschnitts in Abhängigkeit der Schlankheit und der Knicklänge. ( $e_0 = e_{0,\min} = \min(h/30, 2 \text{ cm})$ ,  $e_i$  gem. Gleichung 6.4)

Die Abbildung 6.16 zeigt, dass dies (abhängig von der Knicklänge) durchaus schon bei einer Schlankheit von 75 der Fall sein kann. In diesen Fällen kann die Traglast durch die Anwendung der Vorspannung gesteigert werden. Hier ist ebenfalls erkennbar, dass im Falle einer geschosshohen Stütze ( $l_0 = 4 \text{ m}$ ) die Schlankheit nach oben hin durch die Querschnittshöhe limitiert ist. Stützen mit Querschnittshöhen unter 10 cm sind im Stahlbetonbau kaum mehr sinnvoll realisierbar.

Die Abbildungen 6.17 und 6.18 zeigen die Verhältnisse der Traglasten vorgespannter Stützen ( $N_{Rm,N_p}$ ) zu nicht vorgespannten Stützen ( $N_{Rm}$ ). Durch geringe Vorspannung ( $\sigma_{cp} = 0.05 \cdot f_{ck}$ ) lassen sich bei kleinen Bewehrungsgraden schon beachtliche Traglaststeigerungen (bis zu 70 %) realisieren. Dieses Potential ist durch höhere Vorspannung weiter steigerbar. Eine mit  $\rho_s = 1 \%$  bewehrte Stütze, einer Lastausmitte  $e_1$  von  $0.5 \cdot h + e_i$  und einer Schlankheit  $\lambda = 200$  kann bei 2.4-facher Vorspannkraft ( $\sigma_{cp} = 0.12 \cdot f_{ck}$ ) im Vergleich zur  $0.05 \cdot f_{ck}$  vorgespannten Stütze nur die 1.4-fache Traglast übertragen (siehe Abbildungen 6.17 und 6.18, blaue Kurve). Hier ist zu erkennen, dass die Traglaststeigerung unterproportional zur Vorspannkraft verhält. Dieses Verhalten kann leicht erklärt werden. Mit steigender Vorspannung nähert sich die Last der Rissbildung der Knicklast an. Die höchste Wirkung der Vorspannkraft ist dann erreicht, wenn die Knicklast mit der Erstrisslast zusammenfällt. Eine weitere Steigerung der Vorspannkraft bewirkt dann keine Traglaststeigerung mehr. Vielmehr nimmt die Traglast dann wieder ab, weil sehr hohe Vorspannkraft durch die materielle Nichtlinearität das Bauteil aufweichen, also die Biegesteifigkeit reduzieren. Durch Vorspannen ist auch bei hoch bewehrten Querschnitten eine

Traglaststeigerung erzielbar. Sie fällt aber aufgrund der größeren Biegesteifigkeit im Zustand II weniger effektiv aus.

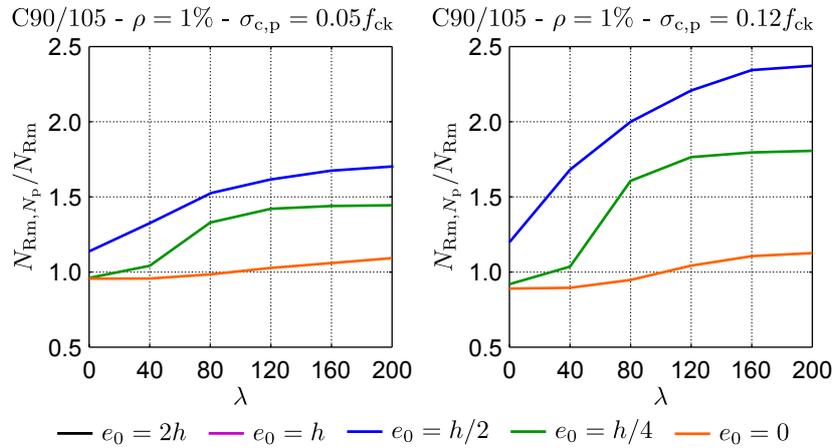


Abbildung 6.17: Auswirkung der Vorspannung auf die Traglast ( $\rho = 1\%$ )

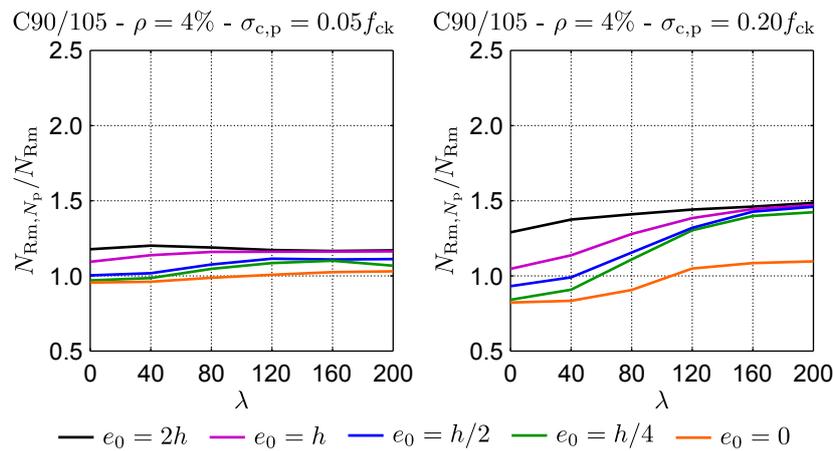


Abbildung 6.18: Auswirkung der Vorspannung auf die Traglast ( $\rho = 4\%$ )

Weiter ist anzumerken, dass hochschlanke Fertigteilstützen in der Regel vorgespannt werden, um die Rissgefahr beim Transport und der Montage zu vermeiden. Diese Vorspannung könnte im Nachweis der Tragfähigkeit berücksichtigt werden und somit die Leistungsfähigkeit dieser Bauteile erhöhen.

### Auswirkungen von Kriechen und Schwinden auf die Traglast

Kriechen und Schwinden des Betons haben einen Einfluss auf das Tragverhalten. Durch das Kriechen vergrößern sich die Verformungen unter ständiger Belastung. Dadurch hat das Kriechen in Systemen mit einwirkender Normalkraft auch einen Einfluss auf die Abtriebskräfte und die Momentenbeanspruchung. Durch das Schwinden entstehen bei bewehrten Querschnitten infolge der Verformungsbehinderung Zwangszugspannungen im Beton. Diese führen zu einer früheren Rissbildung. Die damit verbundene Steifigkeitsreduktion reduziert die Traglast. Die Abbildungen 6.19 und 6.20 zeigen den quantitativen Einfluss von Kriechen und Schwinden in Abhängigkeit der Betongüte, des Bewehrungsgrades, der Lastausmitte und der Schlankheit bei nicht vorgespannten Stützen. Die Abbildungen 6.21 und 6.22 spiegeln den Einfluss bei vorgespannten Stützen wieder. Hier wird die Betongüte konstant gehalten und der Vorspanngrad variiert. Die Ergebnisse beider Abbildungen wurden mit der Zeitschrittmethode ermittelt. Folgendes ist erkennbar:

- Mit steigender Schlankheit nimmt der Einfluss des Kriechens auf die Traglast zu.
- Mit steigender Lastausmitte  $e_{0+i}$  und der damit verbundenen Rissbildung nimmt der Einfluss des Kriechens auf die Traglast ab. Dies ist auf den unterschiedlichen Einfluss von Kriechen im Zustand I und II zurückzuführen.
- Bei hohen Bewehrungsgraden und kleinen Schlankheiten können durch Kriechen rechnerisch höhere Traglasten erreicht werden, als zum Zeitpunkt  $t_0$ . Das liegt daran, dass durch das Kriechen ein zusätzlicher Stahlkraftanteil lukriert werden kann.
- Der Einfluss des Schwindens auf die Traglast nimmt mit steigender Schlankheit zu.
- Bei den betrachteten Bauteilen der Parameterstudie scheint der Einfluss des Schwindens auf die Traglast bei kleinen Bewehrungsgraden größer zu sein als bei höheren Bewehrungsgraden. Dies erscheint kurios, da doch mit steigendem Bewehrungsgrad auch die Zwangszugspannung steigt. Der Grund für das festgestellte Verhalten bei Stützen ist der prozentual niedrigere Steifigkeitsverlust beim Übergang in den Zustand II bei höheren Bewehrungsgraden.
- Die Traglast wird durch Kriechen um ca. 10-20 % reduziert.
- Die zusätzliche Berücksichtigung des Schwindens reduziert die Traglast. Bei geringen Bewehrungsgraden und großen Schlankheiten kann die Reduktion bis zu 50 % betragen. Dieser hohe Wert ist sehr unerwartet.
- Durch Vorspannung kann der Einfluss des Schwindens auf die Traglast reduziert werden. Hierfür reichen schon geringe Vorspanngrade von  $\sigma_{cp} = 0.05 \cdot f_{ck}$  aus.

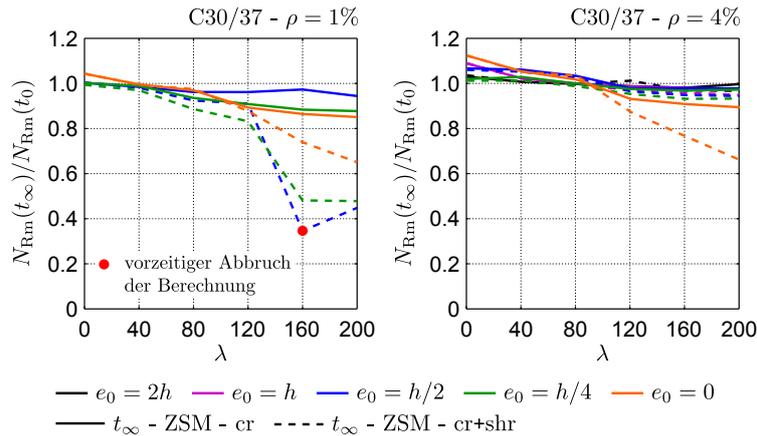


Abbildung 6.19: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf nicht vorgespannte Stützen (C30/37)

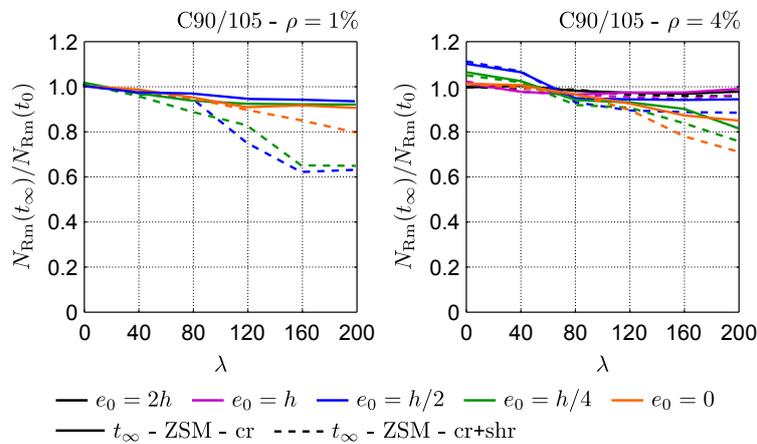


Abbildung 6.20: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf nicht vorgespannte Stützen (C90/105)

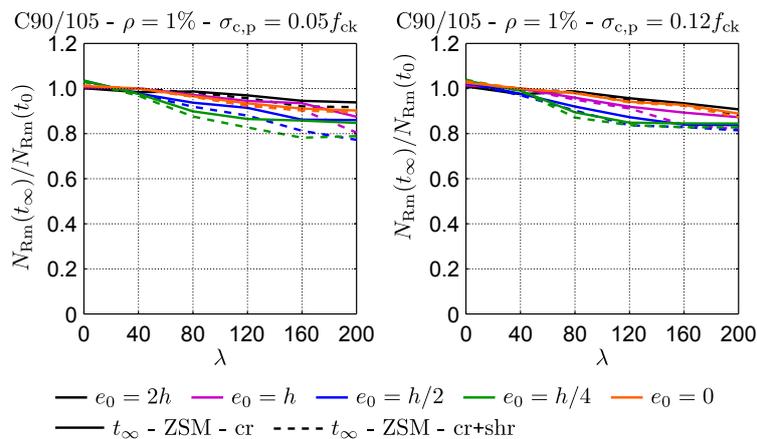


Abbildung 6.21: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf vorgespannte Stützen (C90/105,  $\rho = 1\%$ )

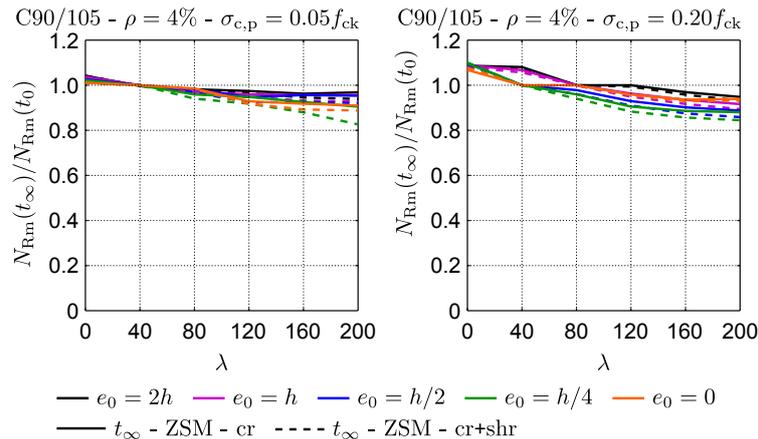


Abbildung 6.22: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf vorgespannte Stützen (C90/105,  $\rho = 4\%$ )

Der Einfluss von Kriechen und Schwinden an einer konkreten Stütze kann den Abbildungen 6.23 und 6.24 entnommen werden. Als Anschauungsbeispiel wurde ein doppelt gelenkig gelagerter Druckstab mit einer Schlankheit  $\lambda = 200$  aus einem C30/37 mit einem Bewehrungsgehalt  $\rho_s = 1\%$  gewählt. Die gewollte Lastausmitte  $e_0$  beträgt 0 cm, die Imperfektionsexzentrizität  $e_i$  in Stabmitte 4.82 cm. Die von der ON-EN1992-1-1 (2011) geforderte Mindestexzentrizität  $e_{o,min} = 2$  cm wurde nicht angesetzt. Zeitliche Effekte wurden mit der Kriechzahl  $\varphi = 2.3$  und der Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs} = -0.407\text{‰}$  gemäß Tabelle 6.5 berücksichtigt. Als effektive Kriechzahl ergab sich somit  $\varphi_{eff} = 0.514 \cdot 2.3 = 1.18$ .

Hier ist deutlich erkennbar, dass die Stütze durch das Schwinden früher in den gerissenen Zustand übergeht und die Traglast dadurch wesentlich verringert wird. Die Abbildungen 6.25 und 6.26 zeigen die Dehnungs- und Spannungszustände an drei markanten Lastzuständen der Stütze. In der Abbildung 6.25 ist der alleinige Einfluss des Kriechens, in der Abbildung 6.26 der kombinierten Einfluss von Kriechen und Schwinden ersichtlich. Im direkten Vergleich der Traglastkurve unter alleiniger Berücksichtigung des Kriechens (dunkelblaue Kurve) mit jener unter zusätzlicher Berücksichtigung des Schwindens (hellblaue Kurve) in den Abbildungen 6.25 und 6.26 wird deutlich, welchen großen Anteil die Eigenzugspannung des Schwindens einnehmen kann.

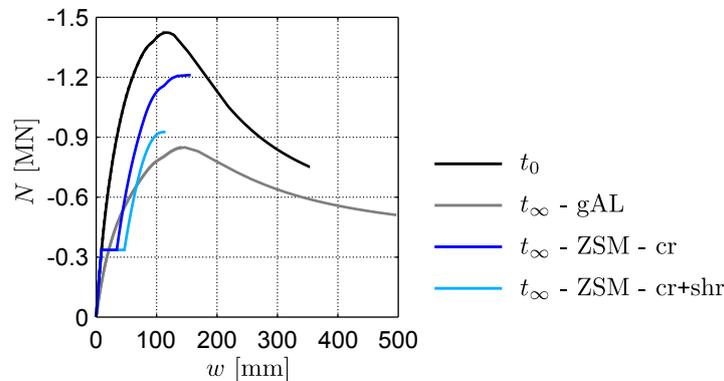


Abbildung 6.23: Einfluss von Kriechen und Schwinden auf die Traglastkurve

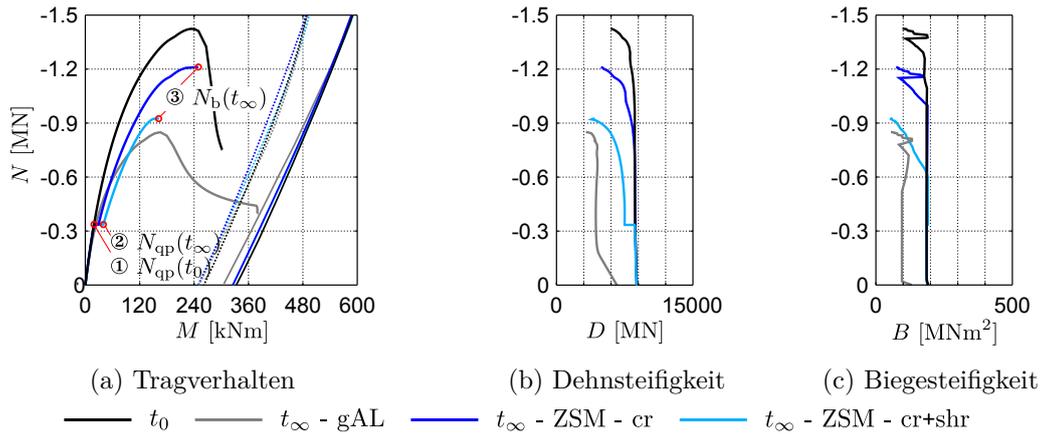


Abbildung 6.24: Tragverhalten ( $M$ - $N$ -Darstellung) und Steifigkeitsverläufe

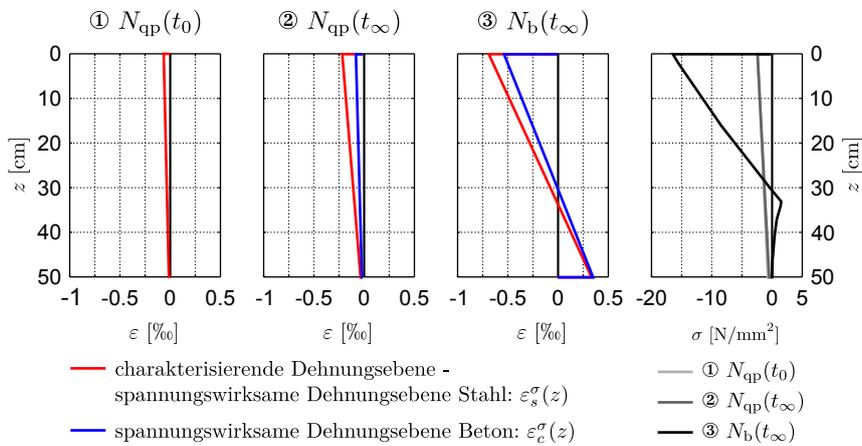


Abbildung 6.25: Dehnungs- und Spannungsverteilung bei drei markanten Laststufen (ZSM - cr)

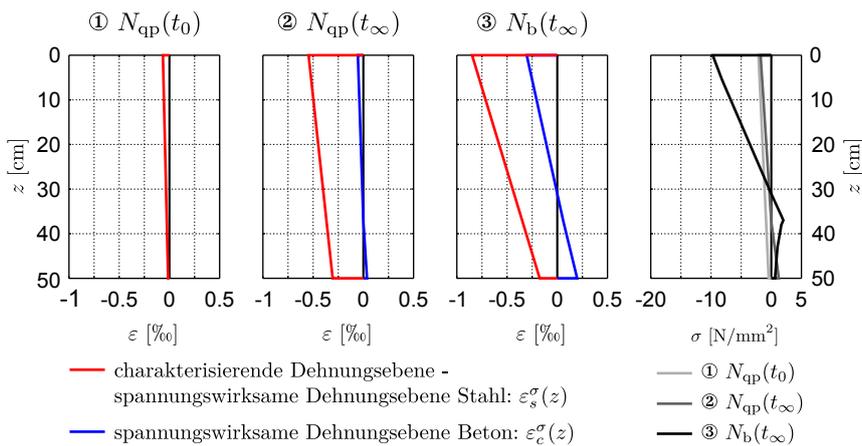


Abbildung 6.26: Dehnungs- und Spannungsverteilung bei drei markanten Laststufen (ZSM - cr+shr)

### Vergleich der Traglasten von Zeitschrittverfahren und Methode effektiver Steifigkeiten

Durch das Kriechen nehmen die Verformungen unter ständig wirkenden Lasten mit der Zeit zu. Die Traglast nimmt somit mit der Zeit entsprechend ab (siehe Abbildung 6.23 und 6.24). In den aktuellen Regelwerken (ON-EN1992-1-1 (2011), DIN-EN1992-1-1 (2011), CEB-fib (2013)) ist es zulässig, die Auswirkungen des Kriechens am Bauteil vereinfacht durch das Strecken der Druckarbeitslinie des Betons zu berücksichtigen. Hierbei wird der E-Modul auf einen effektiven Wert  $E_{cm,eff} = 1/(1 + \varphi_{eff})$  reduziert. Die effektive Kriechzahl  $\varphi_{eff}(t, t_0)$  errechnet sich aus dem Verhältnis des quasi-ständigen Lastanteils zur Bemessungslast. Diese Vorgehensweise ist mechanisch nicht korrekt, da das Bauteilverhalten bei dieser Methode von Beginn des Last-Verformungs-Pfades an weicher ist. Da die Kriechzahlen großen Streuungen unterworfen sind, wird diese Vorgehensweise jedoch als ausreichend genau angesehen. Durch die Einführung von Zeitschritten kann das zeitabhängige Verhalten von Bauteilen mechanisch konsistent beschrieben werden, da die Steifigkeiten bei diesem Berücksichtigungsmodell nicht manipuliert werden.

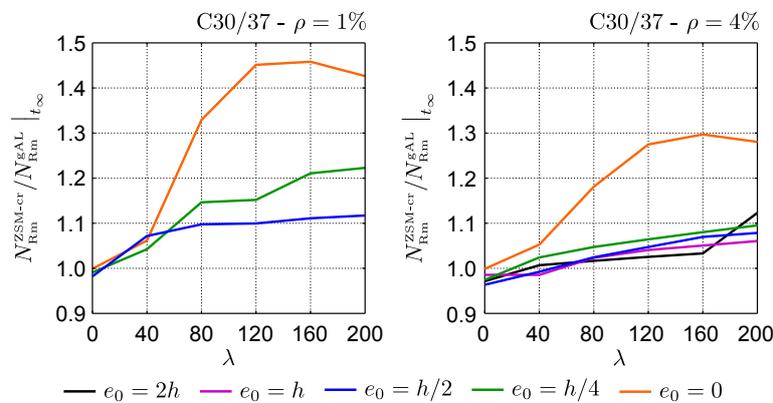


Abbildung 6.27: Vergleich - Zeitschrittverfahren (nur cr) mit der Methode mit effektiven Steifigkeiten (C30/37)

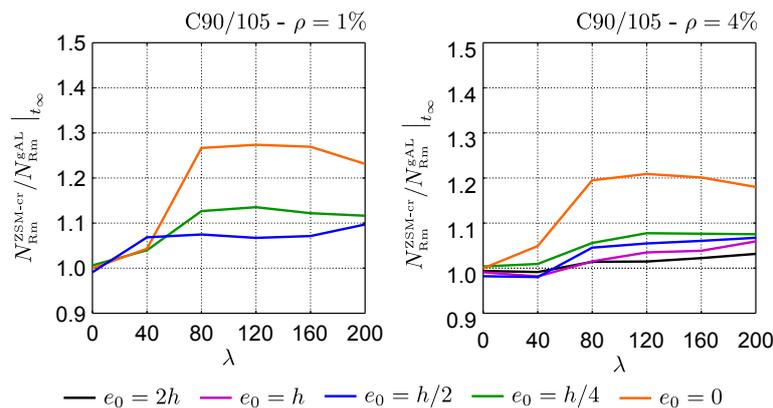


Abbildung 6.28: Vergleich - Zeitschrittverfahren (nur cr) mit der Methode mit effektiven Steifigkeiten (C90/105)

Die Abbildungen 6.27 bis 6.30 zeigen den Einfluss der Modellqualität zur Beschreibung der Kriechauswirkungen auf die rechnerische Traglast. Hierbei sind die Verhältniszahlen der Traglasten aufgetragen (Zeitschrittverfahren:  $N_{Rm}^{ZSM-cr}$ , Methode mit effektiven Steifigkeiten  $N_{Rm}^{gAL}$ ).

Bei schlaff bewehrten Bauteilen kann die mit der Zeitschrittmethodemittelte Tragfähigkeit bis zu 45 % höher sein. Der Unterschied nimmt mit anwachsender Lastausmitte  $e_{0+i}$  ab, da der Einfluss des Kriechens abnimmt. Bei vorgespannten Stützen ist ein ähnliches Muster erkennbar.

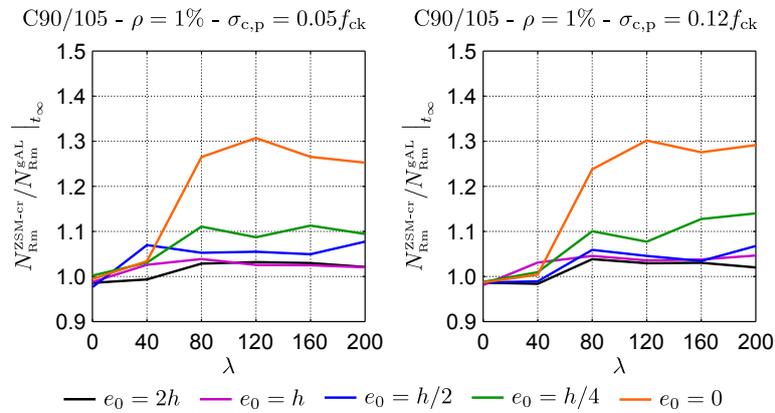


Abbildung 6.29: Vergleich - Zeitschrittmethodemittelte Tragfähigkeit mit der Methode mit effektiven Steifigkeiten (C90/105, vorgespannt,  $\rho = 1\%$ )

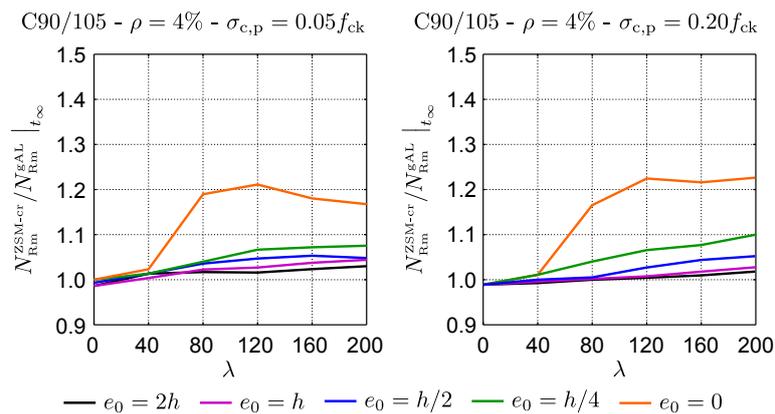


Abbildung 6.30: Vergleich - Zeitschrittmethodemittelte Tragfähigkeit mit der Methode mit effektiven Steifigkeiten (C90/105, vorgespannt,  $\rho = 4\%$ )

## 6.4.2 Vergleich des Nennkrümmungsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung

Vergleich der Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren ohne Berücksichtigung des Kriechens

Im Zuge der Parameterstudie wurden die Bemessungslasten neben nichtlinearen Berechnungen auch mit Hilfe des Nennkrümmungs- und des Nennsteifigkeitsverfahrens ermittelt. Wie am Beginn dieses Kapitels gezeigt, benutzt das Nennkrümmungsverfahren einige Vereinfachungen, um die Bemessung normalkraftbeanspruchter und stabilitätsgefährdeter Bauteile praktikabel zu halten. Nach den in Unterabschnitt 6.3.1 hergeleiteten Beziehungen sollte das Nennkrümmungsverfahren mit abnehmender Lastausmitte und mit zunehmender Schlankheit größer werdende, aber auf der sicheren Seite liegende Abweichungen liefern. Dies gilt es zu überprüfen.

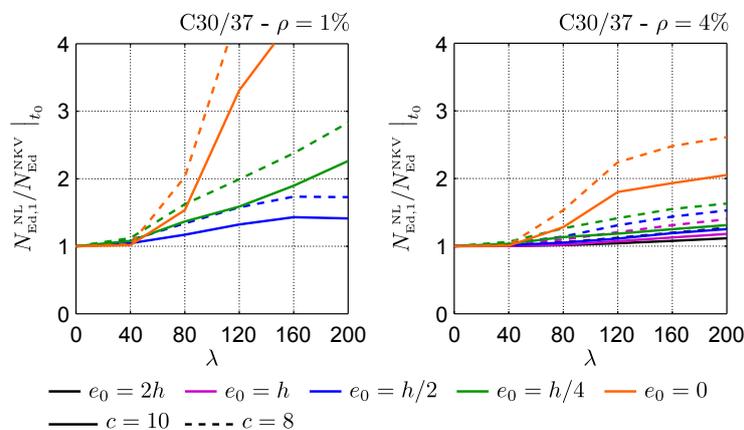


Abbildung 6.31: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

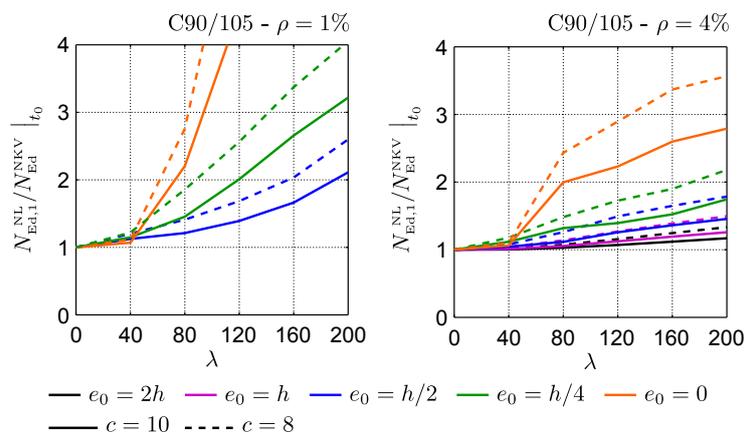


Abbildung 6.32: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

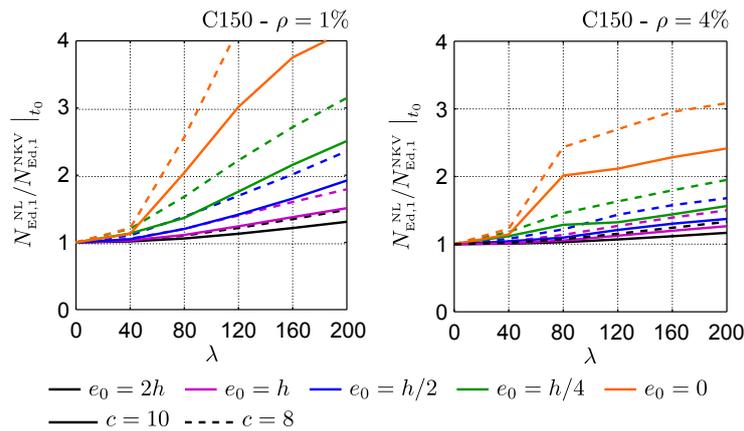


Abbildung 6.33: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C150 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

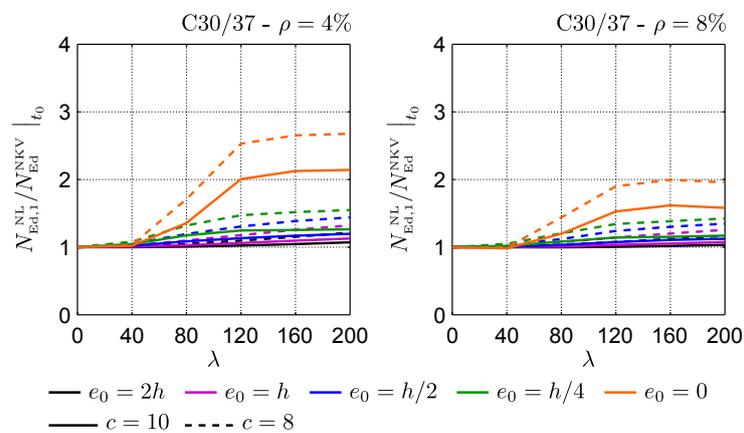


Abbildung 6.34: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE4 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

In den Abbildungen 6.31 bis 6.34 wird die Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,1}$  mit dem Ergebnis des Nennkrümmungsverfahrens (NKV) verglichen. Die Kraft  $N_{Ed,1}$  steht hier für den Schnittpunkt der nichtlinear ermittelten Einwirkungskurve mit dem Querschnittswiderstand auf Bemessungsniveau  $R_d$  (siehe Abbildung 6.11). Jedes Diagramm stellt den Vergleich für eine Betongüte und einen Bewehrungsgrad dar. Die Abbildung 6.34 zeigt die Ergebnisse für den rundum bewehrten Querschnitt RE4 mit  $\rho_s = 4\%$  und  $\rho_s = 8\%$ . Weiter ist in jedem Diagramm der Vergleich für die zwei Grenzfälle sinusförmige Krümmungsverteilung ( $c \approx 10$ ) und konstante Krümmungsverteilung ( $c = 8.0$ ) dargestellt. Je größer die Lastausmitte wird, desto näher liegt die tatsächliche Krümmungsverteilung am Grenzfalle der konstanten Verteilung, der bei einer unendlich großen Lastausmitte erreicht wäre. In der Parameterstudie wurde bei der Ermittlung von  $1/r_0 = 2 \cdot \varepsilon_{yd} / a_{sI-sII}$  des Nennkrümmungsverfahrens für den Abstand  $a_{sI-sII}$  der tatsächliche Abstand der Zug- zur Druckbewehrung angesetzt. Die ON-EN1992-1-1 (2011) gibt hierfür näherungsweise  $a_{sI-sII} = 0.9 \cdot d$  an. Folgendes konnte festgestellt werden:

- Die Abweichungen auf der sicheren Seite nehmen beim NKV mit zunehmender Schlankheit zu.

- Bei höherem Bewehrungsgrad sind diese Abweichungen geringer als bei einem niedrigen Bewehrungsgrad.
- Das Verfahren zeigt keine signifikanten Unterschiede bei der Anwendung für faserbewehrten ultrahochfesten Beton.
- Auch bei rundum bewehrten Querschnitten (RE4) bleibt das NKV bei steigender Schlankheit auf der sicheren Seite.

### Vergleich der Bemessungsnormalkraft $N_{Ed,2}$ der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren ohne Berücksichtigung des Kriechens

Die ON-B1992-1-1 (2011) fordert bei nichtlinearen Berechnungen, dass das Stabilitätsversagen bei einer um mindestens 30 % höheren Druckkraft als der Bemessungslast zu liegen kommt. Aus dieser Forderung ergibt sich die Bemessungslast gemäß der Gleichung 6.39 zu  $N_{Ed,2} = \min(N_{Ed,1}, N_b/1.3)$  (siehe Abbildung 6.11). In den Abbildungen und 6.35 bis 6.37 wird das Nennkrümmungsverfahren mit der Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,2}$  verglichen. Hier ergibt sich grundsätzlich ein ähnliches Bild, wie beim Vergleich mit der Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,1}$ , nur mit dem Unterschied, dass die Abweichungen auf der sichereren Seite liegend geringer sind.

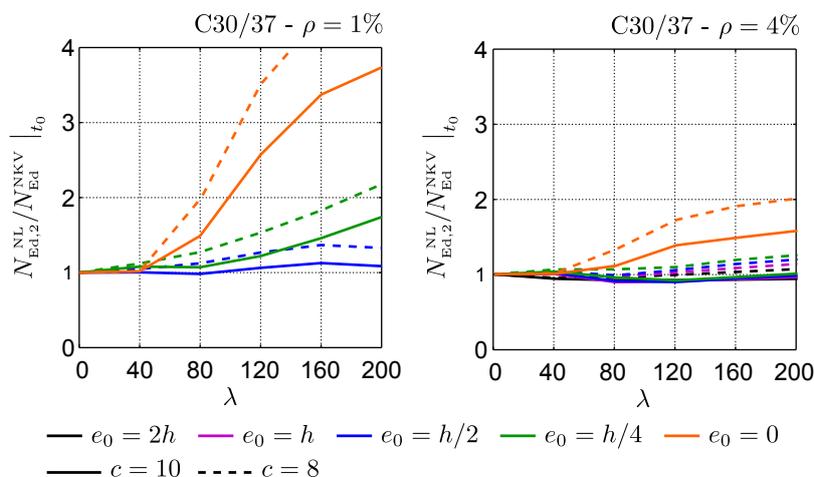


Abbildung 6.35: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

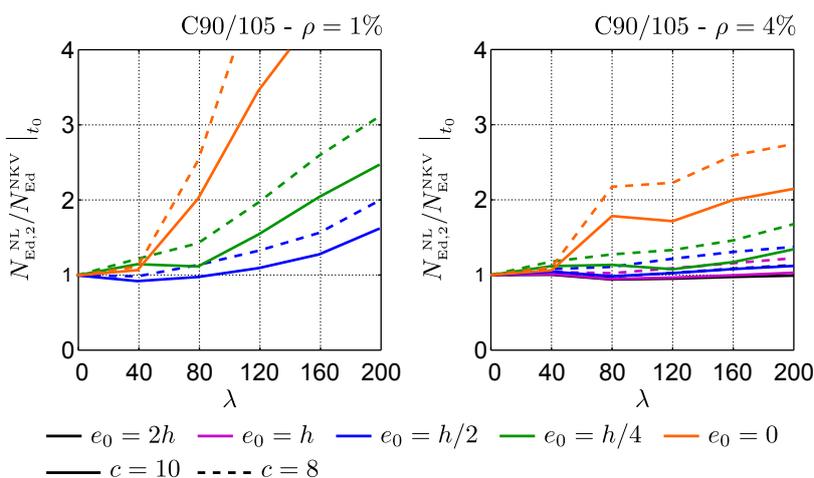


Abbildung 6.36: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

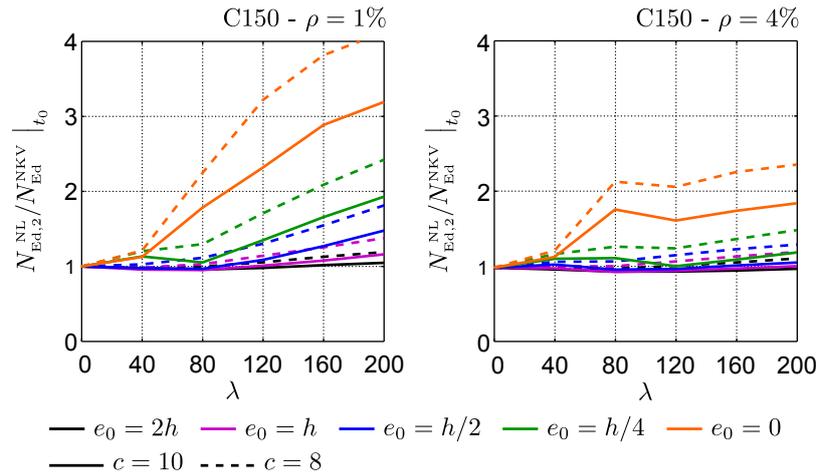


Abbildung 6.37: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C150 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

Bei manchen Kombinationen von Schlankheit und Lastausmitte ergeben sich mit dem Nennkrümmungsverfahren sogar größere Bemessungslasten als bei der nichtlinearen Berechnung mit  $N_{Ed,2}$ . Erstaunlicherweise trifft dies besonders oft bei kleinen bis mäßigen Schlankheiten ( $\lambda = 40$  bis  $\lambda = 80$ ) mit steigender Lastausmitte ( $e_0 > 0.25 \cdot h$ ) zu. Der Fehler auf der unsicheren Seite beträgt bei den hier betrachteten Bauteilen ca. 10 % (C90/105 -  $\rho_s = 1\%$ ,  $\lambda = 40$ ,  $e_0 = 0.50 \cdot h$ ). Wird hier vom Standardwert  $c = 10$  der ON-EN1992-1-1 (2011) abgewichen und ein realistischerer Wert für die Völligkeit der Krümmungskurve gewählt, kann dieser Fehler minimiert werden. Bei  $c = 8$  wäre die Abweichung auf der unsicheren Seite sogar vernachlässigbar. Ebenso verhalten sich rundum bewehrte Querschnitte RE4, wenn hier das Nennkrümmungsverfahren mit  $N_{Ed,2}$  verglichen wird. Mit steigendem Bewehrungsgrad (hier  $\rho_s = 8\%$ ) liegen die Ergebnisse des Nennkrümmungsverfahrens um bis zu 10 % auf der unsicheren Seite.

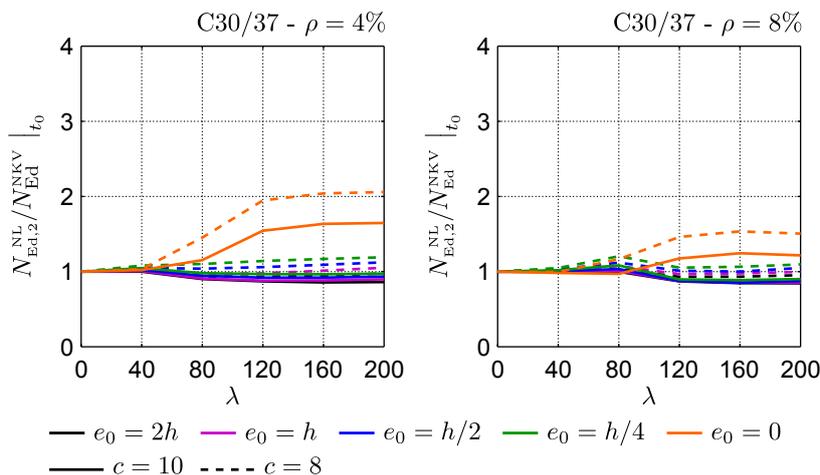


Abbildung 6.38: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE4 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

### Vergleich der Bemessungsnormalkraft $N_{Ed,2}$ der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren mit Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden

Es stellt sich nun die Frage inwieweit sich die Ergebnisse verändern, wenn die zeitlichen Auswirkungen mitberücksichtigt werden. Speziell die Auswirkungen des Schwindens sind interessant, da beim Nennkrümmungsverfahren kein Schwindansatz vorhanden ist.

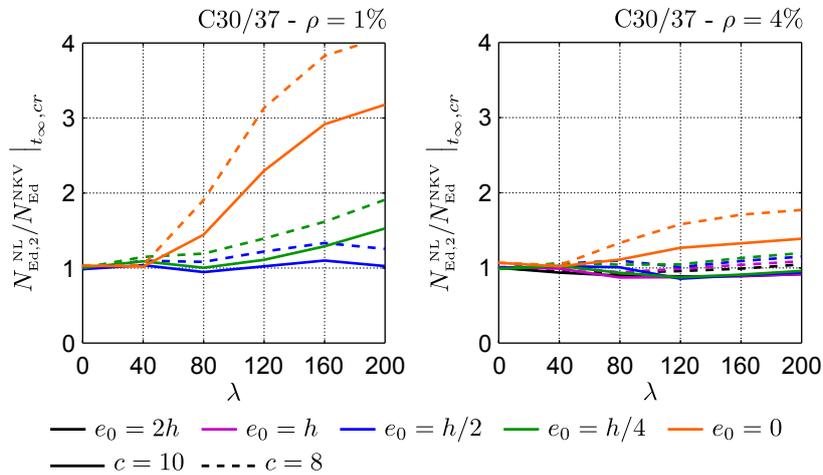


Abbildung 6.39: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr)

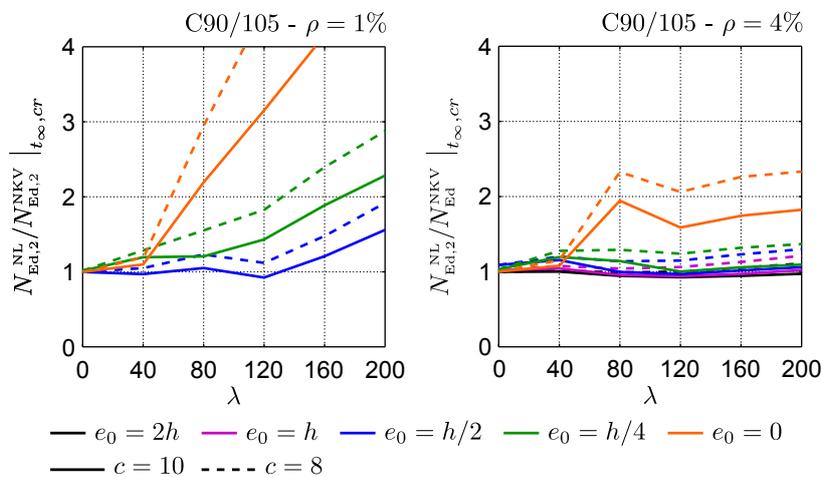


Abbildung 6.40: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr)

Die Abbildungen 6.39 und 6.40 zeigen den Vergleich des Nennkrümmungsverfahrens mit der Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung unter Berücksichtigung des Kriechens. Die zeitlichen Effekte (Kriechen und Schwinden) wurden mit der Zeitschrittmethod erfasst. Es ist ersichtlich, dass der Kriechansatz der ON-EN1992-1-1 (2011) konservativ ist. Er wirkt sich nicht negativ auf die Bemessungstraglast aus. Werden die Ergebnisse des Nennkrümmungsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung unter Berücksichtigung von Kriechen und

Schwinden verglichen, ergibt sich ein etwas anderes Bild. Die Abbildungen 6.41 und 6.42 zeigen bei kleinen Bewehrungsgraden mit steigender Lastausmitte ein Defizit des Nennkrümmungsverfahrens.

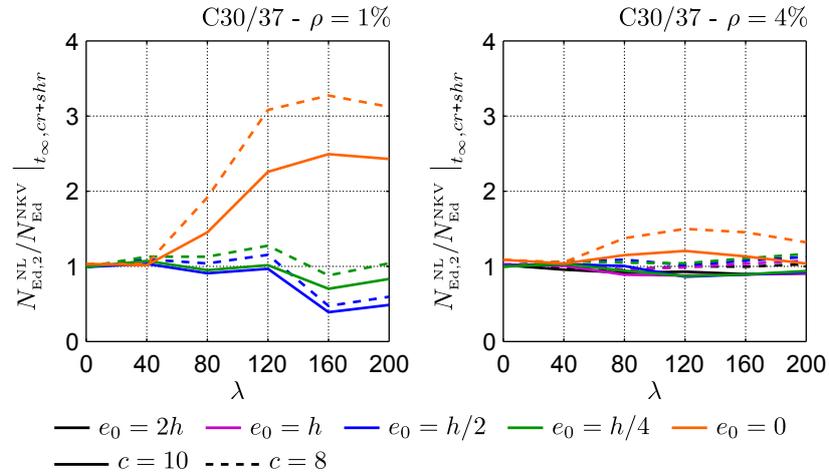


Abbildung 6.41: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr und shr)

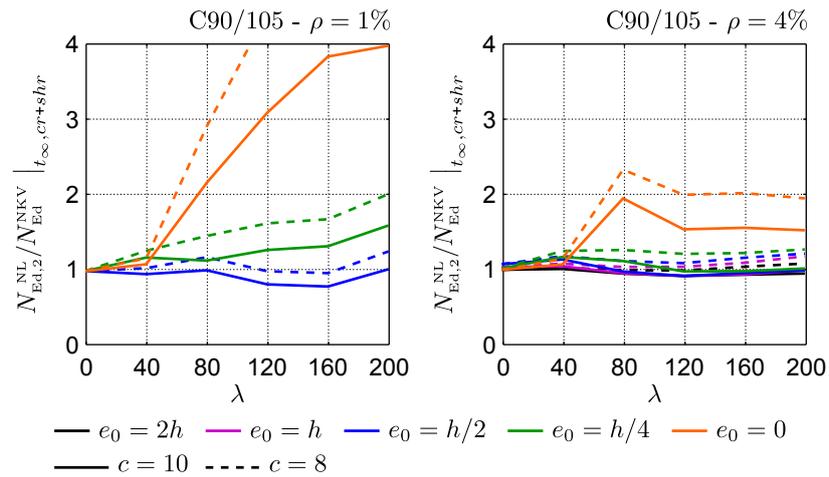


Abbildung 6.42: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennkrümmungsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr und shr)

### 6.4.3 Vergleich des Nennsteifigkeitsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung

#### Vergleich der Bemessungsnormalkraft $N_{Ed,1}$ der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren ohne Berücksichtigung des Kriechens

Die Abbildungen 6.43 bis 6.46 zeigen den Vergleich des Nennsteifigkeitsverfahrens mit der Bemessungslast  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung für verschiedene Betongüten, unterschiedliche Schlankheiten und variierende, konstante Lastausmitten. Zeitliche Effekte werden hier nicht berücksichtigt. Die  $c_0$ -Werte beim Nennsteifigkeitsverfahren werden auf Basis der Momentenlinie nach Theorie I. Ordnung ermittelt. Sie könnten für jede Schlankheit und zugehörige Lastausmitte genau bestimmt werden. Im Zuge der Parameterstudie wurden jedoch die hier relevanten Grenzwerte  $c_0 = 9.6$  und  $c_0 = 8.0$  der Momentenverteilungsfaktoren verwendet, da sie neben Grenzwertbetrachtungen auch Aufschlüsse über die Empfindlichkeit des Verfahrens gegenüber geänderter  $c_0$ -Beiwerte zulassen.

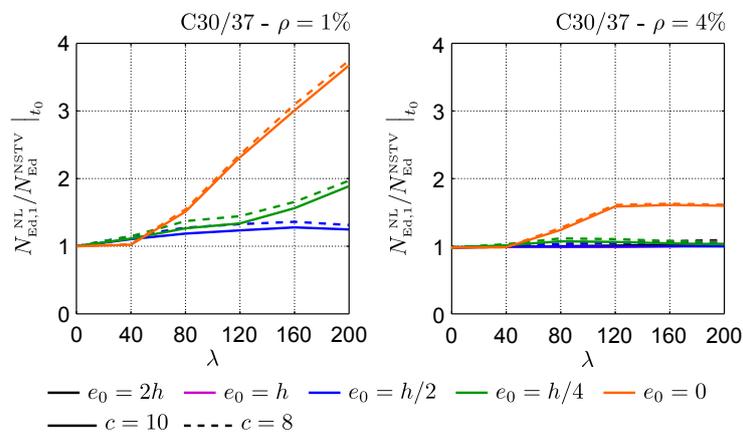


Abbildung 6.43: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

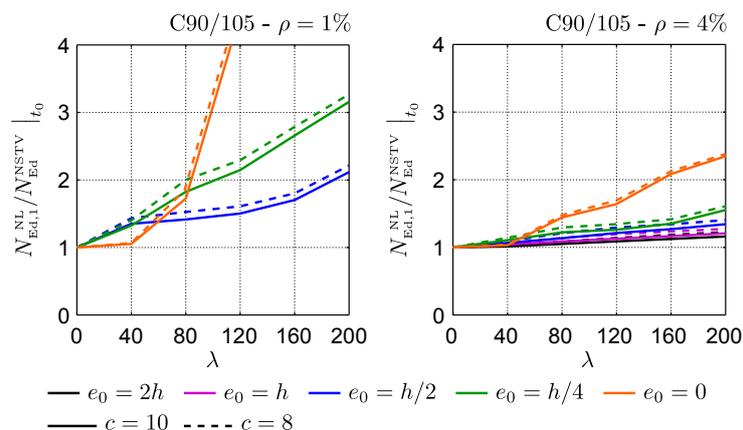


Abbildung 6.44: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

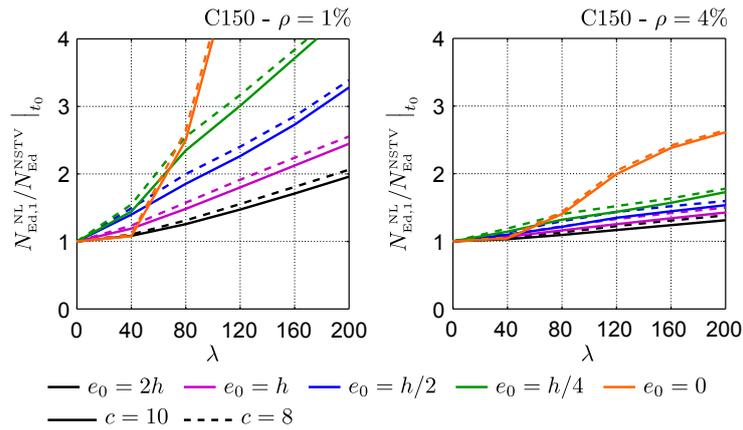


Abbildung 6.45: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C150 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

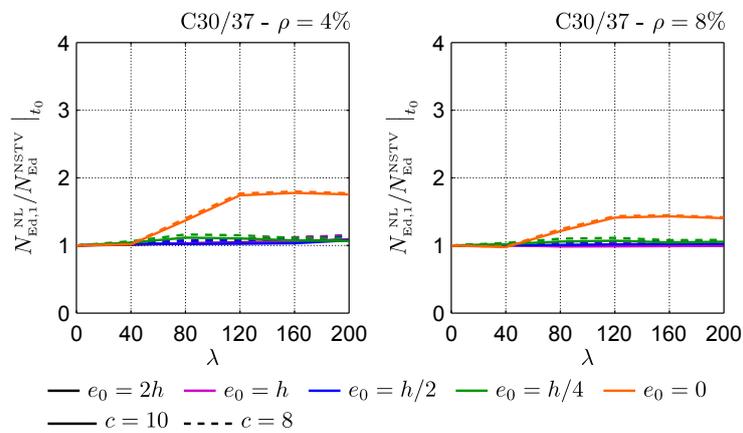


Abbildung 6.46: Vergleich -  $N_{Ed,1}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE4 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

Folgendes kann grundsätzlich beobachtet werden:

- Wie beim NKV wird auch das NSTV mit wachsender Schlankheit sicherer.
- Die Abweichungen auf der sicheren Seite nehmen mit wachsendem Bewehrungsgrad stark ab.
- Der Bewehrungsgrad hat einen hohen Einfluss auf das Verfahren, da die Steiner Anteile der Bewehrung in voller Größe in die Biegesteifigkeit einfließen.
- Mit wachsender Betongüte nimmt der Einfluss der Bewehrung geringfügig ab.

Das Nennsteifigkeitsverfahren berücksichtigt im  $c_0$ -Beiwert die Momentenverteilung nach Theorie I. Ordnung. Das Verfahren ist hinsichtlich variierender  $c_0$ -Beiwerte etwas unempfindlicher als das Nennkrümmungsverfahren.

### Vergleich der Bemessungsnormalkraft $N_{Ed,2}$ der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren ohne Berücksichtigung des Kriechens

Ähnlich wie beim Nennkrümmungsverfahren zeigt auch das Nennsteifigkeitsverfahren beim Vergleich mit der Bemessungsnormalkraft  $N_{Ed,2}$  Unterbemessungen. Im Unterschied zum NKV sind diese jedoch über weitere Bereiche von Schlankheit und Lastausmitte erkennbar und liegen in der Größenordnung von 5-10 %. Speziell bei den Rechteckquerschnitten RE2-C30/37- $\rho_s = 4\%$  und den rundum bewehrten Querschnitten RE4 sind diese besonders hoch. Die Abbildungen 6.47 bis 6.50 verdeutlichen dies.

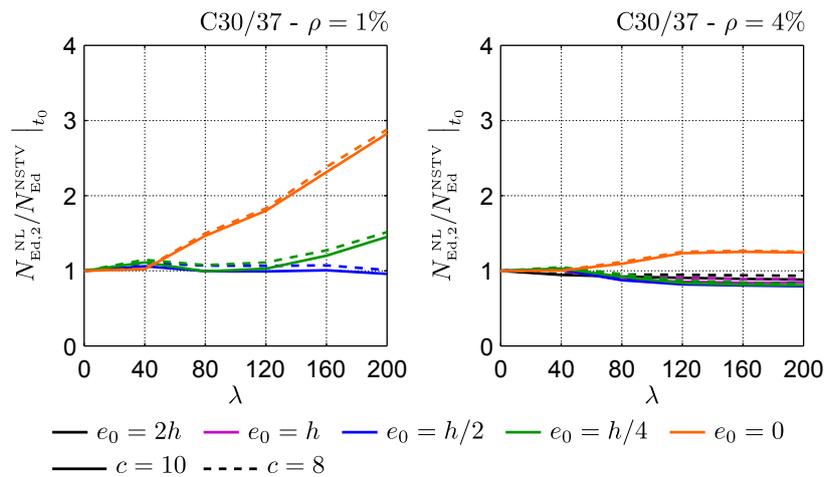


Abbildung 6.47: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

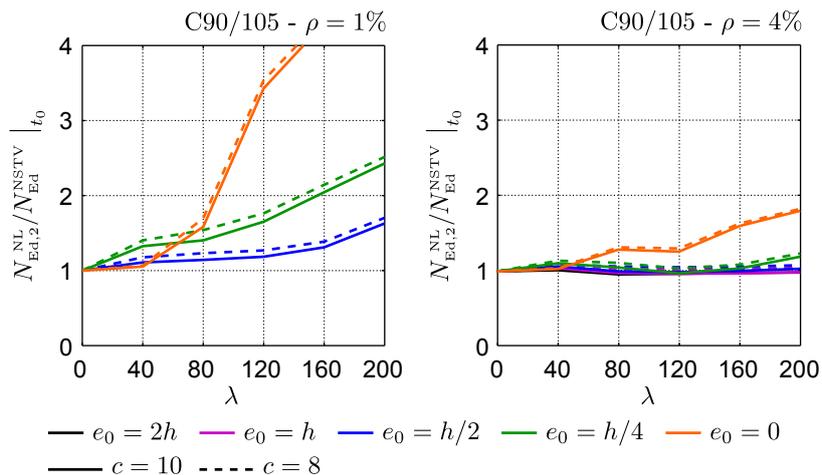


Abbildung 6.48: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren, ohne Berücksichtigung des Kriechens (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

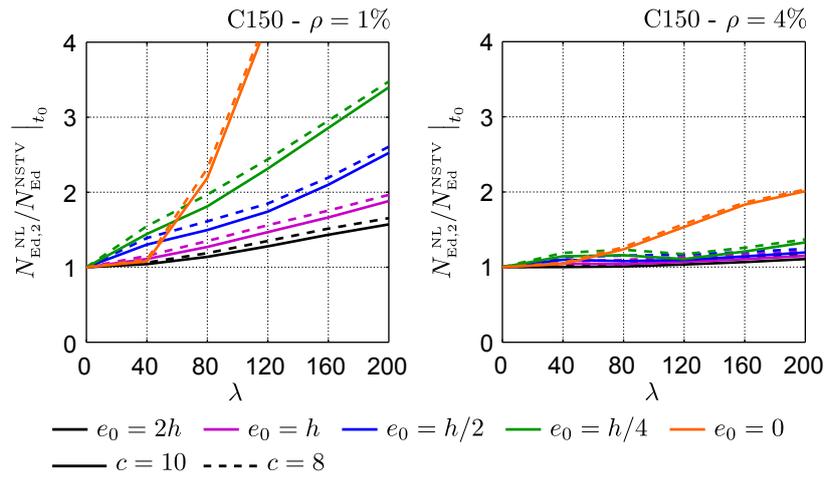


Abbildung 6.49: Vergleich -  $N_{\text{Ed},2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C150 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

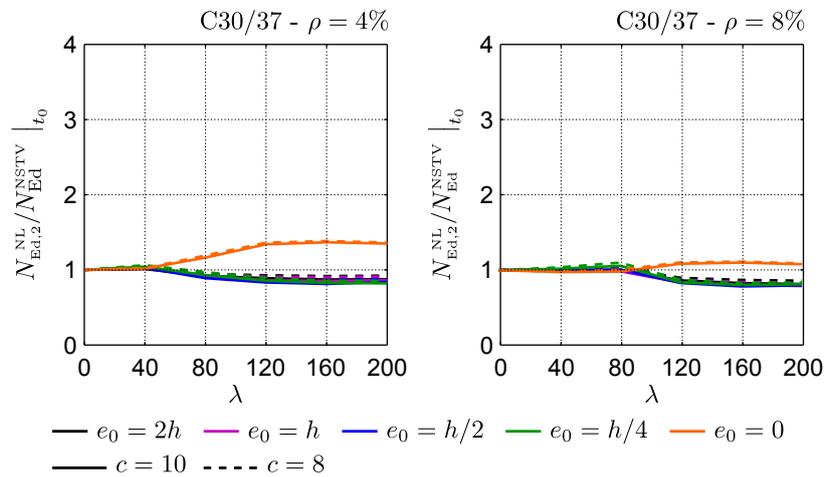


Abbildung 6.50: Vergleich -  $N_{\text{Ed},2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE4 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , ohne cr)

### Vergleich der Bemessungsnormalkraft $N_{Ed,2}$ der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren mit Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden

Kriechen wird konservativ durch die Reduktion des E-Moduls auf einen effektiven Wert  $E_{cm,eff} = E_{cm}/(1 + \varphi_{eff})$  berücksichtigt. Deshalb fällt der Vergleich des Nennsteifigkeitsverfahrens für den Zeitpunkt  $t_\infty$  mit Berücksichtigung des Kriechens nicht so drastisch aus wie für den Zeitpunkt  $t_0$ . Die Abbildungen 6.51 bis 6.54 zeigen eine maximale Unterbemessung von ca. 5 %. Die Abbildungen 6.53 und 6.54 zeigen, dass das Schwinden bei geringen Bewehrungsgraden mit steigender Schlankheit durchaus zu einer Überschätzung der Bemessungstraglast mit dem Nennsteifigkeitsverfahren führen kann.

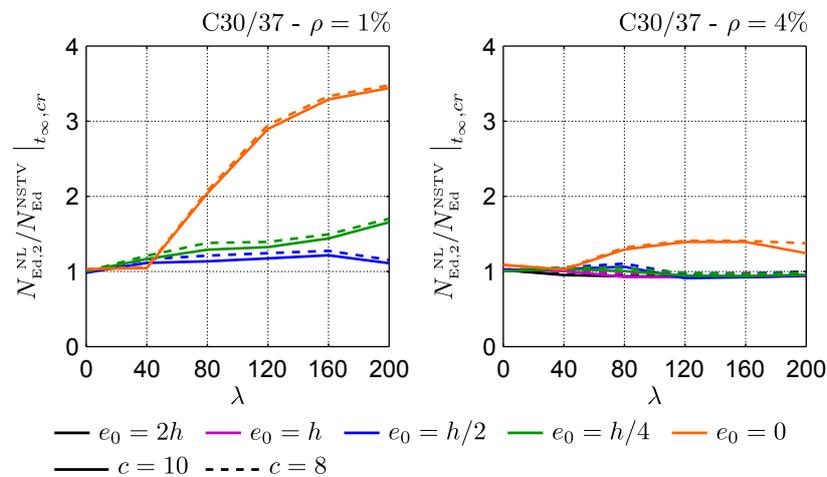


Abbildung 6.51: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr)

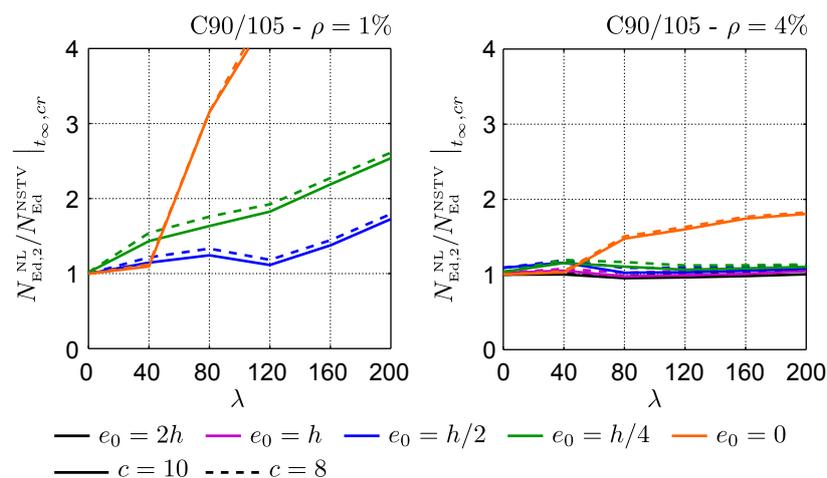


Abbildung 6.52: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr)

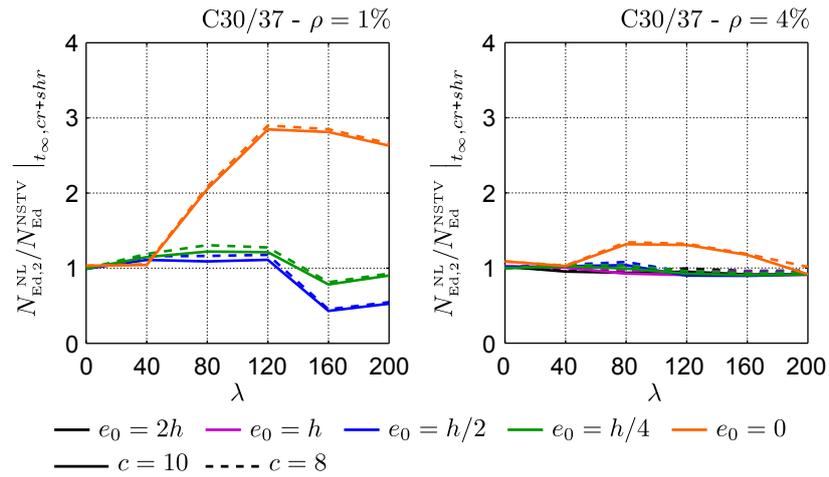


Abbildung 6.53: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C30/37 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr und shr)

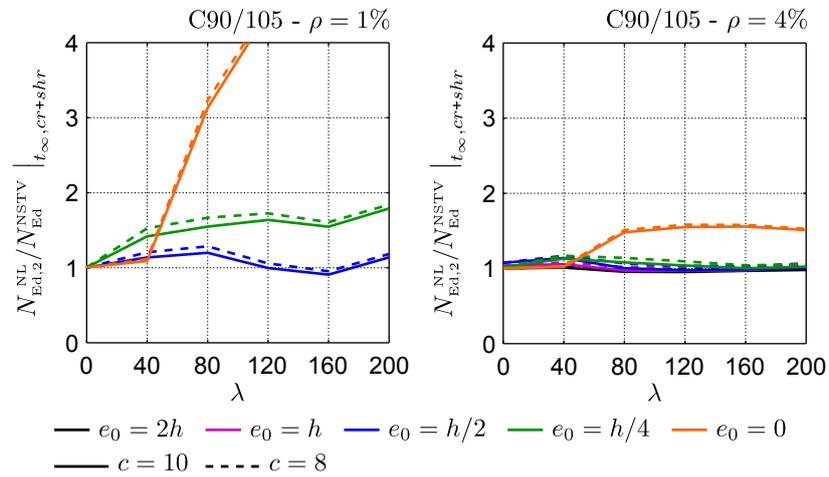


Abbildung 6.54: Vergleich -  $N_{Ed,2}$  der nichtlinearen Berechnung mit dem Nennsteifigkeitsverfahren (RE2 - C90/105 - konstante Lastausmitte  $e_0$ , mit cr und shr)

#### 6.4.4 Fazit der Parameterstudie

##### **Auswirkungen verschiedener Berechnungsansätze auf die Ergebnisse nichtlinearer Berechnungen**

Der Ansatz, Kriechen mit der Methode effektiver Steifigkeiten zu berücksichtigen, ist konservativ. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt an seiner Einfachheit. Im Vergleich zur Zeitschrittmethode, die Kriechen durch beliebig feine Intervalle berücksichtigt, liefert der Ansatz der gestreckten Arbeitslinie deutlich geringere Traglasten. Schwinden kann im Gegensatz zum Kriechen nur durch die Zeitschrittmethode realitätsnah berücksichtigt werden. Speziell bei Systemen mit vorwiegender Druckbeanspruchung können die Eigenspannungen aus Schwinden durch die Druckkräfte überdrückt werden. Werden bei solchen Systemen die Schwinddehnungen vom Beginn des Lastpfades weg in voller Größe berücksichtigt, führt dies zu einem zu frühen Aufreißen. Dies beeinflusst nicht nur die Rechenstabilität, sondern führt auch zu verhältnismäßig geringen Traglasten.

##### **Vergleich des Nennkrümmungs- und Nennsteifigkeitsverfahrens mit der nichtlinearen Berechnung**

Die beiden vereinfachten Bemessungsverfahren nach der ON-EN1992-1-1 (2011) liefern, verglichen mit den Ergebnissen nichtlinearer Berechnungen, über ein breites Anwendungsspektrum akzeptable Ergebnisse. In Anbetracht der getroffenen Vereinfachungen und der grundsätzlichen Komplexität stabilitätsgefährdeter Bauteile sind die Verfahren als sehr brauchbar einzuschätzen.

Ein grundsätzlicher Mangel besteht hauptsächlich beim Vergleich dieser Verfahren mit der in der ON-B1992-1-1 (2011) enthaltenen Forderung, dass die nichtlinear ermittelte Bemessungstraglast mindestens um 30 % gesteigert werden können muss, bevor ein mögliches Stabilitätsversagen eintritt ( $N_{Ed,2}$ ). Die Beurteilung, wie weit das Stabilitätsversagen vom Bemessungszustand entfernt ist, kann mit den vereinfachten Bemessungsverfahren der ON-EN1992-1-1 (2011) nicht getroffen werden. Eine derartige Implementation ist für Handrechnungen auch nur schwer möglich. Ein Ansatz wäre, die Bemessungsverfahren auf Mittelwertniveau zu führen und anschließend um einen globalen Sicherheitsbeiwert zu reduzieren. Diese Vorgehensweise entspricht im Wesentlichen jener einer allgemeinen nichtlinearen Bemessung, womit der Berechnungsaufwand steigt. Der globale Teilsicherheitsbeiwert müsste so gewählt werden, dass ein Mindestwert der Versagenswahrscheinlichkeit erreicht wird. Hierfür sind umfangreiche probabilistische Studien notwendig.

Im Zuge der Parameterstudie wurden auch über die Stablänge variable Lastausmitten untersucht. Die Ansätze der vereinfachten Bemessungsverfahren zeigen hinsichtlich variabler Lastausmitten keine signifikanten Schwächen. Deshalb werden sie in dieser Arbeit nicht präsentiert.

Die vereinfachten Bemessungsverfahren berücksichtigen nur Kriechen. Für Schwinden gibt es keinen Berechnungsansatz. Die Auswertung der Parameterstudie zeigt, dass der Kriechansatz konservativ ist und dadurch auch für weite Bereiche die Auswirkungen des Schwindens abdeckt. Trotzdem gibt es Berechnungsfälle, bei denen Schwinden einen enormen Einfluss auf die Tragfähigkeit und somit auch auf die Bemessungslast hat. In der Parameterstudie gelten die Lastausmitten sowohl für die ständige als auch für die veränderliche Last. Dies trifft in der Baupraxis nicht immer zu und kann ein möglicher Grund für den Ausgang der Ergebnisse sein. Trotzdem sollte gerade bei hochschlanken Bauteilen auf solche Phänomene geachtet werden.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Tragverhalten von normalkraftbeanspruchten Bauteilen wird maßgeblich von den Verformungen bestimmt. Die Qualität numerischer Verformungsberechnungen ist neben der ausreichend genauen Beschreibung der Werkstoffeigenschaften auch vom Grad der Modellierung von Querschnitts- und Systemberechnungen abhängig. Das Kapitel 2 widmet sich der Grundlage jeder Berechnung, der Beschreibung der Stoffgesetze. Hierbei wird das Druck- und Zugverhalten konventioneller normalfester Betongüten gleichermaßen behandelt, wie jenes moderner ultrahochfester Betone. Aufgrund des spröden Materialverhaltens hochfester Betone werden diese in der Regel mit Fasern bewehrt. Der Einfluss von Fasern auf das Zugtragverhalten wird daher ebenfalls beschrieben, wobei einem mechanisch hergeleitetem Modell aus der Literatur der Vorzug gegeben wird. Zur Werkstoffcharakterisierung zählt auch die Beschreibung der Ursachen und der Größenordnung von Kriechen und Schwinden. Ergänzend sind die Materialeigenschaften üblicher Bewehrungs- und Spannstähle im Bauwesen angefügt, die nichtlinearen Berechnungen und Bemessungsaufgaben zu Grunde gelegt werden.

Aufgrund der kleinen Zugfestigkeit von Beton treten bei einem gezogenen Stahlbetonzugstab die ersten Risse schon bei geringen Lasten auf. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Zugtragfähigkeit durch die Bewehrung bestimmt wird. Das Last-Verformungs-Verhalten des gezogenen Stahlbetonstabes ist über den gesamten Traglastbereich wesentlich steifer als jenes der eingelegten Bewehrungsstäbe alleine. Zu diesem Verhalten trägt der Verbund zwischen Stahl und Beton bei, durch welchen die mittlere Stahldehnung zwischen Rissen immer kleiner als im Riss ist. Zusätzlich nimmt der über den Riss übertragbare Betonzugkraftanteil allmählich mit zunehmender Rissbreite ab. Dieses Verhalten wird als Zugversteifung bzw. Tension-Stiffening bezeichnet. Üblicherweise erfolgt die Modellierung des Tension-Stiffenings über die Modifikation der Stahl- bzw. Betonarbeitslinie auf Zug. Beide Modelle sind zwar einfach zu entwickeln, haben aber den Nachteil, dass die Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe nicht realitätsnah beschrieben wird. Dies kann bei druckbeanspruchten Bauteilen, wo die Rissbreiten im gerissenen Zustand durch die Normalkraft klein gehalten werden zu ungünstigen Ergebnissen führen. Aus diesem Grund wird in Kapitel 3 ein eigener Ansatz vorgestellt, bei dem die Arbeitslinien von Stahl und Beton an einem Modellzugstab unter Einhaltung des Kräftegleichgewichts und der Verformungskompatibilität modifiziert werden. Hierbei kann die Fasertragwirkung leicht berücksichtigt werden. Versuchsnachrechnungen von Zugstäben in Form von Kraft-Dehnungs-Beziehungen und Biegeversuchen in Form von Momenten-Krümmungs-Beziehungen zeigen, dass das neue Modell in der Lage ist die Zugversteifung wirklichkeitsgetreu zu beschreiben. Es zeigt sich, dass für rundum bewehrte Querschnitte und insbesondere für Kreis- und Ringquerschnitte noch Forschungsbedarf besteht. Denn über die Beurteilung der Sekundärrisskraft und der bremsenden Wirkung der außerhalb der effektiven Betonfläche befindlichen Bewehrung bezüglich des Aufreißens des Querschnitts gibt es bisher nur wenige Analysen. Dringender Forschungsbedarf besteht in der Untersuchung der mittleren Rissabstände faserbewehrter Zugstäbe mit und ohne Stabstahlbewehrung zur Umrechnung von Spannungs-Rissöffnungs- in Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Hier sind in aktuellen Veröffentlichungen nur sehr grobe Werte bzw. Ansätze verfügbar.

Jede Verformungsberechnung am Bauteil greift auf Querschnittsberechnungen zurück. In Kapitel 4 werden einfache mechanische Kenngrößen, wie zum Beispiel der Schwerpunkt oder das Trägheitsmoment genutzt, um den Satz von Green zur Flächenintegration vorzustellen. Mit dieser Methode kann die Berechnung des Flächeninhaltes eines Gebietes allein durch die Beschreibung der Umrandung erfolgen. Weiter wird gezeigt, wie diese elegante Vorgehensweise auch zur numerischen Spannungsintegration herangezogen werden kann. Die Auswirkungen von Kriechen und Schwinden auf die kinematischen Kenngrößen des Querschnitts werden hier ebenfalls diskutiert. Zunächst werden zwei bekannte Modelle, nämlich das Modell von Trost und die Methode effektiver Steifigkeiten vorgestellt. Das Modell von Trost ist für die allgemeine nichtlineare Berechnung leider nicht anwendbar, da es linear elastisches Materialverhalten voraussetzt. Mit dem Ansatz effektiver Steifigkeiten können die Auswirkungen von Kriechen auf die Verformungen von biegebeanspruchten Bauteilen schnell und einfach nachvollziehbar ermittelt werden. Das Verfahren ist zur zeitabhängigen Berechnung von Stützen jedoch nur bedingt brauchbar, da die Verformungen durch den Ansatz effektiver Steifigkeiten stets zu groß errechnet werden. Deswegen wurde im Zuge dieser Arbeit ein Modell zur Berücksichtigung zeitlicher Effekte auf Basis von Zeitschritten entwickelt. Der durch die Einwirkung erzeugte Dehnungszustand (charakterisierende Dehnungen) wird hierbei in einen plastischen, kriechfähigen und spannungswirksamen Anteil aufgespalten und nach jedem Zeitschritt gespeichert. Diese Vorgehensweise hat den großen Vorteil, dass die kinematischen Zustandsgrößen, Spannungen und Steifigkeiten zu jedem Zeitpunkt realitätsnah quantifizierbar sind. Die teilweise Spannungsrelaxation bewehrter Querschnitte während des Kriechens wird hierbei automatisch erfasst.

Der Aufbau und die Berechnung von Stabwerken mit dem Weggrößenverfahren wird in Kapitel 5 erläutert. Hierbei wird gezeigt, wie sich die Zeitschrittmethode in die Systemberechnung einbinden lässt. Versuchsnachrechnungen am Ende dieses Kapitels bestätigen die Eignung der Zeitschrittmethode für nichtlineare Berechnungen. Bisher wurde in den Algorithmus der Zeitschrittmethode keine Last- und Baugeschichte implementiert. Durch Erweiterung der Programmabläufe zur Berücksichtigung einer umfangreichen Last- und Baugeschichte ergeben sich zahlreiche zusätzliche Anwendungsmöglichkeiten. Hier könnte das Verfahren zur Berechnung von Verformungen und Spannkraftverlusten beim Freivorbau- oder Taktschiebeverfahren vorgespannter Betonsegmente im Brückenbau eingesetzt werden. Ebenso könnten mit diesem Verfahren Berechnungen an nachträglich ergänzten Bauteilen durchgeführt werden.

In der Ingenieurpraxis werden neben leistungsstarken, nichtlinearen Berechnungsalgorithmen auch einfache Berechnungsmodelle gebraucht. Diese sollten nach Möglichkeit auch ohne Computer anwendbar sein und vor allem schnell und mit wenig Rechenschritten zu guten Ergebnissen führen. Solche Modelle finden bei der Bemessung und der Vorbemessung Verwendung. Sie werden auch häufig benutzt, um die Ergebnisse nichtlinearer Berechnungen zu beurteilen. Besonders letzteres führt sehr oft zu Verwirrungen, da sich nicht selten große Unterschiede zwischen nichtlinearer und vereinfachter Bemessung ergeben.

Das Kapitel 6 befasst sich mit der Problematik der Stützenbemessung. Zunächst erfolgt eine Einführung in die komplexe Thematik der nichtlinearen Bemessung und gängiger Sicherheitsformate. Anschließend werden die in den aktuellen Normungen angeführten Bemessungsverfahren für druckbeanspruchte Bauteile (Nennkrümmungs- und Nennsteifigkeitsverfahren) beschrieben und hergeleitet. Eine breit gefächerte Parameterstudie mit variierenden Betongüten, Bewehrungsgraden, Vorspannungen, Lastausmitten und Schlankheiten bietet die Grundlage zum Vergleich und der Beurteilung unterschiedlicher Berechnungsansätze und Bemessungsverfahren. Zusätzlich können die Einflüsse der variierten Parameter auf die Traglast quantifiziert werden. Die nichtlinearen Berechnungen wurden unter Berücksichtigung des Kriechens sowohl mit der Methode

---

effektiver Steifigkeiten als auch mit der Zeitschrittmethod durchgeföhrt. Die Berechnungen mit Zeitschritten erfolgten hierbei mit einer im Zuge dieser Arbeit in MATLAB<sup>®</sup> programmierten Berechnungsroutine.

Die Ergebnisse der Zeitschrittmethod zeigen, dass die Tragföhigkeit durch das Kriechen um bis zu 20 % reduziert wird, wobei der Kriecheinfluss mit steigender Schlankheit zunimmt. Mit anwachsender Lastausmitte nimmt der Traglastverlust durch das Kriechen ab, da der zeitliche Verformungszuwachs gerissener Bauteile hauptsöhlich durch das Kriechen der Druckzone bestimmt wird. Erstaunlich ist, dass die Traglast von Stützen durch das Schwinden um bis zu 50 % abnimmt. Dies tritt besonders bei erhöhten Lastausmitten, niedrigen Bewehrungsgraden und großen Schlankheiten auf. Hier reichen die durch das Schwinden hervorgerufenen Eigenzugspannungen aus, um die Rissbildung und damit auch die Steifigkeitsabnahme signifikant zu beschleunigen.

Die Parameterstudie zeigt, dass die mit der Methode effektiver Steifigkeiten berechneten Traglasten um bis zu 30 % geringer sind, als jene die mit der Zeitschrittmethod ermittelt wurden. Die Abweichungen nehmen hierbei mit ansteigender Schlankheit zu.

Der Vergleich der vereinfachten Bemessungsverfahren (Nennkrümmungs- und Nennsteifigkeitsverfahren) mit der nichtlinearen Bemessungen zeigt, dass die einfachen Methoden im für das Bauwesen relevanten Anwendungsbereich durchaus brauchbare Ergebnisse erzielen. Es ist erkennbar, dass das Nennkrümmungsverfahren mit abnehmender Lastexzentrizität und zunehmender Schlankheit eine zunehmende Sicherheit liefert. Dies begründet sich in den Annahmen und Vereinfachungen des Verfahrens. Im Schlankheitsbereich von  $\lambda = 40$  bis  $\lambda = 100$  und mäßiger Lastausmitte sind beim Nennkrümmungsverfahren im Vergleich zu den Ergebnissen einer allgemeinen nichtlinearen Bemessung leichte Defizite zu erkennen. Das Nennsteifigkeitsverfahren zeigt vor allem bei steigender Schlankheit hochbewehrter Stützen leichte Unterbemessungen. Die Berücksichtigung des Kriechens zeigt hierbei keine signifikante Verschlechterung der vereinfachten Bemessungsverfahren. Wird neben Kriechen auch das Schwinden in den Vergleich miteinbezogen, können die Bemessungstraglasten der vereinfachten Verfahren bis zu 50 % auf der unsicheren Seite liegen. Das Verhalten kann vor allem bei schwach bewehrten Stützen mit großen Schlankheiten ( $\lambda \geq 160$ ) und Lastausmitten in der Größenordnung der halben Querschnittshöhe beobachtet werden.

Die festgestellten Defizite sind in den meisten Fällen auf die Forderung des 30 %-igen Mindestsicherheitsabstandes der Bemessungsnormalkraft zum Stabilitätsversagen bei der nichtlinearen Bemessung nach der ON-EN1992-1-1 (2011) zurückzuführen. Diese Beurteilung kann mit den vereinfachten Bemessungsverfahren des Eurocode 2 (ON-EN1992-1-1 (2011)) nicht erfolgen. Bei der Bewertung der Ergebnisse sollten nicht nur die vereinfachten Bemessungsverfahren, sondern auch die Ansätze und Forderungen bei nichtlinearen Berechnungen kritisch hinterfragt werden. Das in der ON-EN1992-1-1 (2011) geforderte Sicherheitsniveau von 30 % zum Stabilitätsversagen gibt keinerlei Auskunft über die tatsächliche Versagenswahrscheinlichkeit, die nur mit probabilistischen Verfahren bestimmt werden kann. Hier besteht noch Forschungsbedarf.

Mit den Ergebnissen der Parameterstudie können auch Maßnahmen zur Steigerung der Tragföhigkeit beziffert werden. Unter Beibehaltung der Schlankheit kann die Erhöhung der Betongüte, die Vergrößerung des Bewehrungsgrades, zusätzliche Vorspannung oder eine Kombination aller Maßnahmen zielföhrend sein. Im Kapitel 6 werden diese Möglichkeiten diskutiert. Besonders interessant erscheint die Maßnahme der Vorspannung zur Erhöhung der Tragföhigkeit. Fertigteilstützen werden für die Belastungszustände während des Transports und der Montage in der Regel vorgespannt. Diese Vorspannung wird aber kaum zur Erhöhung der Tragföhigkeit

angerechnet. Es kann gezeigt werden, dass die Traglasten von Stützen durch das Vorspannen gesteigert werden können.

In einer Bemessung sollten der Spannkraftverlust und die Vorverformung infolge Vorspannung jedoch keinesfalls außer Acht gelassen werden. In eigenen Versuchen wurde festgestellt, dass beträchtliche Vorspannkraftverluste (bis ca. 30 %), vor allem in Kombination mit Wärmebehandlungen, auftreten können. Zusätzlich können kleine Abweichungen der Spannglieder von der Soll-Lage bei Stützen mit kleinen Querschnittshöhen und großen Schlankheiten zu beachtlichen Vorverformungen führen.

Den Abschluss der Arbeit bilden eigene Versuche. Der Anhang A beinhaltet die Dokumentation, Auswertung und Nachrechnung von Versuchen an 15 Probekörpern mit einer Schlankheit von  $\lambda = 29$  und 27 Stützen mit Schlankheiten zwischen  $\lambda = 90$  und  $\lambda = 180$ . Alle Probekörper wurden aus UHPC hergestellt. Die Prüfungen an den Versuchskörpern mit der Schlankheit  $\lambda = 29$  erfolgten mit unterschiedlichen Lastausmitten. Die Kenntnis der Bruchmomente zu unterschiedlichen Drucknormalkraftniveaus erlaubt den Rückschluss auf die Bauteilfestigkeit des Betons. Von den 27 schlanken Stützen wurden 19 Probekörper mit gleicher Lastausmitte geprüft. Die Lastexzentrizität betrug 90 % der Kernweite der kleineren Querschnittsabmessung und war über die Stützenlänge konstant. Hierbei wurden drei unterschiedliche Schlankheiten ( $\lambda = 100$ ,  $\lambda = 150$  und  $\lambda = 180$ ) mit jeweils drei unterschiedlichen Vorspannkraften ( $N_p = 0$  kN,  $N_p = 400$  kN und  $N_p = 800$  kN) geprüft. Anhand dieser Versuche lässt sich der in Kapitel 6 theoretisch abgeleitete positive Einfluss der Vorspannung auf die Tragfähigkeit schlanker Stützen bestätigen. In einer weiteren Serie wurde das Tragverhalten von vorgespannten Stützen mit einer Schlankheit von  $\lambda = 150$  bei kleinen Lastausmitten geprüft. Die Lastexzentrizitäten waren hierbei sowohl über die Stützenlänge konstant, als auch veränderlich. Diese Versuche geben Aufschluss über die Sensibilität schlanker, planmäßig zentrisch beanspruchter Stützen gegenüber kleinen Abweichungen der Lastausmitte. Weiter wurden zwei Stützen mit einer Schlankheit von  $\lambda = 90$  und unterschiedlicher Vorspannung ( $N_p = 0$  kN und  $N_p = 800$  kN) unter Dauerbeanspruchung geprüft. Anschließend wurde die Kurzzeit-Tragfähigkeit bestimmt. Durch die Prüfung zusätzlicher Referenzprobekörper ohne Dauerbeanspruchung kann der Einfluss zeitlicher Belastung auf die Tragfähigkeit abgeleitet werden. Alle Versuche wurden mit den im Zuge dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnissen und abgeleiteten Modellen (Zugversteifungsmodell, Zeitschrittmethode) nachgerechnet. Die gute Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den Nachrechnungen bestätigt die Eignung der aufgestellten Modelle für die nichtlineare Berechnung von Betondruckstäben.

# Literaturverzeichnis

- AFGC, S. (2002). *Bétons fibrés á ultra-hautes performances. Recommandations provisoires. Documents scientifiques et techniques. Association Française de Génie Civil, Setra, Bagnaux Cedex, janvier 2002.* AFGC, Setra.
- Ahner, C. (2001). *Sicherheits- und Nachweiskonzept für die nichtlineare Tragwerksbemessung im Stahlbetonbau.* Dissertation, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Leipzig.
- Alvarez, M. (1998). *Einfluß des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton.* Dissertation, Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Andreatta, A. (2004). *Vereinfachtes nichtlineares Iterationsverfahren zur Ermittlung der resultierenden Bewehrung von Rahmenstielen aus Stahlbeton.* Dissertation, Universität Innsbruck, Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur.
- Bazant, Z. P. (1983). Crack Band Theory for Fracture of Concrete. *Materials and Structures*, 16, S. 155–177.
- Behloul, M. (1996). *Analyse et modélisation du comportement d'un matériau à matrice cimentaire fibrée á ultra hautes performances.* Dissertation, E.N.S. Cachan, France.
- Berger, J. (2012). *Betonbrücken ohne Abdichtung und Fahrbahnbelag.* Dissertation, Institut für Tragkonstruktionen - Betonbau, Technische Universität Wien.
- Busjaeger, D. und Quast, U. (1990). *Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft - DAfStb Heft 415.* Beuth Verlag.
- ÖBV (2008). *Richtlinie Faserbeton, Fassung Juli 2008.* Österreichische Bautechnikvereinigung.
- CEB-fib (1993). *Model Code for Concrete Structures 1990.* Thomas Telford.
- CEB-fib (2008). *Constitutive modelling of high strength/high performance concrete.* International Federation for Structural Concrete (fib).
- CEB-fib (2013). *Model Code for Concrete Structures 2010.* International Federation for Structural Concrete (fib).
- DAfStb (2003). *Erläuterungen zu DIN 1045-1 - DAfStb Heft 525.* Beuth Verlag.
- DBV (2001). *DBV-Merkblatt Stahlfaserbeton, Fassung Oktober 2001.* Deutscher Beton- und Bautechnik Berein E.V.
- DIN-EN1992-1-1 (2011). *DIN EN 1992-1-1 - Ausgabe: 2011-01 - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln für den Hochbau.* Deutsches Institut für Normung e.V.

- DIN-EN1992-1-1/NA (2011). *DIN EN 1992-1-1/NA - Ausgabe: 2011 - Nationaler Anhang - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln für den Hochbau*. Deutsches Institut für Normung e.V.
- DIN-V-ENV1991-1 (1992). *DIN V ENV 1991-1 - Ausgabe: 1995-12-01 - Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 1: Grundlagen der Tragwerksplanung*. Deutsches Institut für Normung e.V.
- DIN1045-1 (2008). *DIN 1045-1 - Ausgabe: August 2008 - Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung.
- Duda, H. (1991). *Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung - DAfStb Heft 419*. Beuth Verlag.
- Eibl, J. und Schmidt-Hurtienne, B. (1995). Grundlagen für ein neues Sicherheitskonzept. *Bau-technik, Jhg. 72, Heft 8*, S. 501–506.
- Empelmann, M. (1995). *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stabtragwerken aus Konstruktionsbeton unter besonderer Berücksichtigung von Betriebsbeanspruchungen*. IMB - Lehrstuhl und Institut für Massivbau, RWTH AACHEN, Heft 2.
- EN-12390-1 (2012). *ÖNORM EN 12390-1 - Ausgabe: 2012-11-01 - Prüfung von Festbeton - Teil 1: Form, Maße und andere Anforderungen für Probekörper und Formen*. Österreichisches Normungsinstitut.
- EN-12390-13 (2012). *ÖNORM EN 12390-13 - Ausgabe: 2012-05-15 - Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Druckbelastung (Sekantenmodul)*. Österreichisches Normungsinstitut.
- EN-12390-3 (2012). *ÖNORM EN 12390-3 - Ausgabe: 2012-04-01 - Prüfung von Festbeton - Teil 3: Druckfestigkeit von Probekörpern (konsolidierte Fassung)*. Österreichisches Normungsinstitut.
- Engeln-Müllges, G., Niederdrenk, K. und Wodicka, R. (2011). *Numerik-Algorithmen - Verfahren, Beispiele, Anwendungen - Zehnte, überarbeitete und erweiterte Auflage*. Springer-Verlag Berlin - Heidelberg.
- Faires, J. D. und Burden, R. L. (1994). *Numerische Methoden - Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg - Berlin - Oxford.
- Falkner, H. und Grunert, J.-P. (2011). *Beton-Kalender, Kapitel IX: Faserbeton*. Ernst und Sohn.
- Fehling, E., Schmidt, M., Walraven, J., Leutbecher, T. und Fröhlich, S. (2013). *Beton-Kalender, Kapitel IX: Ultrahochfester Beton UHPC*. Ernst und Sohn.
- Fingerloos, F. (2012). *Eurocode 2 für Deutschland: DIN EN 1992-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau mit Nationalem Anhang - Kommentierte und konsolidierte Fassung*. Ernst und Sohn.
- Foster, S. J. und Attard, M. M. (1995). *Ductility Of High Strength Concrete Columns (UNICIV Report No. R-344)*. Technical report, The University of New South Wales, Sydney 2052 - Australia.

- Freytag, B. und Santner, G. (2014). *Bemessung von Bauteilen aus faserbewehrtem UHPC -Zug, Druck, Biegung-, aus BETON GRAZ '14, 2. Grazer Betonkolloquium 25./26. September 2014, Nachhaltig Bauen mit Beton: Werkstoff und Konstruktion*. Verlag der Technischen Universität Graz.
- Fritsche, G. (1980). *Zusammenhang zwischen Dehnung, Krümmung und Durchbiegung des Biegebalkens aus Stahlbeton unter Erst- und Kurzzeitlast*. Dissertation, Universität Innsbruck.
- Goto, Y. (1971). Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars. *ACI-Journal*, V. 68, No. 4, p. 244–251.
- Grübl, P., Weigler, H. und Karl, S. (2001). *Beton - Arten, Herstellung und Eigenschaften*. Ernst und Sohn.
- Hartl, G. (1977). *Die Arbeitslinie Eingebetteter Stähle bei Erst- und Kurzzeitbelastung*. Dissertation, Universität Innsbruck.
- Hillerborg, A., Modéer, M. und Petersson, P.-E. (1976). Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cement and Concrete Research*, 6, S. 773–782.
- Hordijk, D. A. (1991). *Local Approach to Fatigue of Concrete*. Dissertation, Delft University Of Technology.
- Jaritz, G. (1988). *Ein Beitrag zum nichtlinearen Biegetragverhalten von Stahlbetonstabwerken*. Dissertation, Institut für Stahlbeton- und Massivbau - Technische Universität Graz.
- Jensen, D. C. und Shah, S. P. (1997). Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 123(1), S. 25–35.
- JSCE (2006). *Recommendations for Design and Construction of Ultra High Strength Fibre-Reinforced Concrete Structures - Draft, September 2006*. JSCE.
- Jungwirth, J. (2006). *Zum Tragverhalten von zugbeanspruchten Bauteilen aus Ultra-Hochleistungs-Faserbeton*. Dissertation, Faculté Environnement Naturel, Architectural et Construit, École Polytechnique Fédérale de Lasuagne.
- König, G., Pommering, D. und Tue, N. V. (1999). *Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrößenermittlung - DAfStb Heft 492*. Beuth Verlag.
- König, G. und Tue, N. V. (1996). *Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton - DAfStb Heft 466*. Beuth Verlag.
- Kordina, K. und Quast, U. (2001). *Beton-Kalender, Kapitel C: Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonbauteile nach DIN 1045-1, Unterkapitel II: Bemessung von schlanken Bauteilen für den durch Tragwerksverformungen beeinflussten Grenzzustand der Tragfähigkeit - Stabilitätsnachweis*. Ernst und Sohn.
- Kordina, K., Schubert, L. und Troitzsch, U. (2000). *Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung - DAfStb Heft 498*. Beuth Verlag.
- Kreller, H. (1990). *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung - DAfStb Heft 409*. Beuth Verlag.
- Krips, M. (1984). *Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton*. Dissertation, Fachbereich Konstruktiver Ingenieurbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

- Leutbecher, T. (2007). *Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC)*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Leutbecher, T. (2008). *Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC)*. kassel universitix press GmbH.
- Lin, Y.-Z. (2000). *Tragverhalten von Stahlfaserbeton - DAfStb Heft 494*. Beuth Verlag.
- Ma, J. (2010). *Faserfreier Ultrahochfester Beton - Entwicklung und Materialeigenschaften*. Dissertation, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Leipzig.
- ON-B1992-1-1 (2011). *ÖNORM B 1992-1-1 - Ausgabe: 2011-12-01 - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln für den Hochbau - Nationale Festlegungen zu ÖNORM EN 1992-1-1, nationale Erläuterungen und nationale Ergänzungen*. Österreichisches Normungsinstitut.
- ON-B4707 (2010). *ÖNORM B 4707 - Ausgabe: 2010-08-15 - Bewehrungsstahl - Anforderungen, Klassifizierung und Konformitätsnachweis*. Österreichisches Normungsinstitut.
- ON-EN1990 (2013). *ÖNORM EN 1990 - Ausgabe: 2013-03-15 - Eurocode - Grundlagen der Tragwerksplanung*. Österreichisches Normungsinstitut.
- ON-EN1992-1-1 (2011). *ÖNORM EN 1992-1-1 - Ausgabe: 2011-12-01 - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln für den Hochbau*. Österreichisches Normungsinstitut.
- Pfeiffer, U. (2004). *Die nichtlineare Berechnung ebener Rahmen aus Stahl- oder Spannbeton mit Berücksichtigung der durch das Aufreißen bedingten Achsendehnung*. Cuvillier Verlag Göttingen.
- Pflüger, A. (1975). *Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 3. Auflage*. Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York.
- Pfyl, T. (2003). *Tragverhalten von Stahlfaserbeton*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Quast, U. (1981). Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone. *Beton- und Stahlbetonbau, Jhg. 76, Heft 10*, S. 2–250.
- Quast, U. (2000). Zur Kritik an der Stützenbemessung. *Beton- und Stahlbetonbau, Jhg. 95, Heft 5*, S. 305–311.
- Quast, U. (2004). *Beton-Kalender, Kapitel XII: Stützenbemessung*. Ernst und Sohn.
- Quast, U. (2010). Zur Auswahl eines geeigneten Verfahrens für die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug. *Bautechnik, Jhg. 87, Heft 10*, S. 397–403.
- Ramu, P., Grenacher, M., Baumann, M. und Thürlimann, B. (1969). *Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast, Bericht 6418-1*. Institut für Baustatik ETH-Zürich.
- Reichel, M. M. (2010). *Dünnwandige Segmentfertigteilmassbauweisen im Brückenbau aus gefasertem Ultrahochleistungsbeton (UHFB) - Tragverhalten, Bemessung und Konstruktion*. Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwissenschaften, Institut für Betonbau, Technische Universität Graz.

- Rommel, G. (1994). *Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton - DAfStb Heft 444*. Beuth Verlag.
- Rüsch, H. und Jungwirth, D. (1976). *Stahlbeton - Spannbeton, Band 2: Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke*. Werner-Verlag, Düsseldorf.
- Rust, W. (2011). *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen - Kontakt, Geometrie, Material*. Vieweg und Teubner.
- Schlaich, J. und Schober, H. (1985). *Versuche zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone von Stahlbetonröhren - DAfStb Heft 363*. Beuth Verlag.
- Schmidt, M. (2008). *Ultra-Hochleistungsbeton - Ausgangsstoffe, Eigenschaften und Leistungsfähigkeit aus Ultra-Hochfester Beton - Planung und Bau der ersten Brücke mit UHPC in Europa, Tagungsbeiträge zu den 3. Kasseler Baustoff- und Massivbautagungen*. kassel universitx press GmbH.
- Schmidt, M., Bunje, K., Dehn, F., Droll, K., Fehling, E., Greiner, S., Horvath, J., Kleen, E., Müller, C., Reineck, K.-H., Schachinger, I., Teichmann, T., Teutsch, M., Thiel, R. und Tue, N. V. (2008). *Sachstandsbericht Ultrahochfester Beton*. Beuth Verlag.
- Schönlinn, K. (1988). Ermittlung der Orientierung, Menge und Verteilung der Fasern in faserbewehrtem Beton. *Beton- und Stahlbetonbau, Jhg. 83, Heft 6*, S. 168–171.
- Schwarz, H. R. (1988). *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner Stuttgart.
- Schwennicke, A. (1983). *Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen*. Technische Universität Berlin - Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Heft 3.
- Sigrist, V. (1995). *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*. Dissertation, Institut für Baustatik und Konstruktion Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Six, M. (2001). *Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau*. Dissertation, Institut für Massivbau - Technische Universität Darmstadt.
- Sparowitz, L. (1974). *Über das Tragverhalten und die Bemessung von Stahlbetondruckstäben*. Dissertation, Institut für Stahlbeton- und Massivbau - Technische Hochschule Graz.
- Strohbusch, J. (2010). *Beitrag zur Verformungsberechnung im Stahlbetonbau mit kritischer Bewertung bestehender Regelungen*. Dissertation, Fachbereich Bauingenieurwesen der Universität Siegen.
- Trost, H., Cordes, H. und Abele, G. (1978). *Kriech- und Relaxationsversuche an sehr altem Beton - DAfStb Heft 295*. Beuth Verlag.
- Tue, N. V. (2010). Innovative ultra-high performance concrete products in practice - examples and recommendations for material applications in line with market demand. *Betonwerk und Fertigteiltechnik, Heft 2*, S. 92–93.
- Werkle, H. (2008). *Finite Elemente in der Baustatik*. Vieweg und Teubner.
- Wischers, G. und Lusche, M. (1972). Einfluß der inneren Spannungsverteilung auf das Tragverhalten von druckbeanspruchtem Normal- und Leichtbeton. *Betontechnische Berichte*, S. 135–163.

Zerna, W. (1986). Näherungsweise Berechnung des Alterungsbeiwerts für das Betonkriechen. *Beton und Stahlbetonbau, Jhg. 81, Heft 10*, S. 275–278.

Zilch, K. und Zehetmaier, G. (2009). *Bemessung im konstruktiven Betonbau - 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage*. Springer.

# A Versuchsdokumentation

Die Versuche wurden im Rahmen des FFG-Bridge-Projekts „Druckglieder aus UHPC - Proj.-Nr.: B1-824905“ mit dem Kooperationspartner SW Umwelttechnik durchgeführt. Die Prüfungen hatten das Ziel, das einachsige Tragverhalten hochschlanker Stützen zu untersuchen. Das Hauptaugenmerk lag hierbei an der Bestimmung des Einflusses der Vorspannkraft auf die Tragfähigkeit schlanker UHPC-Stützen. Auch die Auswirkungen unterschiedlicher Lastexzentrizitäten wurden analysiert, wobei diese stets kleiner als die Kernweite des Querschnitts waren. Weiter erfolgte die Untersuchung des Verhaltens bei Dauerbeanspruchung an zwei Stützen bei gleicher Lastanordnung, wobei ein Probekörper vorgespannt war. Ergänzend wurde die Bauteiltragfähigkeit an Prüfkörpern sehr niedriger Schlankheit ( $\lambda = 29$ ) bei variierender Lastexzentrizität bestimmt. Um mit einer geringen Anzahl an Prüfkörpern ein Maximum an uneingeschränkt vergleichbaren Ergebnissen zu erzielen, wurden alle Versuchskörper mit gleichen Querschnittsabmessungen, gleicher Festbetoneigenschaft und identer Bewehrungsausführung hergestellt. Die Zieldruckfestigkeit am wärmebehandelten Beton an einem Würfel mit 100 mm Seitenlänge wurde in Abstimmung mit dem Kooperationspartner SW-Umwelttechnik mit  $185 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Zum Einsatz kamen 2 Vol.-% Stahlfasern mit einer Faserschlankheit von  $l_f/\varnothing_f = 12.7/0.16 \text{ mm} = 79.4$ . Jeder Probekörper war symmetrisch mit acht 0.5" Litzen ( $\rho_s = 4.0 \%$ ) der Güte St1570/1770 bewehrt. Im Falle optionaler Vorspannung wurde diese zentrisch aufgebracht. Die Herstellung der Probekörper erfolgte in einem Fertigteilwerk in Lienz/Tirol. Unter Einbeziehung des Lochabstands der Spannankerplatten ergab sich die kleinste herstellbare Querschnittshöhe zu  $h_{QS} = 100 \text{ mm}$ . Durch die Prüfrahmehöhe war somit auch gleichzeitig die größtmögliche prüfbare Schlankheit von  $\lambda = 180$  festgelegt. Um den ungewollten Einfluss der Biegung um die starke Achse zu minimieren, wurde die Breite  $h_{QS}$  des Querschnitts mit 200 mm doppelt so groß wie die Höhe ausgeführt. Durch die vierfache Biegesteifigkeit im Zustand I in Querrichtung wird das Tragverhalten der Prüfkörper eindeutig durch die schwache Achse bestimmt. Die Abbildungen A.1 und A.2 zeigen die Prüfkörpergeometrie.

## A.1 Versuchsprogramm

Insgesamt konnten in drei Serien insgesamt 42 Versuchskörper mit Schlankheiten zwischen  $\lambda = 29$  und  $\lambda = 180$  geprüft werden. Als Übersicht dient die Tabelle A.1. Die Lagerung der Kopf und Fußpunkte wurde bei allen Versuchskörpern gelenkig ausgeführt. Der Versuchsaufbau im Prüfstand kann der Abbildung A.3 entnommen werden.

Die Beschreibung der Materialwiderstände bei unterschiedlichen Belastungskombinationen  $M$  und  $N$  mit untergeordnetem Einfluss der Verformungen auf die Schnittgrößen wurde an 15 Prüfkörpern mit einer Schlankheit von  $\lambda = 29$  geprüft (Serie 1 – Nullversuche). Drei der 15 Prüfkörper waren hierbei unbewehrt hergestellt. Sie wurden unter zentrischer Druckbelastung geprüft. Die Nullversuche dienten der Ermittlung der Differenzen zwischen Material- und Bauteilfestigkeiten. Hinweis: Die Probekörper mit der Schlankheit  $\lambda = 29$  tragen anstelle der richtigen Beschriftung 1-S29x-yy (Beschriftungslogik, siehe Abbildung A.7) irrtümlich die Bezeichnung 1-S26x-yy.

In der Serie 2 wurden 19 Stützen mit den Schlankheiten 100, 150 und 180 und Vorspannkraften von 0 kN, 400 kN und 800 kN geprüft. Hauptaugenmerk wurde bei dieser Prüferserie auf den Einfluss der Vorspannkraft auf die Tragfähigkeit in Abhängigkeit der Schlankheit gelegt. Die geplante Lastausmitte in dieser Serie war bei jedem Prüfkörper über die gesamte Stützenlänge konstant und bei allen Stützen gleich. Sie betrug 15 mm und entspricht 90 % der Kernweite des Querschnitts.

Die letzte Prüferserie (Serie 3) beinhaltet neben Traglastversuchen auch Kriechversuche. Die Prüfkörper zur Untersuchung der Auswirkungen von Dauerbeanspruchung wiesen eine Schlankheit von  $\lambda = 90$  auf und waren mit 0 kN und 800 kN vorgespannt. Bei den Traglastversuchen wurden die Auswirkungen einerseits reduzierter, jedoch über die Stütze konstanter, Lastexzentrizität und andererseits über die Länge veränderlicher Lastexzentrizität untersucht. Die Probekörper wiesen alle eine Schlankheit von  $\lambda = 150$  bei 800 kN Vorspannung auf.

Tabelle A.1: Versuchsprogramm

Serie	$l_{\text{sys}}^{\text{a}}$ [mm]	$\lambda$ [-]	Anzahl [Stk.]	$N_{\text{p}}^{\text{b}}$ [kN]	$e_{\text{ob}}/e_{\text{un}}^{\text{c}}$ [mm]	Anm. <sup>d</sup> -
1	840	29	3 <sup>e</sup>	0	0/0	TL-V
1	840	29	1	0	0/0	TL
1	840	29	2	0	3/3	TL
1	840	29	2	0	8/8	TL
1	840	29	2	0	13/13	TL
1	840	29	2	0	30/30	TL
1	840	29	2	0	50/50	TL
1	840	29	1	0	20/20	TL
2	2910	100	3	0	15/15	TL
2	2910	100	2	400	15/15	TL
2	2910	100	2	800	15/15	TL
2	4355	150	2	0	15/15	TL
2	4355	150	2	400	15/15	TL
2	4355	150	2	800	15/15	TL
2	5230	180	2	0	15/15	TL
2	5230	180	2	400	15/15	TL
2	5230	180	2	800	15/15	TL
3	2600	90	1	0	15/0	DL, TL
3	2600	90	1	800	15/0 <sup>f</sup>	DL, TL
3	2600	90	1	0	15/0	TL
3	2600	90	1	800	2/2	TL
3	4355	150	1	800	-6/-6	TL
3	4355	150	1	800	6/6	TL
3	4355	150	1	800	4/4	TL
3	4355	150	1	800	6/0	TL

<sup>a</sup>  $l_{\text{sys}}$  ... Sollwert der Systemlänge (Abstand Lager - Lager)

<sup>b</sup>  $N_{\text{p}}$  ... Sollwert der Vorspannkraft

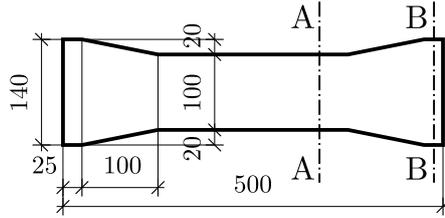
<sup>c</sup>  $e_{\text{ob}}/e_{\text{un}}$  ... Sollwert der Lastausmitte am Kopf bzw. Fuß

<sup>d</sup> TL ... Traglastversuch, DL ... Dauerlastversuch

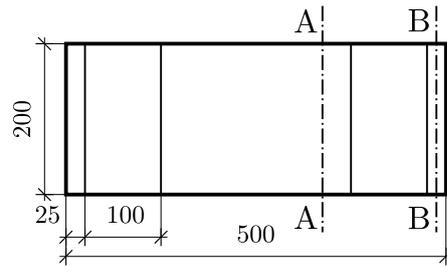
<sup>e</sup> unbewehrte Probekörper

<sup>f</sup> Lastausmitte im DL: 15/0, im TL: 2/0 (Sollwerte)

**Ansicht Schmalseite:**



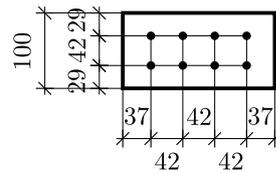
**Ansicht Breitseite:**



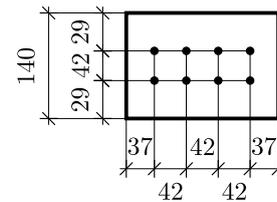
Angaben in mm

**Querschnitt:**

Schnitt A-A



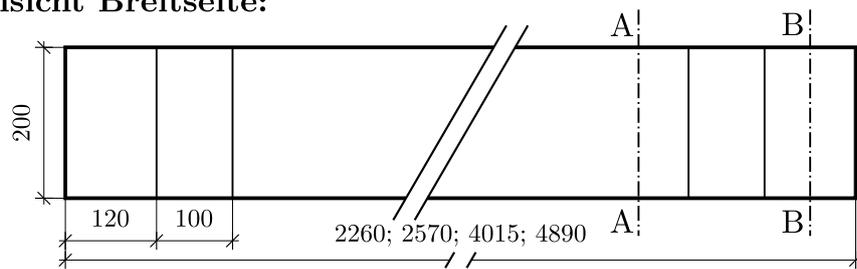
Schnitt B-B



Angaben in mm

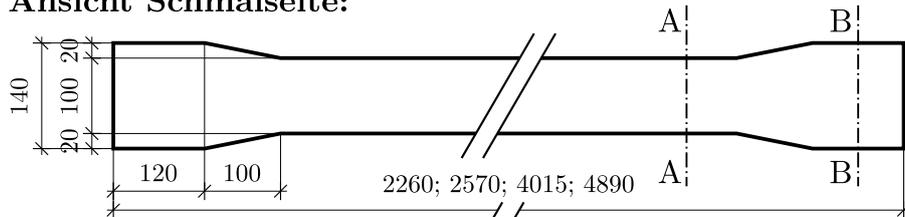
Abbildung A.1: Versuchskörperdimensionierung - Schlankheit 29 (Maßstab M=1:10)

**Ansicht Breitseite:**



Angaben in mm

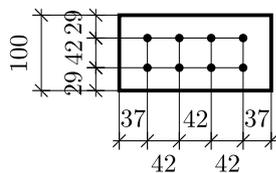
**Ansicht Schmalseite:**



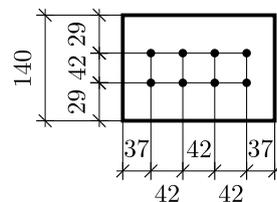
Angaben in mm

**Querschnitt:**

Schnitt A-A



Schnitt B-B



Angaben in mm

Abbildung A.2: Versuchskörperdimensionierung - Schlankheit 90, 100, 150 und 180 (Maßstab M=1:10)

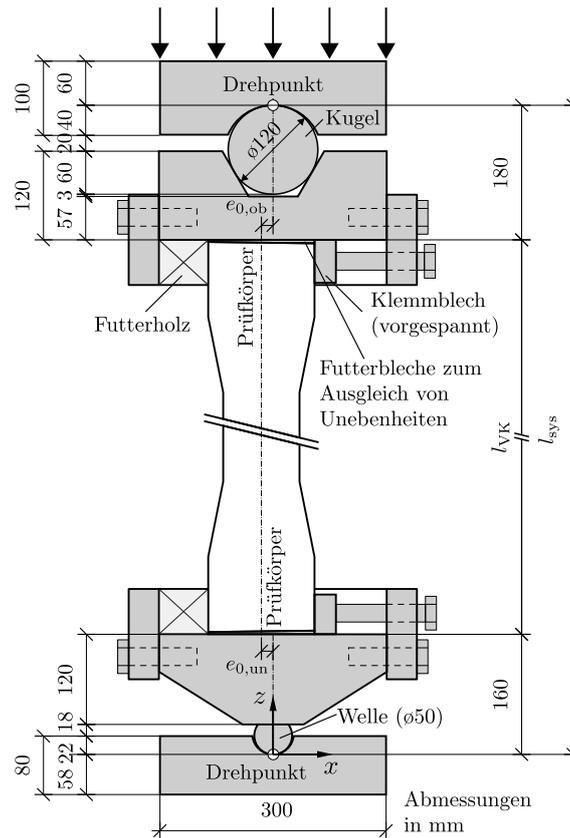


Abbildung A.3: Aufbau des Prüfstands

## A.2 Herstellung der Probekörper

Die Versuchskörper wurden an drei Betonierterminen mit insgesamt vier Mischen hergestellt. Alle vorgespannten Probekörper jeder Serie wurden an einem Betoniertermin produziert. Die Fertigung der Stützen der Serie 1 und der nicht vorgespannten Körper der Serie 2 erfolgte zeitgleich mit einer Mische. Um die vorgespannten Stützen der Serie 2 herzustellen wurden zwei, für die Probekörper der Serie 3 eine Mische benötigt. Die Vorspannung erfolgte im Spannbett. Hier standen zwei Spannbahnen mit jeweils 25 m nutzbarer Länge zur Verfügung. Die Versuchskörper wurden nach deren Herstellung sieben Tage verdunstungsgeschützt gelagert. Die optionale Vorspannkraft wurde nach sieben Tagen auf die Probekörper aufgebracht. Anschließend erfolgte eine dreitägige Wärmebehandlung mit Wasserdampf bei  $90^\circ\text{C}$ .

Beim Übertragen der Vorspannkraft wurden die Dehnungen der Litzen und jeweils eines Probekörpers jeder Spannlinie gemessen. Die Aufzeichnung der Spannstahldehnungen wurde an drei Randlitzen mit jeweils zwei DD1 Wegaufnehmer der Firma HBM (Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH) gemessen. Dadurch kann zusätzlich zur aufgetragenen Vorspannkraft auch auf die erzeugte Dehnungsebene rückgeschlossen werden. Die Dehnungen der Probekörper wurden wie zuvor erwähnt für jede Spannlinie an einem Probekörper ermittelt. Hierfür wurde ein DD1 Wegaufnehmer in der Schwerlinie der schwachen Achse positioniert. Die Messergebnisse sind den Abbildungen A.4 und A.5 zu entnehmen. Vor der Wärmebehandlung waren bei den Probekörpern der Serie 2 Stauchungen von  $-0.495\text{‰}$  bei  $N_p = 400\text{ kN}$  bzw.  $-0.9\text{‰}$  bei  $N_p = 800\text{ kN}$ .

und bei den Probekörpern der Serie 3  $-1.0 \text{ ‰}$  bei  $N_p = 800 \text{ kN}$  vorhanden.

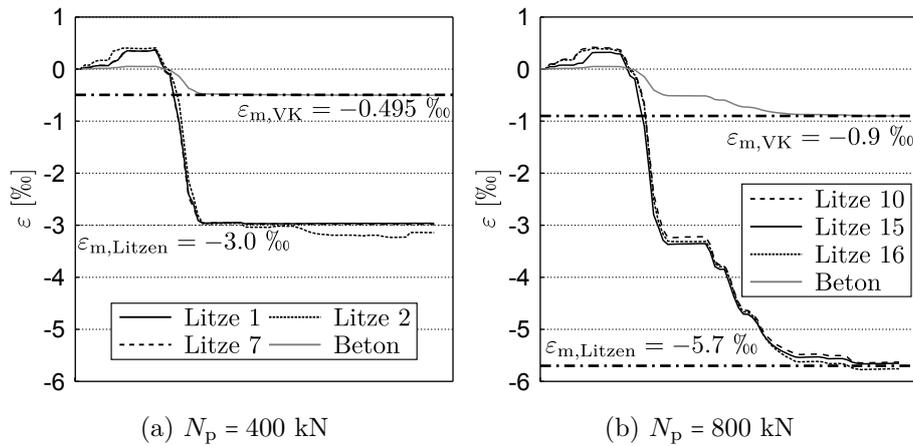


Abbildung A.4: Serie 2, Gemessener Dehnungsverlauf während der Spannkraftübertragung

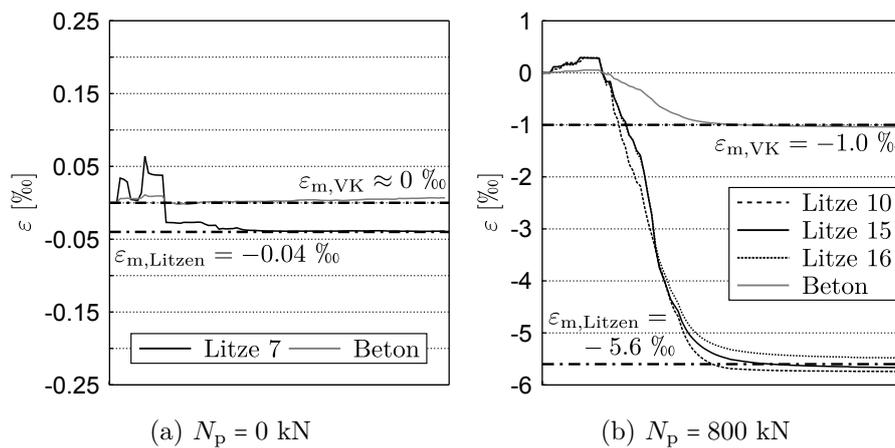


Abbildung A.5: Serie 3, Gemessener Dehnungsverlauf während der Spannkraftübertragung

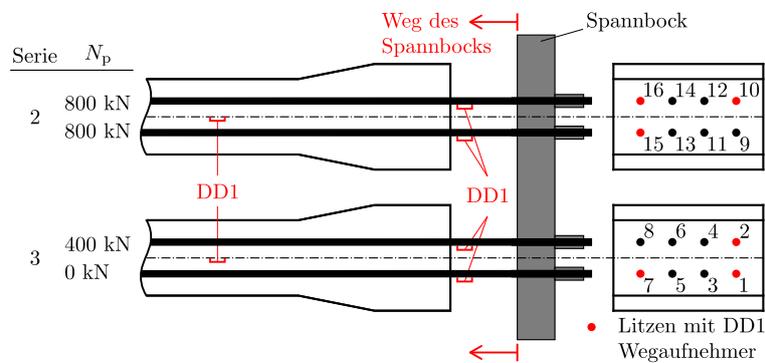


Abbildung A.6: Anordnung der Messtechnik

## A.3 Materialkennwerte

### A.3.1 Betonkennwerte

Mit begleitenden Materialprüfungen wurden kontinuierlich der E-Modul, die Zylinderdruck-, die Würfeldruck-, und die Biegezugfestigkeit bestimmt. Zur Anwendung kamen Zylinder mit den Abmessungen  $h/d = 200/100$  mm und Würfel mit einer Kantenlänge von 100 mm. Die Prüfungen erfolgten nach der EN-12390-1 (2012), EN-12390-3 (2012) bzw. EN-12390-13 (2012). Die Ermittlung der Biegezugfestigkeiten erfolgte über 4-Punkt-Biegeversuche an 150/150/700 mm Balken nach dem DBV-Merkblatt-Stahlfaserbeton (DBV (2001)). Die berechneten Mittelwerte aus jeweils drei Proben sind der Tabelle A.2 zu entnehmen. Die Zuordnung von Versuchskörper, Mischung und Festigkeitswerte kann über die Tabelle A.3 hergestellt werden.

Tabelle A.2: Ergebnisse begleitender Materialprüfungen am Beton

Mische	Alter <sup>a</sup>	Druckfestigkeit		E-Modul	Zugfestigkeit		
		$f_{cm,cube}$	$f_{cm,cyl}$	$E_{cm}$	$f_{eq,I}^b$	$f_{eq,II}^c$	$f_{cf0}^d$
[-]	[d]	← [N/mm <sup>2</sup> ] →					
M1	7	137.3	-	-	-	-	-
M1	19	176.5	-	-	-	-	-
M1	28	193.7	-	-	-	-	-
M1	28	-	198.5	52000	-	-	-
M1	55	-	198.9	51800	-	-	-
M1	69	-	193.5	50000	-	-	-
M1	61	-	-	-	14.6	14.9	6.3
M2	7	127.3	-	-	-	-	-
M2	19	176.0	-	-	-	-	-
M2	28	182.7	-	-	-	-	-
M2	69	-	180.3	49000	-	-	-
M2	179	-	177.1	50700	-	-	-
M2	175	-	-	-	12.7	10.5	5.3
M3	7	131.3	-	-	-	-	-
M3	14	183.5	-	-	-	-	-
M3	28	198.3	-	-	-	-	-
M3	8	-	168.9	49500	-	-	-
M3	27	-	193.5	49500	-	-	-
M3	42	-	198.0	52100	-	-	-
M3	166	-	190.8	52000	-	-	-
M3	48	-	-	-	14.7	14.1	6.3
M3	162	-	-	-	15.5	15.4	6.7
M4	7	134.8	-	-	-	-	-
M4	22	185.4	165.6	50200	-	-	-
M4	280	-	176.1	49600	-	-	-
M4	281	-	-	-	14.7	13.4	5.8

<sup>a</sup> alle Probekörper, älter als 7 Tage sind wärmebehandelt

<sup>a</sup> äquiv. Biegezugfestigkeit im Verformungsbereich I (Gebrauchstauglichkeit)

<sup>b</sup> äquiv. Biegezugfestigkeit im Verformungsbereich II (Tragfähigkeit)

<sup>c</sup> rechnerische Faserwirksamkeit nach Abschnitt 2.1.3

Tabelle A.3: Zuordnung der Probekörper zu den Mischungen

Probekörper <sup>a</sup>	Herstellung		Prüfung		Alter [d]
	Prüfart <sup>b</sup>		Mischung		
1S-26u-1 und 2	TL	06.06.2012	M3	11.07.2012	35
1S-26u-3	TL	06.06.2012	M3	12.07.2012	36
1S-26b-1	TL	06.06.2012	M3	12.07.2012	36
1S-26b-2	TL	06.06.2012	M3	13.07.2012	37
1S-26b-3 bis 7	TL	06.06.2012	M3	16.07.2012	40
1S-26b-8 bis 12	TL	06.06.2012	M3	17.07.2012	41
2S-100-P0-1	TL	06.06.2012	M3	23.07.2012	47
2S-100-P0-2	TL	06.06.2012	M3	25.07.2012	49
2S-100-P0-3	TL	06.06.2012	M3	25.07.2012	49
2S-100-P400-1	TL	24.05.2012	M1	26.07.2012	63
2S-100-P400-2	TL	24.05.2012	M1	26.07.2012	63
2S-100-P800-1	TL	24.05.2012	M1	27.07.2012	64
2S-100-P800-2	TL	24.05.2012	M1	27.07.2012	64
2S-150-P0-1	TL	06.06.2012	M3	31.07.2012	55
2S-150-P0-2	TL	06.06.2012	M3	01.08.2012	56
2S-150-P400-1	TL	24.05.2012	M1	01.08.2012	69
2S-150-P400-2	TL	24.05.2012	M1	02.08.2012	70
2S-150-P800-1	TL	24.05.2012	M1	02.08.2012	70
2S-150-P800-2	TL	24.05.2012	M1	03.08.2012	71
2S-180-P0-1	TL	06.06.2012	M3	20.11.2012	167
2S-180-P0-2	TL	24.05.2012	M3	14.11.2012	161
2S-180-P400-1	TL	24.05.2012	M2	15.11.2012	175
2S-180-P400-2	TL	24.05.2012	M2	16.11.2012	176
2S-180-P800-1	TL	24.05.2012	M2	19.11.2012	179
2S-180-P800-2	TL	24.05.2012	M2	19.11.2012	179
3S-90-P0-1	DL	28.11.2012	M4	20.12.2012	22
3S-90-P0-1	TL	28.11.2012	M4	04.07.2013	218
3S-90-P0-2	DL	28.11.2012	M4	20.12.2012	22
3S-90-P0-2	TL	28.11.2012	M4	08.07.2013	222
3S-90-P800-1	TL	28.11.2012	M4	09.07.2013	223
3S-90-P800-2	TL	28.11.2012	M4	09.07.2013	223
3S-150-P800-1	TL	28.11.2012	M4	11.07.2013	225
3S-150-P800-2	TL	28.11.2012	M4	29.08.2013	274
3S-150-P800-3	TL	28.11.2012	M4	05.09.2013	281
3S-150-P800-4	TL	28.11.2012	M4	05.09.2013	281

<sup>a</sup> Beschriftungslogik nach Abbildung A.7

<sup>b</sup> TL ... Traglast, DL ... Dauerlast

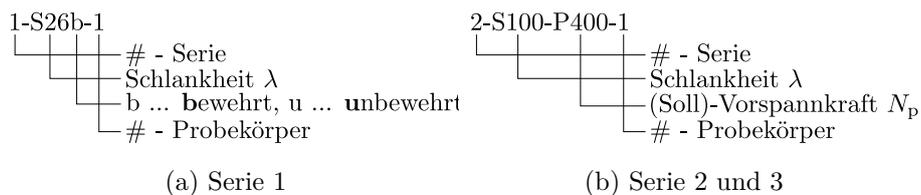


Abbildung A.7: Beschriftungslogik der Probekörper

### A.3.2 Kennwerte der Spannlitzen

Drei Proben der verbauten Litzen wurden bei der VOEST-ALPINE geprüft, die Ergebnisse können der Tabelle A.4 und der Abbildung A.8 entnommen werden. Es ist erkennbar, dass die verwendeten Spannlitzen bezüglich der erforderlichen Güte St1570/1770 eine große Überfestigkeit aufweisen.

Tabelle A.4: Ergebnis der Spannstahlprüfung

$A_p$ [mm] <sup>2</sup>	$E_p$	$R_m$	$R_{p,0.1}$	$R_{p,0.2}$
		← [N/mm <sup>2</sup> ] →		
100	199600	1949	1693	1742

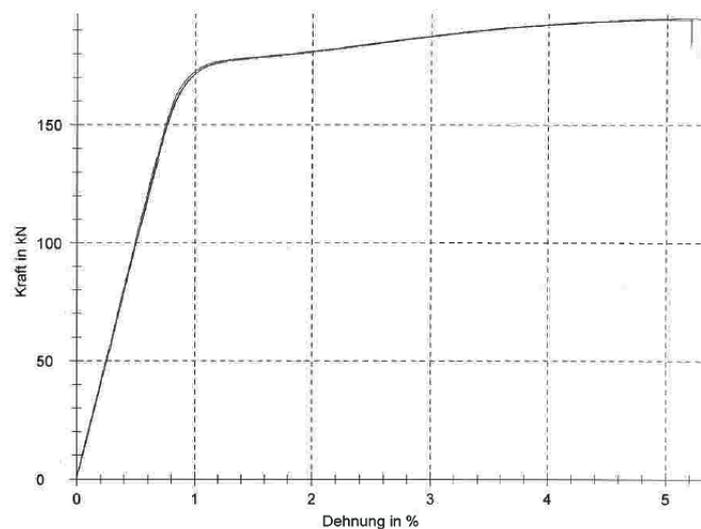


Abbildung A.8: Ergebnis der Spannstahlprüfung

## A.4 Messkonzept

### A.4.1 Prüfkörpervermessung

Alle Prüfkörper wurden vor der Versuchsdurchführung vermessen. Die Vermessung des Regelquerschnitts erfolgte bei der Serie 1 an drei und bei der Serie 2 und 3 an fünf Stellen. Bei den schlanken Stützen (Serie 2 und 3) wurde in diesen fünf Messpunkten auch die Imperfektion  $e_i$  der Stabachse bestimmt. Somit konnte jeder Versuchskörper so im Versuchsstand eingebaut werden, dass die Imperfektion in Richtung der künftigen Biegelinie zeigt. Die Messergebnisse sind den Tabellen A.5 bis A.8 zu entnehmen.

Fortführende Nachrechnungen basieren auf der Annahme, dass die gemessenen Vorverformungen nur aus einer exzentrisch liegenden Spannlitzen-Achse resultieren. Unter der Voraussetzung

konstanter Exzentrizität der Spannlitzen entlang der Stabachse kann die Vorverformung in Stabmitte nach folgender Gleichung bestimmt werden:

$$e_{i,l/2} = e_{i,m} = \frac{\kappa(t_\infty) \cdot l_{VK}^2}{8} \quad (\text{A.1})$$

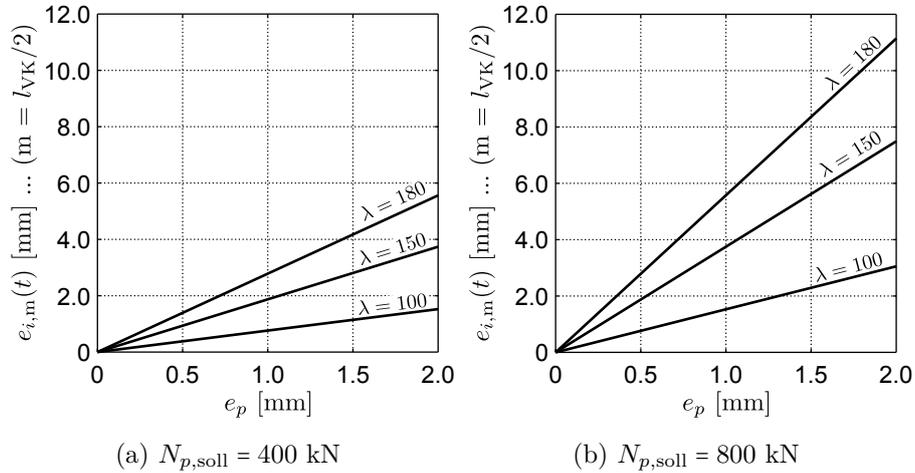


Abbildung A.9: Auswirkung der Exzentrizität der Spannbewehrung auf die Imperfektion

Tabelle A.5: Vermessung der Probekörper der Serie 1

Probekörper	Höhe $h$ des QS <sup>b</sup> [mm]	Breite $b$ des QS <sup>b</sup> [mm]
1S-26u-1	nicht gemessen	nicht gemessen
1S-26u-2	199,5/199,5/199,5	99,4/99,4/99,5
1S-26u-3	201,5/201,5/201,0	99,5/99,5/99,6
1S-26b-1	201,0/201,5/201,0	99,4/99,7/100,0
1S-26b-2	201,0/201,0/201,5	101,7/101,2/101,1
1S-26b-3	200,0/200,0/199,5	101,5/101,6/101,9
1S-26b-4	200,0/200,0/200,5	101,1/100,6/100,7
1S-26b-5	202,0/201,5/201,0	100,2/100,2/100,4
1S-26b-6	201,5/201,5/201,0	100,5/100,4/100,0
1S-26b-7	200,0/200,5/201,0	100,9/100,8/101,0
1S-26b-8	203,0/202,0/202,5	100,7/101,1/101,2
1S-26b-9	198,5/199,5/199,0	101,4/101,6/101,1
1S-26b-10	200,5/201,0/200,5	100,9/100,6/100,4
1S-26b-11	200,0/200,0/200,5	100,0/99,9/100,0
1S-26b-12	200,0/201,0/200,5	100,2/99,8/99,6

<sup>b</sup> Werte im obersten, mittleren und untersten Schnitt des Regelbereichs

Die Bestimmung der Krümmung nach der Wärmebehandlung ( $\kappa(t_\infty)$ ) erfolgte mit der Zeitschrittmethode nach Unterabschnitt 4.6.3 für  $\varphi = 1.6$  und  $\varepsilon_{cs} = -0.4$  ‰. Der E-Modul wurde hierbei mit  $E_{cm} = 45000$  N/mm<sup>2</sup> angesetzt. Aus der Abbildung A.9 kann der Einfluss einer konstanten exzentrischen Spanngliedführung auf die Vorverformung in Abhängigkeit der Schlankheit abgelesen werden. Spannkraftverluste infolge Kriechen, Schwinden und Relaxation sind hierbei

berücksichtigt. Der Rückschluss auf die mögliche vorhandene Exzentrizität  $e_p$  der Spannlitzen erfolgte durch Vergleich der rechnerischen und gemessenen Vorverformung in Stabmitte. Den Berechnungen wurden die Werte der Tabelle A.6 zu Grunde gelegt.

Tabelle A.6: Rechnerische Spannglied-Exzentrizitäten für die Nachrechnung

VK	$e_{i,l/2}^{\text{gem.}}$ [mm]	$e_p^{\text{rechn.}}$ [mm]
2S-100-P400-1	0.2	vernachlässigbar
2S-100-P800-2	1.0	0.7
2S-150-P400-2	0.6	vernachlässigbar <sup>a</sup>
2S-180-P400-1	4.0	1.4
2S-180-P400-2	4.0	1.4
2S-180-P800-1	6.0	1.1
2S-180-P800-2	9.0	1.6
3S-150-P800-1	9.0	2.5
3S-150-P800-2	4.5	1.2
3S-150-P800-3	3.0	0.8
3S-150-P800-4	5.0	1.4

<sup>a</sup> Imperfektion nur in Stützenmitte vorhanden (siehe Tabelle A.7).

### Messkonzept der Serie 1

Bei der Prüfung der Bauteilfestigkeiten wurden folgende Werte gemessen: die Verformung  $w_x$  in den Messebenen 0,  $l_{\text{sys}}/2$  und  $l_{\text{sys}}$ , die Dehnung  $\varepsilon_{\text{ct}}$  (Druckrand), die Dehnung  $\varepsilon_{\text{cc}}$  (Zugrand), die Kolbenkraft  $N$ , sowie der Kolbenweg in  $z$ -Richtung (siehe Abbildung A.10). Die Dehnungen  $\varepsilon_{\text{cc}}$  und  $\varepsilon_{\text{ct}}$  wurden mit DD1 Wegaufnehmer gemessen. Hierbei wurde die Längenänderung bezüglich einer Referenzlänge von 100 mm aufgezeichnet. Die DD1 Wegaufnehmer wurden nicht bis zum Bruch am Prüfkörper belassen, um keine Zerstörung dieser Messgeräte zu riskieren. Für die Messung der Verformung wurden induktive Wegaufnehmer in Kombination mit einem Feder-Seil-System eingesetzt. Mit Hilfe dieser Messkonfiguration ist es möglich zu beliebigen Laststufen die Verformung  $w_2$  zu ermitteln. In Kombination mit den gemessenen Dehnungen kann auch die Biegesteifigkeit bei jeder Laststufe bestimmt werden. Zudem ist auch der Rückschluss auf die tatsächlich vorhandene Exzentrizität möglich.

### Messkonzept der Serie 2 und 3 - Traglastversuche

Bei der Prüfung der schlanken Stützen wurden im Gegensatz zur Serie 1 sieben Messebenen betrachtet. Sie teilen die Versuchskörper in sechs gleiche Abschnitte. In jeder Messebene erfolgte eine Messung der Verformung  $w_x$  und der Dehnungen  $\varepsilon_{\text{ct}}$  und  $\varepsilon_{\text{cc}}$ . Die Indices „cc“ bzw. „ct“ stehen für den Druckrand bzw. Zugrand. Die Dehnungen wurden mit DD1 Wegaufnehmern mit einer Basislänge von 100 mm gemessen. Verformungen wurden mittels induktiver Wegaufnehmer aufgezeichnet. Zusätzlich wurden die Pressenkraft, der Kolbenweg in  $z$ -Richtung, als auch die

Tabelle A.7: Vermessung der Probekörper der Serie 2

Probekörper	Länge $l_{VK}$ <sup>a</sup> [mm]	Höhe $h$ des Querschnitts <sup>b</sup> [mm]	Breite $b$ des Querschnitts <sup>b</sup> [mm]	Imperfektion <sup>b</sup> [mm]
2S-100-P0-1	2565.0	nicht gemessen	nicht gemessen	nicht gemessen
2S-100-P0-2	2566.5	200.0/201.3/202.3/201.0/200.0	99.8/100.3/99.2/99.2/100.3	- ... keine messbar
2S-100-P0-3	2567.0	200.3/201.8/201.8/201.8/202.0	98.6/98.6/98.0/98.3/99.5	-
2S-100-P400-1	2562.8	201.3/202.8/202.5/202.5/201.8	100.6/98.8/100.0/99.6/99.8	0.4/0.5/0.2/0.0/0.0
2S-100-P400-2	2564.0	200.0/200.5/201.8/200.5/200.0	100.0/100.7/99.4/99.5/100.5	-
2S-100-P800-1	2559.0	200.3/201.3/201.0/200.5/200.6	99.2/98.9/99.1/98.4/99.6	-
2S-100-P800-2	2561.5	200.0/200.0/200.0/199.0/199.0	98.4/98.3/98.3/98.3/99.1	1.0/1.3/1.0/2.0/1.0
2S-150-P0-1	4008.5	202.8/202.5/202.5/202.1/201.8	100.1/100.1/99.3/100.0/100.6	-
2S-150-P0-2	4008.5	202.5/202.5/202.5/202.2/202.1	98.3/97.7/97.4/97.6/98.3	-
2S-150-P400-1	4005.0	201.5/201.5/201.5/201.5/201.1	100.8/101.2/101.5/101.4/101.2	-
2S-150-P400-2	4005.0	200.7/201.0/201.0/201.3/201.5	99.8/100.2/100.2/100.3/100.4	0.0/0.0/0.6/0.0/0.0
2S-150-P800-1	4005.0	202.7/201.9/201.2/200.5/200.0	99.3/99.0/98.7/98.5/98.3	-
2S-150-P800-2	4000.0	202.0/201.0/201.0/201.3/201.4	99.6/99.4/98.9/98.7/98.8	-
2S-180-P0-1	4879.0	200.4/200.6/201.8/202.0/200.8	98.5/99.0/100.0/101.0/100.5	-
2S-180-P0-2	4882.5	200.0/200.6/200.9/200.7/200.4	99.5/99.0/98.7/99.4/100.1	-
2S-180-P400-1	4879.0	201.2/200.0/200.0/200.0/201.1	99.6/100.0/99.6/101.2/100.9	1.0/2.0/4.0/3.0/1.0
2S-180-P400-2	4880.0	200.4/200.9/201.6/201.3/200.7	99.7/99.9/99.8/100.6/101.0	0.8/2.5/4.1/3.9/2.5
2S-180-P800-1	4874.5	200.6/200.2/201.7/200.5/199.7	99.0/98.7/99.7/100.1/100.0	0.0/4.0/6.0/4.0/0.0
2S-180-P800-2	4876.0	201.6/201.2/201.7/200.3/199.8	99.2/99.0/98.8/100.4/100.5	0.0/7.0/9.0/5.5/0.0

<sup>a</sup> Länge des Probekörpers<sup>b</sup> Werte entsprechen den Messpunkten ② bis ⑥ - siehe Abbildung A.11

Tabelle A.8: Vermessung der Probekörper der Serie 3

Probekörper	Länge $l_{VK}$ <sup>a</sup> [mm]	Höhe $h$ des Querschnitts <sup>b</sup> [mm]	Breite $b$ des Querschnitts <sup>b</sup> [mm]	Imperfektion <sup>b</sup> [mm]
3S-90-P0-1	2595.0	201.0/201.3/201.5/201.5/201.5	99.0/99.2/99.4/99.6/99.6	- ... keine messbar
3S-90-P0-2	2595.0	201.0/201.5/202.0/202.0/202.0	99.2/98.5/98.0/99.3/98.6	-
3S-90-P800-1	2595.0	201.5/201.5/201.5/201.5/201.0	98.0/98.5/98.9/98.4/99.0	-
3S-90-P800-2	2590.0	202.0/201.7/197.7/153.6/201.0	99.0/98.5/98/97.9/98.1	-
3S-150-P800-1	4002.5	201.0/202.0/201.2/201.2/201.4	100.0/99.5/98.8/98.9/99.1	5,8/8,1/9,2/8,8/7,3
3S-150-P800-2	3997.5	199.8/199.3/199.8/199.9/199.7	100.1/100.0/98.6/98.2/98.1	1,0/2,0/4,5/3,2/2,0
3S-150-P800-3	3997.5	199.8/199.2/197.5/198.2/199.7	97.7/98.4/97.6/97.3/97.2	0,7/1,3/3,0/3,0/0,8
3S-150-P800-4	3990.0	198.9/199.3/200.0/200.9/201.4	100.1/100.5/98.9/99.1/99.9	2,5/4,0/5,3/2,5/0,8

<sup>a</sup> Länge des Probekörpers<sup>b</sup> Werte entsprechen den Messpunkten ② bis ⑥ - siehe Abbildung A.11

Krümmung am Stützenfuß gemessen. Die Messkonfiguration ist in der Abbildung A.11 abgebildet. Mit Hilfe der sieben Messebenen kann die Biegelinie zu jeder Laststufe angegeben werden. Weiter ist es möglich durch die Messung der Dehnungen die Krümmungen  $\kappa = (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc})/h_{QS}$  anzugeben. Unter Berücksichtigung des vorherrschenden Biegemomentes  $M = N \cdot (e_1 + e_i + w_2)$  und der Krümmung  $\kappa$  kann bei Bedarf zu jeder Laststufe die Biegesteifigkeit  $EI = M/\kappa$  bestimmt werden. Die in aus den Versuchen abgeleiteten Krümmungen sind in dieser Versuchsdokumentation nicht abgebildet.

### Messkonzept der Serie 3 - Dauerlastversuche

In der Serie 3 wurden zwei Stützen unter Dauerbeanspruchung geprüft, wobei die Versuchskörper 105 Tage mit einer ausmittigen Kraft von 290 kN belastet wurden. Hierbei wurden die Pressenkraft, die Krümmungen der Stirnflächen, die Dehnungen  $\varepsilon_{ct}$  und  $\varepsilon_{cc}$  in Stützenmitte als auch die Verformungen  $w_x$  in den Viertelpunkten gemessen (siehe Abbildung A.12). Die Verformungsmessung erfolgte mittels induktiver Wegaufnehmer, die Dehnungsaufzeichnung mittels DD1 Wegaufnehmer (Basislänge: 100 mm).

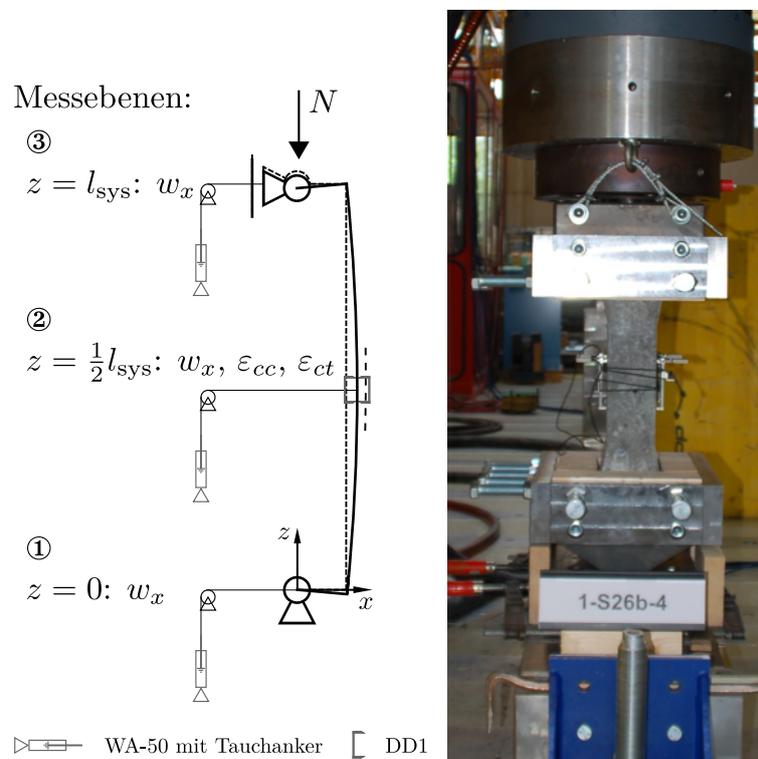


Abbildung A.10: Messaufbau Serie 1

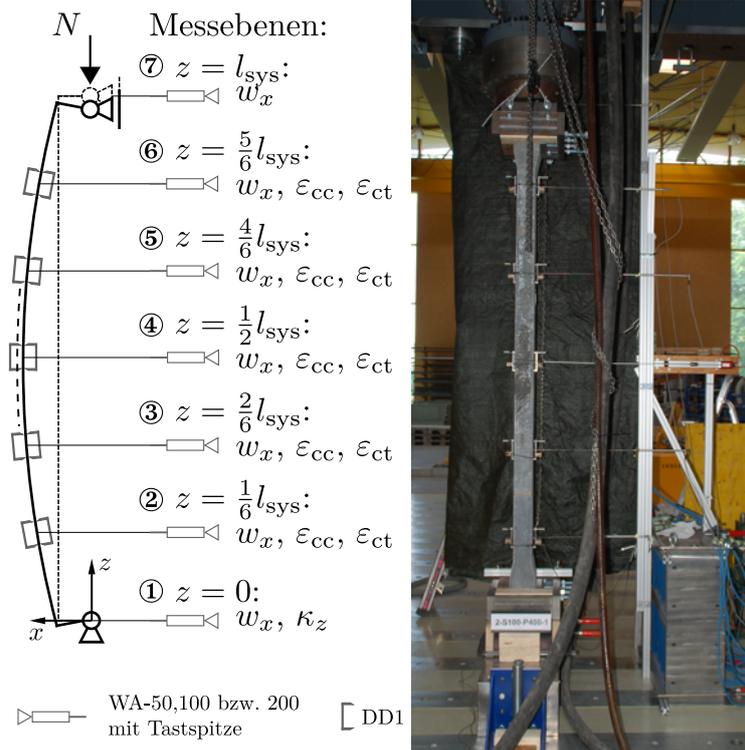


Abbildung A.11: Messaufbau Serie 2 und 3

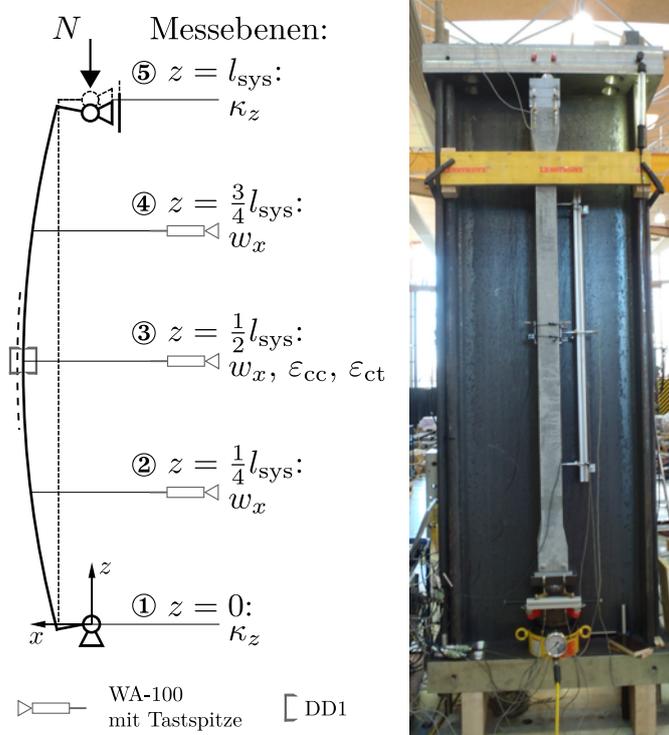


Abbildung A.12: Messaufbau Serie 3, Dauerlastversuch

## A.5 Grundlagen der Nachrechnung

Die Nachrechnungen erfolgten mit Stab2dNL (Pfeiffer (2004)) und dem im Zuge dieser Arbeit programmierten Algorithmus (siehe Kapitel 4 und 5). Beide Programme sind in der Lage sowohl die materielle als auch die geometrische Nichtlinearität bei der Berechnung zu erfassen. Mit der MATLAB<sup>®</sup>-Routine können zeitabhängige Effekte zusätzlich durch Zeitschritte realitätsnah erfasst werden.

### A.5.1 Aus den begleitenden Materialprüfungen abgeleitete Arbeitslinien für die Berechnung

Für die Nachrechnung der Versuche wurden die zu den Versuchskörpern zugehörigen Kennwerte der Druckfestigkeit und des E-Moduls nach der Tabelle A.2 verwendet. Die Ableitung der rechnerischen Druckarbeitslinie erfolgte hierbei über den Ansatz von Ma (2010) (vgl. Unterabschnitt 2.1.1). Der Nachbruchbereich wurde auf Grundlage begleitender Materialprüfungen wie in der Abbildung A.14a dargestellt festgelegt.

Für alle Versuchsnachrechnungen wurde die gleiche Zugarbeitslinie verwendet. Im ersten Schritt wurde die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung des Faserbetons nach dem mechanischen Modell von Leutbecher (2007) (vgl. Abschnitt 2.1.3) bestimmt. Dieser Verlauf wurde für weitergehende Berechnungen stark vereinfacht, indem die Entfestigungskurve linear mit einer Maximalspannung von  $7.2 \text{ N/mm}^2$  bei der Rissbreite  $w = 0 \text{ mm}$  und der keiner übertragbaren Zugspannung bei  $w = l_f/4 = 12.7/4 = 3.175 \text{ mm}$  angesetzt wurde (siehe Abbildung A.13). Aufbauend auf dem vereinfachten Spannungs-Rissöffnungs-Verlauf des Faserbetons erfolgte die Umrechnung in die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die bewehrten Versuchskörper mit dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Zugversteifungsmodell (Abbildung A.14b). Die wichtigsten Parameter zur Bestimmung der Zugarbeitslinie können der Tabelle A.9 entnommen werden.

Tabelle A.9: Angesetzte Kennwerte zur Bestimmung der Zugarbeitslinie

Kennwerte für Modell nach Leutbecher (2007), Abschnitt 2.1.3:		
$E_{cm} = 52000 \text{ N/mm}^2$	$E_f = 200000 \text{ N/mm}^2$	$f_{ctm} = 5.0 \text{ N/mm}^2$
$G_f = 60 \text{ N/m}$	$\tau_f = 10 \text{ N/mm}^2$	$l_f/\varnothing_f = 12.7/0.16 \text{ mm}$
$\eta = 0.45$	$g = 1.0$	
Kennwerte für Zugversteifungsmodell nach Abschnitt 3.4:		
$\nu = 10 \%$	$L_{sys} = 5.0 \text{ m}$	$s_{rm} = 26.0 \text{ mm}$

Den Nachrechnungen ist die Stahlarbeitslinie nach den Ergebnissen der Materialprüfung (Abbildung A.8) zu Grunde gelegt. Zur Berücksichtigung der Zugversteifung wurde zusätzlich zur Betonarbeitslinie auch die Stahlarbeitslinie auf Zug modifiziert (siehe Abbildung A.15).

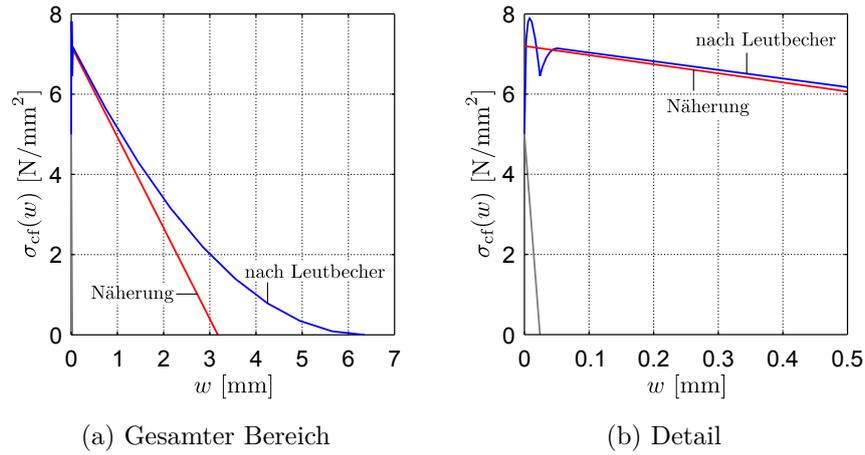


Abbildung A.13: Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für die Nachrechnung

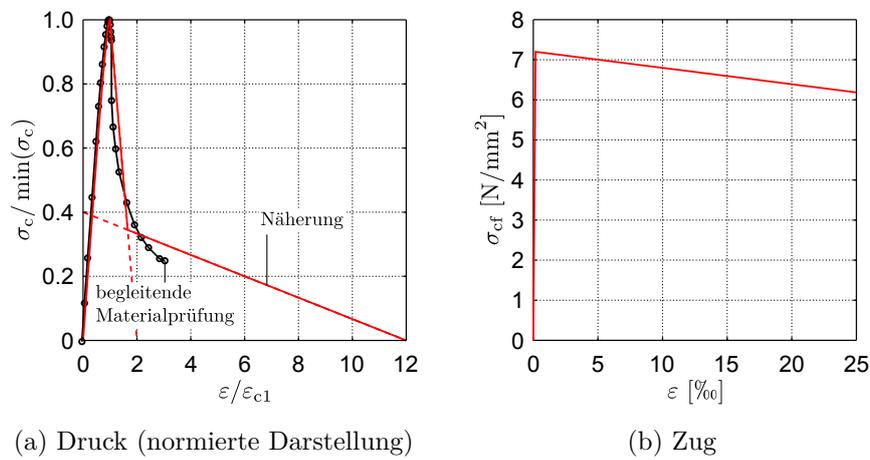


Abbildung A.14: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons für die Nachrechnung

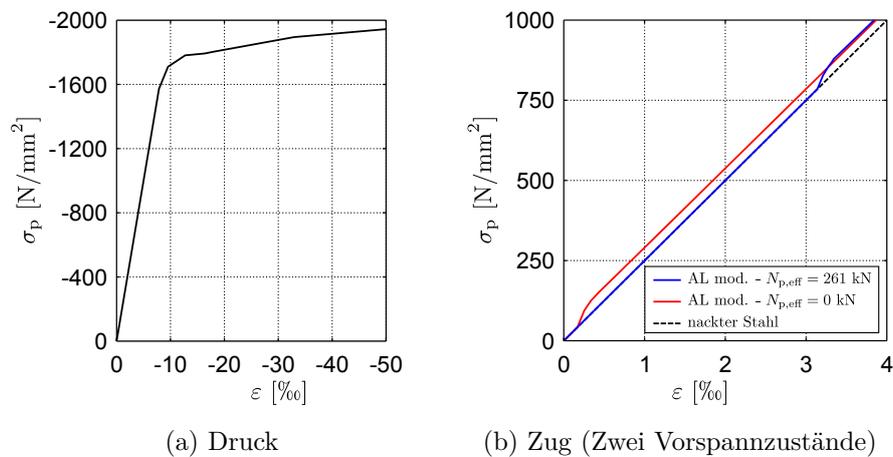


Abbildung A.15: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Spannstahls für die Nachrechnung

### A.5.2 Spannkraftverluste infolge Kriechen, Schwinden und Relaxation

Nach dem Übertragen der Vorspannkraft im Alter von sieben Tagen wurden die Versuchskörper drei Tage bei 90° C unter Wasserdampf wärmebehandelt. Für Normalbeton wird die durch die erhöhte Wärme beschleunigte Hydratation über eine Reifefunktion erfasst (siehe ON-EN1992-1-1 (2011)). Sie gilt im Bereich von 0° C bis 80° C. Für UHPC und Wärmebehandlung von 90° C ist noch keine derartige Funktion vorhanden. Nachdem der Beton nach der Temperaturbehandlung seine Endfestigkeit erreicht, wird angenommen, dass auch das Kriechen infolge Vorspannung durch die Wärmebehandlung vollständig abgeschlossen ist. Die Endkriechzahl nach dem Ansatz von Ma (2010) beträgt  $\varphi = 1.6$ . hier wurden die in der Tabelle A.10 angegebenen Parameter angesetzt. Die zu Eigenspannungen führende Schwindzahl wurde mit  $\varepsilon_{shr} = -0.4 \text{ ‰}$  festgelegt.

Tabelle A.10: Ansatzwerte zur Bestimmung der Kriechzahl nach Ma (2010) zur Berechnung der Spannkraftverluste

$t_0 = 7 \text{ d}$	$f_{cm} = 180 \text{ N/mm}^2$	$h_0 = 66.67 \text{ mm}$
$w/z = 0.2$	$RH = 0.6$	$\beta(V_{Matrix}) = 1.84$
$\varphi_{RH} = 1.11$	$\beta(f_c) = 1.25$	$\beta(t_0) = 0.63$
$\beta(t, t_0) = 1.0$		
$\rightarrow \varphi = 1.62$		

Spannlitzen neigen unter erhöhter Temperatur zu höherer Relaxation. Die Berücksichtigung dieses Effektes erfolgt über die Modifikation der Belastungsdauer der Spannlitzen nach Gleichung 2.64 und dem Ansatz zur genaueren Methode zur Berechnung von Spannkraftverlusten aus Relaxation nach dem Anhang D aus ON-EN1992-1-1 (2011).

Die Auswirkungen von Kriechen, Schwinden und Relaxation auf die Vorspannkraft wurden in MATLAB® mit der in Unterabschnitt 4.6.3 beschriebenen Zeitschrittmethod bestimmt. Hierbei wurde der Schwindverlauf affin zum Kriechverlauf angesetzt. Bei den Probekörpern mit der Sollvorspannkraft  $N_{p,soll} = 800 \text{ kN}$  (effektiv gemessen:  $N_{p,ist} = 768 \text{ kN}$ ) sind nach Abzug der Verluste aus Kriechen, Schwinden und Relaxation nur mehr  $N_{p,VK} = 540 \text{ kN}$  vorhanden. Das entspricht einem Verlust von 29.7 %. Bei der Vorspannkraft  $N_{p,soll} = N_{p,ist} = 400 \text{ kN}$  sind im Probekörper nur mehr  $N_{p,VK} = 261 \text{ kN}$  Vorspannkraft, entsprechend einem Verlust von 34.8 %, vorhanden. Zur Gegenüberstellung der Daten sind die Tabellen A.11 und A.12 beigefügt.

Tabelle A.11: Berechnete Vorspannkraft für die Versuchsnachrechnung

VK	$N_{p,soll}$ [kN]	$N_p^{(0)a}$ [kN]	$N_{p,ist}(0)^b$ [kN]	$\varepsilon_c(0)$ [‰]	$\Delta N_p^c$ [kN]	$N_{p,VK}^d$ [kN]
P800	800	912	768	-0.9 <sup>e</sup>	228	540
P400	400	480	400	-0.495	139	261

<sup>a</sup>  $N_p^{(0)}$  ... Spannkraft im Spannbett.

<sup>b</sup>  $N_p(0)$  ... Spannkraft unmittelbar nach dem Ablassen.

<sup>c</sup> Spannkraftverlust durch Kriechen, Schwinden und Relaxation

<sup>d</sup>  $N_{p,VK}$  ... Einfluss des Prüfaltes auf die Vorspannkraft wird vernachlässigt.

<sup>e</sup> Näherungsweise für Serie 2 und Serie 3 gleich angesetzt.

Tabelle A.12: Anteile am Spannkraftverlust

VK	Verluste aus			Gesamt- verlust [%]
	Kriechen [%]	Schwinden [%]	Relaxation [%]	
P800	21.1	7.3	1.3	29.7
P400	20.3	14.0	0.5	34.8

## A.6 Versuchsergebnisse, Vergleich mit Nachrechnungen

### A.6.1 Serie 1 - Nullversuche

Tabelle A.13: Versuchsergebnisse der Serie 1

VK	$e_{0,\text{soll}}$ <sup>a</sup>	$e_{0,\text{ist}}$ <sup>b</sup>	$e_i$ <sup>c</sup>	$ N_{\text{min}} $	$w_{x,m}$	$M_2$
1-S26		[mm]		[kN]	[mm]	[kNm]
-u1	0	0.0	-	3454.7	0.01	0.0
-u2	0	0.0	-	3566.0	0.00	0.0
-u3	0	0.0	-	3523.2	0.05	0.2
-b1	0	0.5	-	3965.3 <sup>d</sup>	0.40	3.6
-b2	3	2.0	-	3780.1	1.23	12.2
-b3	3	2.0	-	3523.2	2.05	14.3
-b4	8	6.5	-	2823.5	3.09	27.1
-b5	8	5.5	-	2892.5	3.29	25.4
-b6	13	9.0	-	2659.2	3.05	32.0
-b7	13	9.0	-	2559.4	2.85	30.3
-b8	30	24.0	-	1624.5	3.75	45.1
-b9	30	24.0	-	1619.4	3.87	45.1
-b10	50	46.5	-	791.5	6.64	42.1
-b11	50	46.0	-	816.5	7.11	43.4
-b12	20	15.0	-	2167.9	4.50	42.3

<sup>a</sup>  $e_{0,\text{soll}}$  Soll-Ausmitte der Last ( $e_0 = \text{konst.}$ )

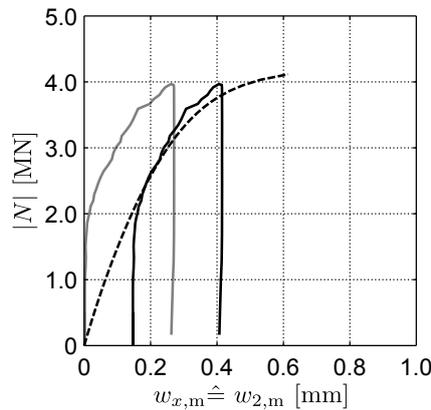
<sup>b</sup>  $e_{0,\text{ist}}$  Ist-Ausmitte der Last (rechnerisch, Annahme:  $e_0 = \text{konst.}$ )

<sup>c</sup> Imperfektion  $e_i$  wurde nicht gemessen

<sup>d</sup> Erreichen der Maximaldruckkraft des Prüfzylinders

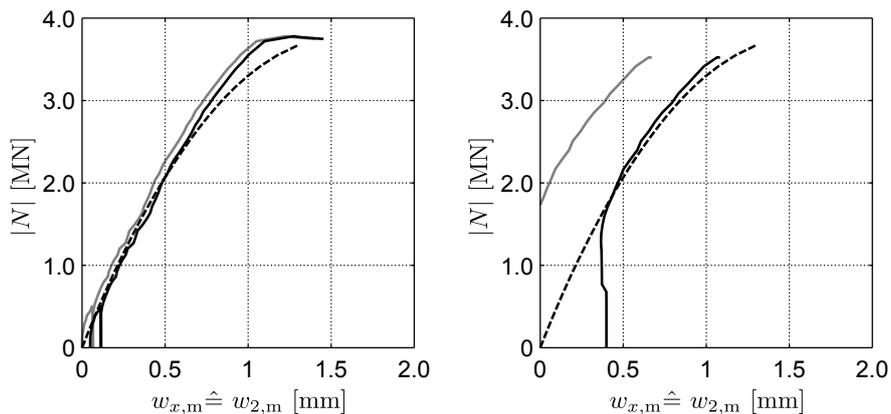
Die Probekörper der Serie 1 wiesen eine Schlankheit von  $\lambda = 29$  auf. Die Bezeichnung lautet 1S-26u-x und 1S-26b-x. Der Index „u“ steht für unbewehrt, der Index „b“ für bewehrt. Es wurden drei völlig unbewehrte und zwölf bewehrte Versuchskörper geprüft (siehe Versuchsprogramm - Tabelle A.1). Die gesamte Serie 1 wurde an einem Betoniertermin mit einer Mische (M3) hergestellt und hatte bei der Prüfung ein Alter von 35 bis 41 Tagen (siehe Tabelle A.3). Den Berechnungen aller Versuchskörper wurden die gleichen Materialeigenschaften zu Grunde gelegt:  $f_{cm} = 198 \text{ N/mm}^2$  und  $E_{cm} = 52100 \text{ N/mm}^2$ . Die Zugarbeitslinie des Betons und die Arbeitslinie des Spannstahls wurde wie im vorigen Unterabschnitt beschrieben festgelegt. Die

im Zuge der Versuchsauswertung und Nachrechnung bestimmten Lastausmitten sowie die Darstellung der Versuchskurven können den Abbildungen A.16 bis A.22 entnommen werden. Hier sind jeweils drei Kurven zu erkennen. Die hellgraue Kurve zeigt jeweils die originalen Messwerte und die schwarze, strichlierte Kurve das Rechenergebnis. Die Verformungen wurden über ein mit einem induktiven Wegaufnehmer mit Tauchanker verbundenen Seil gemessen (siehe Abbildung A.10). Die Seilmessung neigte zu unstetiger Wegmessung, daher wurden die originalen Kraft-Weg-Verläufe zur besseren Vergleichbarkeit mit der Nachrechnungskurve horizontal verschoben (schwarze Kurven). Anhand der Steigungen der Kurven kann auf die tatsächlich vorhandene Lastausmitte rückgeschlossen werden. Der Versuchskörper 1S26b-1 konnte nicht bis zum Bruch belastet werden, da vorher die Druckkapazität des Prüfzylinders erreicht wurde. Die Tabelle A.13 zeigt die wesentlichen Ergebnisse der Serie 1 in numerischer Form.



— Versuchskurve — versetzte Versuchskurve - - - - - Nachrechnung

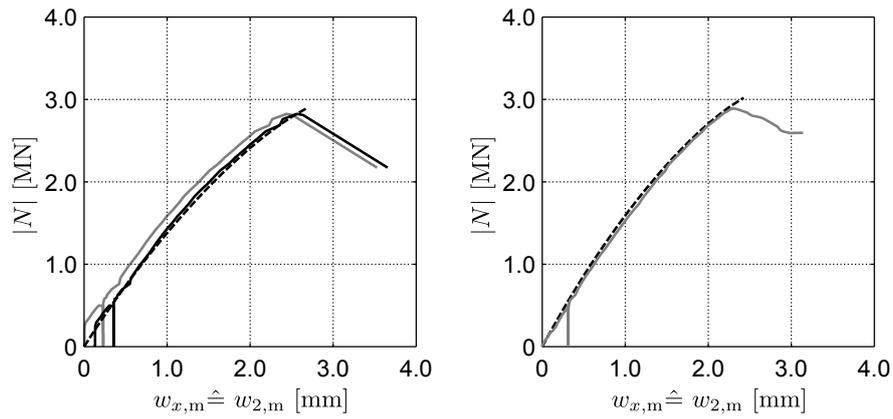
Abbildung A.16: VK 1S-26b-1, Sollausmitte 0 mm,  $e_{0,ist} = 0.5$  mm



(a) VK 1S-26b-2  $e_{0,ist} = 2.0$  mm      (b) VK 1S-26b-3  $e_{0,ist} = 2.0$  mm

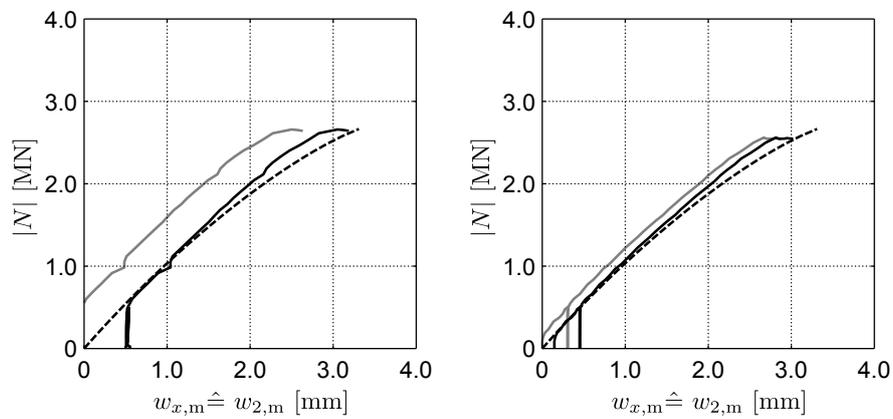
— Versuchskurve — versetzte Versuchskurve - - - - - Nachrechnung

Abbildung A.17: Versuche mit 3 mm Sollausmitte der Last



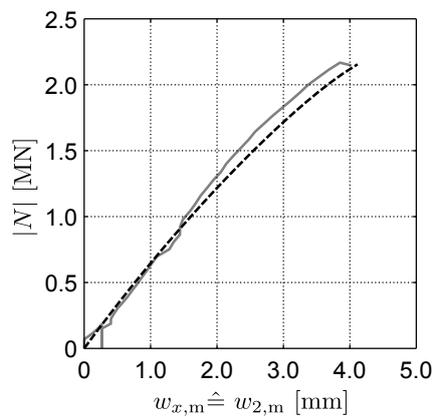
(a) VK 1S-26b-4  $e_{0,ist} = 6.5$  mm      (b) VK 1S-26b-5  $e_{0,ist} = 5.5$  mm  
 — Versuchskurve    — versetzte Versuchskurve    - - - - Nachrechnung

Abbildung A.18: Versuche mit 8 mm Sollausmitte der Last



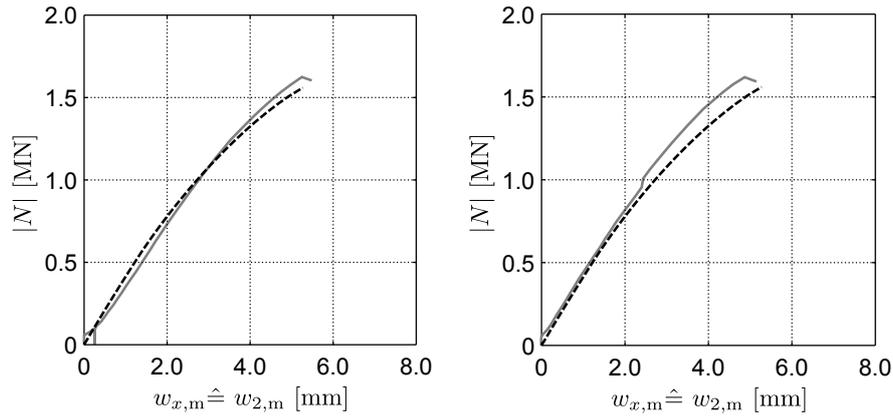
(a) VK 1S-26b-6  $e_{0,ist} = 9.0$  mm      (b) VK 1S-26b-7  $e_{0,ist} = 9.0$  mm  
 — Versuchskurve    — versetzte Versuchskurve    - - - - Nachrechnung

Abbildung A.19: Versuche mit 13 mm Sollausmitte der Last



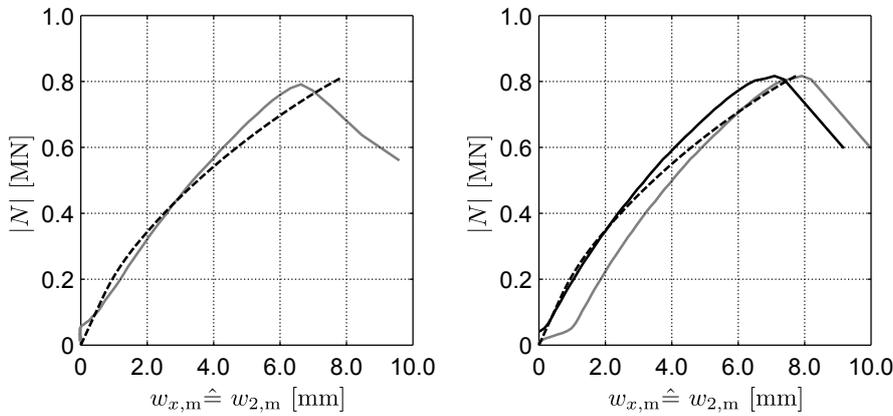
— Versuchskurve    — versetzte Versuchskurve    - - - - Nachrechnung

Abbildung A.20: VK 1S-26b-12, Sollausmitte 20 mm,  $e_{0,ist} = 15.0$  mm



(a) VK 1S-26b-8  $e_{0,ist} = 24.0$  mm      (b) VK 1S-26b-9  $e_{0,ist} = 24.0$  mm  
 — Versuchskurve    — versetzte Versuchskurve    - - - - - Nachrechnung

Abbildung A.21: Versuche mit 30 mm Sollausmitte der Last



(a) VK 1S-26b-10  $e_{0,ist} = 46.6$  mm      (b) VK 1S-26b-11  $e_{0,ist} = 46.0$  mm  
 — Versuchskurve    — versetzte Versuchskurve    - - - - - Nachrechnung

Abbildung A.22: Versuche mit 50 mm Sollausmitte der Last

### Bestimmung der Bauteilfestigkeit

In der Regel sind die Prüffestigkeiten am Zylinder bzw. am Würfel begleitender Materialprüfungen höher als am Bauteil bzw. am Bauwerk. Die Bestimmung des vorhandenen Verhältnisses von Bauteilfestigkeit zu Prüffestigkeit erfolgte durch Regressionsrechnung. Es wurden  $N$ - $M$ -Interaktionskurven für reduzierte Festigkeiten im Bereich von  $0.9$  bis  $1.0 \cdot f_{cm}$  entwickelt, wobei die Zugfestigkeiten konstant gehalten wurden. Die Schrittweite der Abstufung betrug  $1\%$ . Für jede  $N$ - $M$ -Interaktionskurve und jede im Versuch erreichte Traglast wurde das zugehörige Bruchmoment mit dem theoretischen Wert der Interaktionskurve verglichen. Die Differenz der Momente wurden quadriert, über alle Versuchskörper aufsummiert und anschließend die Quadratwurzel gezogen. Bei den unbewehrten, zentrisch beanspruchten Versuchskörpern wurden nur die Differenzen der Normalkräfte in die Regressionsrechnung einbezogen. Durch Zuweisung der betragsmäßigen Abweichungen zu den angesetzten Druckfestigkeiten entsteht ein Verlauf der Fehlerquadrate. Die am besten zu den Versuchsergebnissen passende rechnerische Druckfestigkeit

ist jene, bei der das Fehlerquadrat minimal wird. Dieser liegt bei den unbewehrten Probekörpern bei ca. 90 % und bei den bewehrten Probekörpern bei ca. 94 % (siehe Abbildungen A.23 und A.24).

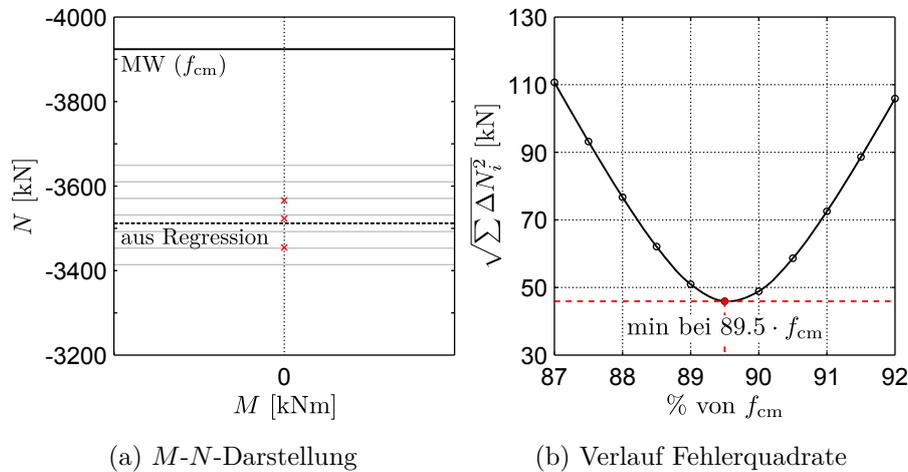


Abbildung A.23: Bauteilfestigkeit - Regression der unbewehrten Versuche

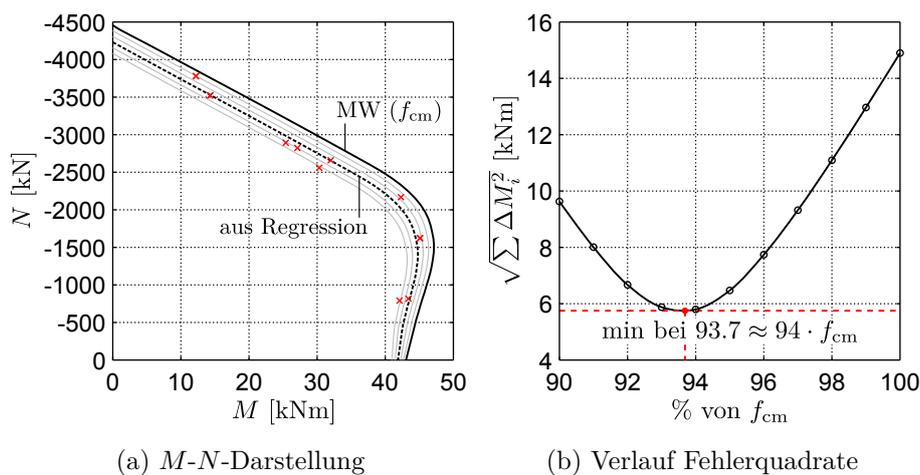


Abbildung A.24: Bauteilfestigkeit - Regression der bewehrten Versuche

### Bestimmung des Duktilitätsindex $I_{10}$

Der Duktilitätsindex  $I_{10}$  ist ein Maß zum Vergleich und der Beurteilung der Duktilität von Bauteilen (siehe Foster und Attard (1995)). Bei ideal-elastischem, ideal-sprödem Verhalten nimmt der Index den Wert  $I_{10} = 1$  und bei ideal-elastischem, ideal-plastischem Verhalten  $I_{10} = 10$  an. Zur Bestimmung wird der Normalkraft die geleistete Arbeit gegenübergestellt ( $N$ - $\xi$ -Darstellung). Sie

ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^l 0.5 \cdot [N \cdot \varepsilon_m(z) + M \cdot \kappa(z)] dz & (A.2) \\
&= \int_0^l 0.5 \cdot \underbrace{[\varepsilon_m(z) + (e_1(z) + e_i(z) + w_x(z))]}_{\xi} dz \\
\text{mit: } \varepsilon_m &= \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}}{2} \quad \text{und: } \kappa = \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}}{h_{QS}}
\end{aligned}$$

$$I_{10} = \frac{A_{0AB}}{A_{0EF}} \quad (A.3)$$

Der Duktilitätsindex wird nach der obigen Gleichung bestimmt. Hierfür sind die Flächen OAB und OEF unter der  $N$ - $\xi$ -Kurve wie in der Abbildung A.25 dargestellt zu ermitteln.

Im Zuge der Versuchsauswertung wird nur der Querschnitt in Stabmitte zur Auswertung herangezogen. Im Falle der Serie 1 kann der Duktilitätskennwert nicht direkt aus den Versuchen abgeleitet werden. Er wird daher mit einem Näherungsansatz rechnerisch ermittelt. Hierfür wird die Verformung im Nachbruchbereich über den Ansatz  $w_2 = 1/c \cdot \kappa \cdot l^2$  (Gleichung 6.20) ermittelt. Der Faktor  $1/c$  beschreibt die Krümmungsverteilung entlang des Bauteils. Er wird für die Maximallast aus den Versuchsdaten bestimmt und für die gesamte Näherungsberechnung konstant gehalten. Für jede eingeprägte Kraft  $N_i$  wird die Krümmung  $\kappa_i$  solange variiert, bis das zur Krümmung zugehörige reaktive Moment ( $M$ - $\kappa$ -Beziehung) mit dem aktiven Moment ( $M_E = (e_0 + e_i + w_2) \cdot N_i$ ) im Gleichgewicht steht. Mit dem jeweils gefundenen Gleichgewichtszustand lässt sich neben der Krümmung auch die Dehnung  $\varepsilon_m$  und der zugehörige  $\xi$ -Wert bestimmen. Der Duktilitätsindex der Nullversuche liegt zwischen 4.4 und 8.0. Mit steigender Lastausmitte wird das Tragverhalten zunehmend von der Zugbewehrung bestimmt. Deshalb sind mit ansteigenden Exzentrizitäten auch ansteigende Duktilitätskennzahlen zu verzeichnen (siehe Tabelle A.14).

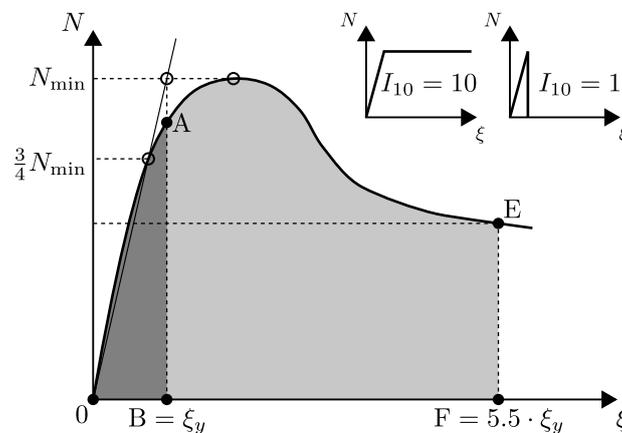


Abbildung A.25: Bestimmung des  $I_{10}$ -Wertes

Tabelle A.14: Rechnerisch ermittelte Duktilitätskennzahlen  $I_{10}$  (Lastausmitte ansteigend)

VK	$e_{0,ist}$ [mm]	$I_{10}$ [-]	VK	$e_{0,ist}$ [mm]	$I_{10}$ [-]
-b1	0.5	4.4	-b7	9.0	5.9
-b2	2.0	4.8	-b12	12.0	6.2
-b3	2.0	4.8	-b8	24.0	7.0
-b4	6.5	5.6	-b9	24.0	7.0
-b5	5.5	5.5	-b10	46.5	8.0
-b6	9.0	5.9	-b11	46.0	8.0
unbewehrter QS, zentrischer Druck:					4.4
bewehrter QS, zentrischer Druck:					7.0

### A.6.2 Serie 2 - Traglastversuche an schlanken Stützen

Ziel der Serie 2 war die Bestimmung des Einflusses der Vorspannung auf die Traglast. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden alle Versuchskörper dieser Serie mit gleicher planmäßiger Lastausmitte  $e_0 = 15$  mm geprüft. Die den Versuchsnachrechnungen zu Grunde gelegten Materialkennwerte können der Tabelle A.2 in Kombination mit der Tabelle A.3 entnommen werden. Bei Versuchskörpern mit Vorverformungen wurden die in der Tabelle A.6 angegebenen Exzentrizitäten der Spannglieder berücksichtigt. Die mit diesen Kennwerten durchgeführten Nachrechnungen stimmen mit den Versuchen in vielen Fällen gut überein (siehe Abbildungen A.26 bis A.28). Die Abweichungen zwischen den Nachrechnungen und den Versuchsergebnissen liegen zwischen  $-4,6$  % und  $+5,6$  %. Alle wichtigen Versuchskörperdaten, Berechnungsansätze und Ergebnisse sind in der Tabelle A.15 zusammengestellt. Zusätzlich ist der ermittelte Duktilitätsindex (Beschreibung - siehe Seite A 22) eingetragen. Er liegt, unabhängig von der Vorspannkraft, bei  $I_{10} \approx 9$ . Die geprüften Stützen verhalten sich also im Versuch sehr duktil.

Die Abbildung A.29 zeigt zu einer Traglastkurve zugeordnete, fotografierte Verformungszustände. Diese Abbildung untermauert die rechnerische Duktilität. Sie zeigt aber gleichzeitig auch auf, dass das Stabilitätsversagen bei sehr kleinen, mit freiem Auge gerade erst erkennbaren Verformungszuständen eintritt.

In der Abbildung A.30a sind für jede geprüfte Vorspannkraft die rechnerischen Traglasten für die Lastausmitte  $e_0 = 15$  mm = konst. in Abhängigkeit der Schlankheit eingetragen (schwarze, dunkelblaue und hellblaue Kurve). Zur Erstellung der rechnerischen Verläufe wurden die gleichen Materialkennwerte wie für die Versuchsnachrechnung verwendet. Zusätzlich ist die Eulerhyperbel für linear elastisches Materialverhalten dargestellt (rote strichlierte Kurve). Es ist hier zu erkennen, dass die Vorspannkraft erst ab einer Schlankheit von  $\lambda \approx 50$  einen positiven Einfluss auf die Tragfähigkeit hat. Die rechnerischen Verläufe stimmen mit den in den Versuchen ermittelten Traglasten (Kreise) sehr gut überein. Als Erweiterung zur Abbildung A.30a zeigt die Abbildung A.30b das Steigerungspotential durch die Vorspannung, bezogen auf nicht vorgespannte Stützen. Um die Sensibilität der Lastausmitte zu quantifizieren, ist das Steigerungspotential als Band mit  $e_0 = 15 \pm 5$  mm = konst. dargestellt. Die theoretische Erkenntnis, nämlich dass das Steigerungspotential der Traglast mit größer werdender Schlankheit anwächst, kann im Versuch bestätigt werden. Die nicht vorgespannten Stützen der Schlankheit  $\lambda = 180$  weisen keine Vorverformungen auf, während diese bei den vorgespannten Stützen sehr große Werte

annahmen. Dadurch sind den Verhältniswerten der Traglasten sehr unterschiedliche Lastausmitten zu Grunde gelegt. Aus diesem Grund ist das in der Abbildung A.30b sichtbare Ergebnis bei der Schlankheit  $\lambda = 180$  nicht aussagekräftig. Dennoch ist dieses im Versuch beobachtete Verhalten sehr wertvoll. Es zeigt nämlich, dass die Einbaugenauigkeit der Vorspannung mit zunehmender Schlankheit immer bedeutender wird bzw. dass bei sehr schlanken Stützen die Zusatzexzentrizität durch Vorspannung nicht ohne weiteres vernachlässigt werden darf.

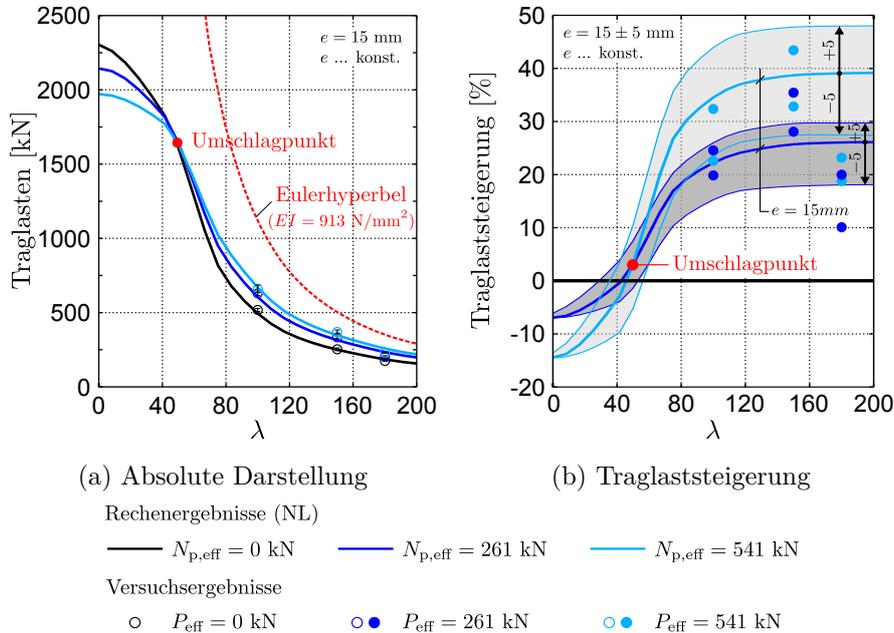


Abbildung A.30: Serie 2: Vergleich der theoretischen und tatsächlichen Traglaststeigerung durch Vorspannung

### A.6.3 Serie 3 - Dauerlastversuche

Während der Dauerlastversuche wurden die Prüfkörper 104 Tage mit einer mittleren Druckkraft von 283 kN ( $\min|N| = 272$  kN,  $\max|N| = 292$  kN) belastet. Detaillierte Versuchsdaten sind der Tabelle A.16 zu entnehmen. Insgesamt bestätigt sich, dass UHPC nach der Wärmebehandlung im Vergleich zu Normalbeton ein ausgesprochen kleines Kriechverhalten aufweist. Ausgehend von der Endkriechzahl  $\varphi(\infty, t_0) = 0.4$  für Belastungen nach der Wärmebehandlung ergibt sich für den Zeitraum des Versuchs (104 Tage) gemäß des Ansatzes nach Ma (2010) (vgl. Abschnitt 2.3) eine Kriechzahl von  $\varphi(t, t_0) = 0.23$ . Die Versuche wurden nichtlinear gemäß Theorie II. Ordnung nachgerechnet, wobei die zeitlichen Phänomene mit Hilfe der Zeitschrittmethod mit zehn Zeitschritten erfasst wurden. Die Ergebnisse aus Versuch und Nachrechnung können den Abbildungen A.31 bis A.35 entnommen werden. Hier sind die Nachrechnungen jeweils mit roten Linien eingetragen. Die rot-gestrichelte Kurve entspricht der roten Kurve und wurde nur zu einem besseren Anfangswert bei Versuchsbeginn verschoben. Hier kann gezeigt werden, dass die Zeitschrittmethod die realen Vorgänge während des Kriechens qualitativ und quantitativ sehr gut abbildet. Die Versuchskörper wurden unmittelbar nach dem Aufbringen der Vorspannung einer Wärmebehandlung unterzogen. Deshalb erfolgte die Nachrechnung der Versuche mit der Annahme, dass die Kriechvorgänge durch die Vorspannung nach der Wärmebehandlung nahezu abgeschlossen sind. Es sind also nur die Zusatzdehnungen aus der äußeren Last kriechfähig.

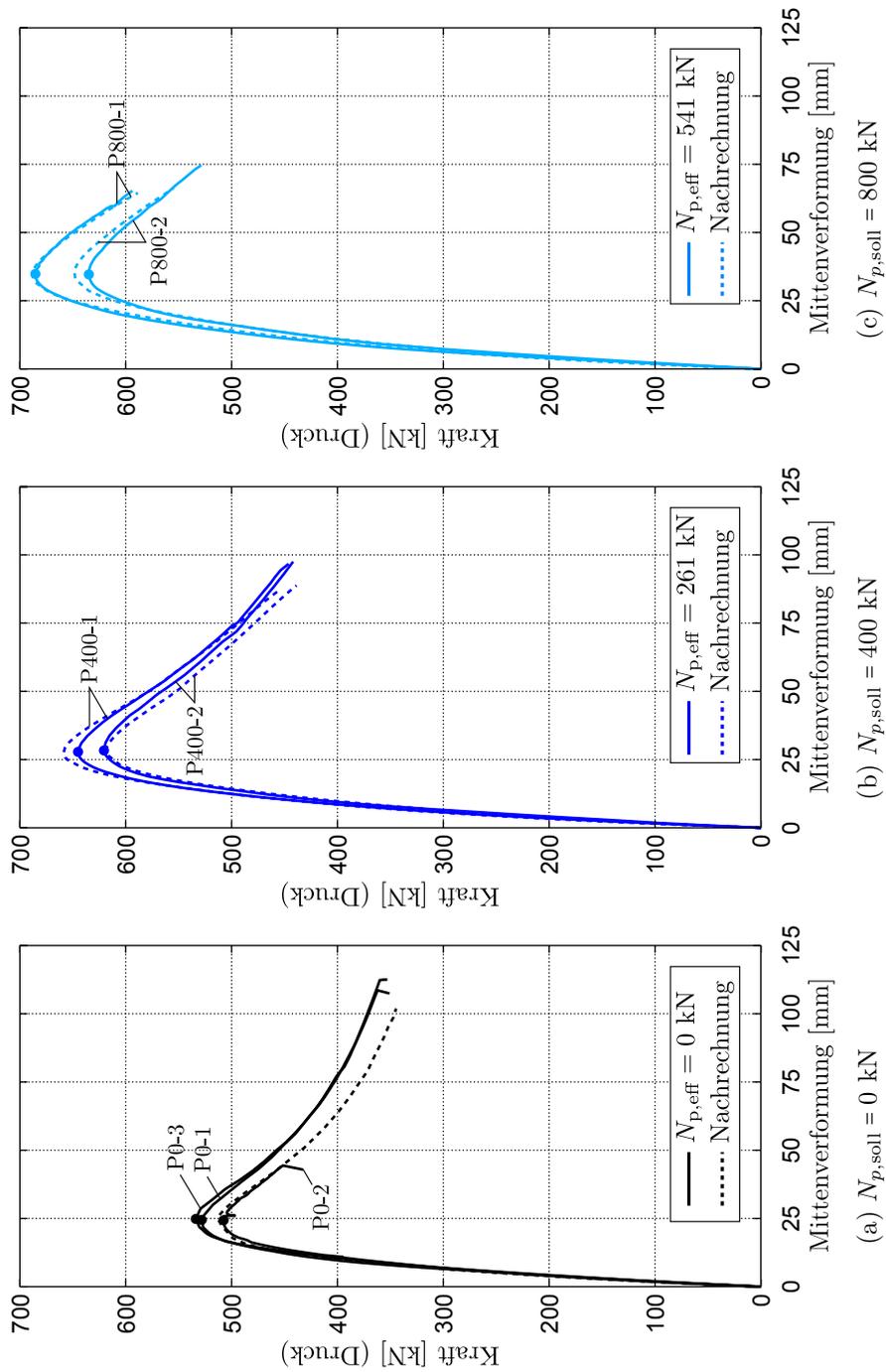


Abbildung A.26: Versuch und Nachrechnung - Serie 2, Schlankheit  $\lambda = 100$

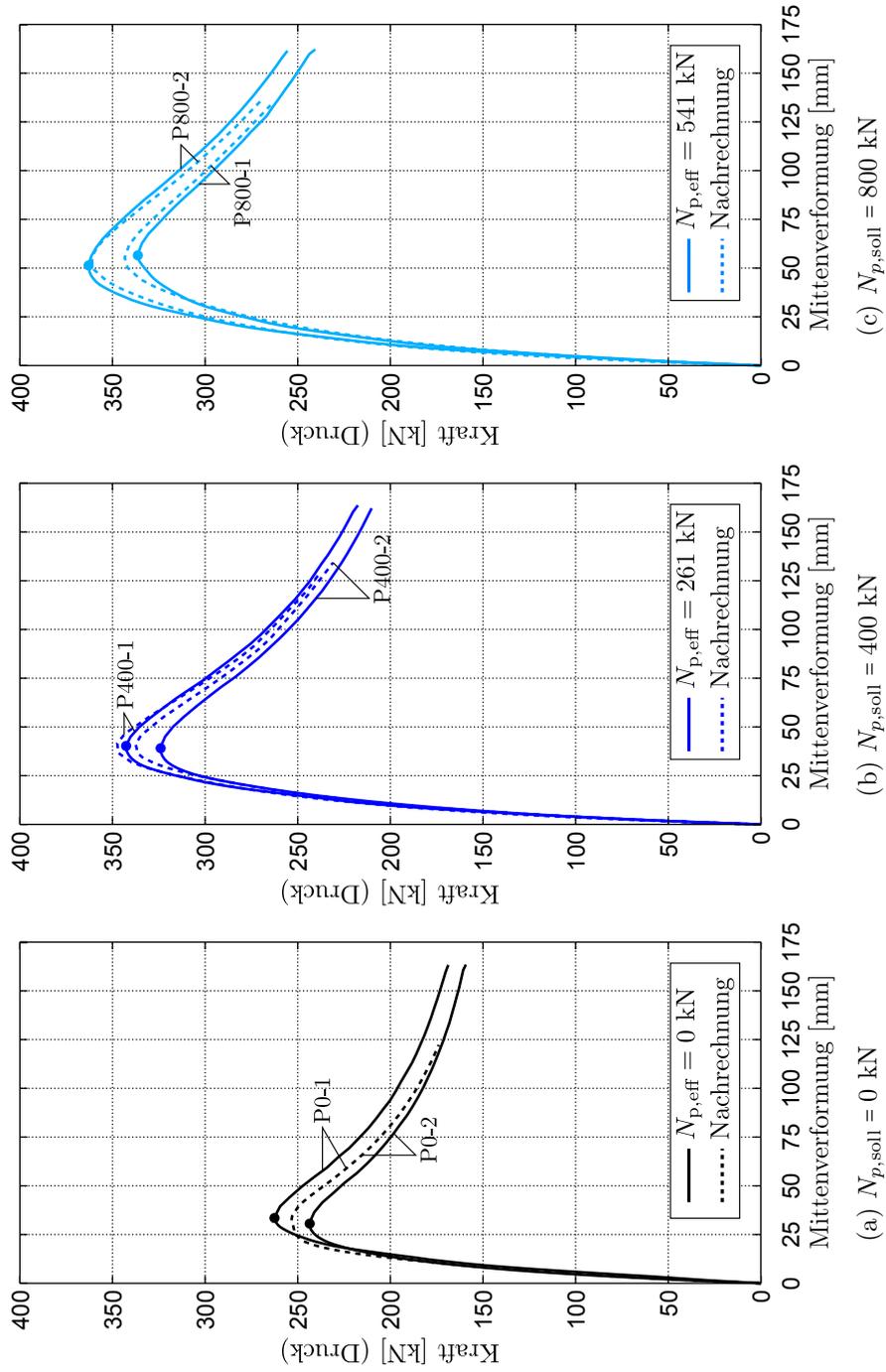


Abbildung A.27: Versuch und Nachrechnung - Serie 2, Schlankheit  $\lambda = 150$

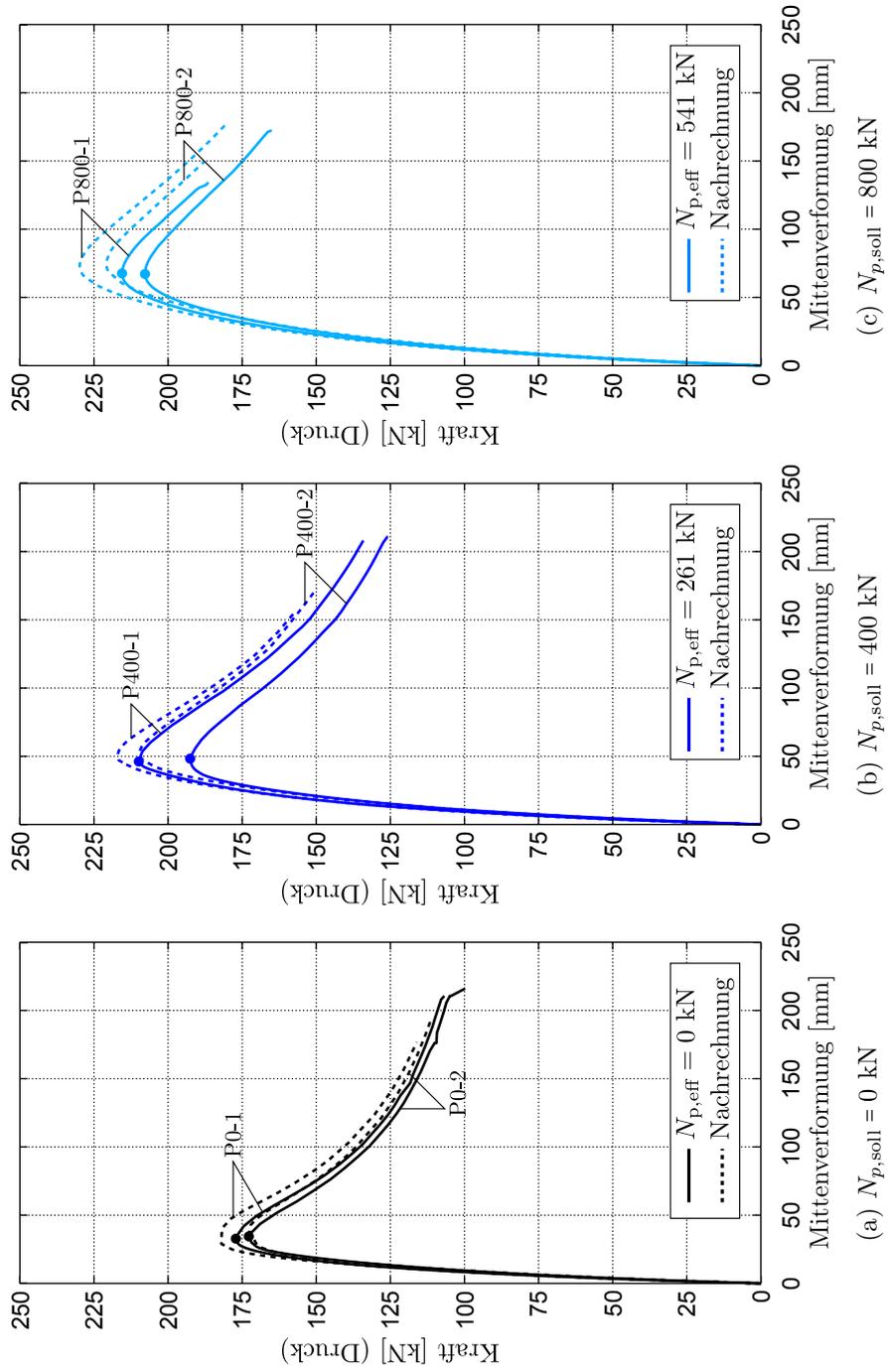


Abbildung A.28: Versuch und Nachrechnung - Serie 2, Schlankheit  $\lambda = 180$

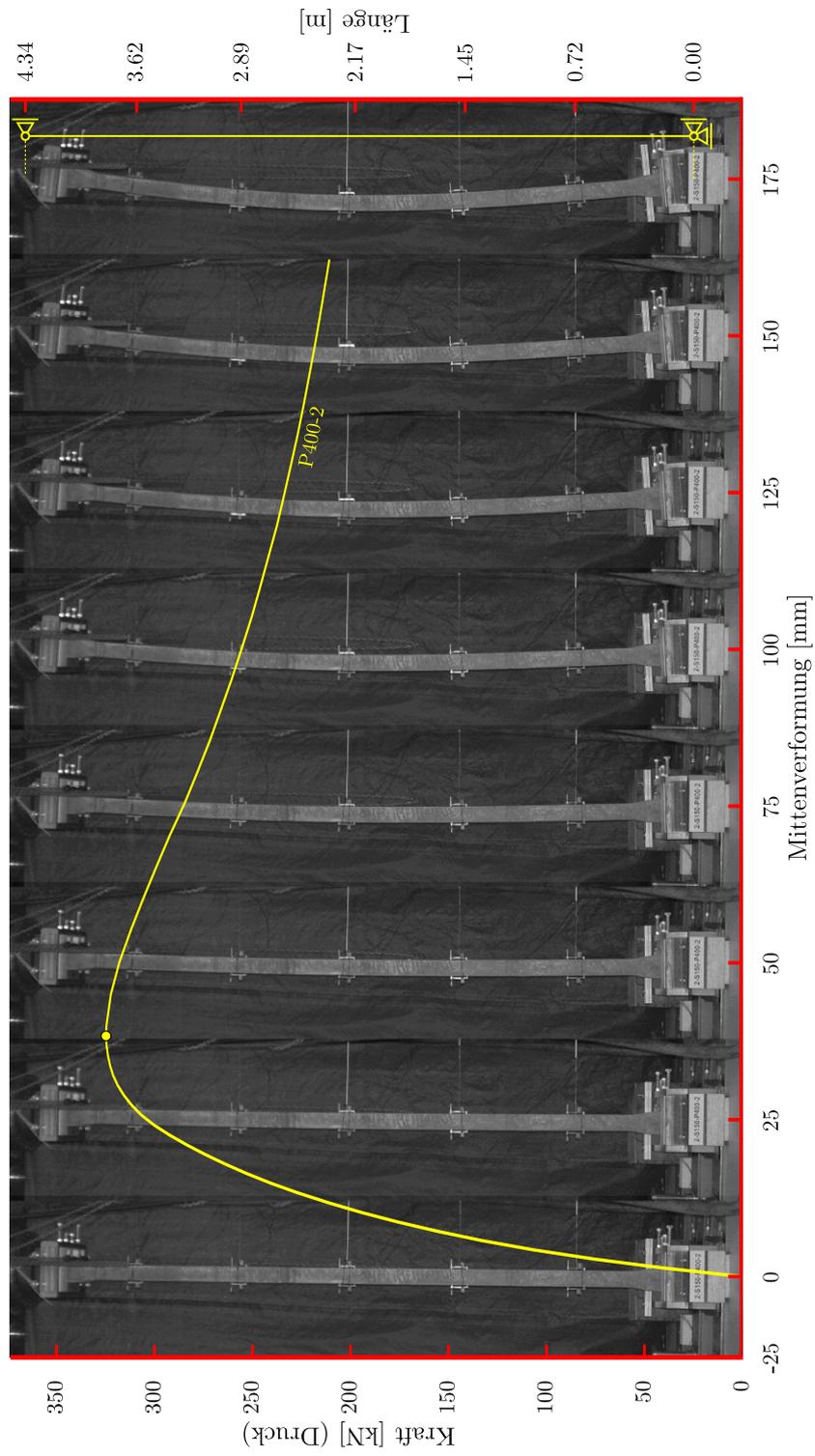


Abbildung A.29: Traglastkurve und fotografierte Verformungszustände (2S-150-P400-2,  $\lambda = 150$ )

Tabelle A.15: Serie 2, Ergebnisse und Vergleich von Versuch und Nachrechnung

VK 2S-...	Versuch			Nachrechnung							
	$\epsilon_{0,\text{soil}}^a$ [mm]	$\epsilon_i^b$ [mm]	$w_{2,m}$ [mm]	$N_b$ [kN]	$N_p$ [kN]	$e_p$ [mm]	$\epsilon_{0,\text{ist}}^a$ [mm]	$w_{2,m}$ [mm]	$N_{b,\text{calc}}$ [kN]	$I_{10}$ [-]	$\frac{N_b}{N_{b,\text{calc}}}$ [%]
100-P0-1	15.0/15.0	-	24.8	508	0	-	14.0/14.0	24.4	509	9.0	0.2
100-P0-2	15.0/15.0	-	24.5	528	0	-	14.0/14.0	24.4	509	8.9	-3.6
100-P0-3	15.0/15.0	-	24.8	534	0	-	14.0/14.0	24.4	509	9.0	-4.7
100-P400-1	15.0/15.0	0.4/0.5/0.2/0.0/0.0	27.8	645	261	-	12.0/12.0	27.6	656	8.9	1.7
100-P400-2	15.0/15.0	-	28.3	621	261	-	14.0/14.0	28.9	615	9.0	-1.0
100-P800-1	15.0/15.0	-	34.8	686	541	-	14.0/14.0	33.8	684	8.9	-0.3
100-P800-2	15.0/15.0	1.0/1.3/1.0/2.0/1.0	34.6	635	541	0.7	13.0/14.0	36.2	646	9.0	1.7
150-P0-1	15.0/15.0	-	33.5	263	0	-	15.5/15.5	32.2	250	8.9	-4.9
150-P0-2	15.0/15.0	-	30.6	244	0	-	15.5/15.5	31.4	251	9.1	2.9
150-P400-1	15.0/15.0	-	39.7	343	261	-	10.0/13.0	41.7	344	9.0	0.3
150-P400-2	15.0/15.0	0.0/0.0/0.6/0.0/0.0	39.2	324	261	-	12.5/12.5	41.1	332	9.0	2.5
150-P800-1	15.0/15.0	-	56.5	336	541	-	13.5/13.0	55.4	340	8.9	1.2
150-P800-2	15.0/15.0	-	51.4	363	541	-	10.0/13.0	54.2	358	8.9	-1.4
180-P0-1	15.0/15.0	-	32.8	177	0	-	15.0/17.0	34.0	179	9.1	1.1
180-P0-2	15.0/15.0	-	34.4	173	0	-	14.0/15.0	38.3	170	9.0	-1.7
180-P400-1	15.0/15.0	1.0/2.0/4.0/3.0/1.0	46.2	210	261	1.4	12.5/12.5	50.5	214	8.8	1.9
180-P400-2	15.0/15.0	0.8/2.5/4.1/3.9/2.5	48.3	193	261	1.4	14.0/16.0	51.5	204	8.9	5.7
180-P800-1	15.0/15.0	0.0/4.0/6.0/4.0/0.0	67.6	216	541	1.1	15.0/15.0	73.4	227	8.7	5.1
180-P800-2	15.0/15.0	0.0/7.0/9.0/5.5/0.0	67.2	208	541	1.6	15.0/15.0	71.7	218	8.7	4.8

<sup>a</sup>  $\epsilon_0$  ... Lastausmitte am Kopf und Fuß der Stütze

<sup>b</sup>  $\epsilon_i$  ... Gemessene Imperfektion (Messpunkte  $\textcircled{2}$  bis  $\textcircled{6}$  - siehe Abbildung A.11)

Diese Annahme kann durch den Vergleich der Randdehnungsverläufe des nicht vorgespannten und des mit 800 kN vorgespannten Probekörpers bestätigt werden (siehe Abbildung A.35). Hier sind, unabhängig von der Höhe der Vorspannkraft, ähnliche Dehnraten erkennbar.

Tabelle A.16: Serie 3, Eingangsgrößen und Ergebnisse der Dauerlastversuche

VK	$e_{0,\text{soll}}$	$e_{0,\text{ist}}$	$e_i$	$N_{\text{DL}}$	$w_{2,m}(t_0)$	$w_{2,m}(t)$
3S-90-	[mm]	[mm]	[mm]	[kN]	[mm]	[mm]
P0-1	15/0	16.0/5.0	-	$\approx 283$	$\approx 3.6$	$\approx 4.5$
P800-1	15/0	16.0/8.5	-	$\approx 283$	$\approx 4.2$	$\approx 5.5$

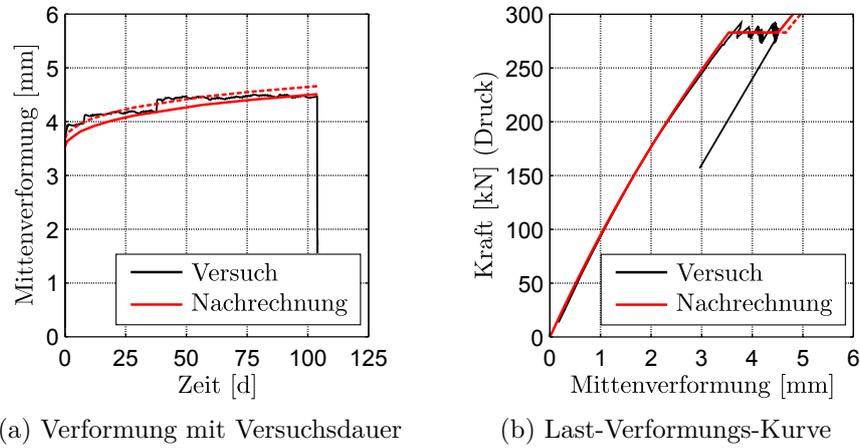


Abbildung A.31: Serie 3, Dauerlastversuch an der nicht vorgespannten Stütze 3S-90-P0-1

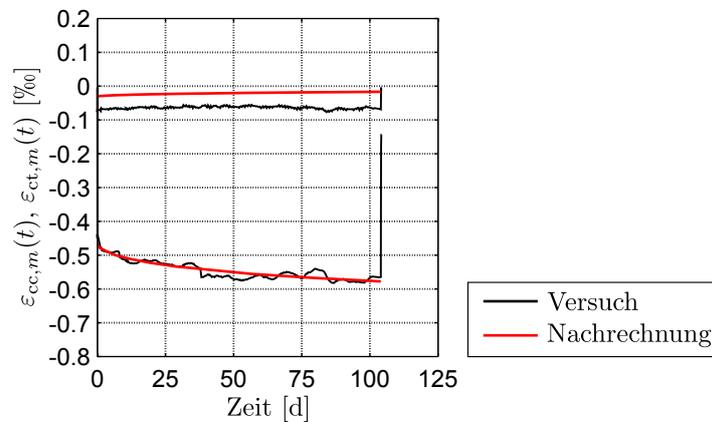


Abbildung A.32: Zeitlicher Verlauf der Randdehnungen (3S-90-P0-1, bei  $z = l/2$ )

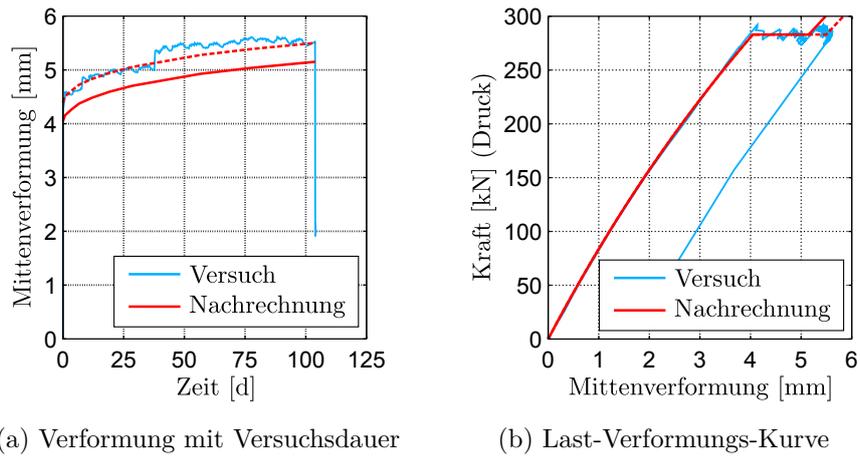


Abbildung A.33: Serie 3, Dauerlastversuch der mit 800 kN vorgespannten Stütze 3S-90-P800-1

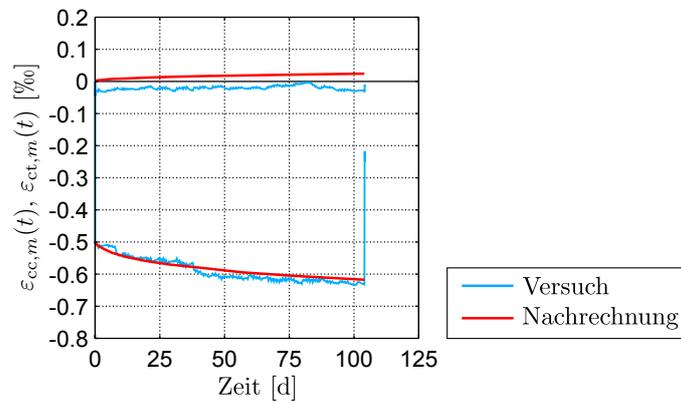


Abbildung A.34: Zeitlicher Verlauf der Randdehnungen (3S-90-P800-1, bei  $z = l/2$ )

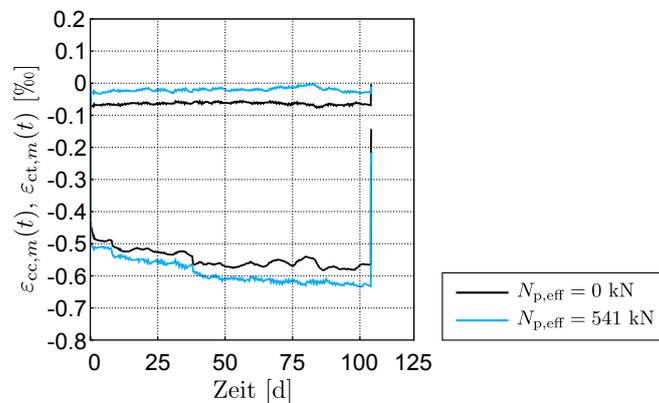


Abbildung A.35: Vergleich des zeitlichen Randdehnungsverlaufs der Probekörper VK 3S-90-P0-1 und VK 3S-90-P800-1 (bei  $z = l/2$ )

### A.6.4 Serie 3 - Ergänzende Traglastversuche

Die Traglastversuche der Serie 3 sollten den Einfluss vorhergehender Dauerbeanspruchung auf die Traglast, das Tragverhalten bei kleinen Lastausmitten und das Tragverhalten bei über die Bauteilhöhe veränderlicher Lastausmitte aufzeigen.

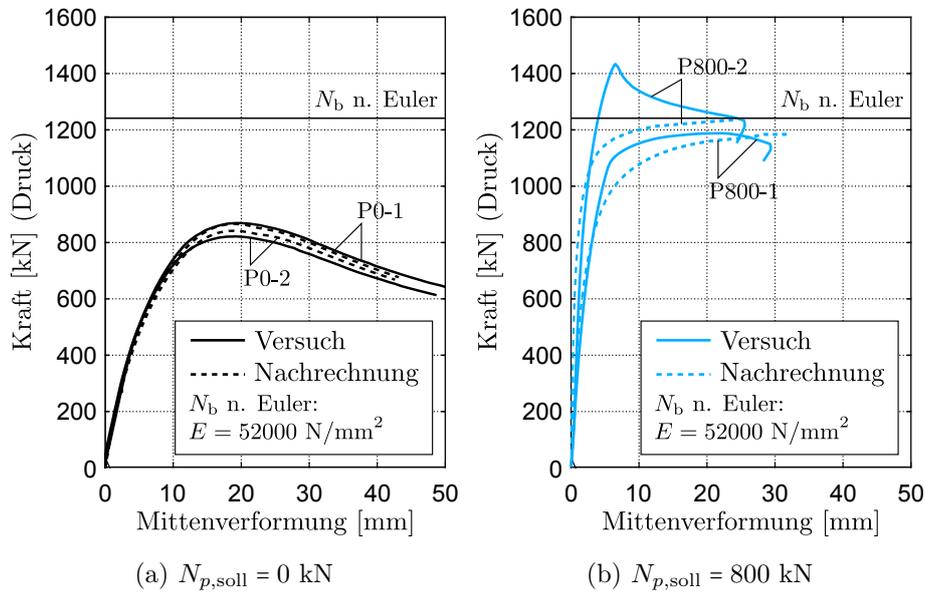
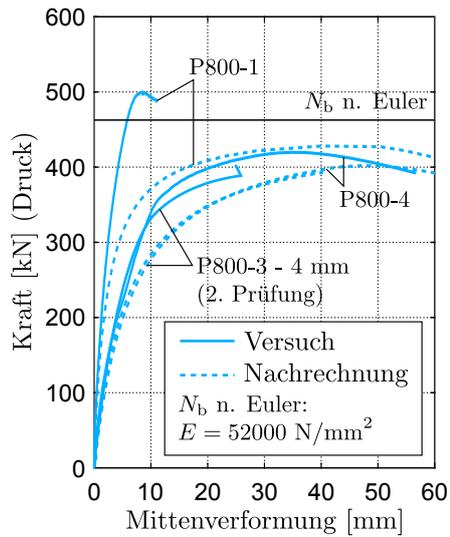


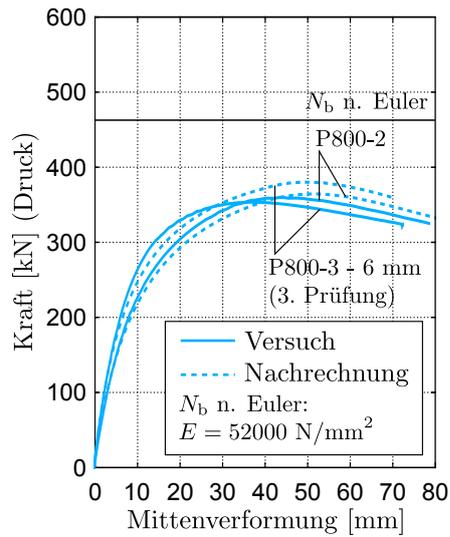
Abbildung A.36: Versuch und Nachrechnung: Serie 3, Schlankheit  $\lambda = 90$

Der Probekörper 3S-90-P0-1 (VK aus der Dauerbelastung) und die Referenzstütze 3S-90-P90-2 wurden mit gleicher Lastausmitte wie bei der Dauerbeanspruchung geprüft. Wie die Abbildung A.36a zeigt, ist das Tragverhalten beider Prüfkörper nahezu ident. Aus diesem Grund wurden die Stützen 3S-90-P800-1 und 3S-90-P800-2 mit einer anderen Lastkonfiguration als beim Dauerlastversuch geprüft. Die Lastausmitte beider Versuchskörper wurde mit  $e_{0,soll} = 2 \text{ mm} = \text{konst.}$  sehr klein gewählt. Die Prüfkörper sollten der theoretischen Verzweigungslast somit möglichst nahe kommen. Am Beispiel des Versuchskörpers 3S-90-P800-1, siehe Abbildung A.36b, ist dies sehr gut gelungen. Der Prüfkörper 3S-90-P800-2 erreicht eine Traglast, die oberhalb der theoretischen linear-elastischen Knicklast liegt. Dies kann durch die Form der Biegelinie erklärt werden, die Anteile einer höheren Eigenform enthält (siehe Abbildung A.38a). Ähnliches Verhalten zeigt auch der Probekörper 3S-150-P800-1, wenngleich auch nicht so ausgeprägt wie die zuvor beschriebene Stütze. Der Vergleich der Biegelinien bei unterschiedlichen Laststufen zeigt, dass die Biegelinie der ersten Eigenform ähnlicher ist als der Probekörper 3S-90-P800-2. Dadurch liegt die überkritische Versagenslast auch näher an der theoretischen Knicklast (siehe Abbildung A.38b).

Wie der Vergleich der Traglasten aus Versuch und Nachrechnung (siehe Tabelle A.17) zeigt, kann insgesamt festgestellt werden, dass die numerische Beschreibung der Traglastkurve mit sinkender Lastausmitte immer schwerer wird. Kleine Abweichungen im zehntel-Millimeter-Bereich sind im Versuch schwer überprüfbar und können bei sehr kleinen Lastausmitten große Auswirkungen haben.

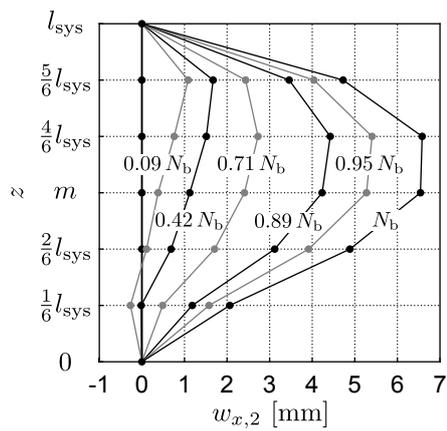


(a)  $N_{p,soll} = 800 \text{ kN}$  (VK 1, 3 u. 4)

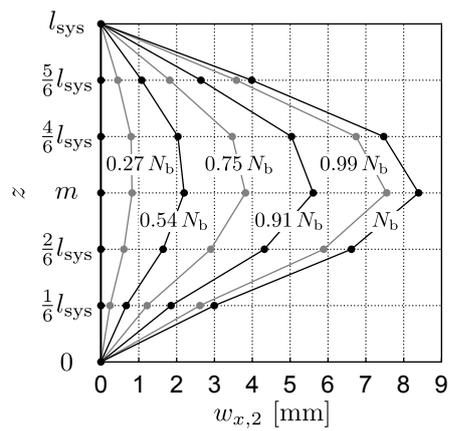


(b)  $N_{p,soll} = 800 \text{ kN}$  (VK 2 u. 3)

Abbildung A.37: Versuch und Nachrechnung - Serie 3, Schlankheit  $\lambda = 150$



(a) VK 3S-90-P800-2



(b) VK 3S-150-P800-1

Abbildung A.38: Biegelinien der Probekörper 3S-90-P800-2 und 3S-150-P800-1 mit überkritischen Knicklasten

Tabelle A.17: Serie 3: Ergebnisse und Vergleich von Versuch und Nachrechnung

VK	Versuch					Nachrechnung					
	$e_{0,\text{sol}}^a$ [mm]	$e_i^b$ [mm]	$w_{2,m}$ [mm]	$N_b$ [kN]	$N_p$ [kN]	$e_p$ [mm]	$e_{0,\text{ist}}^a$ [mm]	$w_{2,m}$ [mm]	$N_{b,\text{calc}}$ [kN]	$I_{10}$ [-]	$\frac{N_b}{N_{b,\text{calc}}}$ [%]
2S-...											
100-P0-1	15.0/15.0	-	24.8	508	0	-	14.0/14.0	24.4	509	9.0	0.2
90-P0-1	15.0/0.0	-	19.8	869	0	-	14.5/0.0	19.1	863	8.4	-0.7
90-P0-2	15.0/0.0	-	19.2	823	0	-	15.5/0.0	19.1	840	8.4	2.1
90-P800-1	2.0/2.0	-	22.1	1189	0	-	1.5/2.0	32.0	1181	-	-0.7
90-P800-2	2.0/2.0	-	6.5	1431	0	-	-0.5/1.0	23.9	1233	-	-13.8
150-P800-1	-6.0/-6.0	5.8/8.1/9.2/8.8/7.3	8.4	492	0	-	-9.0/8.0	40.2	426	-	-13.4
150-P800-2	6.0/6.0	1.0/2.0/4.5/3.2/2.0	43.2	360	0	-	3.5/6.0	49.3	370	9.1	2.8
150-P800-3 <sup>c</sup>	4.0/4.0	0.7/1.3/3.0/3.0/0.8	20.7	464	0	-	1.0/2.0	40.5	394	-	-15.1
150-P800-3 <sup>d</sup>	6.0/6.0	0.7/1.3/3.0/3.0/0.8	36.7	355	0	-	3.5/4.0	49.2	382	9.2	7.6
150-P800-4	6.0/0.0	2.5/4.0/5.3/2.5/0.8	35.1	421	0	-	3.0/-2.5	47.8	403	9.5	-4.3

<sup>a</sup>  $e_0$  ... Lastausmitte am Kopf und Fuß der Stütze

<sup>b</sup>  $e_i$  ... Gemessene Imperfektion (Messpunkte ② bis ⑥ - siehe Abbildung A.11)

<sup>c</sup> Zweite Prüfung (erste Prüfung musste abgebrochen werden)

<sup>d</sup> Dritte Prüfung (VK war n. d. zweiten Prüfung noch ungerissen, daher wurde eine dritte Prüfung durchgeführt)