

Fünfter Abschnitt.

Theorie der Ausgleichung des Dreiecksnetzes.

§. 79. Entwicklung der angewandten Rechnungsvorschriften.

Die Ermittlung der wahrscheinlichsten Richtungen auf den einzelnen Stationen hatte nach §. 18. auf Gleichungen geführt von der Form:

$$\begin{aligned} an &= + aaA - abB - acC \dots \\ bn &= - abA + bbB - bcC \dots \\ cn &= - acA - bcB + ccC \dots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \quad 1.$$

Werden nun die Beobachtungen verschiedener Stationen so mit einander verbunden, daß sich Dreiecke, Vierecke u. s. w. bilden, wodurch ein zusammenhängendes Dreiecksnetz mit mehr oder weniger überschüssigen Beobachtungen entsteht, so gehen hieraus neue Bedingungen hervor, die erfüllt werden müssen, wenn das Dreiecksnetz mathematisch möglich werden soll. Die Größen $A, B, C \dots$ in den Gleichungen 1. bleiben aber alsdann nicht mehr unabhängig von einander, sondern sie werden, durch die aus dem Dreiecksnetz hervorgehenden Bedingungen, von einander abhängig. Es müssen demnach den Gleichungen 1. auf allen Stationen noch die in dem Dreiecksnetz enthaltenen, und auf die einzelnen Stationen bezüglichen Bedingungen so hinzugefügt werden, daß daraus die wahrscheinlichsten, sämtliche Bedingungen erfüllenden Werthe von $A, B, C \dots$ gefunden werden können.

Die Verbindung dieser im Dreiecksnetz enthaltenen Bedingungen mit den Gl. 1., oder, was dasselbe ist, mit den Bedingungen auf den einzelnen Stationen, kann aber mit Hülfe der im §. 19. gegebenen Theorie leicht bewerkstelligt werden, wenn man die im Dreiecksnetz enthaltenen Bedingungen durch folgende Gleichungen darstellt:

$$\begin{aligned}
 u &= o = \mathfrak{A} + \alpha A + \alpha' B + \alpha'' C \dots \\
 u' &= o = \mathfrak{B} + \beta A + \beta' B + \beta'' C \dots \\
 u'' &= o = \mathfrak{C} + \gamma A + \gamma' B + \gamma'' C \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den willkürlichen Factoren *I, II, III* ..., und fügt man alsdann bei der ursprünglichen Formation der Gl. 5—7, §. 18., den verschiedenen Differentialquotienten nach *A, B, C* ..., aus denen oben die Gleichungen 1. entstanden sind, gleich die respectiven Differentialquotienten $\frac{du}{dA} I, \frac{du'}{dA} II, \frac{du''}{dA} III, \frac{du}{dB} I \dots$, die aus den Gl. 2. hervorgehen, hinzu, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 o &= \frac{d\Sigma}{dA} + \frac{du}{dA} I + \frac{du'}{dA} II + \frac{du''}{dA} III \dots \\
 o &= \frac{d\Sigma}{dB} + \frac{du}{dB} I + \frac{du'}{dB} II + \frac{du''}{dB} III \dots \\
 o &= \frac{d\Sigma}{dC} + \frac{du}{dC} I + \frac{du'}{dC} II + \frac{du''}{dC} III \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.}$$

Da nun die ersten Differentialquotienten die Gleichungen 1. geben, und da ferner $\frac{du}{dA} = \alpha, \frac{du}{dB} = \alpha', \frac{du}{dC} = \alpha''$ u. s. w. ist, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}
 an &= + aaA - abB - acC \dots + \alpha I + \beta II + \gamma III \dots \\
 bn &= - abA + bbB - bcC \dots + \alpha' I + \beta' II + \gamma' III \dots \\
 cn &= - acA - bcB + ccC \dots + \alpha'' I + \beta'' II + \gamma'' III \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen *A, B, C* ..., und drückt sie durch die Unbekannten *I, II, III* ... aus, so findet man:

$$\begin{aligned}
 A &= P + q I + r II + s III \dots \\
 B &= Q + q' I + r' II + s' III \dots \\
 C &= R + q'' I + r'' II + s'' III \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{5.}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 2., so verschwinden darin *A, B* und *C*, und man erhält eben so viele Gleichungen, als unbekannte Factoren vorhanden sind. Die Auflösung derselben giebt daher die Werthe der Factoren *I, II, III* ..., und setzt man dieselben in die Gleichungen 5., so findet man die wahrscheinlichsten Werthe von *A, B, C* ..., welche sämtlichen Bedingungen Genüge leisten.

Dies ist zwar die einfachste Darstellung der Sache, wenn man aber

bei der praktischen Ausführung diesen Weg einschlagen wollte, so würde die Rechnung erst beginnen können, nachdem sämtliche Beobachtungen beendet sind, wodurch die Arbeit sich dergestalt anhäufte, daß sie bei ausgedehnten Dreiecksnetzen höchst lästig werden würde. Es kömmt daher darauf an, bei der Rechnung solche Anordnungen zu treffen, daß dieselbe theilweise ausgeführt werden kann, ohne der strengen Auflösung der Aufgabe Eintrag zu thun.

Diese Absicht wird erreicht, wenn man stationsweise die Gleichungen 1. auflöst, die mit den Gleichungen 9., §. 18., gleichbedeutend sind. Man erhält dadurch die unabhängigen Werthe von $A, B, C \dots$, also die wahrscheinlichsten Richtungen auf den Stationen. Geht man dann bei der Ausgleichung des Dreiecksnetzes von diesen wahrscheinlichsten Richtungen aus, so hat man es nur noch mit den Verbesserungen zu thun, die aus den Bedingungen des Dreiecksnetzes hervorgehen. Bezeichnet man diese Verbesserungen durch (1), (2), (3), und die Änderungen, welche dadurch $an, bn, cn \dots$ erleiden, durch [1], [2], [3], so erhält man nach §. 18. Gl. 12.:

$$\begin{aligned} [1] &= + aa(1) - ab(2) - ac(3) \dots \\ [2] &= - ab(1) + bb(2) - bc(3) \dots \\ [3] &= - ac(1) - bc(2) + cc(3) \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad 6.$$

Aus diesen Gleichungen findet man nun auch, nach den Vorschriften, die in §. 18. zu den Gleichungen 10, 11 und 13 gegeben sind, die Coeffizienten der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) &= \alpha\alpha[1] + \alpha\beta[2] + \alpha\gamma[3] \dots \\ (2) &= \alpha\beta[1] + \beta\beta[2] + \beta\gamma[3] \dots \\ (3) &= \alpha\gamma[1] + \beta\gamma[2] + \gamma\gamma[3] \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad 7.$$

Bis hierher können demnach die Rechnungen auf jeder einzelnen Station unabhängig ausgeführt werden. Dies ist auch wirklich geschehen, und sie sind in dem Mafse, wie die Beobachtungen vorschritten, von Jahr zu Jahr beendet worden. Die Gl. 7., auf die es allein ankömmt, sind im 3. und 4. Abschnitt nach den Beobachtungen auf jeder Station aufgeführt worden.

In den Gl. 2. umfassen die Werthe von $A, B, C \dots$ sämtliche Bedingungen; will man aber die wahrscheinlichsten Richtungen auf den Stationen von den Verbesserungen im Dreiecksnetz trennen, wie es hier geschehen ist, so muß man anstatt $A, A + (1)$, und anstatt $B, B + (2)$ u. s. w. schreiben. Geht man nun bei Formation der Bedingungen im Dreiecksnetz

von den wahrscheinlichsten Richtungen auf den Stationen, d. h. von den Werthen $A, B, C \dots$, oder von den bei den Beobachtungen unter der Rubrik *Resultat* aufgeführten Richtungen aus, so können die Bedingungen auch nur die auf das Dreiecksnetz bezüglichen Verbesserungen enthalten, weil alsdann $A, B, C \dots$ daraus verschwinden. Man erhält demnach anstatt der Gl. 2. die folgenden:

$$o = \mathfrak{A}' + \alpha(1) + \alpha'(2) + \alpha''(3) \dots$$

$$o = \mathfrak{B}' + \beta(1) + \beta'(2) + \beta''(3) \dots \quad 8.$$

$$o = \mathfrak{C}' + \gamma(1) + \gamma'(2) + \gamma''(3) \dots$$

Betrachtet man jetzt die Gleichungen 4., so ist klar, daß dieselben unter der obigen Voraussetzung, wenn man nämlich von den wahrscheinlichsten Richtungen auf den Stationen ausgeht, ebenfalls nur diejenigen Werthe darstellen können, welche auf das Dreiecksnetz Bezug haben. Setzt man daher, wie früher, für an den Werth $an + [1]$; für bn , $bn + [2]$ u. s. w., und für $A, B, C \dots$ die wahrscheinlichsten Richtungen auf den Stationen, so gehen die Gleichungen 4. über in:

$$[1] = \alpha I + \beta II + \gamma III \dots$$

$$[2] = \alpha' I + \beta' II + \gamma' III \dots \quad 9.$$

$$[3] = \alpha'' I + \beta'' II + \gamma'' III \dots$$

Setzt man die Werthe von $[1], [2], [3] \dots$, die mit den Gl. 6. übereinstimmen, in die Gl. 7., so erhält man die Verbesserungen im Dreiecksnetz (1), (2), (3) ..., ausgedrückt durch $I, II, III \dots$, und führt man nun die gefundenen Werthe von (1), (2), (3) ... in die Gl. 8. ein, so erhält man die Endgleichungen, deren Auflösung die Werthe von $I, II, III \dots$ giebt. Setzt man endlich die bekannten Werthe von $I, II, III \dots$ in die Ausdrücke der Verbesserungen, so erhält man diese selbst. — Die auf diese Weise für die Verbesserungen (1), (2), (3) ... gefundenen Werthe erfüllen nun die Bedingungen der Gl. 8. und reduciren dieselben auf Null.

Die verbesserten Richtungen, welche man auf diese Weise für jeden Stationspunkt gefunden hat, beziehen sich aber auf die willkürlich gleich Null angenommene Richtung des ersten Objects. Für die zu ermittelnden Winkel der Dreiecke, so wie auch für die Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungsreihen unter sich, ist dies gleichgültig; will man aber den Einfluß kennen lernen, den die Ausgleichung der Richtungen und die Verbesserungen (1), (2), (3) ... im Dreiecksnetz auf den Anfangspunkt ausgeübt haben, um die Größe der Änderungen zu bestimmen, welche an dem Resultat der

Beobachtungen sämmtlicher Richtungen auf einem Dreieckspunkte angebracht werden müssen, so muß man gleich Anfangs die für den Anfangspunkt gewählte Richtung unbestimmt lassen. Bezeichnet man dieselbe durch z , so hat man für die übrigen Richtungen $z+A$, $z+B$ zu setzen. In §. 18. hätte man also schreiben müssen:

beobachtete Richtungen	0	a	b
wahrscheinlichste Richtungen	z	$z+A$	$z+B$
Unterschied	$-z$	$a-z-A$	$b-z-B$

Diese Unterschiede = x gesetzt, geben die Gleichungen:

$$0 = x + z; \quad 0 = z + A + x - a; \quad 0 = z + B + x - b \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun:

$$2\Sigma = (x+z)^2 + (z+A+x-a)^2 + (z+B+x-b)^2 + \dots + (z+x)^2 \\ + (z+A+x-a')^2 + (z+B+x-b')^2 + \dots + (z+x')^2 \\ + (z+A+x'-a'')^2 + (z+B+x'-b'')^2 + (z+C+x'-\gamma)^2 + \dots$$

so findet man:

$$\frac{d\Sigma}{dz} = 0 = (mn + m'n')z + mnx + m'n'x' + n(A+B) + n'(A+B+C) \\ - (a + a' + \dots) - (b + b' + \dots) - s' - s'' - s'''. \quad (\S. 18.)$$

Fügt man jetzt den Richtungen A, B, C noch die auf das Dreiecksnetz bezüglichen Verbesserungen hinzu, indem man für $A, A+(1)$; für $B, B+(2)$ setzt, und läßt man dann die Werthe, die nach den Gleichungen 3. und 4. §. 18. = 0 sind, verschwinden, so erhält man:

$$0 = (mn + m'n')z + (n + n')(1) + (n + n')(2) + n'(3)$$

mn bedeutet aber nach §. 18. die Summe aller Einstellungen in der Gruppe I ;

$m'n'$ die Summe aller Einstellungen in der Gruppe II ;

$n + n'$ - - - - - von A ;

$n + n'$ - - - - - B ;

n' - - - - - C .

Bezeichnet man daher durch h die Summe aller Einstellungen des ersten Objectes auf jeder Station, auf welches sich z bezieht; durch h' die Summe aller Einstellungen von A ; durch h'' die Summe aller Einstellungen von B u. s. w., so folgt:

$$0 = z(h + h' + h'' + h''' \dots) + h'(1) + h''(2) + h'''(3) \dots$$

Setzt man in dieser Gleichung für (1), (2), (3) die gefundenen Verbesserungen, so findet man z , und, da jede Station eine solche Gleichung liefert, die Verbesserungen sämmtlicher Nullpunkte.

Der Gang der vollständigen Ausgleichsrechnungen besteht daher:

1. In dem Aufsuchen der Bedingungsgleichungen oben unter 8.
2. In der Zusammenstellung der Gleichungen 9.
3. In der Darstellung der Verbesserungen (1), (2), (3) durch die Factoren *I, II, III* nach Gl. 7.
4. In der Formation der Endgleichungen, oder in der Substitution der Werthe von (1), (2), (3) in die Bedingungsgleichungen.
5. In der Auflösung der Endgleichungen, oder in der Bestimmung der Factoren *I, II, III*
6. In der Substitution dieser Factoren in die *ad* 3. gefundenen Ausdrücke zur Bestimmung der Verbesserungen (1), (2), (3)
7. In der Bestimmung der Veränderungen, welche die Nullpunkte auf den einzelnen Stationen erleiden.
8. In der Zusammenstellung sämmtlicher Verbesserungen, welche den beobachteten Richtungen hinzuzufügen sind.

Diese 8 Theile der Rechnungen werden später für jeden Abschnitt der Beobachtungen in eben so vielen §§. der Reihe nach aufgeführt werden.