



Dipl.-Ing. Daniel Muschick

Online-Parameteridentifikation bei Asynchronmaschinen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Em. O.Univ.-Prof. Dr.-Ing. Nicolaos Dourdoumas

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Kurzfassung

Für den effizienten Betrieb einer Asynchronmaschine mit Hilfe der Feldorientierten Regelung ist eine genaue Kenntnis des zugrundeliegenden mathematischen Modells nötig. Die in diesem auftretenden Parameter unterliegen jedoch während des Betriebes – zum Beispiel auf Grund der Erwärmung der Spulen oder der Sättigung des Eisens – Schwankungen, welche sich negativ auf die Regelgüte auswirken. Diese Arbeit untersucht und verbessert daher existierende, beziehungsweise entwickelt möglichst einfache Methoden, um die Parametervariationen online mitschätzen zu können. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Identifikation der Rotorzeitkonstante gerichtet, welche die Schätzung des Rotorflusses – und damit die Qualität der Feldorientierung – maßgeblich beeinflusst.

Konkret wird die Schätzung aller elektrischen Parameter mit Hilfe von *least squares*-Verfahren für den Fall mangelnder Anregung untersucht und um einen Algorithmus erweitert, welcher die Stabilität in diesem Fall sicherstellt. Die dabei identifizierten Parameter weisen eine Redundanz auf und müssen eine nichtlineare Nebenbedingung erfüllen. Es wird auf deren Berücksichtigung eingegangen sowie bei Einsatz eines KALMAN-Filters die Projektion der Kovarianzmatrizen vorgeschlagen.

Für den stationären Betriebszustand werden Methoden der direkten Parameterberechnung sowie ein Störgrößenbeobachter vorgestellt, mit welchen die Rotorzeitkonstante unabhängig von einem ausgewählten anderen elektrischen Parameter ermittelt werden kann. Schließlich werden iterative Methoden entwickelt, welche bestimmte Arbeitspunktwechsel für eine robuste Parameteridentifikation ausnutzen.

Abstract

The efficient operation of induction machines using field oriented control depends on the precise knowledge of the underlying mathematical model. However, the model's parameters can vary largely during operation, due to e.g. thermal heating of the coils or iron saturation. These variations severely deteriorate control performance. This thesis thus investigates and tries to improve existing solutions, as well as introduces new methods capable of tracking these parameter variations online. It focuses on the identification of the rotor time constant, which is of paramount importance when estimating the rotor flux used for field orientation.

Least-squares based solutions are reviewed; when the persistence of excitation condition is violated, these tend to be unstable, so an extension using directional forgetting is proposed. Furthermore, the parameter vector identified contains redundant information. This can be remedied by incorporating constraints and projecting the corresponding error covariance matrices of a KALMAN filter.

In steady state operation, methods for direct parameter calculation are shown and a disturbance observer is proposed. Both can be used to determine the rotor time constant independent of the knowledge of a selected other parameter. Finally, iterative methods are demonstrated which take advantage of specific transitional control maneuvers and allow for robust identification of the rotor time constant.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Dissertation identisch.

Graz, am _____

Datum

Unterschrift

Affidavit

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present doctoral dissertation.

Graz, _____

Date

Signature

Diese Arbeit ist den folgenden Personen gewidmet, welche mir sehr nahe standen, einen großen Einfluss auf mich ausübten und während meiner Arbeit an der Dissertationsschrift leider – teilweise allzu früh – verstorben sind:

Barbara Muschick, meiner geliebten Mutter
Hans Seitz, meinem „Großvater“
Reinhold Treml, meinem „Spiegelvater“
Norio Kawasoe, unserem Nationaltrainer

Requiescant in pace.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer wissenschaftlichen Kooperation des Institutes für Regelungs- und Automatisierungstechnik (IRT) der Technischen Universität Graz mit der Firma Kristl, Seibt & Co. Für das in mich gesetzte Vertrauen, die Zurverfügungstellung des Versuchsaufbaus, die aufgewendete Zeit, anregende Diskussionen und richtungsweisende Hinweise danke ich Herrn Privatdozenten Robert Bauer, ohne welchen diese Arbeit wohl nie entstanden wäre. Für seine unerschütterliche Treue gegenüber dem IRT danke ich Herrn Doktor Wilfried Rossegger.

An meiner in den letzten Jahren liebgewonnenen Interimszweith Heimat, dem IRT, gilt mein Dank zuallererst Herrn Professor Nicolaos Dourdoumas, welcher sich über seine Emeritierung hinaus sowohl fachlich als auch persönlich motivierend mit meiner Arbeit auseinandergesetzt hat und stets bemüht war, niemanden jemals die Schönheit der Regelungstechnik vergessen zu lassen. Seinem Nachfolger, Herrn Professor Martin Horn, sowie meinen zahlreichen Arbeitskollegen und Freunden danke ich für die schönen und lehrreichen Jahre der Zusammenarbeit sowie das Verständnis für die Wichtigkeit von Kaffeepausen. Insbesondere erinnere ich mich gerne an meine kulinarisch von Frau Sonja Moschick angeregte Anfangszeit, die bedächtigen Worte von Herrn Martin Steinberger sowie die fortwährende Förderung des „Ginko“ gemeinsam mit Herrn Christoph Schörghuber, meinem treuesten Begleiter. Nicht zu vergessen auch die fachlichen Diskussionen mit Herrn Richard Seeber sowie die prägnanten Analysen des Fußballgeschehens durch die Kristl, Seibt & Co. – Delegation am IRT!

Dass ich mich bei alledem nicht in den Untiefen der Technik verloren habe, verdanke ich meinen langjährigsten Freunden, den stets antreibenden, naturliebenden Familienvätern Matthias C. Kettmann und Peter Egger, den moralischen Instanzen Barney + Do Bauer sowie der ehemaligen Tanzschulrunde und den Mitgliedern des Karatevereins.

Natürlich ist diese Doktorarbeit nur das Penthouse eines langsam gewachsenen Bildungshochhauses, für dessen solides Fundament und finanzielle Absicherung ich meinen Eltern und Großeltern zutiefst dankbar bin. Schließlich möchte ich meinem Bruder und seiner Freundin Juliane für die vielen heimeligen, teegewärmten gemeinsamen Abende danken.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xix
I. Einführung und Grundlagen	1
1. Einführung	3
2. Mathematisches Modell	7
2.1. Herleitung	7
2.2. Koordinatensysteme	12
2.2.1. Allgemeines Koordinatensystem	12
2.2.2. Rotorflussfestes Koordinatensystem	15
2.3. Stationärer Zustand	16
2.3.1. Ersatzschaltbild	17
II. Methoden zur Schätzung des Rotorflusses	21
3. Einführung	23
4. Strommodell	25
4.1. Statorströme	26
4.2. Rotorfluss	27
4.3. Elektrisches Moment	28
4.4. Andere Kenngrößen	32
4.4.1. Wirkleistung	33
4.4.2. Blindleistung	35
5. Spannungsmodell	37
5.1. Parametersensitivitäten	38

6. LUENBERGER-Beobachter	39
6.1. Eigenwertvorgabe	40
6.1.1. Vernachlässigbare Drehzahländerung	40
6.1.2. Berücksichtigung der Drehzahländerungen	41
6.2. Auswirkungen einer hohen Verstärkung	43
7. Reduzierter Beobachter	45
7.1. Stabilität	47
7.2. Wahl des Verstärkungsfaktors	48
8. Störgrößenbeobachter	49
8.1. Adaptierung der Parameter	51
8.2. Berücksichtigung der Statorzeitkonstante	52
8.3. Gleichzeitige Berücksichtigung von Stator- und Rotorzeitkonstante	53
8.4. Reduzierter Störgrößenbeobachter	54
8.5. Praktische Überlegungen	56
8.5.1. Grenzwerte für die Beobachtbarkeit	56
8.5.2. Grenzwerte für die Dynamik	57
8.5.3. Grenzwerte für die Parameternachführung	57
8.5.4. Übergänge	58
8.6. Simulation	59
8.7. Experiment	62
III. Effekte zeitdiskreter Ansteuerung	65
9. Einführung	67
10. Zeitdiskrete Vorsteuerung	69
10.1. Eingangsseitige Kompensation	70
10.2. Ausgangsseitige Kompensation	72
11. Berücksichtigung beim Beobachterentwurf	75
11.1. Strommodell	75
11.2. LUENBERGER-Beobachter	75
12. Simulationsergebnisse	77
13. Zusammenfassung	81

IV. Parameteridentifikation	83
14. Einführung	85
15. Dynamischer Betrieb	89
15.1. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante	90
16. Langsame Änderung der Drehzahl	93
16.1. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante	93
16.2. Least-squares – basierte Verfahren	96
16.2.1. Methode der kleinsten Fehlerquadrate	99
16.2.2. Rekursive Formulierung	100
16.2.3. Exponentielles Vergessen	100
16.2.4. Richtungsabhängiges Vergessen	102
16.2.5. Berücksichtigung der quadratischen Nebenbedingung . .	108
16.2.6. Berücksichtigung von Vorwissen	109
16.2.7. KALMAN-Filter	111
16.2.8. Ergebnisse	114
17. Stationärer Zustand	123
17.1. Sensitivitätsanalyse	125
17.1.1. Elektrisches Moment	126
17.1.2. Wirkleistung	127
17.1.3. Blindleistung	128
17.2. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante	130
17.2.1. Ergebnisse	134
17.2.2. Berücksichtigung von Parametersensitivitäten	135
18. Verstimmungsbasierte Verfahren	143
18.1. Direkte Bestimmung mittels der Momentenverstimmung	144
18.1.1. Bestimmung des Trägheitsmomentes	145
18.2. Iterative Bestimmung mittels des geschätzten Drehzahlverlaufes	146
18.3. Iterative Bestimmung mittels Momentenmaximierung/ Strommi-	
nimierung	148
18.4. Iterative Bestimmung über Verstimmungsminimierung	149
19. Zusammenfassung	151
A. Berücksichtigung von quadratischen Nebenbedingungen	155
A.1. Vereinfachung der Nebenbedingung	157
A.1.1. Beispiel Punkt auf Kreis	159

A.2.	Auflösen der Gleichungen nach λ^*	160
A.2.1.	CHOLESKY-Zerlegung der Kovarianzmatrix	160
A.2.2.	Dimensionsreduktion der zu invertierenden Matrix	162
A.2.3.	Approximative Lösung	163
A.3.	Projektion der Kovarianzmatrix	164
A.3.1.	Linearisierung der Transformation	165
A.3.2.	Die Unscented Transformation	166
A.3.3.	Beispiel Punkt auf Kreis	167
B.	Prüfstand	169
B.1.	Aufbau	169
B.2.	Parameterwerte	171
B.3.	Messsignale	172
B.4.	Verwendete Szenarien	173
C.	Regelung	177
C.1.	Stromregler	177
C.2.	Flussregler	178
C.3.	Drehzahlregler	179
D.	Ableitungsschätzungen	183
D.1.	Zur Wahl von n und N	185
D.2.	Übergang zu Integralrechnung: Äquivalenz zur algebraischen Ableitungsschätzung	186
Literatur		189

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Magnetische Flüsse in einem Transformator	19
2.2.	Ersatzschaltbild bei sinusoidaler Anregung einer Phase bzw. gleichförmiger Drehung des Ständerspannungsraumzeigers.	19
4.1.	Strommodell. Verhalten von $\log_2(\Psi_R^R / \hat{\Psi}_R^R)$ (oben) bzw. $\Delta\rho$ (unten) in Abhängigkeit des geschätzten Verhältnisses $\hat{\gamma}$. Links bei Variation von $\hat{\tau}_R$, rechts von \hat{L}_h . In grün: $x = 1/2$, blau: $x = 1$ und rot: $x = 2$, mit $x \in \{\tau_R/\hat{\tau}_R, L_h/\hat{L}_h\}$	29
4.2.	Wahres vs. geschätztes Drehmoment über verschiedene geforderte Schlupfwinkelgeschwindigkeiten bei gleichem Rotorfluss. Durchgezogen exakt nach (4.19), strichliert approximativ nach (4.25) berechnet.	31
8.1.	Raumzeiger im Rotorkoordinatensystem im stationären Zustand. Modellfehler bewirken falsche Schätzungen $\hat{\Psi}_R^R$ bzw. \hat{i}_S^R	50
8.2.	Vergleich der Rotorflussschätzung mittels Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta). In grün ist der wahre Verlauf dargestellt.	61
8.3.	Relative Parameterschätzfehler der Störgrößenbeobachter (grün vollständig, blau reduziert)	61
8.4.	Experimenteller Vergleich der Rotorflussschätzung mittels Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta).	63
8.5.	Vergleich von Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta) bei der Schätzung des Luftspaltemoments m_M . In grün ist der gemessene Verlauf dargestellt.	63
8.6.	Relative Änderung der Parameterschätzwerte der Störgrößenbeobachter (grün vollständig, blau reduziert)	64
12.1.	Verlauf des Drehmoments mit (durchgezogen) und ohne (strichliert) Vordrehung des Spannungsraumzeigers um $\omega_\Psi T/2$	78

12.2. Strukturbild der Steuerung mit Kompensation und Beobachter im RFKS.	78
12.3. Verlauf des flussbildenden Stromes i_{sd} während einer Abtastzeit.	79
12.4. Geschätzter Verlauf von m_M mittels Prädiktor im RFKS bzw. LUENBERGER-Beobachter im RKS.	79
16.1. Entwicklung der Diagonalelemente von \mathbf{P} bei der Schätzung aller vier elektrischen Parameter an Hand von Simulationsdaten mittels (a) RLS (b) eines KALMAN-Filters. Oben jeweils ohne, unten mit richtungsabhängigem Vergessen. Der exponentielle Verlauf beim RLS-Verfahren sowie der lineare beim KALMAN-Filter sind deutlich erkennbar.	116
16.2. Simulationsergebnis der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels eines KALMAN-Filters. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau. Die Berücksichtigung von Beschränkungen verbessert das Ergebnis deutlich (linearisierte Projektion der Kovarianzmatrix in rot, mittels UT transformiert in türkis)	117
16.3. Experimentelle Ergebnisse der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels des RLS-Verfahrens. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau.	119
16.4. Experimentelle Ergebnisse der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels eines KALMAN-Filters. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau. Linearisierte Projektion der Kovarianzmatrix in rot, mittels UT transformiert in türkis	120
17.1. Allgemeine Struktur einer Referenzmodell- beziehungsweise Modellabgleichmethode	124
17.2. Realisierung der Referenzmodellmethode mittels eines PI-Reglers	124
17.3. Relative Änderungen $\log_2 (\hat{m}_M / m_M)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma / \tau_R$. In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$	127
17.4. Relative Änderungen $\log_2 (\hat{P} / P)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma / \tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$	129
17.5. Relative Änderungen $\log_2 (\hat{Q} / Q)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma / \tau_R$. In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$	130

17.6. Relative Sensitivitäten bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$	131
17.7. Simulationsergebnis der direkten Berechnung der inversen Rotorzeitkonstante $1/\tau_R$ im dynamischen Fall (grün, (15.8)) sowie unter der Annahme konstanter Drehzahl (blau, (16.4)) und stationärer Verhältnisse (rot, (17.16)). Schließlich unabhängig von τ_S berechnet (türkis).	134
17.8. Relative Änderungen $\log_2(\tau_R/\hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$	136
17.9. Relative Änderungen $\log_2(\tau_R/\hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . Berechnung <i>unabhängig</i> von dem Statorwiderstand R_S . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$	137
17.10 Relative Änderungen $\log_2(\tau_R/\hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . Berechnung <i>unabhängig</i> von der Streuziffer σ . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$	138
17.11 Experimentelles Ergebnis der iterativen Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels der direkten Methode für stationäre Zustände. Ohne Berücksichtigung von L_σ , τ_R , R_S und σ in grün, blau, rot respektive türkis. In magenta schließlich die über (17.21) iterativ angepasste Schätzgröße.	140
18.1. Entwicklung der berechneten Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_R$, des geschätzten Drehmoments \hat{m}_M und des Winkelfehlers $\Delta\rho$ während und nach einer geregelten Drehzahlrampe. Die Farben grün, blau und rot entsprechen dabei $\tau_R/\hat{\tau}_R = 1/\sqrt{2}$, $\tau_R/\hat{\tau}_R = 1$ bzw. $\tau_R/\hat{\tau}_R = \sqrt{2}$	147
B.1. Mechanischer Aufbau des Prüfstandes. Die Komponenten sind a) ASM1, b) Drehmomentsensor, c) Lagerbock, d) Schwungmasse, e) Inkrementalgeber, f) elastische Kupplung und g) ASM2.	171

B.2. Signalflüsse der einzelnen gemessenen Größen. Rot hinterlegt die internen, nicht beeinflussbaren Vorgänge. In den Kreisen sind die aufgezeichneten Größen eingezeichnet.	173
B.3. Erstes Szenario: Auf- und absteigende Drehzahlrampen	174
B.4. Zweites Szenario: Stückweise konstante, monoton steigende Soll-drehzahlen	175
C.1. Kaskadenregelkreisstruktur für die Rotorflussregelung	178
C.2. Einfacherer Proportionalregler mit Vorsteuerung	178
C.3. Drehzahlregler mit Störgrößenbeobachter	181

Nomenklatur

β	Verhältnis von L_h zu $L_\sigma L_R$
γ	Verhältnis zwischen momentenbildendem und flussbildendem Strom i_{sq}/i_{sd}
κ	Verhältnis zwischen wahrer und geschätzter Rotorzeitkonstante $\tau_R/\hat{\tau}_R$
L_h	Hauptinduktivität, engl. <i>mutual inductance</i>
L_σ	Transiente Statorinduktivität, engl. <i>stator transient inductance</i>
ω_S	Schlupfwinkelgeschwindigkeit $d\rho/dt$
ρ	Winkel zwischen Rotor und Rotorflussraumzeiger
σ	Streuzyffler bzw. Blondelscher Koeffizient, engl. <i>total leakage factor</i>
τ_R	Rotorzeitkonstante
τ_S	Statorzeitkonstante
J	Trägheitsmoment
p	Polpaarzahl
EFRLS	<i>Exponential Forgetting Recursive Least Squares</i>
EWRLS	<i>Exponentially Weighted Least Squares</i>
FIR	Endliche Impulsantwort, engl. <i>finite impulse response</i>
MRAS	Modellabgleichmethoden, engl. <i>Model Reference Adaptive Systems</i>
RFKS	Rotorflussfestes Koordinatensystem

RKS	Rotorfestes Koordinatensystem
RLS	Rekursive Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl. <i>Recursive Least Squares</i> ,
S	Schlupf ω_S / ω_Ψ
SKS	Statorfestes Koordinatensystem
UT	Unscented Transformation

Teil I.

Einführung und Grundlagen

1. Einführung

Unter den elektrischen Antriebsmaschinen erfreuen sich derzeit die Synchronmaschine und die Asynchron- oder Induktionsmaschine großer Beliebtheit. Erstere auf Grund ihres kleinen Formfaktors, ihres niedrigen Trägheitsmomentes und der hohen Leistungsdichte, welche sie zum idealen Arbeitspferd der elektrischen Mobilität gemacht hat. Zweitere auf Grund ihres einfachen und robusten Aufbaus und niedrigen Preises. Dank moderner Umrichter- und Halbleitertechnologie sowie der Verfügbarkeit performanterer Steuerungseinheiten ist ein hochdynamischer Betrieb ähnlich den Gleichstrommotoren möglich, ohne deren inhärente Nachteile in Kauf nehmen zu müssen.

Die verfügbare Literatur zur Modellierung und Regelung der Maschinen ist enorm umfangreich. Standardwerke wie [64] oder [39] geben erste Einblicke, dahinter jedoch eröffnet sich ein eigener Kosmos an Forschungsliteratur. Steht man vor der Aufgabe, ein Problem näher zu bearbeiten, fühlt man sich wie der Konsument vor dem Kühlregal, der sich für ein Milchprodukt entscheiden soll. So kommt es, dass schon jahrzehntelang bekannte und in vielfältiger Weise gelöste Probleme einer allgemein gültigen Lösung harren, welche ohne längere Zeit des Studiums der Fachliteratur von Firmen umgesetzt werden könnte. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem ebensolchen Problem.

Von der Firma Kristl, Seibt & Co. werden Asynchronmotoren als Lastmaschinen in Antriebsstrangprüfständen hochdynamisch betrieben. Ihre Aufgabe ist es dabei, das Fahrverhalten eines Autos auf einem vorgegebenen Straßenprofil detailgetreu wiederzugeben: Direkt an die Radachsen geflanscht müssen sie sämtliche Momente, welche das Rad über dessen Reibung mit dem Straßenbelag erfahren würde, simulieren. Dafür ist eine hohe Regelgüte notwendig, welche ein hinreichend genaues Modell der Asynchronmaschine voraussetzt.

Im länger andauernden Betrieb kommt es jedoch auf Grund der Erwärmung der Wicklungen zu Veränderungen der Widerstandswerte und damit zu Variationen der Parameter des Modells. Andere Ursachen für eine Verstimmung des

Modells sind Sättigungserscheinungen, nicht modellierte Effekte wie die Stromverdrängung oder Eisenverluste. Es ist also nötig, die Parameter der Maschine im Betrieb nachzuführen, um für eine konstant gute Regelgüte zu sorgen.

Wie oben erwähnt könnte man das Problem als gelöst betrachten. Die Habilitationsschrift von Michalik [49] gibt eine umfangreiche Zusammenfassung von Parameteridentifikationsmethoden und mathematischen Modellen. In der Übersicht von Toliyat [70] sind über 200 Artikel referenziert, die sich mit der Materie beschäftigen, und die Zeit ist seitdem nicht stillgestanden. Das Ziel dieser Arbeit ist es also nicht, in aussichtsloser Mission einen umfassenden Einblick in die existierenden Verfahren zu geben, sondern gezielt möglichst einfache Methoden vorzustellen oder zu entwickeln.

Als Grundlage dazu dient ein besonders einfaches Standardmodell, welches in Kapitel 2 hergeleitet wird. Basierend auf diesem Modell werden Beobachter beschrieben, welche die nicht messbare Rotorflussverkettung schätzen. Diese Größe ist für die feldorientierte Regelung von höchster Bedeutung, wird aber auf Grund von Parameterschätzfehlern oft falsch bestimmt. Daher werden in Teil II die Auswirkungen von Parameterschätzfehlern auf die Beobachter genauer untersucht. Unter anderem wird in Kapitel 8 auch ein neues Beobachterkonzept vorgestellt, welches auf sehr einfache Art und Weise die Abhängigkeit von zwei besonders kritischen Parameterwerten eliminiert.

Bei der Untersuchung der Beobachter mittels Simulation trat ein Phänomen zu Tage, welches aus der zeitdiskreten Realisierung der Regelung sowie der Beobachter resultierte. So wurden auch bei genau bekannten Parameterwerten nicht immer die korrekten Rotorflusswerte oder Luftspaltnomente geschätzt. Ursache dafür war die ungenügende Berücksichtigung der schnell übereinander drehenden Koordinatensysteme bei der Diskretisierung. In Teil III werden daher eingangs- und ausgangseitige Kompensationsmethoden vorgeschlagen, welche die Auswirkungen dieses Effekts minimieren sollen.

Der Hauptteil IV schließlich beschäftigt sich mit den eigentlichen Parameteridentifikationsverfahren, welche während des Betriebes angewandt werden können. Dabei handelt es sich zunächst um eine Erweiterung der standardmäßig eingesetzten Methode der kleinsten Fehlerquadrate, welche in der Praxis in ihrer Reinform nicht sinnvoll eingesetzt werden kann. Gerade während des Betriebes können die Eingangsgrößen des Systems nicht beliebig vorgegeben werden, womit eine Grundvoraussetzung für die Konvergenz und Stabilität des Verfahrens verletzt ist. Eine zweite Erweiterung betrifft die inhärente Überbestimmtheit der Methode, welche über Nebenbedingungen berücksichtigt wird. Aus Gründen

der Übersichtlichkeit wird der allgemeine Fall deren Anwendung in Anhang [A](#) behandelt.

Ferner wird eine direkte Methode der Parameterberechnung vorgestellt, welche durch ihre Einfachheit besticht. Sie kann als purifizierte Form der in der Fachliteratur und Praxis äußerst beliebten Modellreferenzmethoden angesehen werden. Schließlich werden noch andere, iterative Methoden vorgestellt, welche zwar strenggenommen nicht während des Betriebes angewandt werden, aber als Alternativen zum herkömmlichen Kurzschlussversuch bei der Kommissionierung dienen können.

Alle in dieser Arbeit angeführten Simulationen oder experimentellen Versuche wurden, wenn nicht anders angegeben, mit der in Anhang [B](#) beschriebenen Asynchronmaschine der Firma Lenze durchgeführt. Anhang [C](#) geht kurz auf die verwendeten Regelkonzepte ein, während Anhang [D](#) die verwendete Methode zur Bestimmung von Ableitungen der Signale beschreibt und einen Denkanstoß für einen Vergleich mit der algebraischen Methode gibt.

Schließlich kann der werte Leser in Kapitel [19](#) die zusammengefassten Erkenntnisse der Arbeit einsehen.

2. Mathematisches Modell

Die effiziente Steuerung und Regelung einer Asynchronmaschine benötigt ein hinreichend deskriptives mathematisches Modell der Maschine, welches die maßgeblichen Effekte abbildet, ohne zu detailliert zu sein. In der Fachliteratur hat sich daher ein Standardmodell durchgesetzt, welches einige physikalische Phänomene bewusst vernachlässigt. Dieses wird als *Grundwellenmodell* bezeichnet.

Zunächst wird von einem idealisierten Aufbau der Maschine ausgegangen: er sei komplett symmetrisch, der Luftspalt überall gleich breit, die Verteilung der Flussdichte im Luftspalt exakt sinusförmig entlang des Umfanges. Ferner werden die magnetischen Eigenschaften der Materialien idealisiert: sowohl die laminierten Stator- als auch die Rotorbleche haben unendliche Permeabilität, die Magnetisierungskennlinie sei komplett linear (keine Sättigungserscheinungen). Zudem werden Eisenverluste ignoriert.

2.1. Herleitung

Auf Grund der Symmetrie können die drei Strangströme (und -spannungen) des Dreiphasennetzes i_{Sa} , i_{Sb} und i_{Sc} , welche in jeweils um $\gamma := 2\pi/3$ Radiant versetzten, konzentriert angenommenen Spulen fließen, vereinfacht durch komplexwertige Raumzeiger dargestellt werden [35]

$$\dot{i}_S^s(t) = \frac{2}{3} \left[i_{Sa}(t) + i_{Sb}(t)e^{j\gamma} + i_{Sc}(t)e^{j2\gamma} \right] = i_{S\alpha} + ji_{S\beta}. \quad (2.1)$$

Der Index S bezeichnet eine Statorgröße, der hochgestellte Index S hingegen das Koordinatensystem, in welchem der Raumzeiger betrachtet wird. In diesem Fall handelt es sich um das statorfeste Koordinatensystem (SKS). Wird kein hochgestellter Index angegeben, so gilt der Zusammenhang unabhängig vom Koordinatensystem, solange alle vorkommenden Größen in ein und demselben liegen.

2. Mathematisches Modell

Die Reduktion auf zwei orthogonale Größen $i_{S\alpha}$ und $i_{S\beta}$ ist ohne Informationsverlust möglich, da die Strangströme sowohl bei Stern-, als auch bei Dreieckschaltung in Summe immer null ergeben müssen

$$i_{S_a}(t) + i_{S_b}(t) + i_{S_c}(t) \equiv 0, \quad (2.2)$$

sich also immer ein Strom aus den anderen errechnen lässt und damit redundant ist. Der Faktor $2/3$ führt dazu, dass die reelle Komponente $i_{S\alpha}$ mit dem Strangstrom i_{S_a} übereinstimmt.

Dieser in der Fachliteratur als CLARKE- oder $\alpha - \beta$ -Transformation bezeichnete Zusammenhang kann auch in Matrixform angeschrieben werden

$$\begin{bmatrix} i_{S\alpha} \\ i_{S\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=:T} \begin{bmatrix} i_{S_a} \\ i_{S_b} \\ i_{S_c} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Die letzte Zeile entspricht der Nullbedingung (2.2) und garantiert die Invertierbarkeit der Transformationsmatrix T .

Die Rotor- und Statorströme i_R beziehungsweise i_S erzeugen magnetische Flüsse. Prinzipiell setzen sich diese wie bei einem allgemeinen Transformator aus Streu- und Hauptanteilen zusammen, siehe auch Abbildung 2.1

$$\begin{aligned} \Psi_S &= \Psi_{\mu S} + \Psi_{\sigma S} + \Psi_{\mu R}, \\ \Psi_R &= \Psi_{\mu S} + \Psi_{\sigma R} + \Psi_{\mu R}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei betrachtet man Flüsse, welche durch beide Spulen treten, als Haupt- (Ψ_{μ}), solche, welche nur durch eine Spule treten als Streuanteil (Ψ_{σ}). Der mathematische Zusammenhang zu den fließenden Strömen i wird im angenommenen linearen Fall durch die konstanten Induktivitäten L beschrieben¹ $\Psi = Li$.

Der Hauptanteil der Flussverkettungen bildet den Luftspaltfluss und wird auf Grund der Symmetrievoraussetzung durch die für beide Schleifen gleiche Gegeninduktivität L_h gebildet²

$$\Psi_h := \Psi_{\mu S} + \Psi_{\mu R} = L_h(i_S + i_R). \quad (2.5)$$

¹Der lineare Zusammenhang zwischen Strom und magnetischem Fluss gilt nur bei geringen Strömen. Die Induktivität ist von der magnetischen Leitfähigkeit μ des von den Spulen umschlossenen Eisens abhängig, welche wieder von der vorhandenen magnetischen Feldstärke H über eine Magnetisierungskennlinie (i.A. mit Hysterese) bestimmt wird. Gerät das Eisen in Sättigung, sinkt die magnetische Leitfähigkeit drastisch. Es folgt, da $H = H(i)$, dass die Induktivität eine Funktion des magnetisierenden Stromes ist $L = L(i)$.

²engl. *mutual inductance*, M

Die Streuteile ergeben sich aus dem Produkt der Streuinduktivitäten $L_{\sigma S}$ und $L_{\sigma R}$, welche verhältnismäßig klein sind $L_{\sigma S}, L_{\sigma R} \ll L_h$, mit den sie durchfließenden Strömen. Es ergeben sich die Gleichungen für die Stator- und Rotorflussraumzeiger:

$$\begin{aligned}\Psi_S &= (L_h + L_{\sigma S})i_S + L_h i_R, \\ \Psi_R &= L_h i_S + (L_h + L_{\sigma R})i_R\end{aligned}\quad (2.6)$$

beziehungsweise mit den Abkürzungen

$$L_R := L_h + L_{\sigma R}, \quad L_S := L_h + L_{\sigma S} \quad (2.7)$$

die einfachen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\Psi_S &= L_S i_S + L_h i_R, \\ \Psi_R &= L_h i_S + L_R i_R.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Mit (2.8) können die Flussraumzeiger Ψ_S und Ψ_R auf einfache Art und Weise durch die Stromraumzeiger i_S und i_R ausgedrückt werden (und umgekehrt):

$$\begin{bmatrix} \Psi_S \\ \Psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & L_h \\ L_h & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = \frac{1}{L_S L_R - L_h^2} \begin{bmatrix} L_R & -L_h \\ -L_h & L_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_S \\ \Psi_R \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Führt man die *Streuzyiffer* σ , die transiente Statorinduktivität L_σ sowie den Faktor β ein

$$\sigma := \frac{L_R L_S - L_h^2}{L_R L_S}, \quad L_\sigma := \sigma L_S = \frac{L_R L_S - L_h^2}{L_R}, \quad \beta := \frac{1}{L_\sigma} \frac{L_h}{L_R} \quad (2.10)$$

erhält man schließlich

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} & -\beta \\ -\beta & \frac{1}{\sigma L_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_S \\ \Psi_R \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Die Statorströme werden von den Statorspannungen u_S getrieben, dem wirken die durch die sich ändernden Flüsse induzierten Spannungen entgegen. Es ergeben sich die einfachen Differentialgleichungen:

$$u_S^s = R_S i_S^s + \frac{d\Psi_S^s}{dt},$$

$$u_R^R = R_R i_R^R + \frac{d\Psi_R^R}{dt}. \quad (2.12)$$

Dabei bezeichnen i_R^R und i_S^S den Rotor- beziehungsweise Statorstromraumzeiger, u_R^R und u_S^S den Rotor- beziehungsweise Statorspannungsraumzeiger sowie Ψ_R^R und Ψ_S^S die Flussverkettungen im Rotor beziehungsweise Stator. Die Wicklungswiderstände werden mit R_R und R_S bezeichnet. Der hochgestellte Index R symbolisiert das mit der elektrischen Winkelgeschwindigkeit $\omega_R = p\omega_{\text{mech}}$ über den Stator hinwegdrehende rotorfeste Koordinatensystem (RKS), wobei p die Polpaarzahl der Maschine und ω_{mech} die mechanische Rotorwinkelgeschwindigkeit darstellen. Der momentane elektrische Winkel des Rotorkoordinatensystems relativ zum Stator wird mit φ_R bezeichnet. Die Rotorspannungen u_R^R können über Schleifringe aufgebracht werden; bei den in dieser Arbeit betrachteten Kurzschlussläufern ist die Sekundärseite kurzgeschlossen, die Rotorspannungen sind null.

Die zwei Differentialgleichungen in (2.12) beschreiben Relationen in unterschiedlichen Koordinatensystemen. Zur Vereinheitlichung wird hier die zweite Differentialgleichung in das statorfeste Koordinatensystem transformiert. Dies entspricht einer Drehung der Größen um den Winkel φ_R , was einer Multiplikation mit $e^{j\varphi_R}$ entspricht. Bei der Ableitung des Rotorflusses muss zusätzlich die Drehung mit berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} i_R^R &= e^{-j\varphi_R} i_R^S, \\ \frac{d\Psi_R^R}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(e^{-j\varphi_R} \Psi_R^S \right) = e^{-j\varphi_R} \left(\frac{d\Psi_R^S}{dt} - j\omega_R \Psi_R^S \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Damit ergibt sich aus (2.12) mit $u_R^R = 0$

$$\begin{aligned} u_S^S &= R_S i_S^S + \frac{d\Psi_S^S}{dt}, \\ 0 &= R_R i_R^S + \frac{d\Psi_R^S}{dt} - j\omega_R \Psi_R^S. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Weder die Flussverkettungen Ψ_R und Ψ_S noch der Rotorstromraumzeiger i_R können mit vertretbarem Aufwand gemessen werden. Ziel ist es also, diese aus den Gleichungen (2.14) möglichst zu eliminieren beziehungsweise mittels der Gleichungen (2.8) durch andere Größen zu ersetzen.

In der Fachliteratur haben sich dabei zwei Modelle durchgesetzt: einerseits das i_S/Ψ_R -Modell mit den Zustandsgrößen Statorstrom und Rotorflussverkettung, andererseits das Ψ_S/Ψ_R -Modell mit den beiden Flussverkettungen als

Zustandsgrößen. In der Folge soll das erstere bevorzugt behandelt werden, da die Messgröße i_S direkt einer Zustandsgröße entspricht. Das zweite Modell würde bei der Berücksichtigung von Sättigungseffekten Vorteile aufweisen, da keine Ableitungen der Induktivitäten vorkommen [23].

In (2.14) müssen zunächst der Rotorstrom i_R und der Statorfluss Ψ_S durch die Zustandsgrößen i_S und Ψ_R ausgedrückt werden³

$$\begin{bmatrix} \Psi_S \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\sigma & \frac{L_h}{L_R} \\ -\frac{L_h}{L_R} & \frac{1}{L_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ \Psi_R \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

womit sich schließlich das elektrische Modell der Asynchronmaschine im statorfesten Koordinatensystem ergibt

$$\frac{di_S^s}{dt} = -\frac{1}{\tau_S} i_S^s - \beta \frac{d\Psi_R^s}{dt} + \frac{1}{L_\sigma} u_S^s \quad (2.16a)$$

$$\frac{d\Psi_R^s}{dt} = \frac{L_h}{\tau_R} i_S^s - \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \Psi_R^s. \quad (2.16b)$$

wobei die Stator-, sowie die Rotorzeitkonstante eingeführt wurden

$$\tau_R := \frac{L_R}{R_R}, \quad \tau_S := \frac{L_\sigma}{R_S}. \quad (2.17)$$

Als Zustandsraummodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} := [i_S^s \ \Psi_R^s]^T$ und der Ausgangsgröße $y := i_S^s$ angeschrieben lautet dies

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R}\right) & \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \end{bmatrix} u_S^s, \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Es handelt sich bei diesen Gleichungen um ein lineares, komplexwertiges und durch die Abhängigkeit von der Rotorwinkelgeschwindigkeit ω_R *zeitvariantes* Modell der Asynchronmaschine. Nur für den Fall konstanter Rotorwinkelgeschwindigkeiten kann daher (2.18) in Form einer Übertragungsfunktion von der Statorspannung u_S^s zu dem Statorstrom i_S^s angeschrieben werden

$$G^S(s) := \left. \frac{i_S^s(s)}{u_S^s(s)} \right|_{AW=0} = \frac{\frac{1}{L_\sigma} s + \frac{1}{L_\sigma} \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right)}{s^2 + s \left(\frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\sigma \tau_R} - j\omega_R \right) + \frac{1}{\tau_S \tau_R} - j\omega_R \frac{1}{\tau_S}}. \quad (2.19)$$

³Die Gleichungen (2.10) und (2.15) gelten in allen Koordinatensystemen, solange alle Größen in demselben Koordinatensystem ausgedrückt werden.

Der mechanische Teil der Asynchronmaschine lässt sich einfach über den Drallsatz beschreiben

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_R}{dt} = m_M - m_L, \quad (2.20)$$

wobei J und p das Trägheitsmoment respektive die Polpaarzahl, m_L das (unbekannte) Lastmoment sowie m_M das Luftspaltmoment

$$m_M = \frac{3p}{2} \frac{L_h}{L_R} \operatorname{Im} \{ (\Psi_R^s)^* i_S^s \} \quad (2.21)$$

bezeichnen. Mit $(\cdot)^*$ wird die komplexe Konjugation symbolisiert.

2.2. Koordinatensysteme

Das mathematische Modell in (2.18) kann auch aus der Sicht anderer, rotierender Koordinatensysteme betrachtet werden. So ändern sich die elektrischen Größen aus der Sicht eines mit dem Rotor mitdrehenden Koordinatensystems nicht mehr so schnell, was sich insbesondere bei einer zeitdiskreten Implementierung positiv auswirkt (siehe dazu auch Teil III). Aus regelungstechnischer Sicht besonders vorteilhaft ist zudem ein mit dem Rotorflussraumzeiger Ψ_R synchron mitdrehendes Koordinatensystem. In diesem vereinfachen sich die Differentialgleichungen im stationären Zustand zu algebraischen Gleichungen, die besonders einfach zu untersuchen sind.

2.2.1. Allgemeines Koordinatensystem

Ausgangspunkt ist das komplexwertige Modell im Statorkoordinatensystem (2.18)

$$\frac{dx^s}{dt} = \mathbf{A}^s x^s + \mathbf{b} u_{\zeta}^s. \quad (2.22)$$

Alle interessierenden Koordinatensysteme sind Spezialfälle eines allgemeinen, mit der Winkelgeschwindigkeit ω_K über den Stator rotierenden Koordinatensystems. Die Transformation von Größen im statorfesten Koordinatensystem in

dieses erfolgt über den momentanen Winkel φ_K . Für den Zustandsvektor mit zwei Elementen gilt insbesondere

$$\mathbf{x}^K = \mathbf{R}_S^K \mathbf{x}^S, \quad \mathbf{R}_S^K := e^{-j\varphi_K} \mathbf{E}_{2 \times 2}. \quad (2.23)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} . Dies entspricht einer regulären, *zeitvarianten* Zustands-
transformation. Mit

$$\frac{d\mathbf{R}_S^K}{dt} = -j\omega_K \mathbf{R}_S^K, \quad \mathbf{x}^S = (\mathbf{R}_S^K)^{-1} \mathbf{x}^K, \quad \mathbf{R}_S^K \mathbf{A}^S (\mathbf{R}_S^K)^{-1} = \mathbf{A}^S \quad (2.24)$$

erhält man für die zeitliche Ableitung von \mathbf{x}^K

$$\frac{d\mathbf{x}^K}{dt} = \underbrace{(\mathbf{A}^S - j\omega_K \mathbf{E})}_{=: \mathbf{A}^K} \mathbf{x}^K + \mathbf{b} u_S^K. \quad (2.25)$$

Folglich lauten die Systemgleichungen im Rotorkoordinatensystem (RKS) mit $\omega_K = \omega_R$ und $\mathbf{x}^R := \begin{bmatrix} i_S^R & \Psi_R^R \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^R}{dt} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R\right) & \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\frac{1}{\tau_R} \end{bmatrix} \mathbf{x}^R + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \end{bmatrix} u_S^R, \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x}^R. \end{aligned} \quad (2.26)$$

sowie im rotorflussfesten Koordinatensystem (RFKS) mit $\omega_K = \omega_\Psi = \omega_R + d\rho/dt$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^\Psi}{dt} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_\Psi\right) & \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\frac{1}{\tau_R} - \frac{d\rho}{dt} \end{bmatrix} \mathbf{x}^R + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \end{bmatrix} u_S^\Psi, \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x}^R, \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei ρ den Winkel zwischen Rotor und Rotorflussraumzeiger darstellt. Dessen Ableitung $d\rho/dt$ wird als die Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S bezeichnet.

Die Real- und Imaginärteile der Raumzeiger werden im Rotorkoordinatensystem mit den Indices k und l , im rotorflussfesten Koordinatensystem typischerweise mit d und q dargestellt

$$i_S^R = i_{Sk} + j i_{Sl}, \quad i_S^\Psi = i_{Sd} + j i_{Sq}. \quad (2.28)$$

Übertragungsfunktion

Auch die Übertragungsfunktion (2.19) im statorfesten Koordinatensystem kann einfach in andere Koordinatensysteme übertragen werden. Die Signale im allgemeinen Koordinatensystem ergeben sich bei konstanter Drehzahl im Zeitbereich zu

$$x^K(t) = e^{-j\omega_K t} x^S(t). \quad (2.29)$$

Entsinnt man sich der Regel

$$e^{at} x(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(s - a) \quad (2.30)$$

für die LAPLACE-Transformation, erhält man unmittelbar

$$G^K(s) := \left. \frac{i_S^K(s)}{u_S^K(s)} \right|_{AW=0} = \left. \frac{i_S^S(s + j\omega_R)}{u_S^S(s + j\omega_R)} \right|_{AW=0} = G^S(s + j\omega_R). \quad (2.31)$$

Für das Rotorkoordinatensystem zum Beispiel ergibt das

$$G^R(s) = \left. \frac{i_S^R(s)}{u_S^R(s)} \right|_{AW=0} = \frac{s \frac{1}{L_\sigma} + \frac{1}{L_\sigma \tau_R}}{s^2 + s \left(\frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\sigma \tau_R} + j\omega_R \right) + \frac{1}{\tau_R} \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \frac{1}{\sigma} \right)}. \quad (2.32)$$

Eine Übertragungsfunktion im rotorflussfesten Koordinatensystem wäre auf den stationären Zustand (siehe Abschnitt 2.3) beschränkt, da die Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems, und damit die Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S , konstant sein muss.

Drehmoment

Die Drehmomentgleichung (2.21) ist von Natur aus von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, da

$$(\Psi_R^S)^* i_S^S = \left(e^{j\varphi_K} \Psi_R^K \right)^* e^{j\varphi_K} i_S^K = (\Psi_R^K)^* i_S^K \quad (2.33)$$

gilt.

2.2.2. Rotorflussfestes Koordinatensystem

Das Modell für ein rotorflussfestes Koordinatensystem in Gleichung (2.27) kann weiter vereinfacht werden, indem man die reelle Achse des Koordinatensystems mit dem Rotorflussraumzeiger in Übereinstimmung bringt, so dass der Imaginärteil der Rotorflussraumzeigers stets null ist und der Realteil dem Betrag des Raumzeigers entspricht

$$\Psi_{Rd} = \Psi_R, \quad \Psi_{Rq} \equiv 0. \quad (2.34)$$

Eine solche Transformation wird auch PARK-Transformation genannt [54]. Statt des Imaginärteils nimmt man den Winkel ρ als Zustandsvariable hinzu

$$\rho = \arg \{ \Psi_R^R \}, \quad \tan \rho = \frac{\Psi_{Rl}}{\Psi_{Rk}}. \quad (2.35)$$

Dessen Ableitung berechnet sich mit

$$\frac{d}{dt} \tan \rho = \frac{1}{\cos^2 \rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.36)$$

zu

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\dot{\Psi}_{Rl} \Psi_{Rk} - \dot{\Psi}_{Rk} \Psi_{Rl}}{\Psi_{Rk}^2 + \Psi_{Rl}^2} = \frac{L_h i_{Sl} \Psi_{Rk} - i_{Sk} \Psi_{Rl}}{\tau_R |\Psi_R|^2} = \frac{L_h i_{Sq}}{\tau_R \Psi_R}. \quad (2.37)$$

Damit ergibt sich schließlich das *nichtlineare*, reellwertige Modell

$$\frac{di_{Sd}}{dt} = -\frac{1}{\tau_S} i_{Sd} + \omega_\Psi i_{Sq} - \beta \frac{d\Psi_R}{dt} + \frac{1}{L_\sigma} u_{Sd}, \quad (2.38a)$$

$$\frac{di_{Sq}}{dt} = -\frac{1}{\tau_S} i_{Sq} - \omega_\Psi i_{Sd} - \omega_\Psi \beta \Psi_R + \frac{1}{L_\sigma} u_{Sq}, \quad (2.38b)$$

$$\frac{d\Psi_R}{dt} = \frac{1}{\tau_R} (-\Psi_R + L_h i_{Sd}), \quad (2.38c)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{L_h i_{Sq}}{\tau_R \Psi_R}. \quad (2.38d)$$

Man erkennt, dass die Amplitude des Rotorflussraumzeigers, Ψ_R , einzig von dem Realteil des Statorstromraumzeigers, dem Blindstrom i_{Sd} abhängt. Umgekehrt verhält es sich mit der Schlupfwinkelgeschwindigkeit $d\rho/dt$, welche – bei konstantem Fluss Ψ_R – nur von dem Imaginärteil des Stromraumzeigers, dem Wirkstrom i_{Sq} abhängt.

2. Mathematisches Modell

Ebenso erhält man für das Luftspaltmoment – wiederum bei fixiertem Ψ_R – eine Abhängigkeit ausschließlich von i_{Sq}

$$m_M = \frac{3p}{2} \frac{L_h}{L_R} \Psi_R i_{Sq}. \quad (2.39)$$

Damit verhält sich eine stromgespeiste Asynchronmaschine in diesem Koordinatensystem wie eine fremderregte Gleichstrommaschine.

Will man die Verkopplung der strombildenden mit der momentenbildenden Komponente bei der Stromregelung eliminieren, führt man *Kompensationsspannungen* $u_{S,komp}^\Psi = u_{Sd,komp} + j u_{Sq,komp}$

$$\begin{aligned} u_{Sd,komp} &:= -\omega_\Psi L_\sigma i_{Sq} + \frac{L_h}{L_R} \frac{d\Psi_R}{dt} \\ u_{Sq,komp} &:= \omega_\Psi L_\sigma i_{Sd} + \frac{L_h}{L_R} \omega_\Psi \Psi_R \end{aligned} \quad (2.40)$$

ein. Mit dem neuen fiktiven Eingangsspannungsraumzeiger

$$u_{S,i}^\Psi := u_S^\Psi - u_{S,komp}^\Psi \quad (2.41)$$

vereinfachen sich die Gleichungen (2.38a) und (2.38b) zu Verzögerungsgliedern erster Ordnung

$$\frac{di_S^\Psi}{dt} = -R_S i_S^\Psi + u_{S,i}^\Psi. \quad (2.42)$$

2.3. Stationärer Zustand

Der stationäre Zustand wird durch unveränderliche Rotordrehzahl, konstantes Moment und konstanten Fluss charakterisiert

$$\omega_R = \text{konst}, \quad m_M = \text{konst}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \text{konst}. \quad (2.43)$$

Praktisch bedeutet das, dass sämtliche elektrischen Größen mit derselben Winkelgeschwindigkeit über den Stator drehen, der Rotorflusswinkelgeschwindigkeit ω_Ψ . Aus Sicht des rotorfesten Koordinatensystems verringert sich die Geschwindigkeit zur Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S ; im rotorflussfesten

Koordinatensystem sind alle Größen Konstanten und können über algebraische Gleichungen aus den arbeitspunktbestimmenden Größen m_M , ω_R und Ψ_R berechnet werden:

$$\begin{aligned} i_{Sd} &= \frac{\Psi_R}{L_h} & u_{Sd} &= R_S i_{Sd} - \omega_\Psi L_\sigma i_{Sq} \\ i_{Sq} &= \frac{2}{3p} \frac{L_R}{L_h} \frac{m_M}{\Psi_R} & u_{Sq} &= R_S i_{Sq} + \omega_\Psi L_S i_{Sd} \\ \omega_S &= \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}} = \frac{2}{3p} R_R \frac{m_M}{\Psi_R^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da alle Größen mit derselben Winkelgeschwindigkeit drehen, können deren Ableitungen auch einfach angeschrieben werden. Im RKS gilt zum Beispiel für eine Größe x^R , welche zu einem Anfangszeitpunkt $t = 0$ den Winkel φ_0 relativ zum Rotor besaß,

$$x^R = |x| e^{j(\omega_S t + \varphi_0)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = j\omega_S x^R. \quad (2.45)$$

Damit kann in der Übertragungsfunktion 2.32 der LAPLACE-Operator s durch $s = j\omega_S$ ersetzt werden, wodurch einige Berechnungen wesentlich vereinfacht werden. In den folgenden Kapiteln wird von diesem Zusammenhang oft Gebrauch gemacht werden.

2.3.1. Ersatzschaltbild

In der Fachliteratur bedient man sich zur Beschreibung der Asynchronmaschine gerne eines Ersatzschaltbildes, wie es in Abbildung 2.2 zu sehen ist [39].

Ausgangspunkt zu dessen Herleitung ist die Gleichung (2.14), in welcher die Flüsse durch die jeweiligen Ströme i_R und i_S ersetzt wurden:

$$\begin{aligned} u_S^S &= R_S i_S^S + (L_{\sigma S} + L_h) \frac{di_S^S}{dt} + L_h \frac{di_R^S}{dt}, \\ 0 &= R_R i_R^R + L_h \frac{di_S^R}{dt} + (L_{\sigma R} + L_h) \frac{di_R^R}{dt}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Auf das Statorkoordinatensystem bezogen ergibt sich für den Rotor

$$0 = R_R i_R^S + L_h \left(\frac{di_S^S}{dt} - j\omega_R i_S^S \right) + (L_{\sigma R} + L_h) \left(\frac{di_R^S}{dt} - j\omega_R i_R^S \right). \quad (2.47)$$

Im stationären Zustand rotieren alle Raumzeiger mit der Flusswinkelgeschwindigkeit ω_Ψ , es gilt also für die Ableitungen

$$\frac{di_S^s}{dt} = j\omega_\Psi i_S^s, \quad \frac{di_R^s}{dt} = j\omega_\Psi i_R^s, \quad (2.48)$$

womit sich für die harmonischen Größen folgende Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} u_S^s &= R_S i_S^s + j\omega_\Psi [(L_{\sigma S} + L_h) i_S^s + L_h i_R^s], \\ 0 &= R_R i_R^s + j\omega_S [L_h i_S^s + (L_{\sigma R} + L_h) i_R^s]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Damit die Induktivitäten Impedanzen darstellen können, müssen sie allesamt multiplikativ mit der Winkelgeschwindigkeit der Eingangsgröße u_S^s , also ω_Ψ , auftreten. Dazu dividiert man die zweite Gleichung durch den sogenannten Schlupf S

$$S := \frac{\omega_S}{\omega_\Psi} \quad (2.50)$$

und erhält

$$\begin{aligned} u_S^s &= (R_S + j\omega_\Psi L_{\sigma S}) i_S^s + j\omega_\Psi L_h (i_R^s + i_S^s), \\ 0 &= \left(\frac{R_R}{S} + j\omega_\Psi L_{\sigma R} \right) i_R^s + j\omega_\Psi L_h (i_R^s + i_S^s). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Hauptinduktivität wird also von den beiden Strömen i_R^s und i_S^s durchflossen. Diese Summe bezeichnet man daher als Magnetisierungsstrom i_μ

$$i_\mu := i_R^s + i_S^s. \quad (2.52)$$

Aus dem Ersatzschaltbild erhält man sofort die Gesamtimpedanz

$$\frac{u_S^s}{i_S^s} = X(j\omega_\Psi) = R_S + j\omega_\Psi L_{\sigma S} + \frac{(j\omega_\Psi L_h) (R_R + j\omega_S L_{\sigma R})}{R_R + j\omega_S L_R}, \quad (2.53)$$

welche der inversen Übertragungsfunktion (2.19) an der Stelle $s = j\omega_\Psi$ entspricht.

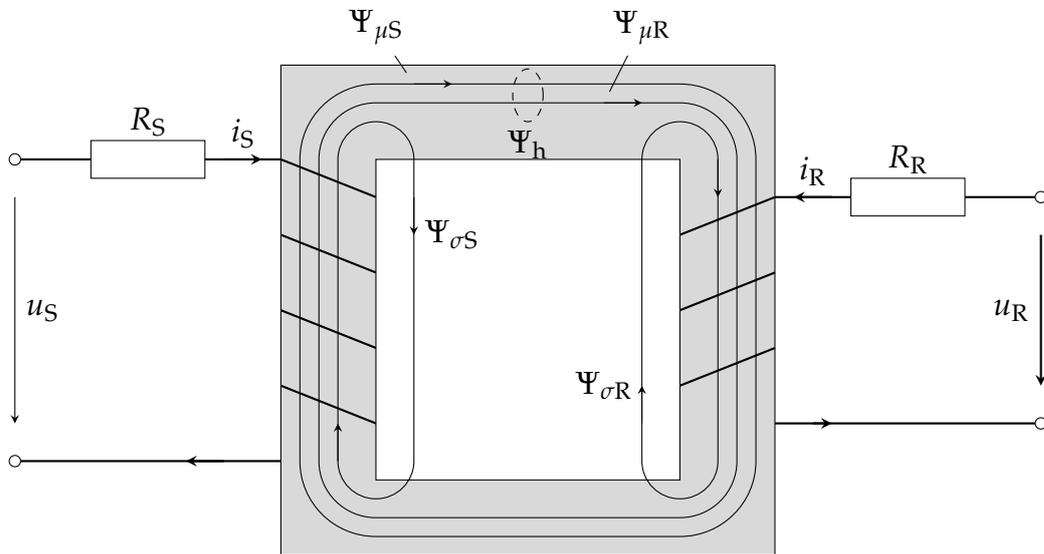


Abbildung 2.1.: Magnetische Flüsse in einem Transformator

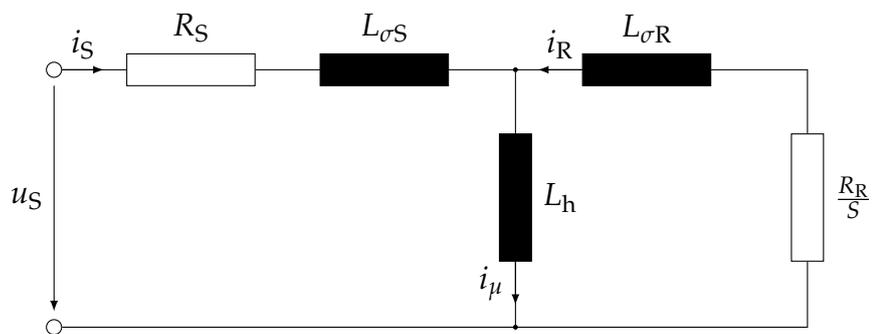


Abbildung 2.2.: Ersatzschaltbild bei sinusoidaler Anregung einer Phase bzw. gleichförmiger Drehung des Ständerspannungsraumzeigers.

Teil II.

Methoden zur Schätzung des Rotorflusses

3. Einführung

Die Verwendung falsch angenommener Parameterwerte, insbesondere einer falsch angenommenen Rotorzeitkonstante $\hat{\tau}_R \neq \tau_R$ hat auf die Zustandsschätzung und Regelung einer Asynchronmaschine negative Auswirkungen. Primäre Ursache dafür ist eine Verstimmung bei der Berechnung des Rotorflussraumzeigers, welche sich sowohl auf dessen Betrag als auch dessen Phase auswirkt. Dadurch werden die zur Regelung verwendeten fluss- und momentenbildenden Ströme i_{sd} und i_{sq} falsch transformiert, es kommt unter anderem zu einer falschen Schätzung des Luftspaltemomentes m_M . Ferner gelingt die Kompensation der Nichtlinearitäten nicht mehr, da die Kompensationsspannungen $u_{S, \text{komp}}^\Psi$ sowohl falsch berechnet als auch falsch transformiert werden. Eine Entkopplung von Moment- und Flussregelung ist damit nicht mehr exakt gewährleistet.

Es kommt auch unabhängig von der schlechteren Regelgüte zu Einbußen bei der Dynamik. Der Rotorfluss wird meist so eingestellt, dass eine ausreichend große Stromreserve zum schnellen Aufbau eines Luftspaltemomentes vorliegt. Wird der Rotorfluss jedoch betragsmäßig zu klein geschätzt, wird ein in Wirklichkeit zu großer Rotorfluss realisiert und ein größerer Strom i_{sd} zu dessen Erhaltung benötigt. Damit sinkt die Stromreserve merklich. Ein zu groß geschätzter Rotorfluss wiederum kann dazu führen, dass das Nennmoment nur mit erhöhtem Stromaufwand erreicht werden kann.

In diesem Kapitel wird auf die mathematisch beschreibbaren Auswirkungen falsch angenommener Parameterwerte auf die Schätzung des Rotorflusses, sowie weitergehend auf das Moment, eingegangen. Dazu werden verschiedene Methoden der Rotorflussbestimmung angegeben und untersucht.

Insbesondere bei Verwendung eines reinen Prädiktors zur Bestimmung des Rotorflusses – also bei Vorwärtssimulation des Strommodells – kommt es im eingeschwungenen Zustand zu einfach beschreibbaren Zusammenhängen, die in Kapitel 4 hergeleitet werden. Dabei stellt sich heraus, dass diese einfache Methode besonders anfällig auf Variationen in der Rotorzeitkonstante ist. Versuche, diese Anfälligkeit zu mindern, führen zu anderen Schätzkonzepten wie dem

3. Einführung

Spannungsmodell (Kapitel 5) oder echten Beobachtern (Kapitel 6 und 7), welche allerdings wieder von anderen Maschinenparametern abhängen und somit nur Kompromisslösungen darstellen.

Der abschließend vorgestellte Störgrößenbeobachter (Kapitel 8) ist ein neuer Vorschlag, wie die Abhängigkeit von der Rotorzeitkonstante zumindest in stationären Zuständen gänzlich eliminiert werden kann. Seine Sensitivität bezüglich anderer Maschinenparameter ist relativ gering, und sein Verhalten in Simulationen und Experimenten ist vielversprechend.

4. Strommodell

Die naheliegendste Methode, den nicht messbaren Rotorfluss Ψ_R zu bestimmen, besteht darin, die seinen Betrag und seine Phase beschreibenden Differentialgleichungen (2.38c) und (2.38d) nachzubilden. Der Statorstromraumzeiger i_S wird als bekannt vorausgesetzt, womit sich die simulierten Rotorflusddifferentialgleichungen direkt zu

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_R \frac{d\hat{\Psi}_R}{dt} &= \hat{L}_h \hat{i}_{Sd} - \hat{\Psi}_R, \\ \hat{\tau}_R \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \hat{L}_h \frac{\hat{i}_{Sq}}{\hat{\Psi}_R}\end{aligned}\quad (4.1)$$

ergeben. Da der Strom als Eingangsgröße gewählt wurde, wird diese Methode auch als Strommodell bezeichnet.¹ Die Größen mit Dach bezeichnen die jeweiligen Schätzwerte der Maschinenparameter beziehungsweise der elektrischen Größen.

Auffallend ist, dass bereits die Eingangsgrößen i_{Sd} und i_{Sq} nicht exakt bekannt sind. Diese mussten erst über den Schätzwert des Winkels $\hat{\rho}$ in das rotorflussfeste Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wirken sich Fehler in $\hat{\rho}$ direkt auf die transformierten Größen im RFKS aus!

Um eine quantitative Aussage über die Verstimmung des Rotorflussraumzeigers machen zu können, wird das System im *stationären Zustand* betrachtet. Dabei dreht die Maschine bei konstanter Drehzahl, konstantem Moment und konstantem Fluss

$$\frac{d\omega_R}{dt} = 0, \quad \frac{dm_M}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_R}{dt} = 0. \quad (4.2)$$

¹Die Differentialgleichung für den Winkel ist ein reiner Integrierer und scheint daher nur grenzstabil zu sein. In Wahrheit bilden die Differentialgleichungen für Betrag und Winkel gemeinsam aber das äquivalente Strommodell im rotorfesten Koordinatensystem (2.26) ab, welches asymptotisch stabil ist! Es muss allerdings darauf geachtet werden, dass die Ströme über den vom Strommodell geschätzten Winkel $\hat{\rho}$ – und keinem anderen! – in das RFKS transformiert werden. Diese Transformation schließt nämlich die „Regelschleife“ und führt zu der gewünschten Stabilität.

Aus (4.1) erkennt man sofort den Grenzwert des echten bzw. geschätzten Rotorflussbetrages

$$\Psi_R = L_h i_{Sd}, \quad \hat{\Psi}_R = \hat{L}_h \hat{i}_{Sd}. \quad (4.3)$$

4.1. Statorströme

Da im stationären Zustand sowohl das Moment als auch der Fluss konstant sind, müssen auch die moment- und flussbildenden Ströme i_{Sq} und i_{Sd} konstant sein. Das bedeutet, dass der Statorstromraumzeiger synchron mit dem Rotorflussraumzeiger mit der sogenannten Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S ,

$$\omega_S := \frac{d\rho}{dt} = \frac{L_h}{\tau_R} \frac{i_{Sq}}{\Psi_R} \stackrel{(4.3)}{=} \frac{1}{\tau_R} \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}}, \quad (4.4)$$

über den Rotor dreht. Die Ströme werden jedoch mittels der geschätzten Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_S$ vorgegeben, es muss also die echte Winkelgeschwindigkeit im stationären Zustand mit der geschätzten übereinstimmen!

$$\omega_S = \frac{1}{\tau_R} \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\hat{\tau}_R} \frac{\hat{i}_{Sq}}{\hat{i}_{Sd}} = \hat{\omega}_S \quad (4.5)$$

Einen weiteren Zusammenhang zwischen den echten Stromkomponenten i_{Sd} und i_{Sq} und deren Schätzwerten kann über den Betrag des Raumzeigers hergeleitet werden. Dieser ist nämlich in beiden Fällen gleich

$$|i_S| = \sqrt{i_{Sd}^2 + i_{Sq}^2} = \sqrt{\hat{i}_{Sd}^2 + \hat{i}_{Sq}^2}. \quad (4.6)$$

Daraus und mit (4.5) sowie den Abkürzungen

$$\gamma := \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}}, \quad \hat{\gamma} := \frac{\hat{i}_{Sq}}{\hat{i}_{Sd}}, \quad \kappa := \frac{\tau_R}{\hat{\tau}_R} = \frac{\gamma}{\hat{\gamma}} \quad (4.7)$$

ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Strömen

$$\begin{aligned} i_{Sd} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2}} |i_S|, & i_{Sq} &= \frac{\kappa\hat{\gamma}}{\sqrt{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2}} |i_S|, \\ \hat{i}_{Sd} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\gamma}^2}} |i_S|, & \hat{i}_{Sq} &= \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{1 + \hat{\gamma}^2}} |i_S|, \end{aligned} \quad (4.8)$$

welche im Folgenden noch gute Dienste leisten werden.

4.2. Rotorfluss

Die Verstimmung des Rotorflussbetrages im stationären Zustand kann über (4.3) und (4.8) sofort angegeben werden!

$$\frac{\Psi_R}{\hat{\Psi}_R} = \frac{L_h i_{Sd}}{\hat{L}_h \hat{i}_{Sd}} = \frac{L_h}{\hat{L}_h} \sqrt{\frac{1 + \hat{\gamma}^2}{1 + (\kappa \hat{\gamma})^2}} \quad (4.9)$$

Über die Verstimmung des Rotorflusswinkels $\Delta\rho := \rho - \hat{\rho}$ gibt die Übertragungsfunktion im rotorfesten Koordinatensystem Auskunft. Dort lautet die Differentialgleichung des Rotorflusses gleich wie jene des Betrages, beschreibt nun aber die Dynamik eines komplexen Raumzeigers

$$\hat{\tau}_R \frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} = \hat{L}_h i_S^R - \hat{\Psi}_R^R. \quad (4.10)$$

Die Eingangsgröße i_S^R ist bei messbarem Rotorwinkel φ_R bekannt, wodurch die Schätzung des Rotorflussraumzeigers nur mehr von den Maschinenparameterschätzwerten $\hat{\tau}_R$ und \hat{L}_h abhängt.

Im LAPLACE-Bereich wird der Zusammenhang durch

$$\hat{G}_{\Psi_R i_S}(s) = \left. \frac{\Psi_R^R(s)}{i_S^R(s)} \right|_{AW=0} = \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R s + 1} \quad (4.11)$$

ausgedrückt. Damit kann sofort ein komplexwertiges Verhältnis zwischen echtem und geschätztem Rotorfluss angeschrieben werden

$$\frac{\Psi_R^R(s)}{\hat{\Psi}_R^R(s)} = \frac{G_{\Psi_R i_S}(s) i_S^R(s)}{\hat{G}_{\Psi_R i_S}(s) i_S^R(s)} = \frac{L_h \hat{\tau}_R s + 1}{\hat{L}_h \tau_R s + 1}. \quad (4.12)$$

Während der Verstärkungsfaktor offensichtlich unabhängig von der Schlupffrequenz $s = j\omega_S$ durch das Verhältnis L_h/\hat{L}_h vorgegeben ist, wirkt eine falsche Schätzung der Rotorzeitkonstante τ_R wie ein *lead*- beziehungsweise *lag*-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$R_I(s) := \frac{1 + \frac{s}{\omega_Z}}{1 + \frac{s}{\omega_N}} \quad \text{mit} \quad \omega_Z = \frac{1}{\hat{\tau}_R}, \quad \omega_N = \frac{1}{\tau_R}. \quad (4.13)$$

Das Verhältnis von geschätztem zu echtem Wert der Rotorzeitkonstante entspricht dem Quotienten der Knickfrequenzen m :

$$m := \frac{\omega_N}{\omega_Z} = \frac{\hat{\tau}_R}{\tau_R} = \frac{1}{\kappa} \quad (4.14)$$

Mit den üblichen Formeln (siehe z.B. [25]) erhält man als maximale Betrags- beziehungsweise Phasenabweichung:

$$\Delta A_{\max} := \max_{s=j\omega_S} \frac{|\Psi_R^R|}{|\hat{\Psi}_R^R|} = \frac{L_h}{\hat{L}_h} m, \quad \Delta\rho_{\max} = \arcsin\left(\frac{m-1}{m+1}\right) \quad (4.15)$$

Die entsprechenden Verläufe für die in Anhang B beschriebene Maschine sind für $\kappa = 1/2$, $\kappa = 1$ und $\kappa = 2$ in Abbildung 4.1 dargestellt. Man erkennt deutlich die Verdoppelung beziehungsweise Halbierung des Betrages für hohe Schlupfgeschwindigkeiten ω_S , sowie die maximale Phasenhebung beziehungsweise Senkung von $\Delta\rho_{\max} \approx 19,5^\circ$ bei $\omega_S = 1/\sqrt{\tau_R \hat{\tau}_R}$. Die rechts abgebildete Abhängigkeit von der Hauptinduktivität L_h spiegelt die alleinige Beeinflussung des Betrages wider.

Im Folgenden soll kurz eine näherungsweise Berechnung des Winkelfehlers $\Delta\rho$ dargestellt werden. Mit (4.12) sowie (4.5) und $s = j\omega_S$ ermittelt man den komplexen Quotienten der Verstimmung:

$$\frac{\Psi_R^R(j\omega_S)}{\hat{\Psi}_R^R(j\omega_S)} = \frac{L_h}{\hat{L}_h} \frac{j\hat{\gamma} + 1}{j\kappa\hat{\gamma} + 1} = \frac{L_h}{\hat{L}_h} \left(\frac{1 + \kappa\hat{\gamma}^2}{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2} + j \frac{\hat{\gamma}(1 - \kappa)}{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2} \right). \quad (4.16)$$

Die Phasenverschiebung $\Delta\rho$ kann angenähert werden durch

$$\Delta\rho = \arctan\left(\frac{\hat{\gamma}(1 - \kappa)}{1 + \kappa\hat{\gamma}^2}\right) \stackrel{\Delta\rho \ll 1}{\approx} \frac{\hat{\gamma}(1 - \kappa)}{1 + \kappa\hat{\gamma}^2}. \quad (4.17)$$

Sie ist unabhängig von dem Schätzwert für die Hauptinduktivität \hat{L}_h ! Ihr Vorzeichen wird alleine durch das Verhältnis κ und den Betriebspunkt $\hat{\gamma}$ festgelegt

$$\text{sign}(\Delta\rho) = \begin{cases} \text{sign}(\hat{\gamma}), & \kappa < 1 \\ -\text{sign}(\hat{\gamma}), & \kappa > 1 \end{cases}. \quad (4.18)$$

Im motorischen Betrieb $\text{sign}(\hat{\gamma}) = 1$ eilt der Rotorflussschätzwert also dem echten Rotorfluss nach, wenn die Rotorzeitkonstante zu groß geschätzt wird $\kappa < 1$.

4.3. Elektrisches Moment

Das Verhältnis von echtem zu geschätztem Moment ist mit (2.39) und (4.8) im stationären Zustand exakt angebar

$$\frac{m_M}{\hat{m}_M} = \frac{\mu L_h i_{Sd} i_{Sq}}{\hat{\mu} \hat{L}_h \hat{i}_{Sd} \hat{i}_{Sq}} = \frac{\mu L_h \kappa (1 + \hat{\gamma}^2)}{\hat{\mu} \hat{L}_h (1 + (\kappa\hat{\gamma})^2)}, \quad (4.19)$$

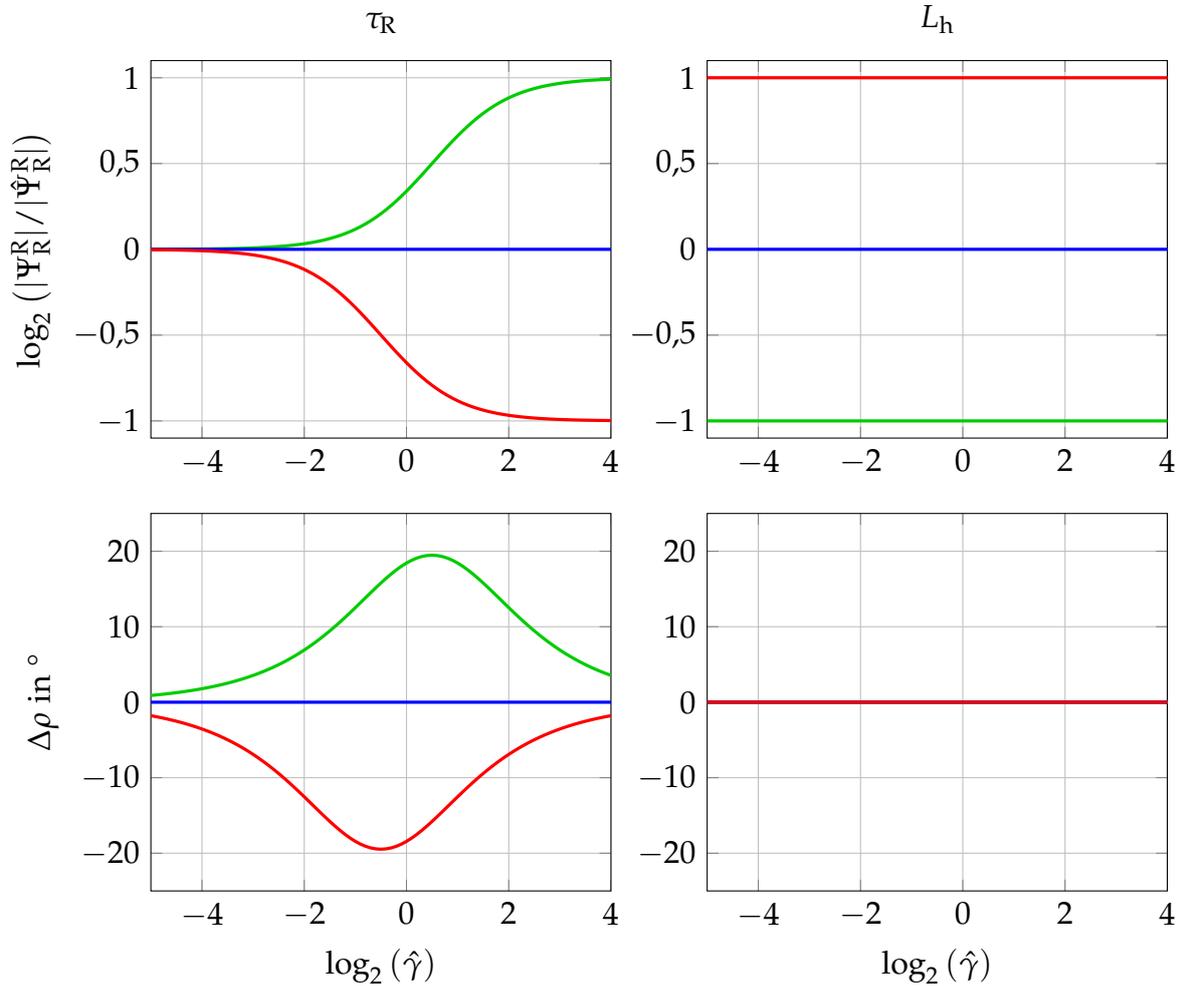


Abbildung 4.1.: Strommodell. Verhalten von $\log_2(|\Psi_R^R|/|\hat{\Psi}_R^R|)$ (oben) bzw. $\Delta\rho$ (unten) in Abhängigkeit des geschätzten Verhältnisses $\hat{\gamma}$. Links bei Variation von $\hat{\tau}_R$, rechts von \hat{L}_h . In grün: $x = 1/2$, blau: $x = 1$ und rot: $x = 2$, mit $x \in \{\tau_R/\hat{\tau}_R, L_h/\hat{L}_h\}$.

mit $\mu := 3\rho/2 L_h/L_R$.

Es gilt die Symmetrieeigenschaft

$$\frac{m_M}{\hat{m}_M}(\hat{\gamma}, \kappa) = \frac{m_M}{\hat{m}_M}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}}, \frac{1}{\kappa}\right). \quad (4.20)$$

Durch Ausnutzung der Näherung für $\Delta\rho$ in (4.17) kann ein vereinfachter Ausdruck für die Verstimmung des Moments m_M/\hat{m}_M hergeleitet werden. Die

4. Strommodell

wahren Ströme entsprechen den um $-\Delta\rho$ gedrehten geschätzten Strömen \hat{i}_{Sd} und \hat{i}_{Sq} :

$$\begin{bmatrix} i_{Sd} \\ i_{Sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\rho & \sin \Delta\rho \\ -\sin \Delta\rho & \cos \Delta\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{Sd} \\ \hat{i}_{Sq} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Für kleine Winkel $\Delta\rho$ genügt die lineare Approximation

$$\begin{aligned} i_{Sd} &\approx \hat{i}_{Sd} + \Delta\rho \hat{i}_{Sq} \\ i_{Sq} &\approx \hat{i}_{Sq} - \Delta\rho \hat{i}_{Sd} \end{aligned} \quad (4.22)$$

und man erhält für die Relationen zwischen wahren und geschätzten Strömen

$$\frac{i_{Sd}}{\hat{i}_{Sd}} \approx 1 + \hat{\gamma} \Delta\rho, \quad \frac{i_{Sq}}{\hat{i}_{Sq}} \approx 1 - \frac{\Delta\rho}{\hat{\gamma}}. \quad (4.23)$$

Ferner kann das Verhältnis $\mu/\hat{\mu}$ mit eins angenähert werden, da sich die Rotorzeitkonstante nur geringfügig von der Hauptinduktivität unterscheidet $L_R = L_h + L_{\sigma R} \approx L_h$

$$\frac{\mu}{\hat{\mu}} = \frac{L_h \hat{L}_R}{\hat{L}_h L_R} \approx 1. \quad (4.24)$$

Das Verhältnis von wahren zu geschätztem Luftspaltmoment kann dann mit

$$\begin{aligned} \frac{m_M}{\hat{m}_M} &= \frac{\mu L_h}{\hat{\mu} \hat{L}_h} \frac{i_{Sd} i_{Sq}}{\hat{i}_{Sd} \hat{i}_{Sq}} \approx \frac{L_h}{\hat{L}_h} (1 + \hat{\gamma} \Delta\rho) \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\hat{\gamma}}\right) \stackrel{\Delta\rho^2 \approx 0}{\approx} \\ &\approx \frac{L_h}{\hat{L}_h} \left[1 + \left(\hat{\gamma} - \frac{1}{\hat{\gamma}}\right) \Delta\rho\right] \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Mit der Näherung (4.17) für $\Delta\rho$ ergibt sich

$$\frac{m_M}{\hat{m}_M} \approx \frac{L_h}{\hat{L}_h} \frac{\hat{\gamma}^2 + \kappa}{\hat{\gamma}^2 \kappa + 1} \quad (4.25)$$

als Funktion der Verhältnisse L_h/\hat{L}_h , κ und $\hat{\gamma}$.

Der Vorteil der Näherungslösung gegenüber (4.19) ist, dass nun umgekehrt das Verhältnis von wahrer zu geschätzter Rotorzeitkonstante durch

$$\kappa := \frac{\tau_R}{\hat{\tau}_R} \approx \frac{\hat{\gamma}^2 - \frac{m_M}{\hat{m}_M} \left(\frac{\hat{L}_h}{L_h}\right)^2}{\hat{\gamma}^2 \frac{m_M}{\hat{m}_M} \left(\frac{\hat{L}_h}{L_h}\right)^2 - 1} \quad (4.26)$$

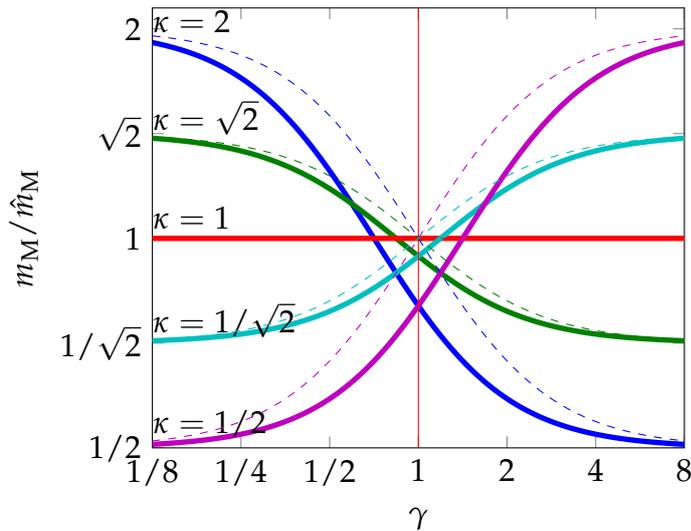


Abbildung 4.2.: Wahres vs. geschätztes Drehmoment über verschiedene geforderte Schlupfwinkelgeschwindigkeiten bei gleichem Rotorfluss. Durchgezogen exakt nach (4.19), strichliert approximativ nach (4.25) berechnet.

einfach angegeben werden kann (ansonsten muss eine quadratische Gleichung gelöst werden). Damit ist es möglich, bei Kenntnis des wahren Moments m_M sowie der wahren Hauptinduktivität L_h *direkt* auf die Rotorzeitkonstante τ_R zu schließen!

In Abb. 4.2 sind Verläufe von m_M/\hat{m}_M über $\hat{\gamma}$ für verschiedene Werte von κ zu sehen. Es gilt die Annahme $\hat{L}_h = L_h$. Die Näherungsformel (4.25) besitzt folgende weitere Symmetrieeigenschaften:

$$\frac{m_M}{\hat{m}_M} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}}, \kappa \right) = \frac{m_M}{\hat{m}_M} \left(\hat{\gamma}, \frac{1}{\kappa} \right) = \frac{\hat{m}_M}{m_M} (\hat{\gamma}, \kappa). \quad (4.27)$$

Zu deren Verdeutlichung sind die Achsen logarithmisch skaliert.

Prinzipiell kann folgendes (auch anhand von (4.19) oder (4.25) ersichtliche) qualitative Verhalten beobachtet werden:

$$\frac{m_M}{\hat{m}_M} \approx \begin{cases} \kappa & \text{für } |\hat{\gamma}| \ll 1 \\ 1 & \text{für } |\hat{\gamma}| \approx 1 \\ \frac{1}{\kappa} & \text{für } |\hat{\gamma}| \gg 1 \end{cases}. \quad (4.28)$$

Zwei Fälle verdienen eine genauere Betrachtung:

Fall $\hat{\gamma} = 0$: Bei gefordertem Nullmoment ist $\hat{i}_{Sq} = 0$, also auch $\hat{\gamma} = 0$. Das theoretische Verhältnis $m_M/\hat{m}_M = \kappa$ spielt keine Rolle, es kommt zu keiner Verstimmung (siehe auch Glg. (4.16): der Imaginärteil wird null, das Verhältnis der Beträge wird durch das Verhältnis L_h/\hat{L}_h bestimmt):

$$\hat{m}_M = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Psi_R = \frac{L_h}{\hat{L}_h} \hat{\Psi}_R \\ \Delta\rho = 0 \\ i_{Sd} = \hat{i}_{Sd}, \quad i_{Sq} = \hat{i}_{Sq} \end{cases} \quad (4.29)$$

Fall $\hat{\gamma} = 1$: Stimmen der momentenbildende und der flussbildende geschätzte Strom überein, $\hat{i}_{Sd} = \hat{i}_{Sq}$, so gilt $m_M \leq \hat{m}_M$. Diese Konfiguration entspricht der Maximierung des Drehmoments bei beschränktem Strom (*maximum torque per amp*, [5]). Bei einer Verstimmung $\Delta\rho \neq 0$ beträgt das Verhältnis der wahren Ströme i_{Sq}/i_{Sd} bei gleichem Betrag $|i_S|$ *nicht* wie gewünscht eins. Die Abweichung der echten Rotorzeitkonstante von der geschätzten muss also zu einem niedrigeren Moment führen.

Ein eindeutiger Rückschluss von dem Verhältnis m_M/\hat{m}_M auf κ ist in dem Betriebspunkt $\hat{\gamma} = 1$ und dessen Umgebung nicht möglich! In Abschnitt 18.3 sind jedoch Möglichkeiten beschrieben, wie die besondere Eigenschaft dieses Betriebspunktes für eine iterative Bestimmung der Rotorzeitkonstante ausgenutzt werden kann.

4.4. Andere Kenngrößen

Neben dem Luftspaltpmoment m_M gibt es noch eine Reihe anderer Kenngrößen, deren Sollwerte sich im stationären Zustand berechnen lassen. Ein Vergleich mit den Ist-Werten ergibt dann Aufschluss auf die Verstimmung der Rotorflussraumzeigers. In der Fachliteratur werden konkret die Wirkleistung P [12, 66], die Blindleistung Q [17], die Spannungen u_{Sd} und u_{Sq} [66], das Verhältnis von Blindleistung zu Moment [72] sowie weitere, künstlich konstruierte Größen wie die *criterion function* [74] angegeben.

Es darf nicht aus den Augen verloren werden, dass alle diese Kenngrößen (bis auf jene, die noch das Moment miteinbeziehen) auf der Messung der Statorströme und -spannungen basieren. Im stationären Zustand ist der Informationsgehalt dieser Messungen auf zwei Größen beschränkt: die Phasen- und die

Amplitudendifferenz zu den geschätzten Signalen. Keine der oben genannten Kenngrößen kann darüber hinaus Informationen liefern!

Repräsentativ für alle wird hier auf die Wirk- und die Blindleistung eingegangen, da diese gemessen werden können. Als Skalar- beziehungsweise Kreuzprodukt von Strom und Spannung sind sie zudem rotationsinvariant. Es ist also irrelevant, ob man sie mit den wahren Werten i_{sd} , i_{sq} , u_{sd} und u_{sq} oder den möglicherweise falsch projizierten Schätzwerten \hat{i}_{sd} *et cetera* berechnet.

4.4.1. Wirkleistung

Die Wirkleistung entspricht geometrisch dem Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{i}_S und \mathbf{u}_S , welche aus den Real- und Imaginärteilen der Raumzeiger gebildet werden

$$\mathbf{i}_S := [\operatorname{Re}\{i_S\} \quad \operatorname{Im}\{i_S\}]^T, \quad \mathbf{u}_S := [\operatorname{Re}\{u_S\} \quad \operatorname{Im}\{u_S\}]^T \quad (4.30)$$

und ist damit *unabhängig* von dem betrachteten Koordinatensystem. Im Rotorflusskoordinatensystem zum Beispiel gilt

$$P = u_{sd}i_{sd} + u_{sq}i_{sq} = \hat{u}_{sd}\hat{i}_{sd} + \hat{u}_{sq}\hat{i}_{sq}. \quad (4.31)$$

Physikalisch entspricht sie der Summe aus den Kupfer- (P_{Cu}) und Rotorverlustleistungen (P_{Rotor}) sowie der mechanischen Leistung P_{mech} , die in den Widerständen und zur Beschleunigung verbraucht, beziehungsweise im generatorischen Fall in das Stromnetz zurückgespeist wird

$$\begin{aligned} P &= R_S|i_S|^2 + \omega_\Psi (L_S - L_\sigma) i_{sd}i_{sq} = \\ &= \underbrace{R_S|i_S|^2}_{P_{Cu}} + \underbrace{R_R \left(\frac{L_h}{L_R}\right)^2 i_{sq}^2}_{P_{Rotor}} + \underbrace{\frac{2}{3}m_M\omega_{mech}}_{P_{mech}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Über die Gleichungen (2.44) errechnet sich die zu erwartende Wirkleistung im stationären Zustand zu [72]

$$P = R_S|i_S|^2 + \omega_\Psi L_S(1 - \sigma)\gamma i_{sd}^2. \quad (4.33)$$

Mit (4.8) ergibt das den Wert

$$P = |i_S|^2 \left[R_S + \omega_\Psi L_S(1 - \sigma) \frac{\kappa\hat{\gamma}}{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2} \right]. \quad (4.34)$$

Dem gegenüber steht der geschätzte Wert

$$\hat{P} = |i_S|^2 \left[\hat{R}_S + \omega_\Psi \hat{L}_S (1 - \hat{\sigma}) \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}^2} \right], \quad (4.35)$$

womit sich für das Verhältnis von echter zu geschätzter Wirkleistung

$$\frac{P}{\hat{P}} = \frac{R_S + \omega_\Psi L_S (1 - \sigma) \frac{\kappa \hat{\gamma}}{1 + (\kappa \hat{\gamma})^2}}{\hat{R}_S + \omega_\Psi \hat{L}_S (1 - \hat{\sigma}) \frac{\hat{\gamma}}{1 + \hat{\gamma}^2}}. \quad (4.36)$$

ergibt. Für sehr niedrige Momente $\hat{\gamma} \approx 0$ hängt dieses nur von dem Verhältnis der Statorwiderstände R_S/\hat{R}_S ab; bei hohen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_\Psi \gg$ hingegen dominieren die Stator- und Streuinduktivitäten L_S beziehungsweise $L_\sigma = \sigma L_S$.

Nimmt man an, dass alle Parameter bis auf die Rotorzeitkonstante τ_R bekannt sind und die Drehzahl den Einfluss des Statorwiderstandes vernachlässigbar werden lässt, ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\frac{P}{\hat{P}} = \left(\frac{i_{Sd}}{\hat{i}_{Sd}} \right)^2 = \frac{\kappa (1 + \hat{\gamma}^2)}{1 + (\kappa \hat{\gamma})^2}. \quad (4.37)$$

Dieser entspricht genau dem Verhältnis von echtem zu geschätztem Moment m_M/\hat{m}_M (4.19)! Damit lässt sich das Verhältnis $\kappa := \tau_R/\hat{\tau}_R$ wieder direkt über eine quadratische Gleichung berechnen.

$$\kappa^2 - \frac{1 + \hat{\gamma}^2}{\hat{\gamma}^2 \delta} \kappa + \frac{1}{\hat{\gamma}^2} = 0, \quad \delta := \frac{P}{\hat{P}} \text{ bzw. } \delta := \frac{m_M}{\hat{m}_M}. \quad (4.38)$$

Wie auch in Abbildung 4.2 erkennbar ist, gibt es zu jedem Paar $(\hat{\gamma}, \delta)$ jeweils zwei Lösungen für κ , d.h. es kann nicht *a priori* eine der Lösungen ausgeschlossen werden.

Bei niedrigen Drehzahlen ist die quadratische Gleichung etwas komplizierter, insbesondere tritt auch der Statorwiderstand R_S auf

$$\kappa^2 - \frac{\alpha (1 + \hat{\gamma}^2)}{\hat{\gamma} [R_S (\delta - 1) (1 + \hat{\gamma}^2) + \alpha \delta \hat{\gamma}]} \kappa + \frac{1}{\hat{\gamma}^2} = 0 \quad (4.39)$$

mit $\alpha := \omega_\Psi L_S (1 - \sigma)$.

4.4.2. Blindleistung

Die Blindleistung entspricht geometrisch einem Kreuzprodukt der um eine dritte Komponente erweiterten Vektoren \mathbf{i}_S und \mathbf{u}_S

$$Q = u_{Sq}i_{Sd} - u_{Sd}i_{Sq} = \hat{u}_{Sq}\hat{i}_{Sd} - \hat{u}_{Sd}\hat{i}_{Sq}. \quad (4.40)$$

Physikalisch entspricht sie der Leistung, die zum Aufbau des magnetischen Feldes aufgewendet werden muss beziehungsweise bei dessen Abbau wieder in das Stromnetz zurückgespeist wird. Im stationären Zustand wird sie auf Grund von (2.44) durch

$$Q = \omega_\Psi L_S (1 + \sigma\gamma^2) i_{Sd}^2 \quad (4.41)$$

angegeben [72]. Wieder soll dieser Zusammenhang in Abhängigkeit von $\hat{\gamma}$ und κ ausgedrückt werden; mit (4.8) ergibt sich

$$Q = |i_S|^2 \omega_\Psi L_S (1 + \sigma(\kappa\hat{\gamma})^2) \frac{1}{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2} \quad (4.42)$$

Demgegenüber steht der berechnete Schätzwert

$$\hat{Q} = |i_S|^2 \omega_\Psi \hat{L}_S (1 + \hat{\sigma}\hat{\gamma}^2) \frac{1}{1 + \hat{\gamma}^2}, \quad (4.43)$$

womit sich als *drehzahlunabhängiges* Verhältnis

$$\frac{Q}{\hat{Q}} = \frac{L_S}{\hat{L}_S} \frac{1 + \sigma(\kappa\hat{\gamma})^2}{1 + \hat{\sigma}\hat{\gamma}^2} \frac{1 + \hat{\gamma}^2}{1 + (\kappa\hat{\gamma})^2} \quad (4.44)$$

ergibt.

So wie die Wirkleistung für sehr niedrigen Schlupf $\hat{\gamma} \approx 0$ nur von dem Statorwiderstand R_S abhängt, hängt die Blindleistung dort nur von der Statorinduktivität L_S ab. Bei sehr hohem Schlupf $\hat{\gamma} \gg 1$ hingegen dominieren die Streueffekte. Es gilt also näherungsweise

$$\hat{\gamma} \approx 0: \quad \frac{Q}{\hat{Q}} = \frac{L_S}{\hat{L}_S}, \quad \hat{\gamma} \gg 1: \quad \frac{Q}{\hat{Q}} = \frac{L_\sigma}{\hat{L}_\sigma}. \quad (4.45)$$

Unter der Annahme bis auf die Rotorzeitkonstante bekannter Parameterwerte ergibt sich der Quotient $\kappa := \tau_R / \hat{\tau}_R$ wie in (4.38) über eine quadratische Gleichung

$$\kappa^2 + \frac{\eta(1 + \sigma\hat{\gamma}^2) - (1 + \hat{\gamma}^2)}{\hat{\gamma}^2 [\eta(1 + \sigma\hat{\gamma}^2) - \sigma(1 + \hat{\gamma}^2)]} = 0, \quad \eta := \frac{Q}{\hat{Q}}. \quad (4.46)$$

Diese kann sofort nach κ aufgelöst werden, eine negative Lösung der Quadratwurzel kann ausgeschlossen werden

$$\kappa = \sqrt{\frac{\frac{1+\hat{\gamma}^2}{1+\sigma\hat{\gamma}^2} - \eta}{\hat{\gamma}^2 \left(\eta - \sigma \frac{1+\hat{\gamma}^2}{1+\sigma\hat{\gamma}^2} \right)}}. \quad (4.47)$$

Es ist bei der Auswertung dieses Ausdrucks darauf zu achten, dass der Quotient (4.44) zwar unabhängig von der Drehzahl ist, aber nur für $\omega_\Psi \neq 0$ sinnvoll verwendet werden kann, da ansonsten sowohl Q als auch \hat{Q} null wären. Aus numerischer Sicht ist also eine Bestimmung des Verhältnisses κ nur für $|\omega_\Psi| > \omega_{\Psi,\min}$, $\omega_{\Psi,\min} > 0$ sinnvoll.

5. Spannungsmodell

Betrachtet man die Differentialgleichung für den Strom in (2.26)

$$\frac{di_S^R}{dt} = - \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \right) i_S^R - \beta \frac{d\Psi_R^R}{dt} - j\omega_R \beta \Psi_R^R + \frac{1}{L_\sigma} u_S^R, \quad (5.1)$$

und setzt darin die Differentialgleichung des Rotorflusses ein, kann man das Ergebnis *direkt* in eine Rechengvorschrift für Ψ_R^R umformen

$$\Psi_R^R = \frac{1}{\beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right)} \left[\frac{di_S^R}{dt} - \frac{1}{L_\sigma} u_S^R + \left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R \right) i_S^R \right]. \quad (5.2)$$

In diese Vorschrift geht allerdings die Ableitung des Statorstromes i_S^R ein; außerdem kommen darin alle Parameter der Asynchronmaschine, insbesondere auch die Rotorzeitkonstante τ_R , vor. Gemäß [27] ist diese Berechnung besonders empfindlich bezüglich falsch geschätzter Parameter.

Es ist allerdings möglich, den Rotorfluss gänzlich ohne die Rotorzeitkonstante zu schätzen. Betrachtet man nämlich die Differentialgleichung für den Strom, *ohne* die Differentialgleichung des Rotorflusses in sie einzusetzen

$$\frac{di_S^R}{dt} = - \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \right) i_S^R - \beta \frac{d\Psi_R^R}{dt} - j\omega_R \beta \Psi_R^R + \frac{1}{L_\sigma} u_S^R, \quad (5.3)$$

so kann man diese in eine Differentialgleichung umformen, in welcher *weder* die Ableitung des Stromes *noch* die Rotorzeitkonstante vorkommen. Dazu bringt man den Differentialquotienten des Rotorflusses auf die linke Seite und multipliziert beide Seiten mit L_σ

$$\left(L_\sigma \frac{di_S^R}{dt} + \frac{L_h}{L_R} \Psi_R^R \right) = -R_S i_S^R - j\omega_R \left(L_\sigma i_S^R + \frac{L_h}{L_R} \Psi_R^R \right) + u_S^R \quad (5.4)$$

Führt man eine neue Variable z ein

$$z := L_\sigma i_S^R + \frac{L_h}{L_R} \Psi_R^R, \quad (5.5)$$

so erfüllt sie eine *grenzstabile*¹ Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = -j\omega_R z + (u_S^R - R_S i_S^R). \quad (5.6)$$

Weder in der Definition von z noch in der Differentialgleichung tritt die Rotorzeitkonstante τ_R auf! Es ist also möglich, den Rotorflussraumzeiger *ohne Kenntnis der Rotorzeitkonstante* zu ermitteln

$$\Psi_R^R = \frac{L_R}{L_h} (L_\sigma i_R^R - z) \quad (5.7)$$

indem man über die induzierte Spannung $u_S^R - R_S i_S^R$ integriert. Daher wird diese Methode auch als das „Spannungsmodell“ bezeichnet².

Diesen scheinbaren Vorteil gegenüber dem Strommodell erkaufte man sich durch eine starke Abhängigkeit von den Schätzwerten des Statorwiderstandes R_S und der Streuinduktivität L_σ . Ferner findet eine offene Integration statt, welche in der Praxis meist dadurch umgangen wird, dass der Integrierer durch ein PT1-Glied mit großer Zeitkonstante ersetzt wird. Gerade bei niedrigen Drehzahlen sollte dieses Schätzmodell daher nicht eingesetzt werden!

5.1. Parametersensitivitäten

Es ist aus Gleichungen (5.6) und (5.7) unmittelbar ersichtlich, dass sich eine starke Abhängigkeit des Schätzwertes für Ψ_R^R von den Parametern Statorwiderstand R_S und Statorstreuinduktivität L_σ ergeben wird. Der Quotient L_h/L_R hingegen ist annähernd eins und ist vernachlässigbar.

Qualitative Überlegungen führen weiters zu dem Schluss, dass die Abhängigkeit von R_S bei niedrigeren Drehzahlen stark ausgeprägt ist, bei hohen Drehzahlen aber vernachlässigbar wird, weil die induzierte Spannung den Spannungsabfall am Widerstand um ein Vielfaches übersteigt [27]. Die Abhängigkeit bezüglich L_σ hingegen fällt drehzahlunabhängig aus.

¹d.h. der Eigenwert liegt auf der imaginären Achse

²In der Fachliteratur wird das Spannungsmodell vorwiegend im Statorkoordinatensystem hergeleitet, wo sich eine reine Integration über $u_S^S - R_S i_S^S$ ergibt.

6. LUENBERGER-Beobachter

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Methoden (Strommodell, direkte Methode und Spannungsmodell) stellen nichts anderes dar als Vorwärtssimulationen von Modellen der Asynchronmaschine. Deren Fehlerdynamik ist damit fix vorgegeben (im Fall des Spannungsmodells sogar nicht asymptotisch stabil) und deren Anfälligkeit für Parameterunsicherheiten hoch. In den folgenden Abschnitten werden daher Methoden vorgestellt, welche auf einer Rückführung der Differenz zwischen geschätzten und gemessenen Größen basieren.

Eine klassische Methode stellt dabei der LUENBERGER-Beobachter dar, welcher auf dem gesamten elektrischen Modell (2.26) basiert und die Differenz zwischen geschätztem und gemessenem Statorstrom i_S^R zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens ausnützt [73]. Es ergibt sich mit dem Vektor der Schätzgrößen $\hat{\mathbf{x}} := [\hat{i}_S^R \quad \hat{\Psi}_R^R]^T$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}^R}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R\right) & \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\frac{1}{\tau_R} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}^R + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{b}} u_S^R + \mathbf{k}(i_S^R - \hat{i}_S^R) \quad (6.1)$$

beziehungsweise mit dem Ausgangsvektor $\mathbf{c} = [1 \quad 0]^T$ allgemein angeschrieben

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}^R}{dt} = \underbrace{\left(\mathbf{A}(t) - \mathbf{k}(t)\mathbf{c}^T\right)}_{=: \hat{\mathbf{A}}(t)} \hat{\mathbf{x}}^R + \mathbf{b}u_S^R + \mathbf{k}(t)i_S^R. \quad (6.2)$$

Dabei stellt $\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2]^T$ den komplexwertigen, im Allgemeinen zeitvarianten Vektor der Rückkopplungsverstärkung dar.

6.1. Eigenwertvorgabe

6.1.1. Vernachlässigbare Drehzahländerung

Zunächst soll der Einfachheit halber angenommen werden, dass $d\omega_R/dt$ vernachlässigbar klein ausfällt, was für den dynamischen Betriebsfall eine sehr harte Einschränkung darstellt. Wünscht man sich dann konstante Eigenwerte λ_1 und λ_2 , so ergibt sich das charakteristische Wunschpolynom

$$w(s) := (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 = s^2 + w_1s + w_0. \quad (6.3)$$

Das (eigentlich zeitvariante!) charakteristische Polynom des rückgekoppelten Systems lautet allgemein mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \quad 0]$$

$$a_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad a_1 = -(a_{11} + a_{22})$$

folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^2 - (a_{11} + a_{22} - k_1)s + (a_{11} - k_1)a_{22} - (a_{21} - k_2)a_{12} = \\ &= s^2 + (a_1 + k_1)s + a_0 - k_1a_{22} + a_{12}k_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ein einfacher Koeffizientenvergleich mit $w(s)$ führt auf den Rückkopplungsvektor \mathbf{k} :

$$w_1 = a_1 + k_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = w_1 - a_1 \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0 - k_1a_{22} + a_{12}k_2 = \\ &= a_0 - (w_1 - a_1)a_{22} + a_{12}k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{(w_0 - a_0) + (w_1 - a_1)a_{22}}{a_{12}} \end{aligned} \quad (6.5b)$$

Die resultierende Systemmatrix des Beobachterfehlers

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_R} + \lambda_1 + \lambda_2 & \beta \left(\frac{1}{T_R} - j\omega_R \right) \\ -\frac{\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{T_R} \left(\frac{1}{T_R} + \lambda_1 + \lambda_2 \right)}{\beta \left(\frac{1}{T_R} - j\omega_R \right)} & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ist weiterhin *zeitvariant*. Dies ist allgemein auf Grund der Struktur des dyadischen Produktes $\mathbf{k}\mathbf{c}^T$, welches nur in der ersten Spalte von null verschiedene

Einträge besitzt, der Fall. Verlangt wird in der Praxis die gleichmäßige exponentielle Stabilität des obigen Systems. Es ist bekannt, dass, auch wenn alle Eigenwerte der Matrix $\hat{\mathbf{A}}(t)$ punktweise für alle t -Werte einen negativen Realteil besitzen, das System instabil sein kann! Die Vorgabe von Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ mit negativen Realteilen ist daher a priori *nicht* ausreichend für die asymptotische Stabilität der Nulltrajektorie.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $\hat{\mathbf{A}}(t)$ und insbesondere $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ hinreichend beschränkt sind (langsam-veränderliches System), ist nach ROSENBROCK die geforderte Stabilitätseigenschaft gesichert [59]. Das bedeutet, dass, sofern sich die Winkelgeschwindigkeit $\omega_R(t)$ nicht zu schnell ändert, der Beobachter gleichmäßig exponentiell stabil ist¹.

6.1.2. Berücksichtigung der Drehzahländerungen

Es ist jedoch möglich, eine zeitvariante Transformationsmatrix $\mathbf{T}(t)$ zu finden, welche das ursprüngliche, zeitvariante System in die zeitvariante Beobachtbarkeitsnormalform überführt. Dann können die zeitvarianten Einträge mittels einer Rückkopplung eliminiert werden. Die Stabilitätseigenschaften des so ermittelten Systems übertragen sich auf das Originalsystem, sofern $\mathbf{T}(t)$ eine sogenannte LYAPUNOV-Transformation darstellt. Dafür müssen sowohl $\mathbf{T}(t)$ als auch deren Inverse für alle t beschränkt sein, d.h. $\|\mathbf{T}(t)\| < \kappa_1$, $\|\mathbf{T}^{-1}(t)\| < \kappa_2$ für geeignete positive Konstanten κ_1 und κ_2 und alle Zeiten $t \geq t_0$ [22].

Für die Existenz einer *regulären* Transformationsmatrix muss wiederum das System *gleichmäßig beobachtbar* sein. Eine Überprüfung dieser Eigenschaft erfolgt über die Berechnung der Determinante der zeitvarianten Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{B}_y(t)$

$$\mathbf{B}_y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \frac{d}{dt}\mathbf{c}^T + \mathbf{c}^T\mathbf{A}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{\tau_S} + \beta\frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R\right) & \beta\left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Diese ist niemals null, das Paar $(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}(t))$ ist also gleichmäßig beobachtbar und die reguläre Transformationsmatrix $\mathbf{T}(t)$ existiert.

Mit

$$\mathbf{x}^R(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{z}(t) \quad (6.8)$$

¹Die Ermittlung einer expliziten Relation der Schranken für $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ in Abhängigkeit der Systemdaten zur Absicherung der Stabilität ist mathematisch nicht einfach. Weder die Methode aus [60] noch jene aus [11] konnte zu befriedigenden Resultaten führen.

soll gelten

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1}(t) [-\dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t)]}_{=: \mathbf{A}_B} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{b}u \\ y &= \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{T}(t) \mathbf{z}}_{=: \mathbf{e}_n^T =: \mathbf{c}_B^T}, \quad \text{für } n = 2: \quad \mathbf{e}_2 := [0 \ 1]^T. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Für die Transformation benötigt man die rechte Spalte der Inversen der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{t}_1(t) = \frac{1}{\beta \left(\frac{1}{T_R} - j\omega_R \right)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Mit ihr bildet man die Transformationsmatrix nach dem Gesetz

$$\mathbf{T}(t) = \left[\mathbf{t}_1 \mid \mathbf{A}(t)\mathbf{t}_1 - \frac{d\mathbf{t}_1}{dt} \right] \quad (6.11)$$

welche mit der Abkürzung

$$\mathbf{A}(t) =: \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

folgendermaßen aussieht:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a_{12}(t)} & \frac{1}{a_{12}(t)} \left[\frac{1}{a_{12}(t)} \frac{da_{12}}{dt} + a_{22} \right] \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Diese ist für alle Zeiten regulär und, da in realen Systemen die Winkelgeschwindigkeit sowie deren Beschleunigung stets endlich sind, auch stets beschränkt. Damit stellt sie eine gültige LYAPUNOV-Transformationsmatrix dar!

Die Begleitform der Systemmatrix \mathbf{A} ist dann schon relativ kompliziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_B &= \mathbf{T}^{-1}(t) [-\dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t)] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a_{12}(t)} \frac{d^2 a_{12}}{dt^2} + \left(\frac{1}{a_{12}(t)} \frac{da_{12}}{dt} \right)^2 - \frac{a_{11}(t)}{a_{12}(t)} \frac{da_{12}}{dt} + a_{21}a_{12}(t) - a_{22}a_{11}(t) \\ 1 & \frac{1}{a_{12}(t)} \frac{da_{12}}{dt} + a_{22} + a_{11}(t) \end{bmatrix} = \\ &=: \begin{bmatrix} 0 & -a_0(t) \\ 1 & -a_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für dieses System in Beobachtbarkeitsnormalform ist der Entwurf eines LUENBERGER-Beobachters trivial. Mit dem Schätzwert $\hat{\mathbf{z}}$ für den Zustand \mathbf{z} und einer Rückführung des Ausgangsfehlers $\mathbf{k}_B(t) (y - \mathbf{c}_B^T \hat{\mathbf{z}})$ mit $\mathbf{k}_B(t) := [k_{B,0}(t) \quad k_{B,1}(t)]^T$ erhält man die neuen Systemmatrix

$$\hat{\mathbf{A}}_B := \mathbf{A}_B(t) - \mathbf{k}_B \mathbf{c}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & k_{B,0}(t) - a_0(t) \\ 1 & k_{B,1}(t) - a_1(t) \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Die Vorgabe der Wunscheigenwerte λ_1 und λ_2 erfolgt hier direkt über

$$k_{B,i}(t) - a_i(t) \stackrel{!}{=} -w_i \quad \Rightarrow \quad k_{B,i}(t) = a_i(t) - w_i \quad (6.16)$$

mit den Koeffizienten w_i aus (6.3).

Schlussendlich muss der Rückkopplungsvektor \mathbf{k}_B nur noch in das ursprüngliche Koordinatensystem rücktransformiert werden

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{k}_B(t). \quad (6.17)$$

Für den Fall konstanter Drehzahl $a_{11}(t) \equiv a_{11}$, $a_{12}(t) \equiv a_{12}$ reduziert sich dies wieder auf das Ergebnis in Abschnitt 6.1.1.

6.2. Auswirkungen einer hohen Verstärkung

Bei einem LUENBERGER-Beobachter wird durch eine hohe Verstärkung (Eigenwerte weit „links“) versucht, den geschätzten Strom mit dem gemessenen zu jeder Zeit zur Übereinstimmung zu bringen $i_S^R \stackrel{!}{=} \hat{i}_S^R$. Ergo muss auch dessen Ableitung der realen im Mittel gleich sein $di_S^R/dt \stackrel{!}{=} d\hat{i}_S^R/dt$. Dafür muss der Schätzwert des Flusses angepasst werden, so dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}_S^R}{dt} &= - \left(\frac{1}{\hat{\tau}_S} + \hat{\beta} \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R} + j\omega_R \right) i_S^R + \hat{\beta} \left(\frac{1}{\hat{\tau}_R} - j\omega_R \right) \hat{\Psi}_R + \frac{1}{\hat{L}_\sigma} u_S^R \stackrel{!}{=} \\ \frac{di_S^R}{dt} &= - \left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R \right) i_S^R + \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \Psi_R + \frac{1}{L_\sigma} u_S^R. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Im Folgenden soll zunächst davon ausgegangen werden, dass ausschließlich die zur Bestimmung von Ψ_R^R mittels des Strommodells nötigen Parameter L_h

und τ_R falsch geschätzt wurden. Dann unterscheidet sich der Schätzwert $\hat{\Psi}_R^R$ folgendermaßen vom wahren Wert

$$\hat{\Psi}_R^R = \frac{j\omega_R - \frac{1}{\tau_R}}{j\omega_R - \frac{1}{\hat{\tau}_R}} \Psi_R^R + \frac{\frac{L_h}{\tau_R} - \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R}}{j\omega_R - \frac{1}{\hat{\tau}_R}} i_S^R. \quad (6.19)$$

Für die extremen Geschwindigkeiten $\omega_R = 0$ bzw. $|\omega_R| \rightarrow \infty$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \omega_R = 0 & \quad \Rightarrow \quad \hat{\Psi}_R^R = \frac{\hat{\tau}_R}{\tau_R} \Psi_R^R - \left(\hat{L}_h - L_h \frac{\hat{\tau}_R}{\tau_R} \right) i_S^R, \\ |\omega_R| \rightarrow \infty & \quad \Rightarrow \quad \hat{\Psi}_R^R = \Psi_R^R, \end{aligned} \quad (6.20)$$

das heißt für hohe Geschwindigkeiten kommt es zu keiner Verstimmung mehr (der LUENBERGER-Beobachter entspricht dann der direkten Methode (5.2)).

7. Reduzierter Beobachter

Es soll nun ein reduzierter Beobachter für das Modell im Rotorkoordinatensystem entworfen werden. Das ursprüngliche, komplexwertige elektrische Teilmodell zweiter Ordnung kann, da die Zustandsgröße i_S^R gemessen wird, auf ein skalares Modell reduziert werden!

Ausgehend von (2.26) werden die unbekanntenen Größen unten, die gemessenen oben angeschrieben:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_S^R \\ \Psi_R^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S^R \\ \Psi_R^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_S^R \quad (7.1)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= - \left(\frac{1}{\tau_S} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R \right), & a_{21} &= \frac{L_h}{\tau_R}, & b_1 &= \frac{1}{L_\sigma} \\ a_{12}(t) &= \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right), & a_{22} &= -\frac{1}{\tau_R}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die gemessene Größe i_S^R wird wie schon bisher (beim Strommodell) als Eingang für das reduzierte System definiert; ergänzend kommt hinzu, dass die Spannung zur Korrektur des Schätzwertes von Ψ_R^R herangezogen wird. Dazu betrachtet man die obere Gleichung

$$\frac{di_S^R}{dt} = a_{11}(t)i_S^R + a_{12}(t)\Psi_R^R + b_1u_S^R \quad (7.3)$$

und verlangt von einem Schätzwert von Ψ_R^R , dass dieser ebendiese erfüllen muss:

$$\underbrace{\hat{a}_{12}(t)\hat{\Psi}_R^R}_{\hat{z}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\frac{di_S^R}{dt} - \hat{a}_{11}(t)i_S^R - \hat{b}_1u_S^R}_z \quad (7.4)$$

7. Reduzierter Beobachter

Setzt man diese Differenz zwischen Schätzwert \hat{z} und gemessenem Wert z , gewichtet mit einem möglicherweise *zeitvarianten*, komplexen Faktor $k = k_i + jk_j$ in die Beobachtergleichung ein

$$\frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} = \hat{a}_{22}\hat{\Psi}_R^R + \hat{a}_{21}i_S^R + k(z - \hat{z}) \quad (7.5)$$

so erhält man

$$\frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} = (\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t))\hat{\Psi}_R^R + (\hat{a}_{21} - k\hat{a}_{11}(t))i_S^R - k\hat{b}_1u_S^R + k\frac{di_S^R}{dt}. \quad (7.6)$$

Die Dynamik dieses Beobachters kann durch Wahl von k beliebig (insbesondere auch zeitinvariant!) vorgegeben werden. Man erhält für die Forderung

$$\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t) \stackrel{!}{=} \lambda_i + j\lambda_j \quad (7.7)$$

die Rechenvorschrift

$$k_i = \frac{\lambda_j\omega_R - \lambda_i\frac{1}{\tau_R} - \frac{1}{\tau_R^2}}{\beta\left(\frac{1}{\tau_R^2} + \omega_R^2\right)}, \quad k_j = \frac{-\frac{1}{\tau_R}(\omega_R + \lambda_j) - \lambda_i\omega_R}{\beta\left(\frac{1}{\tau_R^2} + \omega_R^2\right)}. \quad (7.8)$$

Allerdings stört in (7.6) noch die nötige Berechnung der Ableitung von i_S^R . Diese kann vermieden werden, indem man nicht $\hat{\Psi}_R^R$ direkt, sondern die Differenz

$$\hat{w} := \hat{\Psi}_R^R - ki_S^R \quad (7.9)$$

schätzt; bei deren Ableitung fällt nämlich der Term mit di_S^R/dt einfach heraus:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}}{dt} &= \frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} - \frac{dk}{dt}i_S^R - k\frac{di_S^R}{dt} = \\ &= (\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t))\hat{\Psi}_R^R + \left(\hat{a}_{21} - k\hat{a}_{11}(t) - \frac{dk}{dt}\right)i_S^R - k\hat{b}_1u_S^R \end{aligned} \quad (7.10)$$

Mittels $\hat{\Psi}_R^R = \hat{w} + ki_S^R$ erhält man schlussendlich

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = (\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t))\hat{w} + \left[(\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t))k + \hat{a}_{21} - k\hat{a}_{11}(t) - \frac{dk}{dt}\right]i_S^R - k\hat{b}_1u_S^R. \quad (7.11)$$

7.1. Stabilität

Im Gegensatz zum LUENBERGER-Beobachter kann die Stabilität des zeitvarianten, reduzierten Beobachters zumindest im nominellen Fall einfach über eine LYAPUNOV-Funktion gezeigt werden. Dazu vergleicht man den Schätzwert von w mit dessen wahrem Wert

$$e := w - \hat{w}. \quad (7.12)$$

Die Differentialgleichung des Fehlers e beträgt

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & [\hat{a}_{22} - k\hat{a}_{12}(t)] e + (\tilde{a}_{22} - k\tilde{a}_{12}) w + \\ & [(\tilde{a}_{22} - k\tilde{a}_{12}) k + \tilde{a}_{21} - k\tilde{a}_{11}] i_S^R - k\tilde{b}_1 u_S^R. \end{aligned} \quad (7.13)$$

mit $\tilde{a}_{ij} := a_{ij} - \hat{a}_{ij}$, $\tilde{b}_1 := b_1 - \hat{b}_1$. Im nominellen Fall ($\tilde{a}_{ij} = \tilde{b}_1 = 0$) vereinfacht sich dies zu einem autonomen, skalaren System

$$\frac{de}{dt} = [a_{22} - ka_{12}(t)] e. \quad (7.14)$$

Die quadratische, radial unbeschränkte LYAPUNOV-Funktion

$$V = \frac{1}{2} e^* e, \quad V > 0 \quad \text{für} \quad e \neq 0 \quad (7.15)$$

besitzt die Ableitung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} e^* [a_{22} - ka_{12}(t) + (a_{22} - ka_{12}(t))^*] e = e^* e \operatorname{Re} \{a_{22} - ka_{12}(t)\}. \quad (7.16)$$

Damit diese negativ definit ist, muss der Realteil

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{a_{22} - ka_{12}(t)\} &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{\tau_R} - \beta (k_i + jk_j) \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \right\} = \\ &= -\frac{1}{\tau_R} (1 + k_i\beta) - k_j\beta\omega_R \end{aligned} \quad (7.17)$$

stets negativ sein. Dies entspricht in der Forderung (7.7) einfach $\lambda_i < 0$ und resultiert in globaler asymptotischer Stabilität.

7.2. Wahl des Verstärkungsfaktors

Die beiden Extremwerte für k entsprechen einerseits dem Strommodell (4.10) ($k = 0$, also $\lambda_i = -1/\tau_R$, $\lambda_j = 0$), andererseits der direkten Methode (5.2) (z.B. $k_i \rightarrow \infty$, $k_j = 0$). Zweiteren Zusammenhang erkennt man aus dem Grenzwert von (7.6) mit $k = k_i$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} = \left(\frac{1}{k} \hat{a}_{22} - \hat{a}_{12}(t) \right) \hat{\Psi}_R^R + \left(\frac{1}{k} \hat{a}_{21} - \hat{a}_{11}(t) \right) i_S^R - \hat{b}_1 u_S^R + \frac{di_S^R}{dt}, \quad (7.18)$$

welcher zu der Gleichung

$$0 = \frac{di_S^R}{dt} - \hat{a}_{12}(t) \hat{\Psi}_R^R - \hat{a}_{11}(t) i_S^R - \hat{b}_1 u_S^R \quad (7.19)$$

und somit direkt zu (5.2) führt.

Entscheidet man sich für konstante Eigenwerte λ_i , λ_j , so ergibt sich für hohe Drehzahlen automatisch ein Verstärkungsfaktor von $k \rightarrow 0$, d.h. ausgerechnet bei hohen Drehzahlen geht der Beobachter in das Strommodell über. Das ist ungünstig, da dessen Sensitivität unabhängig von der Drehzahl ist, während die der direkten Methode bei hoher Drehzahl zumindest bezüglich des Statorwiderstandes R_S sinkt. Außerdem werden Asynchronmaschinen bei hohen Drehzahlen meist im Feldschwächbereich betrieben, welcher höhere Schlupfgeschwindigkeiten und damit eine noch höhere Sensitivität des Strommodells bezüglich der Rotorzeitkonstante zur Folge hat. Daher bietet es sich an, einen Mindestwert für k anzugeben, welcher (7.17) erfüllt. Dafür reicht bei hohen Drehzahlen, dass $\text{sign}(k_j) = \text{sign}(\omega_R)$ gilt.

8. Störgrößenbeobachter

Sowohl der LUENBERGER- als auch der reduzierte Beobachter stellen Kompromisslösungen dar, deren Parametersensitivitäten mittels der Wahl der Eigenwerte oder Rückkopplungsvektoren zwar in Grenzen variiert, aber nicht frei vorgegeben werden können. Insbesondere sind beide stets von der Rotorzeitkonstante abhängig.

Es wird nun vorgeschlagen, den LUENBERGER-Beobachter um einen Zustand $\Delta\Psi_R^R$ zu erweitern, welcher den Schätzfehler des Rotorflussraumzeigers repräsentiert

$$\Psi_R^R = \hat{\Psi}_R^R + \Delta\Psi_R^R. \quad (8.1)$$

Dabei wird im Folgenden nur gefordert, dass die Gleichheit *im eingeschwungenen Zustand* erreicht sein soll.

Es wurde gezeigt, dass eine fehlerhaft geschätzte Rotorzeitkonstante τ_R einen phasenverschobenen und in der Amplitude falschen Rotorflussschätzwert nach sich zieht. Dieser dreht aber ebenso wie der wahre Rotorflussraumzeiger mit der (vorgegebenen, daher bekannten) Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S über den Rotor!

Die Differenz zwischen wahren und geschätztem Rotorflussraumzeiger dreht also ebenfalls mit ω_S und besitzt konstante Amplitude:

$$\Delta\Psi_R^R = \Psi_R^R - \hat{\Psi}_R^R = |\Psi_R^R| e^{j\omega_S t + j\varphi_0} - |\hat{\Psi}_R^R| e^{j\omega_S t + j(\varphi_0 + \Delta\rho)} = \quad (8.2)$$

$$= e^{j\omega_S t} \left(|\Psi_R^R| e^{j\varphi_0} - |\hat{\Psi}_R^R| e^{j(\varphi_0 + \Delta\rho)} \right). \quad (8.3)$$

Als Differentialgleichung angeschrieben ergibt das ganz einfach

$$\frac{d\Delta\Psi_R^R}{dt} = j\omega_S \Delta\Psi_R^R! \quad (8.4)$$

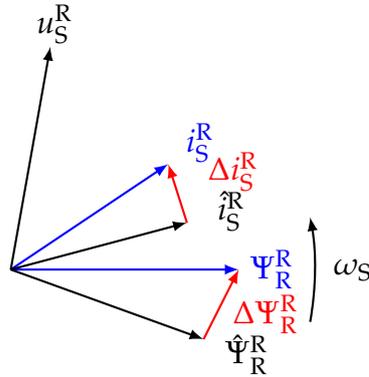


Abbildung 8.1.: Raumzeiger im Rotorkoordinatensystem im stationären Zustand. Modellfehler bewirken falsche Schätzungen $\hat{\Psi}_R^R$ bzw. \hat{i}_S^R .

Die nur näherungsweise bekannten Parameter \hat{L}_h und $\hat{\tau}_R$ gehen ausschließlich in die Schätzung von $\hat{\Psi}_R^R$ ein¹

$$\frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} = \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R} \hat{i}_S^R - \frac{1}{\hat{\tau}_R} \hat{\Psi}_R^R. \quad (8.5)$$

Als Zustandsraummodell mit dem Zustandsvektor $\zeta := [i_S^R \quad \hat{\Psi}_R^R \quad \Delta\Psi_R^R]^T$ angeschrieben ergibt das

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R + \beta \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R}\right) & \beta \left(\frac{1}{\hat{\tau}_R} - j\omega_R\right) & -j(\omega_R + \omega_S) \beta \\ \frac{\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R} & -\frac{1}{\hat{\tau}_R} & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_S \end{bmatrix}}_{=: \bar{A}} \zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \bar{b}} u_S^R. \quad (8.6)$$

Dieses Modell beschreibt im eingeschwungenen Zustand *exakt* das wahre System, auch wenn die Rotorzeitkonstante τ_R beziehungsweise die Induktivität L_h falsch geschätzt werden!

Eine tatsächliche Übereinstimmung $\hat{\Psi}_R^R + \Delta\Psi_R^R = \Psi_R^R$ erhält man jedoch nur, wenn der Anfangswert $\zeta_0 := \zeta(0)$ richtig gewählt wurde. Dieses Problem kann einfach über einen Beobachter mit asymptotisch stabiler Fehlerdynamik gelöst werden

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt} = \bar{A}\hat{\zeta} + \bar{b}u_S^R + \mathbf{k} \left(i_S^R - \bar{c}^T \hat{\zeta} \right), \quad (8.7)$$

¹der Einfluss auf die Faktoren β und L_σ ist vernachlässigbar

wobei \mathbf{k} so gewählt wird, dass die Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{k}\bar{\mathbf{c}}^T$ stets negativen Realteil besitzen². Die Summe $\hat{\Psi}_R^R + \Delta\Psi_R^R$ konvergiert dann im eingeschwungenen Zustand gegen den wahren Wert Ψ_R^R .

Die Beobachtbarkeit ist für alle (konstant angenommenen) ω_R, ω_S gegeben, sofern nicht $\omega_R + \omega_S = 0$ gilt. In diesem Extremfall oder beim Verlassen des stationären Zustandes muss ein gewöhnlicher Beobachter (ohne Erweiterung um $\Delta\Psi_R^R$) beziehungsweise das Strommodell eingesetzt werden. Die praktische Herausforderung besteht dann in der Realisierung von glatten Übergängen von einem Betriebszustand zu einem anderen.

8.1. Adaptierung der Parameter

Es ist möglich, mit Hilfe des korrekt geschätzten Rotorflussraumzeigers Ψ_R^R die wahre Rotorzeitkonstante τ_R sowie die Hauptinduktivität L_h zu bestimmen! Dazu vergleicht man die geschätzte Ableitung des Rotorflussraumzeigers mit deren wahren Wert:

$$\frac{d\hat{\Psi}_R^R}{dt} + \frac{d\Delta\Psi_R^R}{dt} = \frac{d\Psi_R^R}{dt} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\tau_R} (L_h i_S^R - \Psi_R^R). \quad (8.8)$$

Dies ist eine komplexwertige Gleichung in zwei Unbekannten τ_R und L_h und kann einfach durch eine Trennung in Real- und Imaginärteil gelöst werden:

$$\tau_R = \frac{i_{Sk} \Psi_{Rl} - i_{Sl} \Psi_{Rk}}{\frac{d\Psi_{Rk}}{dt} i_{Sl} - \frac{d\Psi_{Rl}}{dt} i_{Sk}} \stackrel{\triangleq}{=} \frac{\Psi_R^T \mathbf{J} \mathbf{i}_S}{\mathbf{i}_S^T \mathbf{J} \dot{\Psi}_R}, \quad (8.9a)$$

$$L_h = \frac{\frac{d\Psi_{Rk}}{dt} \Psi_{Rl} - \frac{d\Psi_{Rl}}{dt} \Psi_{Rk}}{\frac{d\Psi_{Rk}}{dt} i_{Sl} - \frac{d\Psi_{Rl}}{dt} i_{Sk}} \stackrel{\triangleq}{=} \frac{\Psi_R^T \mathbf{J} \dot{\Psi}_R}{\mathbf{i}_S^T \mathbf{J} \dot{\Psi}_R}. \quad (8.9b)$$

Im stationären Fall $\dot{\Psi}_R = \omega_S \mathbf{J} \Psi_R$ vereinfachen sich die Zusammenhänge zu den bekannten Relationen

$$\tau_R = \frac{1}{\omega_S} \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}}, \quad L_h = \frac{\Psi_R}{i_{Sd}}. \quad (8.10)$$

Es kommt bei zwei Betriebszuständen zu Divisionen durch null. Erstens, wenn der Statorstromraumzeiger i_S parallel zu Ψ_R liegt, also der Momentenbildende

²im Gegensatz zum LUENBERGER- oder reduzierten Beobachter gilt das Modell ohnehin nur im eingeschwungenen Zustand, so dass zeitvariante Stabilitätsuntersuchungen hinfällig sind.

Strom $i_{sq} = 0$ sowie die Schlupfwinkelgeschwindigkeit $\omega_s = 0$ sind und damit kein Moment wirkt; zweitens, wenn i_s normal auf Ψ steht, also die flussbildende Komponente $i_{sd} = 0$ ist und somit im eingeschwungenen Zustand kein Magnetfeld aufgebaut ist $\Psi_R = 0$.

Bei einem Betriebspunktwechsel ändert sich der Rotorflussfehler $\Delta\Psi_R^R$, der Beobachter folgt diesem nur asymptotisch nach. Kurzzeitig stimmt daher der geschätzte Rotorflussraumzeiger $\hat{\Psi}_R^R + \Delta\Psi_R^R$ nicht mit dem wahren überein. So wie ein integrierender Regler im nominellen Fall (keine Störungen treten auf, keine Parameterfehler liegen vor) keinen Beitrag zur Regelung leisten sollte, sollte auch hier $\Delta\Psi_R^R$ möglichst null, also $\hat{\Psi}_R^R = \Psi_R^R$ sein; das ist nur bei exakt bekannten Parametern, also $\hat{\tau}_R = \tau_R$ sowie $\hat{L}_h = L_h$ der Fall.

Um dies zu erreichen, führt man die identifizierten Parameter (stark tiefpassgefiltert) wieder dem Störgrößenbeobachter zu und dimensioniert ihn somit kontinuierlich neu.

8.2. Berücksichtigung der Statorzeitkonstante

Probleme treten auch weiterhin auf, wenn andere Parameter falsch geschätzt werden. Für einen Schätzfehler in der Statorzeitkonstante $1/\tau_s = 1/\hat{\tau}_s + 1/\Delta\tau_s$ zum Beispiel gilt beim LUENBERGER-Beobachter nach Abklingen aller Fehler

$$\frac{di_s^R}{dt} = - \left(\frac{1}{\hat{\tau}_s} + \frac{1}{\Delta\tau_s} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R \right) i_s^R + \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \Psi_R^R \stackrel{!}{=} \quad (8.11)$$

$$\frac{d\hat{i}_s^R}{dt} = - \left(\frac{1}{\hat{\tau}_s} + \beta \frac{L_h}{\tau_R} + j\omega_R \right) i_s^R + \beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \hat{\Psi}_R^R. \quad (8.12)$$

Damit ergibt sich für den Rotorflussschätzwert

$$\hat{\Psi}_R^R = \Psi_R^R - \frac{1}{\beta \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) \Delta\tau_s} i_s^R \quad (8.13)$$

beziehungsweise in den Extremfällen

$$\begin{aligned} \omega_R = 0 & \Rightarrow \hat{\Psi}_R^R = \Psi_R^R - \frac{\tau_R}{\beta} \frac{1}{\Delta\tau_s} i_s^R, \\ \omega_R \rightarrow \infty & \Rightarrow \hat{\Psi}_R^R = \Psi_R^R. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Auch hier kann man sich wieder helfen, indem die Ableitung des Stromes in einen geschätzten und einen Fehlerteil aufgeteilt wird

$$\frac{di_S^R}{dt} = \frac{d\hat{i}_S^R}{dt} + v, \quad v = \frac{1}{\Delta\tau_S} i_S^R. \quad (8.15)$$

Dieser Fehler muss im stationären Zustand – genauso wie früher $\Delta\Psi_R^R$ – bei konstanter Amplitude mit der Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S drehen

$$\frac{dv}{dt} = j\omega_S v, \quad (8.16)$$

womit sich das folgende – nur Schätzfehler in der Statorzeitkonstante τ_S berücksichtigende – Modell mit dem erweiterten Zustandsvektor $\zeta := [i_S^R \ \hat{\Psi}_R^R \ v]^T$ ergibt:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\hat{\tau}_S} + j\omega_R + \beta\frac{L_h}{\tau_R}\right) & \beta\left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) & -1 \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\frac{1}{\tau_R} & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_S \end{bmatrix}}_{=: \bar{A}} \zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \bar{b}} u_S^R. \quad (8.17)$$

Dieses ist im Gegensatz zu (8.6) *immer* beobachtbar, was der Tatsache entspricht, dass die Statorzeitkonstante gerade bei Stillstand und Nullmoment besonders gut geschätzt werden kann. Sie kann im stationären Fall direkt abgelesen werden

$$\frac{1}{\tau_S} = \frac{1}{\hat{\tau}_S} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{v}{i_S^R} \right\}. \quad (8.18)$$

8.3. Gleichzeitige Berücksichtigung von Stator- und Rotorzeitkonstante

Es stellt sich natürlich die Frage, ob die Rotor- sowie die Statorzeitkonstante gleichzeitig angepasst werden können.

Es würde sich folgendes Zustandsraummodell mit $\zeta := [i_S^R \ \hat{\Psi}_R^R \ \Delta\Psi_R^R \ v]^T$

ergeben:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R + \beta\frac{L_h}{\tau_R}\right) & \beta\left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R\right) & -j\beta(\omega_R + \omega_S) & -1 \\ \frac{L_h}{\tau_R} & -\frac{1}{\tau_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega_S \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{\bar{A}}} \zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{\bar{b}}} u_S^R. \quad (8.19)$$

Man erkennt sofort, dass auf Grund der gleichen Dynamik von $\Delta\Psi_R^R$ und v keine gleichzeitige Bestimmung erfolgen kann! Ein Zusammenlegen beider Schätzwerte ($\Delta = \Delta\Psi_R^R + v$) würde nur wieder dazu führen, dass der Schätzwert Δ eine Kombination der Auswirkungen von Fehlern in τ_R und τ_S wäre. Mit dieser Methode können die Rotor- und die Statorzeitkonstante folglich nicht gleichzeitig identifiziert werden!

8.4. Reduzierter Störgrößenbeobachter

Da das System durch die Hinzunahme des Störterms selbst in der komplexwertigen Notation ein System dritter Ordnung (und dadurch analytisch nicht mehr so einfach handhabbar) wird, soll hier auf die Möglichkeit einer reduzierten Variante des Beobachters eingegangen werden.

Ausgangspunkt ist Gleichung (8.6), wobei das System in bekannte (i_S^R) und unbekannte Größen $\tilde{\mathbf{x}} := [\Psi_R^R \ \Delta\Psi_R^R]^T$ aufgeteilt wird :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_{12}^T \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u_S^R, \quad \zeta := \begin{bmatrix} i_S^R \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (8.20)$$

Der reduzierte Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}}$ gehorcht der Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_{21}i_S^R + \mathbf{b}_2u_S^R, \quad (8.21)$$

wobei \mathbf{b}_2 der Nullvektor ist $\mathbf{b}_2 = [0 \ 0]^T$. Dies entspricht dem um den Schätzfehler $\Delta\Psi_R^R$ erweiterten Strommodell.

Man sieht an Hand des Nenners von k_2 , dass die Beobachtbarkeit von $\Delta\Psi_R^R$ für $\omega_R + \omega_S = 0$ (genauso wie beim vollständigen Störgrößenbeobachter) verlorengeht.

8.5. Praktische Überlegungen

Der Störgrößenbeobachter, ob in seiner vollständigen oder seiner reduzierten Form implementiert, gilt nur bei stationären Zuständen. Die Nachführung der Parameterschätzwerte $\hat{\tau}_R$ und \hat{L}_h hilft nur bedingt, indem der Schätzwert für den Fehler $\Delta\Psi_R^R$ klein gehalten wird. Das funktioniert allerdings nur, wenn die Maschine lange genug für die Konvergenz der Schätzwerte im stationären Zustand verharrt. Ferner ist die Berechnung der aktualisierten Parameterschätzwerte nur unter den Bedingungen $i_{sd} \neq 0$ respektive $i_{sq} \neq 0$ möglich.

Ein weiteres Problem stellt der Gültigkeitsbereich des Störgrößenbeobachters dar, welcher durch die Bedingung $\omega_R + \omega_S \neq 0$ eingeschränkt ist. Die direkte Vorgabe eines charakteristischen Polynoms mit konstanten Nullstellen hat daher für $|\omega_R + \omega_S| \rightarrow 0$ einen Vektor \mathbf{k} mit unendlich großen Einträgen zur Folge.

Es wird in der Praxis also unvermeidlich sein, den Störgrößenbeobachter temporär zu „deaktivieren“ und währenddessen mit einem normalen LUENBERGER-Beobachter oder dem Strommodell zu operieren. Ziel muss es sein, die Übergänge möglichst sanft zu gestalten und die Übergangskriterien nachvollziehbar zu wählen, so dass diese auf andere Maschinen übertragen werden können. Zweiteres wird im Folgenden erreicht, indem die Übergangskriterien – sofern möglich – aus den Nennwerten der Asynchronmaschine mittels Dauernregeln berechnet werden.

8.5.1. Grenzwerte für die Beobachtbarkeit

Aus numerischen und messtechnischen Gründen (Messrauschen, -ungenauigkeiten) kann der Störgrößenbeobachter nicht bis zu seiner theoretischen Gültigkeitsgrenze betrieben werden, es wird ein reeller, positiver Grenzwert $\omega_{\Psi,\min}$

$$|\omega_R + \omega_S| \stackrel{!}{>} \omega_{\Psi,\min} \quad (8.30)$$

eingeführt. Über diesem wird der Störgrößenbeobachter angewandt, darunter der normale LUENBERGER-Beobachter oder Prädiktor.

Zur Berechnung werden die Nenngrößen

$$\omega_{R,\text{nenn}} = n_{\text{nenn}} \frac{\pi}{30}, \quad (8.31a)$$

$$\omega_{S,\text{nenn}} = \frac{2}{3p} \frac{m_{M,\text{nenn}}}{\Psi_{R,\text{nenn}}^2} R_R \quad (8.31b)$$

sowie ein zu wählender, positiver Faktor $0 < k_\omega < 1$ herangezogen

$$\omega_{\Psi,\text{min}} = k_\omega (\omega_{R,\text{nenn}} + \omega_{S,\text{nenn}}). \quad (8.31c)$$

8.5.2. Grenzwerte für die Dynamik

Damit das Modell des Störgrößenbeobachters mit der Realität näherungsweise übereinstimmt, darf die Asynchronmaschine nicht dynamisch betrieben werden. Für den Einsatz des Störgrößenbeobachters werden daher Grenzwerte bezüglich der Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten eingeführt

$$\left| \frac{d\omega_R}{dt} \right| \stackrel{!}{<} \alpha_{R,\text{max}}, \quad \left| \frac{d\omega_S}{dt} \right| \stackrel{!}{<} \alpha_{S,\text{max}} \quad (8.32)$$

Die Werte von α_{max} sollten anfänglich klein gewählt und in Simulationen nach oben hin angepasst werden. Sinnvolle Startwerte sind

$$\alpha_{R,\text{max}} = \frac{1}{\tau_R} \omega_{R,\text{nenn}}, \quad \alpha_{S,\text{max}} = \omega_{S,\text{nenn}}. \quad (8.33)$$

8.5.3. Grenzwerte für die Parameternachführung

Der für die Parameternachführung der Rotorzeitkonstante wesentliche Nennerausdruck $\omega_S i_{Sd}$ kann entweder gleich null sein oder der Null zumindest numerisch sehr nahe kommen.

Wiederum definiert man einen Minimalwert $\omega_{S,\text{min}}$, der erreicht werden muss, damit eine numerisch sinnvolle Schätzung der Rotorzeitkonstante τ_R möglich ist

$$|\omega_S| \stackrel{!}{>} \omega_{S,\text{min}}, \quad \omega_{S,\text{min}} \approx \frac{1}{10} \omega_{S,\text{nenn}}. \quad (8.34)$$

8.5.4. Übergänge

Für einen „weicheren“ Übergang von einem Betriebszustand zum anderen kann die Vorgabe konstanter Eigenwerte durch eine drehzahl- und schlupffrequenzabhängige Eigenwertvorgabe ersetzt werden. Damit der reduzierte Störgrößenbeobachter für $|\omega_\Psi| := |\omega_R + \omega_S| \leq \omega_{\Psi,\min}$ zum „normalen“ reduzierten Beobachter wird, genügt es, einen Wunscheigenwert mit der Fehlerdynamik gleichzusetzen $\lambda_i^* = j\omega_S$. Wünscht man sich das Verhalten des Strommodells, kann zusätzlich der zweite Wunscheigenwert mit $\lambda_j^* = -1/\tau_R$ festgelegt werden.

Legt man nun einen Übergangsbereich $[\omega_{\Psi,\min}, \omega_{\Psi,\max}]$ fest und definiert einen glatten Übergang

$$\begin{aligned} g(\omega_{\Psi,\min}) &= 0, & g(\omega_{\Psi,\max}) &= 1 \\ \dot{g}(\omega_{\Psi,\min}) &= 0, & \dot{g}(\omega_{\Psi,\max}) &= 0, \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < \omega_{\Psi,\min} \\ g(x) & \text{für } \omega_{\Psi,\min} < x < \omega_{\Psi,\max} \\ 1 & \text{für } \omega_{\Psi,\max} < x \end{cases} \quad (8.36)$$

(zum Beispiel über das Polynom $p(\lambda) = -2\lambda^3 + 3\lambda^2$, $g(\omega_\Psi) = p(\omega_\Psi/\omega_{\Psi,\min})$) sowie die Eigenwertzuweisung

$$\lambda_i = f(|\omega_\Psi|)\lambda_i^* + [1 - f(|\omega_\Psi|)]j\omega_S, \quad (8.37a)$$

$$\lambda_j = f(|\omega_\Psi|)\lambda_j^* - [1 - f(|\omega_\Psi|)]\frac{1}{\tau_R}, \quad (8.37b)$$

so tritt bei einem hinreichend langsamen Übergang vom beobachtbaren in den nicht beobachtbaren Bereich (und andersherum) keine sprunghafte Änderung des Systemverhaltens auf.

Problematisch stellt sich noch die Definition $\Psi_R^R = \hat{\Psi}_R^R + \Delta\Psi_R^R$ dar, welche auch nach dem Wechsel in den nicht beobachtbaren Bereich gültig bleibt. Wird über obige Methode der Wunscheigenwert für die Anpassung von $\Delta\Psi_R^R$ auf $\lambda_i = j\omega_S$ festgelegt, rotiert der vor dem Wechsel zuletzt geschätzte Wert unbeeinträchtigt weiter und trägt folglich zu einem falschen Wert von Ψ_R^R bei.

Es bieten sich drei Lösungswege an, um mit einem Übergang aus dem beobachtbaren in den nicht beobachtbaren Bereich zum Zeitpunkt t umzugehen:

1. Der Schätzwert für den Fehler wird auf null gesetzt $\Delta\Psi_R^R(t^+) = 0$. Es kommt zu einem Sprung im Schätzwert von Ψ_R^R , welcher vermieden werden sollte.
2. Der Schätzwert für den Fehler wird auf null gesetzt, wobei der Schätzwert für den Rotorfluss $\hat{\Psi}_R^R$ dementsprechend angepasst wird

$$\Delta\Psi_R^R(t^+) = 0, \quad \hat{\Psi}_R^R(t^+) = \hat{\Psi}_R^R(t^-) + \Delta\Psi_R^R(t^-). \quad (8.38)$$

Es bleibt zwar der Wert von Ψ_R^R konstant, allerdings kommt es im Grenzbereich der Beobachtbarkeit zu unerwünschtem Verhalten (so zum Beispiel bei einem nur momentanen, numerischen Verlust der Beobachtbarkeit, der die Konvergenz des Störgrößenbeobachters unterbrechen würde).

3. Der Schätzwert für den Fehler wird im unbeobachtbaren Fall einer anderen, asymptotisch stabilen Dynamik mit der Zeitkonstante τ_Δ unterworfen

$$\frac{d\Delta\Psi_R^R}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau_\Delta} + j\omega_S\right) \Delta\Psi_R^R. \quad (8.39)$$

Bei einer sehr kleinen Zeitkonstante entspricht dies Punkt eins, bei einer zu großen näherungsweise dem Verhalten ohne Gegenmaßnahme. In der Praxis hat sich ein Wert in der Nähe der Rotorzeitkonstante $\tau_\Delta \approx \tau_R/2$ bewährt.

Wird die dritte Variante gewählt, muss die dynamische Eigenwertvorgabe in (8.37a) angepasst werden

$$\lambda_i = f(|\omega_\Psi|)\lambda_i^* + [1 - f(|\omega_\Psi|)] \left(-\frac{1}{\tau_\Delta} + j\omega_S\right). \quad (8.40)$$

8.6. Simulation

Es soll im Folgenden der Störgrößenbeobachter mit dem Strommodell sowie einem reduzierten Beobachter verglichen werden. Dazu wurde die in Anhang B beschriebene Asynchronmaschine simuliert und eine „Drehzahlterpe“ gefordert, d.h. die Drehzahl wurde monoton steigend stückweise konstant vorgegeben (siehe Abbildung B.3). Die Rotorflussamplitude Ψ_R wird im höheren Drehzahlbereich $\omega_R > \omega_{R,\text{nenn}}$ (Feldschwächbereich) gesenkt, der Schlupf steigt.

Zur Bewertung der Parameterabhängigkeiten der einzelnen Methoden wurden die geschätzten Parameterwerte \hat{R}_R , \hat{R}_S und \hat{L}_h bewusst falsch angenommen.

8. Störgrößenbeobachter

Name	Symbol	Wert
Rotorwiderstandsschätzwert	\hat{R}_R	$\frac{5}{4}R_R$
Statorwiderstandsschätzwert	\hat{R}_S	$\frac{5}{4}R_S$
Hauptinduktivitätsschätzwert	\hat{L}_h	$\frac{5}{4}L_h$
Reduzierter Beobachter		
Eigenwert	λ	$-2\frac{1}{\tau_R}$
Störgrößenbeobachter		
Eigenwerte	$[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]$	$\begin{bmatrix} -2\frac{1}{\tau_R} & -2\frac{1}{\tau_S} & -\frac{1}{2\tau_R} \end{bmatrix}$
Mindestfeldwinkelgeschwindigkeit	$\omega_{\Psi,\min}$	$\frac{1}{5}(\omega_{S,\text{nenn}} + \omega_{R,\text{nenn}})$
Maximale Rotorwinkelgeschwindigkeitsänderung	$\alpha_{R,\max}$	$\frac{1}{\tau_R}\omega_{R,\text{nenn}}$
Maximale Schlupfwinkelgeschwindigkeitsänderung	$\alpha_{S,\max}$	$\frac{1}{10}\omega_{S,\text{nenn}}$
Zeitkonstante Anpassung Parameter		$10\tau_R$

Tabelle 8.1.: Parameter der Beobachter für das Vergleichsexperiment mittels Simulation

Die vorgegebenen Eigenwerte unterscheiden sich nur geringfügig von den natürlichen Eigenwerten des Systems, die Grenzen für den Einsatz des Störgrößenbeobachters wurden entlang der Richtlinien in Abschnitt 8.5 entworfen. Um eine sinnvolle Adaptierung der Parameter zu gewährleisten, wird nach Erreichen eines stationären Zustandes erst abgewartet, bis der Schätzwert für $\Delta\Psi_R^R$ seinen Endwert angenommen hat. Als Konvergenzzeit wurde die fünffache Rotorzeitkonstante $5\tau_R$ gewählt.

In Abbildung 8.2 erkennt man, wie schlecht das Strommodell bei falsch geschätzter Rotorzeitkonstante und Hauptinduktivität abschneidet. Gerade die Hauptinduktivität wirkt sich auch extrem negativ auf den reduzierten Beobachter sowie die Störgrößenbeobachter (reduziert und vollständig) aus. Die Störgrößenbeobachter profitieren jedoch von der Anpassung der Parameter, sowohl die Rotorzeitkonstante als auch die Hauptinduktivität nähern sich den Idealwerten an (siehe Abbildung 8.3).

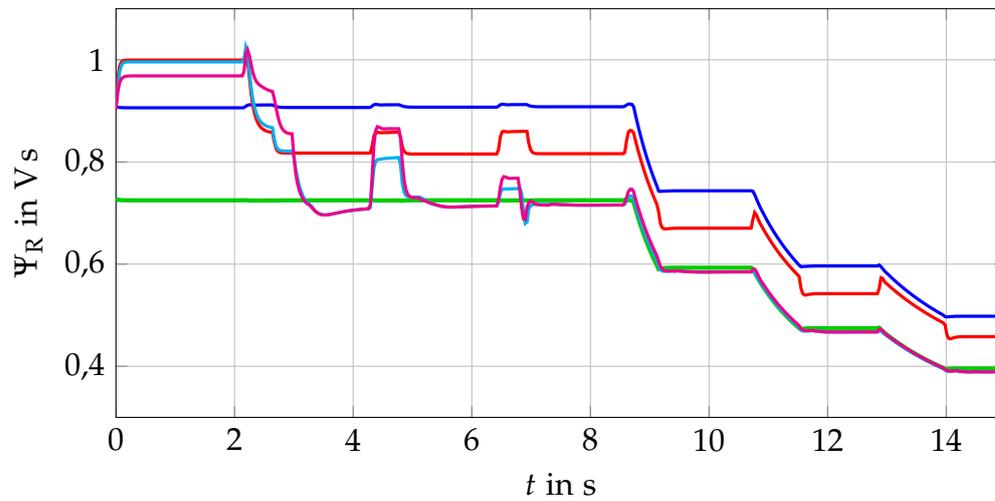


Abbildung 8.2.: Vergleich der Rotorflussschätzung mittels Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta). In grün ist der wahre Verlauf dargestellt.

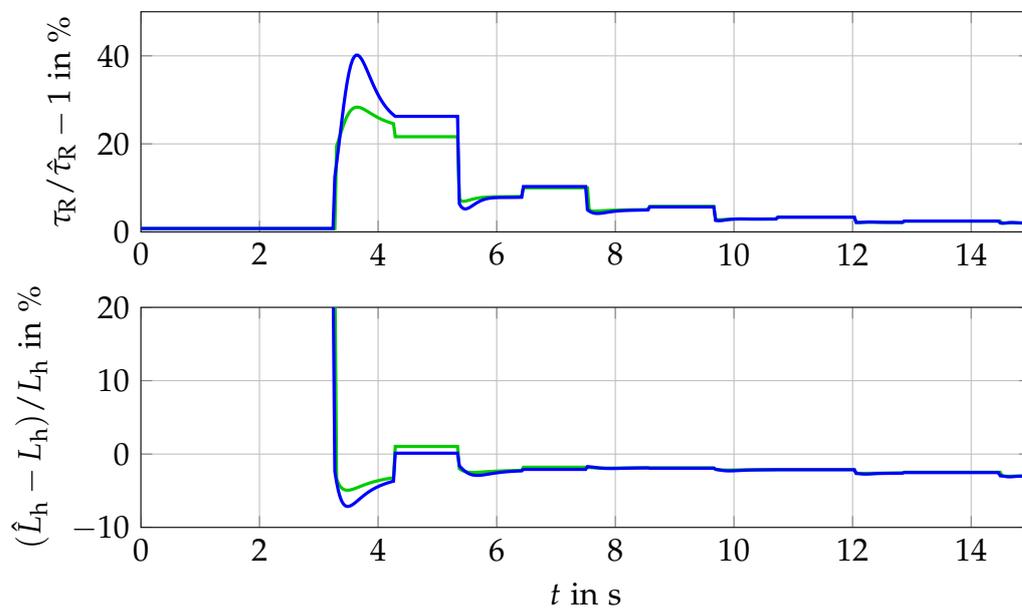


Abbildung 8.3.: Relative Parameterschätzfehler der Störgrößenbeobachter (grün vollständig, blau reduziert)

8.7. Experiment

Bei Anwendung der Störgrößenbeobachter auf Messdaten ergibt sich das Problem, dass diese verrauscht sind und dadurch die Grenzen für stationäre Zustände (insbesondere $\alpha_{S,\max}$) nie unterschritten werden. Die Störgrößenbeobachter agieren folglich wie normale (reduzierte) Beobachter.

Ignoriert man schnelle Änderungen der Schlupfwinkelgeschwindigkeit ω_S , setzt also $\alpha_{S,\max} = \infty$, kommt es bei Arbeitspunktwechseln zu Schwingungen der Schätzwerte. Zusätzlich werden die Parameter auch dann adaptiert, wenn sie es nicht sollten. Daher muss die Adaptierungsrate heruntergesetzt werden.

In Abbildung 8.4 sind die geschätzten Rotorflussverläufe dargestellt. Da der wahre Verlauf nicht bekannt ist, wurden in Abbildung 8.5 als Vergleichsmöglichkeit die geschätzten Momente dem gemessenen gegenübergestellt. Man erkennt deutlich, dass die Störgrößenbeobachter dem gewöhnlichen Strommodell sowie dem reduzierten Beobachter überlegen sind. Auch die Entwicklung der Parameterschätzwerte in Abbildung 8.6 ist sinnvoll: Man erkennt einerseits, dass die Rotorzeitkonstante initial zu hoch geschätzt wurde; andererseits ist die Zunahme der Hauptinduktivität im Feldschwäcbereich gut zu erkennen.

Die Euphorie wird jedoch durch die schwierige Dimensionierung der Grenzwerte sowie der nicht garantierbaren „Gutmütigkeit“ des Beobachters bei häufigen Wechseln von stationären und nicht stationären Zuständen gedämpft. Eine Auftrennung von Parameteridentifikation und Rotorflussschätzung erscheint sinnvoll.

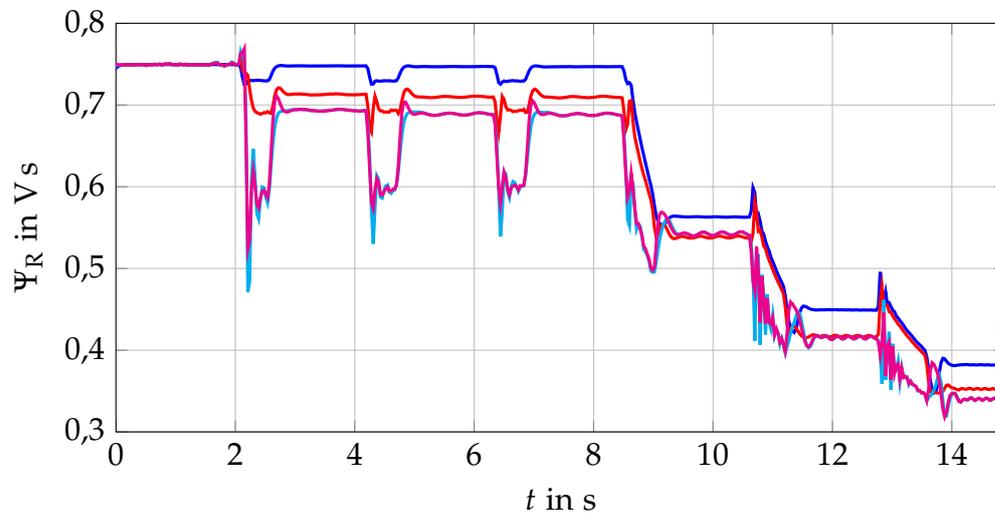


Abbildung 8.4.: Experimenteller Vergleich der Rotorflusssschätzung mittels Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta).

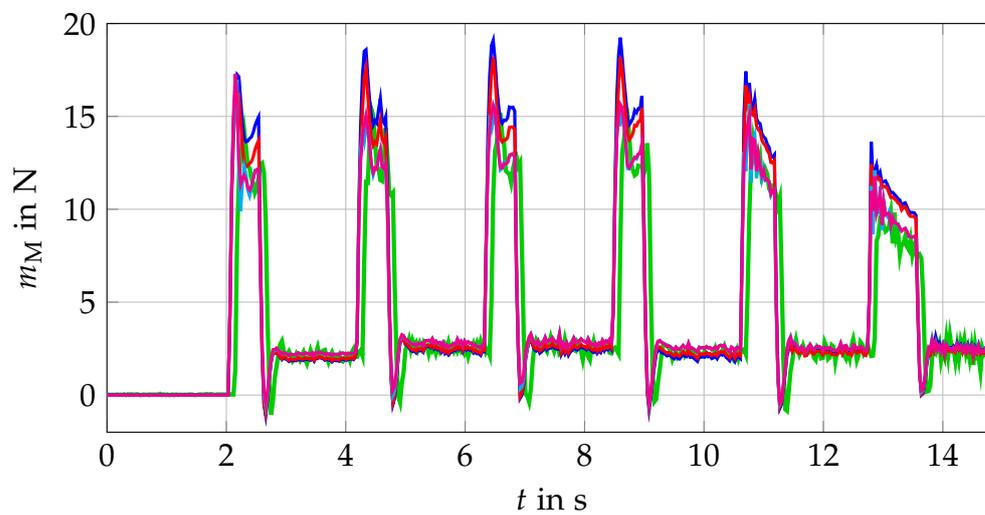


Abbildung 8.5.: Vergleich von Strommodell (blau), reduziertem Beobachter (rot) und Störgrößenbeobachter (türkis und – reduziert – magenta) bei der Schätzung des Luftspaltmoments m_M . In grün ist der gemessene Verlauf dargestellt.

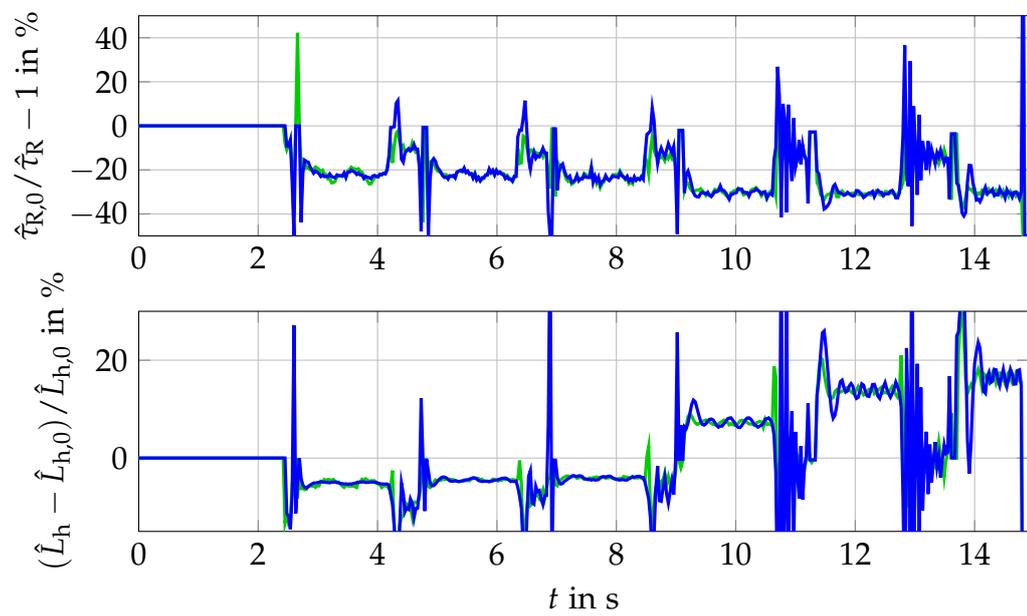


Abbildung 8.6.: Relative Änderung der Parameterschätzwerte der Störgrößenbeobachter (grün vollständig, blau reduziert)

Teil III.

Effekte zeitdiskreter Ansteuerung

9. Einführung

Die in Kapitel 2 dargestellten Modelle liegen in Form von Differentialgleichungen vor. Für die Schätzung des Rotorflussraumzeigers werden Beobachter eingesetzt, welche auf der Hardware jedoch zeitdiskret realisiert werden müssen. Die mathematischen Modelle müssen also nach der Zeit diskretisiert werden.

Der wesentlich langsamere *mechanische* Teil wird dabei üblicherweise über eine einfache EULER-Approximation behandelt. Bei der Diskretisierung des *elektrischen* Teils spielt das betrachtete Bezugssystem eine große Rolle. So kann die EULER-Approximation ausreichend sein, falls sich die elektrischen Größen in diesem nur langsam ändern. Dies ist zum Beispiel in dem mit dem Rotorfluss mitdrehenden Bezugssystem, dem sogenannten Rotorflusskoordinatensystem (RFKS), der Fall: Im stationären Zustand sind hier die meisten Größen sogar konstant, die EULER-Approximation wird also exakt. In dem ruhenden, mit dem Stator verknüpften Koordinatensystem (SKS), in dem sich die Größen sehr rasch ändern, kann eine solche Vorgehensweise bei einer Vorwärtssimulation zu Instabilität führen [29] und ist daher nicht ratsam.

Meist wird bei der Bildung zeitlich diskretisierter Modelle von einer während einer Periodendauer stückweise konstanten Eingangsgröße ausgegangen. Bei Verwendung von Pulswechselrichtern ist das eine vereinfachende Darstellung. Die Vorgabe des Spannungsraumzeigers erfolgt hier wertdiskret, die jeweilige Aufschaltdauer ergibt sich aus der Pulsweite. Dies verkompliziert die Überlegungen noch weiter und soll hier nicht betrachtet werden. Vielmehr wird im Folgenden davon ausgegangen, dass der Statorspannungsraumzeiger tatsächlich (im Mittel) über eine Periodendauer im Statorkoordinatensystem konstant vorliegt.

Als Folge der unstetigen Eingangsgröße kommt es zu sogenannten Stromrippeln. Dadurch treten Probleme bei der Messung der Ströme auf, da die zeitdiskreten Messwerte die tatsächlichen Verläufe nur mangelhaft abbilden.

Zusätzlich werden bei der feldorientierten Regelung, aber auch bei optimierungsbasierten Vorsteuerungen, konstante Eingangsgrößen im stationären Zustand nicht im Stator-, sondern im Rotorflusskoordinatensystem angenommen. Es

ist in der Praxis jedoch unmöglich, die Spannungen in einem anderen, sich relativ zum Stator drehenden Bezugssystem konstant zu halten. Dies wird in den meisten Publikationen stillschweigend vorausgesetzt [52, 29], in [8] sogar gefordert!

Das hat zur Folge, dass zeitkontinuierlich berechnete Stellgrößen bei hohen Drehzahlen nicht die gewünschten Verläufe des Rotorflussraumzeigers beziehungsweise des Drehmoments bewirken. Ferner weichen die berechneten stationären Zustände von den tatsächlichen ab. Dieses Problem wurde in [51] betrachtet, allerdings im Kontext der Zustandslinearisierung und des Einflusses der zeitlichen Änderungen der Ständerspannungen auf die Entkopplungsmatrix. Dort wurde keine modellgestützte Kompensation, sondern eine Korrektur über einen weiteren unterlagerten PI-Regler vorgeschlagen.

In diesem Kapitel wird eine einfache, approximative Kompensation der Diskretisierungseffekte bei hohen Drehzahlen vorgestellt sowie deren Auswirkungen auf eine Vorsteuerung und die Schätzung des Rotorflusses untersucht. In Kapitel 10 wird das Problem im stationären Zustand betrachtet, und es werden Rechenvorschriften für eine eingangs-, sowie eine ausgangsseitige Kompensation vorgestellt. Deren Auswirkungen werden in Kapitel 11 beim Beobachterentwurf berücksichtigt. Die erzielten Ergebnisse werden abschließend in Kapitel 12 in einer Simulation verifiziert.

10. Zeitdiskrete Vorsteuerung

Die folgenden Überlegungen basieren auf der Annahme, dass eine Asynchronmaschine im stationären Zustand betrieben wird, wobei ein vorgegebener Fluss Ψ_R sowie ein vorgegebenes Moment m_M bei konstanter Drehzahl ω_R gehalten werden sollen. Das bedeutet, dass sich die Ströme i_{sd} und i_{sq} sowie die Schlupfwinkelgeschwindigkeit $d\rho/dt$ nicht ändern. Dann müssen aber auch die Spannungskomponenten u_{sd} und u_{sq} konstant sein, der Spannungsraumzeiger rotiert also synchron mit dem Rotorfluss mit der Winkelgeschwindigkeit ω_Ψ über den Stator. Mit der Notation

$$\begin{aligned} x_k(\tau) &:= x(kT + \tau), \quad 0 \leq \tau < T, \quad k \in \mathbb{N} \\ x_k &:= x_k(0) = x(kT) \end{aligned} \quad (10.1)$$

für den Verlauf einer Größe während einer Abtastperiode T stellt sich dies im SKS als

$$u_{S,k}^s(\tau) = u_{S,k}^s e^{j\omega_\Psi \tau} \quad (10.2)$$

dar, wobei u_S^s den Spannungsraumzeiger im SKS symbolisiert. Dieser rotierende Raumzeiger kann nicht kontinuierlich vorgegeben werden! Eine zeitliche Diskretisierung mit der Abtastperiode T und einem Halteglied führt zu einem stückweise konstanten Spannungsverlauf $u_{S,k}^s(\tau) \equiv u_{S,k}^s$ und damit zu einer Abweichung von dem gewünschten, konstanten Wert im RFKS.

Dort wirkt tatsächlich

$$u_{S,k}^\Psi(\tau) = u_{S,k}^\Psi e^{-j\omega_\Psi \tau}, \quad (10.3)$$

wobei $u_{S,k}^\Psi$ den zum Zeitpunkt kT in das RFKS transformierten Spannungsraumzeiger $u_{S,k}^s$ darstellt. Folglich muss man sich von der Vorstellung konstanter Größen im RFKS verabschieden. Der stationäre Zustand wird stattdessen durch einen konstanten Mittelwert gekennzeichnet, um den die Größen schwingen.

Unter der Annahme, dass die Abweichungen vom Mittelwert niedrig ausfallen, sind die nichtlinearen Kompensationsspannungen $u_{S,komp}^\Psi$ annähernd konstant.

Dann kann die gesamte Abweichung vom konstanten Sollwert der linear wirkenden Größe $u_{S,i}^{\Psi}$ zugerechnet werden:

$$u_{S,k}^{\Psi} e^{-j\omega_{\Psi}\tau} \stackrel{!}{=} u_{S,i,k}^{\Psi}(\tau) + u_{S,komp,k}^{\Psi} \quad (10.4)$$

Mit $u_{S,komp,k}^{\Psi} = u_{S,k}^{\Psi} - u_{S,i,k}^{\Psi}$ erhält man

$$\begin{aligned} u_{S,i,k}^{\Psi}(\tau) &= u_{S,i,k}^{\Psi} + u_{S,k}^{\Psi} (e^{-j\omega_{\Psi}\tau} - 1) \approx \\ &\approx u_{S,i,k}^{\Psi} - j\omega_{\Psi}\tau u_{S,k}^{\Psi}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Der Einfluss dieser Störung wird im Folgenden untersucht und kompensiert.

10.1. Eingangsseitige Kompensation

Ziel einer Kompensation ist die Äquivalenz zum ungestörten Fall. Für den stationären Zustand bedeutet dies, dass alle Größen zu jedem Abtastzeitpunkt gleich sein müssen; zusätzlich sollen die Mittelwerte über eine Abtastperiode sowohl des Rotorflusses Ψ_R als auch des elektrischen Drehmoments m_M gewünschte Werte Ψ_R^* bzw. m_M^* annehmen:

$$\Psi_{R,k+1} \stackrel{!}{=} \Psi_{R,k} \quad (10.6)$$

$$\bar{\Psi}_{R,k} := \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_{R,k}(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} \Psi_R^* \quad (10.7)$$

$$\bar{m}_M := \frac{1}{T} \int_0^T m_{M,k}(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} m_M^*. \quad (10.8)$$

Damit ergeben sich Forderungen an die Mittelwerte der Ströme i_{sd} und i_{sq} , also $\bar{i}_{sd,k}$ bzw. $\bar{i}_{sq,k}$. Aus (2.38c) und (10.6) folgt:

$$\int_0^T \frac{1}{\tau_R} \left(-\Psi_{R,k}(\tau) + L_h i_{sd,k}(\tau) \right) d\tau \stackrel{!}{=} 0$$

und somit mit (10.7):

$$\bar{i}_{sd,k} := \frac{1}{T} \int_0^T i_{sd,k}(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} \frac{\Psi_R^*}{L_h} =: i_{sd}^*.$$

Unter der Annahme, dass die Änderung von Ψ_R während einer Abtastperiode relativ klein ausfällt – was auf Grund der im Vergleich zur Statorzeitkonstante sehr großen Rotorzeitkonstante, $\tau_R \gg \tau_S$ legitim ist –,

$$\Psi_{R,k}(\tau) \approx \bar{\Psi}_{R,k} = \Psi_R^*,$$

ergibt sich mit (2.39) und (10.8)

$$\bar{m}_M \approx \frac{3p}{2} \frac{L_h}{L_R} \Psi_R^* \bar{i}_{Sq,k} \stackrel{!}{=} m_M^*$$

eine Forderung an den Mittelwert $\bar{i}_{Sq,k}$:

$$\bar{i}_{Sq,k} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3p} \frac{L_R}{L_h} \frac{m_M^*}{\Psi_R^*} =: i_{Sq}^*.$$

Damit stimmen die geforderten Mittelwerte der Ströme mit den berechneten stationären Sollwerten überein, es gilt also $\bar{i}_{S,k}^\Psi = i_{S,k}^*$.

Die Abtastwerte der Ströme sollen ebenfalls konstant bleiben, da sonst die Kompensation zeitvariant ausfallen müsste:

$$i_{S,k+1}^\Psi \stackrel{!}{=} i_{S,k}^\Psi$$

Daraus folgt mit (2.42):

$$\int_0^T [-R_S i_{S,k}^\Psi(\tau) + u_{S,i,k}^\Psi(\tau)] d\tau \stackrel{!}{=} 0$$

die Forderung

$$\bar{u}_{S,i,k}^\Psi := \frac{1}{T} \int_0^T u_{S,i,k}^\Psi(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} R_S i_{S,i}^* =: u_{S,i}^*. \quad (10.9)$$

Dadurch ist der Spannungsraumzeiger zum Abtastzeitpunkt definiert, denn aus (10.5) folgt für den Mittelwert:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{S,i,k}^\Psi &\approx u_{S,i,k}^\Psi - j\omega_\Psi u_{S,k}^\Psi \frac{1}{T} \int_0^T \tau d\tau = \\ &= (u_{S,k}^\Psi - u_{S,komp,k}^\Psi) - j\omega_\Psi u_{S,k}^\Psi \frac{T}{2} \stackrel{!}{=} u_{S,i}^*. \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt dies approximativ

$$u_{S,k}^{\Psi} \approx e^{j\omega_{\Psi} \frac{T}{2}} \underbrace{\left(u_{S,i}^{\Psi*} + u_{S,komp,k}^{\Psi} \right)}_{=: u_S^{\Psi*}}. \quad (10.10)$$

Diese Kompensation entspricht einer (intuitiv erwarteten) Vordrehung des berechneten Sollspannungsraumzeigers $u_S^{\Psi*}$ um eine halbe Periode, so dass der ins RFKS projizierte Raumzeiger im Mittel den korrekten Wert annimmt.

Dieselbe Rechenvorschrift ergibt sich nach der in [47, 44] vorgestellten Diskretisierungsmethode. Dort wird der Mittelwert der gewünschten Eingangsgrößen während einer Abtastperiode als „gute“ zeitdiskrete Approximation einer zeitkontinuierlichen Steuerung angegeben. Im Statorkoordinatensystem ergibt das nach einigen Umrechnungen

$$u_{S,k}^S \stackrel{!}{=} \frac{1}{T} \int_0^T u_S^{S*} e^{j\omega_{\Psi} \tau} d\tau \approx u_S^{S*} e^{j\omega_{\Psi} \frac{T}{2}}. \quad (10.11)$$

Leider sagt dieser Vorschlag nichts über notwendige Einschränkungen aus. Ferner fehlt die nötige Einsicht, um eine ausgangsseitige Kompensation durchführen zu können. Diese wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

10.2. Ausgangsseitige Kompensation

Mit der Vorausdrehung des Spannungsraumzeigers wird gewährleistet, dass die Mittelwerte der Ströme ihren gewünschten Sollwerten i_{Sd}^* und i_{Sq}^* entsprechen.

Die Abtastwerte der Ströme unterscheiden sich jedoch von den Sollwerten; für den Einsatz eines zeitdiskreten Beobachters, welcher diese Messungen benötigt, sind allerdings die Mittelwerte von Interesse. Um den Unterschied abschätzen zu können, hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Abweichung der linear wirkenden Spannungskomponente $u_{S,i}^{\Psi}$ (10.5) von deren Referenz $u_{S,i}^{\Psi*}$ zu betrachten :

$$\tilde{u}_{S,i,k}^{\Psi}(\tau) = u_{S,i}^{\Psi*} - u_{S,i,k}^{\Psi}(\tau) \approx j\omega_{\Psi} \left(\tau - \frac{T}{2} \right) u_{S,i}^{\Psi*}. \quad (10.12)$$

Die Lösung der linearisierten Differentialgleichung für den Stromraumzeiger (2.42) teilt sich dann in zwei Komponenten auf: erstens den konstanten Referenzwert $i_S^{\Psi*}$, zweitens den im Mittel verschwindenden Störanteil $\Delta i_{S,k}^{\Psi}(\tau)$:

$$i_{S,k}^{\Psi}(\tau) = i_S^{\Psi*} + \Delta i_{S,k}^{\Psi}(\tau) =$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{\tau}{T_s}} \left[\underbrace{i_S^{\Psi*} + \frac{1}{L_\sigma} \int_0^\tau e^{\frac{\lambda}{T_s}} u_{S,i}^{\Psi*} d\lambda}_{\equiv i_S^{\Psi*}} \right] + \\
 &+ e^{-\frac{\tau}{T_s}} \left[\Delta i_{S,k}^{\Psi} - \frac{1}{L_\sigma} \int_0^\tau e^{\frac{\lambda}{T_s}} \tilde{u}_{S,i,k}^{\Psi}(\lambda) d\lambda \right].
 \end{aligned}$$

Der Störanteil muss am Ende einer Periode wieder vollständig hergestellt sein, da sonst $i_{S,k+1}^{\Psi} = i_{S,k}^{\Psi}$ verletzt wäre. Es muss also gelten:

$$\Delta i_{S,k}^{\Psi} = e^{-\frac{T}{T_s}} \left[\Delta i_{S,k}^{\Psi} - \frac{1}{L_\sigma} \int_0^T e^{\frac{t}{T_s}} \tilde{u}_{S,i,k}^{\Psi}(t) dt \right],$$

beziehungsweise umgeformt und mit (10.12):

$$\left(e^{\frac{T}{T_s}} - 1 \right) \Delta i_{S,k}^{\Psi} \stackrel{!}{=} \frac{j\omega_\Psi}{L_\sigma} u_S^{\Psi*} \underbrace{\int_0^T e^{\frac{t}{T_s}} \left(\frac{T}{2} - t \right) dt}_{:=s(T)}.$$

Nach Auswertung des Integrals $s(T)$ erhält man für den Störanteil $\Delta i_{S,k}^{\Psi}$:

$$\Delta i_{S,k}^{\Psi} = j \underbrace{\frac{1}{L_\sigma} \frac{s(T)}{e^{\frac{T}{T_s}} - 1}}_{:=\Delta_i} \omega_\Psi u_S^{\Psi*}. \quad (10.13)$$

Subtrahiert man diesen Wert von einem zum Zeitpunkt kT erfolgten Messwert, erhält man den tatsächlich im Mittel wirkenden Strom:

$$i_S^{\Psi*} = i_{S,k}^{\Psi} - \Delta i_{S,k}^{\Psi}. \quad (10.14)$$

Der Faktor Δ_i wird nur einmal berechnet. Er ist ein Maß für die Verkopplung zwischen dem d- und dem q-Zweig, die durch die Diskretisierung entsteht. Eine sehr gute Näherung stellt folgender Grenzwert dar:

$$\lim_{\frac{1}{T_s} \rightarrow 0} \Delta_i = -\frac{1}{L_\sigma} \frac{T^2}{12}. \quad (10.15)$$

Im Rotorkoordinatensystem (RKS) dreht der Stromraumzeiger im stationären Zustand mit der Schlupfwinkelgeschwindigkeit $d\rho/dt = \omega_S$ über den Rotor hinweg

$$i_{S,k}^R(\tau) = i_{S,k}^{\Psi}(\tau) e^{j\rho_k(\tau)} \approx i_S^{\Psi*} e^{j\rho_k(\tau)}.$$

Im Mittel wirkt wieder näherungsweise der um die halbe Periodendauer vorge-
drehte Raumzeiger:

$$\bar{i}_{S,k}^R \approx i_S^{\Psi*} e^{j\rho_k} e^{j\omega_S \frac{T}{2}}.$$

Diesen erhält man aus einem Messwert $i_{S,k}^R$ durch

$$\bar{i}_{S,k}^R \approx (i_{S,k}^R - j\Delta_i \omega_S \bar{u}_{S,k}^R) e^{j\omega_S \frac{T}{2}} \quad (10.16)$$

mit $\bar{u}_{S,k}^R \approx u_S^{\Psi*} e^{j\rho_k}$ und $i_{S,k}^R = i_{S,k}^{\Psi} e^{j\rho_k}$.

11. Berücksichtigung beim Beobachterentwurf

Die Auswirkungen der stückweise konstant vorgegebenen Statorspannungen werden durch die Vordrehung um $\omega_{\Psi}T/2$ annähernd annulliert. Die dabei dennoch entstehenden Stromrippeln führen bei der Anwendung der klassischen Rotorflussschätzer aus den Kapiteln 4 oder 6 zu fehlerhaften Ergebnissen. In diesem Abschnitt werden die dafür vorgestellten ausgangsseitigen Kompensationsmethoden zum besseren Verständnis bei zwei verschiedenen Beobachterentwürfen eingesetzt.

11.1. Strommodell

Zur Schätzung der nicht messbaren Größen Ψ_R und ρ bietet sich zunächst die EULER-Diskretisierung des Strommodells an, welches in Gleichung (2.38) beschrieben wurde. Als Eingangsgrößen müssen nun die um den Mittelwert der Störung kompensierten Ströme benutzt werden:

$$\begin{aligned}\Psi_{R,k+1} &= \left(1 - \frac{T}{\tau_R}\right) \Psi_{R,k} + L_h \frac{T}{\tau_R} (i_{sd,k} - \Delta i_{sd,k}) \\ \rho_{k+1} &= \rho_k + L_h \frac{T}{\tau_R} (i_{sq,k} - \Delta i_{sq,k}).\end{aligned}\tag{11.1}$$

11.2. LUENBERGER-Beobachter

Wird zusätzlich zum gemessenen Strom auch die Spannung für die Schätzung des Rotorflusses herangezogen, muss dies gesondert berücksichtigt werden. Der

im rotorfesten Koordinatensystem definierte LUENBERGER-Beobachter in Kapitel 6 zum Beispiel lautete

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}^R}{dt} = \underbrace{\left(\mathbf{A}(t) - \mathbf{k}(t)\mathbf{c}^T \right)}_{=:\hat{\mathbf{A}}(t)} \hat{\mathbf{x}}^R + \mathbf{b}u_S^R + \mathbf{k}(t)i_S^R. \quad (11.2)$$

Bei der zeitdiskreten Implementierung wird die elektrische Winkelgeschwindigkeit ω_R als stückweise konstant angenommen $\omega_{R,k}(\tau) \equiv \omega_{R,k}$. Durch die Vordrehung des Spannungsraumzeigers $u_{S,k}^*$ um den Winkel $\omega_\Psi T/2$ wirkt im Mittel näherungsweise der ins RKS transformierte Sollspannungsraumzeiger:

$$\bar{u}_{S,k}^R \approx u_{S,k}^{\Psi*} e^{j\rho_k}$$

Ein weiteres Eingehen auf den mit $d\rho/dt$ über den Rotor hinwegdrehenden Spannungsraumzeiger ist nicht nötig!

Der Stromraumzeiger kann ebenfalls als stückweise konstant angenommen werden. Der um den Rippel kompensierte Mittelwert $\bar{i}_{S,k}^R$ wurde in (10.16) berechnet. Eine einfache EULER-Diskretisierung der Beobachtergleichung (11.2) ergibt damit die rekursive Relation:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^R = \hat{\mathbf{A}}_{d,k} \hat{\mathbf{x}}_k^R + \mathbf{b}_{d,k} \bar{u}_{S,k}^R + \hat{\mathbf{b}}_{d,k} \bar{i}_{S,k}^R \quad (11.3)$$

mit den Abkürzungen

$$\hat{\mathbf{A}}_{d,k} := \mathbf{E} + \hat{\mathbf{A}}(kT)T, \quad \mathbf{b}_{d,k} := \mathbf{b}T \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{b}}_{d,k} := \hat{\mathbf{b}}T. \quad (11.4)$$

12. Simulationsergebnisse

Zur Veranschaulichung der Problematik wird eine Asynchronmaschine¹ in MATLAB/Simulink simuliert. Es wird über eine Vorsteuerung zuerst ein Nennfluss von $\Psi_{R,nenn} = 0,47 \text{ Vs}$ aufgebaut, dann der Rotor extern bei $t = 0,5 \text{ s}$ innerhalb von einer halben Sekunde aus der Ruhe auf $15\,000 \text{ U/min}$ beschleunigt. Ab $t = 1 \text{ s}$ wird zu jeder halben Sekunde ein höheres elektrisches Moment (5, 35, 70 Nm) gefordert; die Drehzahl wird dabei von außen konstant gehalten. Die Größen ω_R und m_M werden hierfür stückweise konstant vorgegeben und mit Polynomen hinreichend hohen Grades an den Sprungstellen interpoliert. Die Referenzgrößen u_S^* und ρ^* können dann flachheitsbasiert energieoptimal vorausgerechnet werden [19]. Bei höheren Drehzahlen wird zusätzlich das Feld mit $\propto 1/\omega_R$ geschwächt, um die Spannungsbegrenzung nicht zu erreichen.

Die Abtastzeit wird mit $T = 200 \mu\text{s}$ festgelegt; bei maximalem Moment überstreicht der Stromraumzeiger damit einen Winkel von $\omega_\Psi T \hat{=} 18,2^\circ$.

Nach der Vordrehung um eine halbe Periodendauer (10.10) wird die Spannung über ein Halteglied an die Maschine gelegt. Die Drehung aus dem RFKS in das SKS erfolgt dabei zu Demonstrationszwecken mit ideal gemessenen Winkeln ρ und φ_R , um den Einfluss der Beobachter auf die Simulation möglichst gering zu halten.

Die Verläufe des Drehmoments m_M mit und ohne Vordrehung des Spannungsraumzeigers um $\omega_\Psi T/2$ sind in Abb. 12.1 zu sehen. Die erzeugten Momente weichen ohne Vordrehung massiv von den vorgegebenen ab. Da der Spannungsraumzeiger bei niedrigem Wunschmoment sogar in den falschen Quadranten dreht, ist das Moment dort negativ. Mit Vordrehung jedoch werden die gewünschten Werte sehr gut erreicht. Bei allen weiteren Simulationen wird deshalb eine Vordrehung durchgeführt.

¹Es handelt sich um eine Asynchronmaschine mit Käfigläufer und den Daten $R_R = 7,667 \text{ m}\Omega$, $R_S = 15,26 \text{ m}\Omega$, $L_R = 9,084 \text{ mH}$, $L_S = 9,267 \text{ mH}$, $L_h = 9,014 \text{ mH}$, $p = 1$, $n_{nenn} = 4430 \text{ U/min}$, $m_{M,nenn} = 345 \text{ Nm}$, $P_{nenn} = 165 \text{ kW}$.

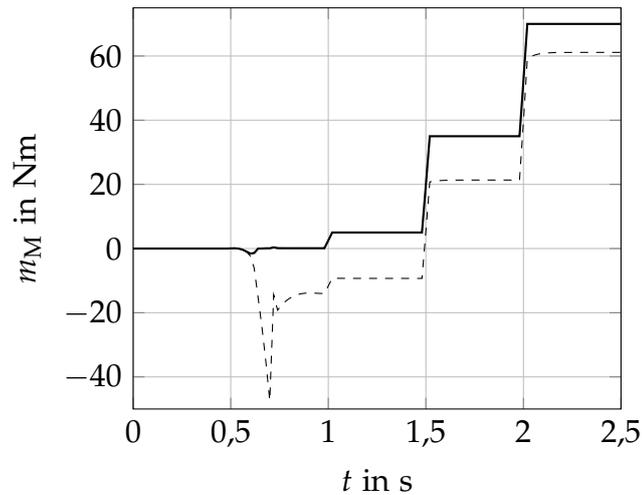


Abbildung 12.1.: Verlauf des Drehmoments mit (durchgezogen) und ohne (strichliert) Vordrehung des Spannungsraumzeigers um $\omega_\Psi T/2$.

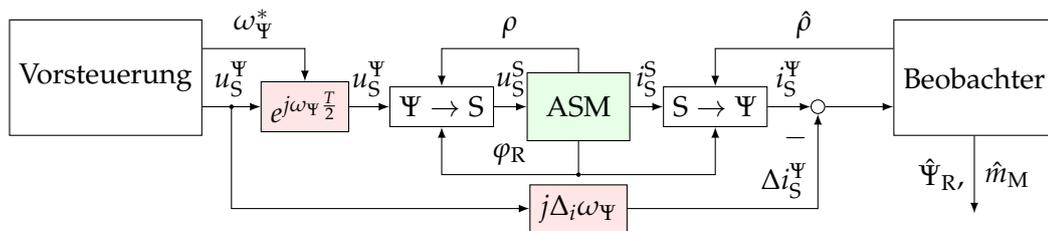


Abbildung 12.2.: Strukturbild der Steuerung mit Kompensation und Beobachter im RFKS.

Für die Schätzung des Rotorflusses wird der gemessene Strom $i_{S,k}^s$ mittels des geschätzten Wertes $\hat{\rho}_k$ und des gemessenen Wertes $\varphi_{R,k}$ in das RFKS transformiert und dann um den Rippel $\Delta i_{S,k}^\Psi$ bereinigt (10.14). Das Strukturbild ist in Abb. 12.2 zu sehen. Alternativ dazu erfolgt nur eine Transformation in das RKS; hier erfolgt eine Kompensation des Strommesswertes gemäß (10.16).

Die Notwendigkeit einer Rippelkorrektur ist in Abb. 12.3 ersichtlich: die zum Zeitpunkt $\tau = 0$ erfolgte Messung erfasst gerade die Spitze des Stromwertes, der Mittelwert liegt wesentlich darunter. Durch die Vordrehung des Spannungsraumzeigers stimmt der Sollwert i_{sd}^* näherungsweise mit dem Mittelwert $\bar{i}_{sd,k}$ überein; die Kompensation gemäß (10.14) gleicht auch die Messung dem Mittelwert an.

In Abb. 12.4 ist eine Aufnahme des geschätzten Drehmoments m_M dargestellt. Man erkennt deutlich den Einfluss der Kompensation um Δi_s auf die Ergebnis-

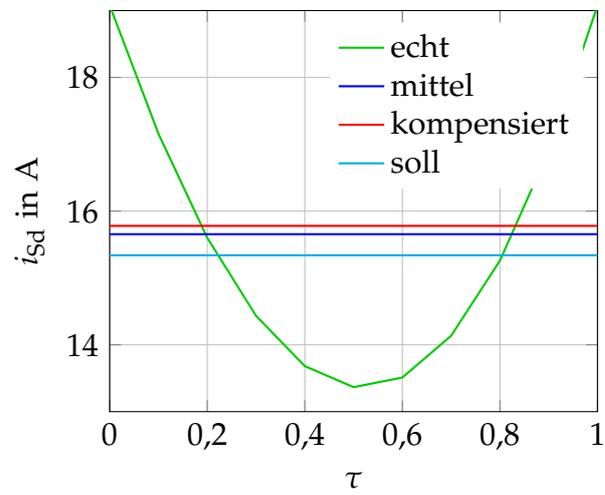


Abbildung 12.3.: Verlauf des flussbildenden Stromes i_{sd} während einer Abtastzeit.

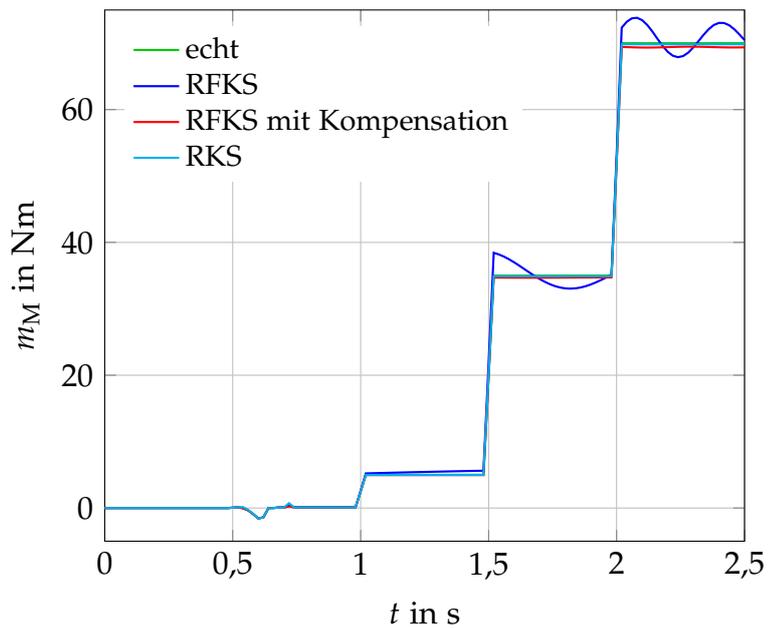


Abbildung 12.4.: Geschätzter Verlauf von m_M mittels Prädiktor im RFKS bzw. LUENBERGER-Beobachter im RKS.

se des Strommodells, der Rotorfluss (nicht dargestellt) und das Drehmoment werden mir ihr beinahe perfekt geschätzt! Ohne Kompensation kommt es zu einer Schwingung der Schätzwerte mit ungefähr Schlupffrequenz. Diese ist auf die Verwendung des Schätzwertes $\hat{\rho}_k$ zur Transformation der Messwerte in das RFKS zurückzuführen; speist man den Beobachter mit den korrekt transformierten Werten von i_{sd} und i_{sq} , konvergiert das Modell schwingungsfrei gegen den (bei Kompensation des Rippels halbwegs korrekten) Endschätzwert.

Der LUENBERGER-Beobachter beruht auf dem vollständigen elektrischen Modell und reagiert daher (abhängig von der gewählten Rückkopplung) weniger empfindlich auf Fehler in der Strommessung. Die Auswirkungen der Kompensation waren in den Simulationen kaum wahrnehmbar. In der Folge wird daher darauf verzichtet.

13. Zusammenfassung

In diesem Teil wurden einfache Methoden zur näherungsweise Kompensation der Effekte einer zeitlich diskreten Ansteuerung der Asynchronmaschine vorgestellt. Die intuitiv logisch erscheinende Vordrehung des aufzuschaltenden Spannungsraumzeigers um $\omega_{\Psi}T/2$ ist für eine zeitdiskrete Vorsteuerung oder Regelung nützlich: im Mittel wird damit der gewünschte Effekt erzielt, der Aufwand eines Stromreglers wird verringert. In der Fachliteratur ist diese einfache Maßnahme bisher leider nicht verbreitet.

Auf der Ausgangsseite führt die stückweise konstante Vorgabe der Spannung zu erheblichen Stromrippeln zwischen den Abtastzeitpunkten. Diese müssen bei Beobachtern, welche zu diskreten Zeitpunkten $t = kT$ aufgenommene Messwerte benutzen, berücksichtigt werden. Sonst weichen selbst bei genau bekannten Maschinenparametern die Schätzwerte für den Rotorfluss $\hat{\Psi}_R$ und das elektrische Moment \hat{m}_M von den realen Werten ab. Dies trifft insbesondere auf das üblicherweise verwendete Strommodell im Rotorflusskoordinatensystem zu. Bei der praktischen Realisierung des Beobachters kann auf die hier vorgestellte Methode zurückgegriffen werden.

In der Praxis hat es sich als sinnvoller erwiesen, auf eine Überabtastung der Strommesswerte, gefolgt von einer Mittelung, zu setzen. Dadurch werden auch die von der Pulsweitenmodulation herrührenden Rippel geglättet, die hier nicht berücksichtigt wurden. In der Simulation hingegen will man eine Überabtastung aus Zeitgründen meist vermeiden. Die vorgestellte Kompensationsmethode führt hier zu einem Genauigkeitsgewinn.

Teil IV.

Parameteridentifikation

14. Einführung

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Parameteridentifikation bei einer Asynchronmaschine. Damit sind alle Parameter, die in den in Kapitel 2 vorgestellten Modellen vorkommen, gemeint; ein besonderes Augenmerk wurde aber auf die Identifikation der Rotorzeitkonstante τ_R gelegt, da diese für eine feldorientierte Regelung von höchster Bedeutung ist.

Ausgangspunkte aller Überlegungen sind dabei – sofern nicht anders angeführt – die Differentialgleichungen des elektrischen Teilmodells im rotorfesten Koordinatensystem

$$\frac{di_S^R}{dt} = - \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \right) i_S^R - \beta \left(\frac{d\Psi_R^R}{dt} + j\omega_R \Psi_R^R \right) + \frac{1}{L_\sigma} u_S^R, \quad (14.1a)$$

$$\frac{d\Psi_R^R}{dt} = \frac{1}{\tau_R} (L_h i_S^R - \Psi_R^R). \quad (14.1b)$$

Als Messwerte stehen die Statorströme und -spannungen in Form der Raumzeiger i_S^R beziehungsweise u_S^R , sowie die elektrische Rotorwinkelgeschwindigkeit ω_R zur Verfügung.

Da der Rotorflussraumzeiger Ψ_R^R und dessen Ableitung *nicht* mit vernünftigem Aufwand messbar sind, werden sie aus den Differentialgleichungen eliminiert. Dazu löst man die Gleichungen (14.1) nach Ψ_R^R und $d\Psi_R^R/dt$ auf und setzt die Ableitung von Ψ_R^R der Lösung für $d\Psi_R^R/dt$ gleich. Es verbleibt eine Eingangs-/Ausgangsrelation von Spannung zu Strom

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_S^R}{dt^2} \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) + \\ & + \frac{di_S^R}{dt} \left\{ \omega_R^2 - j \left[\frac{1}{\tau_S} - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{1}{\tau_R} \right] \omega_R + \frac{1}{\tau_R} \left(\frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\sigma\tau_R} \right) + j \frac{d\omega_R}{dt} \right\} + \\ & + i_S^R \left[\frac{1}{\sigma\tau_R} \omega_R^2 + j \frac{1}{\tau_R} \left(\frac{1}{\sigma\tau_R} - \frac{1}{\tau_S} \right) \omega_R + j \frac{d\omega_R}{dt} \left(\frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\sigma\tau_R} \right) + \frac{1}{\tau_R^2} \frac{1}{\tau_S} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{L_\sigma} \left[\frac{du_S^R}{dt} \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) + u_S^R \left(-\frac{1}{\tau_R} j\omega_R + \frac{1}{\tau_R^2} + j \frac{d\omega_R}{dt} \right) \right] \quad (14.2)$$

Die Parameteridentifikationsverfahren unterscheiden sich nun dadurch, welche einschränkenden Bedingungen bezüglich des Betriebspunktes sowie der bekannten Parameter sie voraussetzen. Allen gemeinsam ist die Einschränkung, dass aus dem Eingangs-/Ausgangsverhalten (also den Relationen von Statorspannungen zu Statorströmen) nicht alle elektrischen Parameter ermittelt werden können. So werden Maschinen mit unterschiedlichen Werten von R_R , L_R und L_h , aber gleichen Quotienten $R_R/L_R = 1/\tau_R$ und $L_h^2/L_R = 1/\sigma - 1$ dasselbe Eingangs-/Ausgangsverhalten aufweisen [68]. Aus (14.2) wird dies ersichtlich, da ausschließlich die Zeitkonstanten τ_R und τ_S sowie die Werte für die Streuziffer σ und die Statorstreuinduktivität L_σ auftreten, aus welchen nicht sämtliche elektrischen Parameter berechnet werden können. Erst durch die Messung von Rotorgrößen könnten die fehlenden Parameter direkt ermittelt werden.

Es ist prinzipiell möglich, obige Differentialgleichung direkt zur Bestimmung der Parameter heranzuziehen; der Aufwand ist jedoch beträchtlich und erfordert das Aufstellen und Lösen von polynomialen Gleichungen sehr hohen Grades [77]. Einfacher wird die Aufgabe, wenn davon ausgegangen werden kann, dass einige Parameter bereits bekannt sind [76], siehe auch Kapitel 15.

Geht man von einer langsam veränderlichen Drehzahl aus $d\omega_R/dt \approx 0$, vereinfacht sich das Modell wesentlich. Man kann dann anstatt mit der Differentialgleichung mit zeitvarianten Koeffizienten mit der einfacheren Übertragungsfunktion $G(s) = i_S^R(s)/u_S^R(s)$ operieren, bei welcher die Funktion $\omega_R(t)$ als konstanter Parameter betrachtet wird. Dies erlaubt den Einsatz bekannter Methoden für die Parameteridentifikation linearer, zeitinvarianter Systeme. Siehe dazu Abschnitt 16.

Schließlich reduziert die Annahme eines stationären Zustandes die zeitinvarianten Differentialgleichungen im rotorflussfesten Koordinatensystem zu algebraischen Gleichungen. Hier macht man sich die Erkenntnisse aus Teil II zunutze und kann damit zumindest einzelne Parameter relativ einfach ermitteln. Davon soll in Kapitel 17 die Rede sein.

Abschließend werden in Kapitel 18 noch einige Methoden vorgestellt, die nicht direkt im allgemeinen Betrieb einer Asynchronmaschine eingesetzt werden können, sondern bestimmte Betriebsmuster voraussetzen. Es werden die Erkenntnisse aus Teil II direkt angewandt, um bestimmte Parameter *ohne jeglichen*

Einfluss der anderen Parameter zu ermitteln. Damit eignen sich diese Methoden besonders für den Einsatz bei der Kommissionierung einer Maschine.

15. Dynamischer Betrieb

Der dynamische Betrieb eignet sich nur eingeschränkt für die Parameteridentifikation. Zur Bestimmung der Parameter benötigt man nicht nur die Statorströme und -spannungen sowie die Rotordrehzahl, sondern auch deren zeitliche Ableitungen. Das stellt einen vor gewisse Schwierigkeiten; insbesondere die Eingangsspannungen sind sogar theoretisch nicht differenzierbar, da sie nicht notwendigerweise stetig sind.

Um die Ableitungen sinnvoll bilden zu können, müssen die Messsignale gefiltert werden, was zu Phasenverschiebungen und Amplitudenänderungen führt. Da es sich um ein lineares, zeitvariantes System handelt, dürfen nur Filter, welche linear in der Phase sind und über ein breites Frequenzband die Amplituden erhalten, eingesetzt werden [50]. Dieses Kriterium erfüllen zum Beispiel bestimmte Filter mit endlicher Impulsantwort¹; in Anhang D wird eine Möglichkeit beschrieben, so einen Filter zur Ableitungsschätzung herzuleiten.

Je nach gewähltem Koordinatensystem muss die Grenzfrequenz der Filter anders dimensioniert werden. Im Rotorkoordinatensystem zum Beispiel kann man sich nach der maximalen Schlupfwinkelgeschwindigkeit

$$\omega_{S,\max} = \frac{1}{\tau_R} \frac{i_{Sq,\max}}{i_{Sd,\min}} \quad (15.1)$$

mit

$$i_{Sd,\min} = \frac{\Psi_{R,\min}}{L_h}, \quad \Psi_{R,\min} = \frac{\omega_{R,\max}}{\omega_{R,\text{nenn}}} \Psi_{R,\text{nenn}}, \quad i_{Sq,\max} = \sqrt{i_{\max}^2 - i_{Sd,\min}^2} \quad (15.2)$$

richten. Diese Abschätzung gilt allerdings nur für den stationären Zustand bei sinusförmiger Anregung der Phasen.

Im folgenden Abschnitt 15.1 wird die direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante aus den Signalen und deren Ableitungen hergeleitet. In [50] wurden noch

¹engl. *finite impulse response*, kurz FIR

Ableitungen höherer Ordnung gebildet, um weitere Parameter schätzen zu können.

Andere Ansätze stellen Kombinationsverfahren aus Beobachtern und Parameteradaption dar. So kann ein *Extended KALMAN Filter* eingesetzt werden, um gleichzeitig den Statorstrom, den Rotorfluss und die Rotorzeitkonstante zu schätzen [3, 79, 43, 56, 1]. Ähnliche Ziele verfolgen *Sliding-mode*-Ansätze [33, 32] oder *Extended LUENBERGER observers* [13]. Mathematisch sehr elegant wiederum sind adaptive Beobachter, deren Stabilität beziehungsweise Konvergenz über LYAPUNOV-Funktionen bewiesen werden [28, 45, 46]. Diese jedoch ergeben Systeme bis zu 11ter Ordnung mit etlichen zu dimensionierenden Parametern.

Allen gemeinsam sind ein erhöhter Rechenaufwand sowie Sensitivitäten bezüglich anderer, nicht geschätzter Parameter. Die ansonsten offensichtliche Filterung der Messsignale geschieht hier über Umwege ebenfalls (etwa über die Wahl der Kovarianzmatrizen oder sonstiger Parameter), erlaubt aber keine Einblicke mehr. Schließlich und endlich können auch die komplizierteren Methoden nur jene Information aus den Messungen herausfiltern, welche die direkte Methode ohne Umwege sofort extrahiert.

15.1. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante

Ist man in der Lage, Signale ideal zu differenzieren, so kann die Rotorzeitkonstante als Funktion der Ableitungen der Ein- und Ausgangsgrößen dargestellt werden:

$$\tau_R = \tau_R \left(\frac{d^2 i_S^R}{dt^2}, \frac{d i_S^R}{dt}, i_S^R, \frac{d u_S^R}{dt}, u_S^R, \frac{d \omega_R}{dt}, \omega_R \right) \quad (15.3)$$

Betrachtet man die allgemeine Eingangs-/Ausgangsbeziehung (14.2), fällt auf, dass ausschließlich der Unterschied zwischen der gesamten Spannung u_S^R und der am Statorwiderstand R_S abgefallenen Spannung $R_S i_S^R$ vorkommt, nicht aber u_S^R selbst. Bezeichnet man diese induzierte Spannung als

$$u_\Psi := u_S - R_S i_S \quad (15.4)$$

und beachtet, dass sie immer in Verbindung mit der Statorstreuinduktivität L_σ auftritt, so ergibt sich zusammenfassend von der Einheit her eine Stromänderung ($A s^{-1}$), welche im Folgenden mit

$$\frac{d i_\Psi}{dt} := \frac{1}{L_\sigma} u_\Psi = \frac{1}{L_\sigma} (u_S - R_S i_S) = \frac{d i_\Psi}{dt} (R_S, L_\sigma) \quad (15.5)$$

symbolisiert wird. Bei niedrigen Drehzahlen spielt die induzierte Spannung noch kaum eine Rolle, es gilt näherungsweise $di_\Psi/dt \approx 0$; bei hohen Drehzahlen hingegen überwiegt die induzierte Spannung den Spannungsabfall am Widerstand, es gilt $di_\Psi/dt \approx u_S/L_\sigma$:

$$|\omega_R| \ll: \frac{di_\Psi}{dt} \approx 0, \quad |\omega_R| \gg: \frac{di_\Psi}{dt} \approx \frac{1}{L_\sigma} u_S. \quad (15.6)$$

Die Relation (14.2) vereinfacht sich dank der neu eingeführten Größe zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_R^2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{di_S^R}{dt} - \frac{di_\Psi}{dt} \right) + \left(\frac{1}{\sigma\tau_R} i_S^R + \frac{di_S^R}{dt} \right) \omega_R^2 + \left(\frac{d^2 i_S^R}{dt^2} - \frac{d^2 i_\Psi}{dt^2} \right) \left(\frac{1}{\tau_R} - j\omega_R \right) + \\ & + \frac{1}{\tau_R} \left[\frac{1}{\sigma\tau_R} i_S^R + \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{di_S^R}{dt} + \frac{di_\Psi}{dt} \right] j\omega_R + j \frac{d\omega_R}{dt} \left(\frac{1}{\sigma\tau_R} i_S^R + \frac{di_S^R}{dt} - \frac{di_\Psi}{dt} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Es ergibt sich für die inverse Rotorzeitkonstante eine quadratische Gleichung mit komplexwertigen Koeffizienten, von deren Lösungen zumindest eine eine reelle Zahl darstellt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau_R} \right)^2 \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{di_S^R}{dt} + j\omega_R i_S^R \right) - \frac{di_\Psi}{dt} \right] + \\ & + \frac{1}{\tau_R} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} (i_S^R - i_\Psi^R) + \frac{1}{\sigma} \left(\omega_R^2 + j \frac{d\omega_R}{dt} \right) i_S^R + j\omega_R \frac{d}{dt} \left[i_\Psi^R + i_S^R \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \right\} + \\ & + j \frac{d\omega_R}{dt} \frac{d}{dt} (i_S^R - i_\Psi^R) - j\omega_R \frac{d^2}{dt^2} (i_S^R - i_\Psi^R) + \omega_R^2 \frac{di_S^R}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Da die Koeffizienten obiger Gleichung allerdings mit Hilfe gemessener Größen gebildet werden, erhält man als Lösung im Allgemeinen eine komplexwertige inverse Rotorzeitkonstante $1/\tau_R$. Formt man die Gleichung jedoch in ein monisches Polynom um und bildet den Imaginärteil, so vereinfacht sich das Problem zu einer linearen Gleichung mit reeller Lösung: Es gilt für eine quadratische Gleichung mit reeller Lösung r , aber komplexwertigen Koeffizienten z_i , $i = 0, 1, 2$

$$z_2 r^2 + z_1 r + z_0 = 0 \quad (15.9)$$

allgemein²

$$\operatorname{Im} \left\{ r^2 + \frac{z_1}{z_2} r + \frac{z_0}{z_2} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\} r + \operatorname{Im} \left\{ \frac{z_0}{z_2} \right\} = 0. \quad (15.10)$$

Schreibt man die komplexen Zahlen $z_i = a_i + jb_i$ als Vektoren $\mathbf{z}_i := [a_i \ b_i]^T$ an, ergibt sich

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z_j}{z_i} \right\} = \frac{\mathbf{z}_j^T \mathbf{z}_i}{\|\mathbf{z}_i\|^2}, \quad \operatorname{Im} \left\{ \frac{z_j}{z_i} \right\} = \frac{\mathbf{z}_j^T \mathbf{J} \mathbf{z}_i}{\|\mathbf{z}_i\|^2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.11)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2 &:= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{i}_S + \mathbf{J} \omega_R \mathbf{i}_S \right) - \frac{d\mathbf{i}_\Psi}{dt}, \\ \mathbf{z}_1 &:= \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{i}_S - \mathbf{i}_\Psi) + \frac{1}{\sigma} \left(\omega_R^2 + \mathbf{J} \frac{d\omega_R}{dt} \right) \mathbf{i}_S + \mathbf{J} \omega_R \frac{d}{dt} \left[\mathbf{i}_\Psi + \mathbf{i}_S \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right], \\ \mathbf{z}_0 &:= \mathbf{J} \frac{d\omega_R}{dt} \frac{d}{dt} (\mathbf{i}_S - \mathbf{i}_\Psi) - \mathbf{J} \omega_R \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{i}_S - \mathbf{i}_\Psi) + \omega_R^2 \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} \end{aligned} \quad (15.12)$$

erhält man somit für die inverse Rotorzeitkonstante

$$\frac{1}{\tau_R} = -\frac{\mathbf{z}_0^T \mathbf{J} \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_1^T \mathbf{J} \mathbf{z}_2}. \quad (15.13)$$

Durch Hinzunahme höherer Ableitungen könnten weitere Gleichungen gebildet und damit auch andere Parameter berechnet werden. Die praktische Einsetzbarkeit einer solchen Methode darf jedoch bezweifelt werden, da bereits das Bilden einer zweiten Ableitung kritisch betrachtet werden muss.

²Dies gilt natürlich nur dann, wenn die Lösungen der quadratischen Gleichung tatsächlich reelle Zahlen sind. Bei Parameter- und Ableitungsschätzfehlern hingegen sind die Lösungen mit hoher Wahrscheinlichkeit keine reellen Zahlen, so dass dieser „Trick“ nicht ohne Vorbehalte anwendbar ist. In Experimenten war jedoch eine gute Übereinstimmung zwischen dem exakten Ergebnis und dieser Näherung zu beobachten.

16. Langsame Änderung der Drehzahl

Die häufigste Vereinfachung der Verhältnisse aus (14.2) besteht darin, die Rotordrehzahl als langsam veränderlich und damit zu jedem Zeitpunkt als praktisch konstant anzunehmen. Anders ausgedrückt wird die Dynamik der Mechanik relativ zu der der elektrischen Größen vernachlässigt, was auf Grund der stark unterschiedlichen Zeitkonstanten gerechtfertigt ist. Als vernünftige betragsmäßige Schranke für $d\omega_R/dt$ findet man in der Fachliteratur unter anderem [68]

$$\left| \frac{d\omega_R}{dt} \right| \ll \frac{1}{\tau_R} |\omega_R|. \quad (16.1)$$

Bei der Herleitung der Eingangs-/Ausgangsbeziehung der Spannungen zu den Strömen kann daher $\omega_R = \text{konst}$ angenommen werden, das Ergebnis ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 i_S^R}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{\tau_S} + \frac{1}{\sigma \tau_R} + j\omega_R \right)}_{=:a_1} \frac{d i_S^R}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \frac{1}{\sigma} \right)}_{=:a_0} \frac{1}{\tau_R} i_S^R = \underbrace{\frac{1}{L_\sigma}}_{=:b_1} \frac{d u_S^R}{dt} + \underbrace{\frac{1}{L_\sigma \tau_R}}_{=:b_0} u_S^R. \quad (16.2)$$

16.1. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante

Mit der Annahme $d\omega_R/dt = 0$ vereinfacht sich die funktionale Abhängigkeit der Rotorzeitkonstante aus (15.3) zu

$$\tau_R = \tau_R \left(\frac{d^2 i_S^R}{dt^2}, \frac{d i_S^R}{dt}, i_S^R, \frac{d u_S^R}{dt}, u_S^R, \omega_R \right). \quad (16.3)$$

16. Langsame Änderung der Drehzahl

Aus der Differentialgleichung in (16.2) erhält man direkt einen Ausdruck für die inverse Rotorzeitkonstante

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{\frac{1}{L_\sigma} \frac{du_S^R}{dt} - \frac{d^2 i_S^R}{dt^2} - \frac{di_S^R}{dt} \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \right)}{\frac{1}{\sigma} \frac{di_S^R}{dt} + i_S^R \left(\frac{1}{\tau_S} + j\omega_R \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{L_\sigma} u_S^R}. \quad (16.4)$$

Setzt man weiters die in (15.5) eingeführte Stromänderung di_Ψ^R/dt ein, vereinfacht sich (16.4) zu

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} (i_\Psi^R - i_S^R) - j\omega_R \frac{di_S^R}{dt}}{\frac{1}{\sigma} \left(\frac{di_S^R}{dt} + j\omega_R i_S^R \right) - \frac{di_\Psi^R}{dt}} =: \frac{z}{n}. \quad (16.5)$$

Der Quotient der komplexen Zahlen z und n ergibt idealerweise eine reelle Zahl $1/\tau_R$. Diese berechnet man entweder über den Betrag oder den Realteil des in der Praxis komplexwertigen Ergebnisses

$$\frac{1}{\tau_R} = \left| \frac{z}{n} \right|, \quad \frac{1}{\tau_R} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{n} \right\} = \frac{\operatorname{Re} \{ zn^* \}}{|n|^2} \quad (16.6)$$

Die Abweichung des Imaginärteils von null kann als Maß für die Güte der Daten beziehungsweise die Genauigkeit der restlichen Parameterschätzwerte fungieren. Es ist jedoch auch möglich, daraus einen zweiten Parameter gänzlich unabhängig von der Rotorzeitkonstante zu errechnen! In der hier praktischeren Vektorschreibweise $x = a + jb \rightarrow \mathbf{x} := [a \ b]^T$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{n} \right\} |n|^2 = \\ &= \overbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{i}_\Psi - \mathbf{i}_S) - \omega_R \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} \right]^T}_{=: \mathbf{k}_1^T} \mathbf{J} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} + \omega_R \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R \right) - \frac{d\mathbf{i}_\Psi^R}{dt} \right] \end{aligned} \quad (16.7)$$

Es bietet sich zum Beispiel an, die inverse Streuziffer $1/\sigma$ herauszuheben:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\mathbf{k}_1^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_\Psi^R}{dt}}{\mathbf{k}_1^T \mathbf{J} \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} + \omega_R \mathbf{J}^T \mathbf{i}_S^R \right)} \quad (16.8)$$

Auch das Herausheben der inversen Statorzeitkonstante $1/\tau_S$ beziehungsweise Statorstreuinduktivität $1/L_\sigma$ ist möglich, ergibt jedoch quadratische, reellwertige Gleichungen

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad \lambda \hat{=} \frac{1}{\tau_S} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \hat{=} \frac{1}{L_\sigma} \quad (16.9)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{\tau_S} : \quad a_2 &= (\mathbf{i}_S^R)^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt}, & a_1 &= \mathbf{k}_2^T \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R + \mathbf{k}_3^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt}, \\ a_0 &= \mathbf{k}_2^T \mathbf{J} \mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (16.10)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{L_\sigma} : \quad a_2 &= (\mathbf{u}_S^R)^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{u}_S^R}{dt}, & a_1 &= \mathbf{k}_4^T \mathbf{J} \mathbf{u}_S^R - \mathbf{k}_5^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{u}_S^R}{dt}, \\ a_0 &= -\mathbf{k}_4^T \mathbf{J} \mathbf{k}_5 \end{aligned} \quad (16.11)$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &:= \frac{1}{L_\sigma} \frac{d\mathbf{u}_S^R}{dt} - \omega_R \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt}, & \mathbf{k}_3 &:= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} + \omega_R \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R \right) - \frac{1}{L_\sigma} \mathbf{u}_S^R, \\ \mathbf{k}_4 &:= \frac{1}{\tau_S} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} - \omega_R \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt}, & \mathbf{k}_5 &:= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} + \omega_R \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R \right) + \frac{1}{\tau_S} \mathbf{i}_S^R. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Umgekehrt ist es möglich, einen beliebigen Parameter auszuwählen, von dem die Schätzung der Rotorzeitkonstante nicht abhängen soll – bei niedrigen Drehzahlen meist die Statorzeitkonstante τ_S , bei hohen die Statorstreuinduktivität L_σ – und den Imaginärteil der resultierenden Gleichung null zu setzen, um die Rotorzeitkonstante zu berechnen! So ergibt sich ein von τ_S unabhängiger Schätzwert über die quadratische Gleichung

$$a_2 \frac{1}{\tau_R^2} + a_1 \frac{1}{\tau_R} + a_0 = 0 \quad (16.13)$$

mit

$$a_2 = \frac{1}{L_\sigma} \mathbf{u}_S^R \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R - \frac{1}{\sigma} \left[\omega_R \|\mathbf{i}_S^R\|^2 - (\mathbf{i}_S^R)^T \mathbf{J} \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} \right],$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (\mathbf{i}_S^R)^T \mathbf{J} \left(\frac{d^2 \mathbf{i}_S^R}{dt^2} - \frac{1}{L_\sigma} \frac{d\mathbf{u}_S^R}{dt} \right) + \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} \right)^T \mathbf{J} \left[\omega_R \left(\frac{1}{\sigma} + 1 \right) \mathbf{J} \mathbf{i}_S^R - \frac{1}{L_\sigma} \mathbf{u}_S^R \right], \\
 a_0 &= \left(\frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} \right)^T \mathbf{J} \left(\frac{d^2 \mathbf{i}_S^R}{dt^2} - \frac{1}{L_\sigma} \frac{d\mathbf{u}_S^R}{dt} \right) - \omega_R \left\| \frac{d\mathbf{i}_S^R}{dt} \right\|^2.
 \end{aligned} \tag{16.14}$$

Dasselbe Ergebnis erhalte man natürlich, wenn man zuerst die inverse Statorzeitkonstante über die quadratische Gleichung mit den Koeffizienten (16.10) berechnen und das Ergebnis in der allgemeinen Bestimmung von τ_R berücksichtigen würde.

Die Möglichkeit, ganz konkret bestimmte Parametereinflüsse ausblenden zu können, ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber allen anderen Methoden, welche sich auf die Identifikation der Rotorzeitkonstante sowie eines anderen Parameters beschränken: Je nach Betriebszustand kann beliebig zwischen den Gleichungen gewechselt werden, um jeweils das beste Ergebnis zu erhalten!

Der Nachteil der Methode liegt in der Notwendigkeit der Bildung von Ableitungen. In dem später folgenden Abschnitt 17.2 werden daher die soeben dargelegten Überlegungen wieder aufgerollt, aber auf den stationären Zustand bezogen, in welchem keinerlei Ableitungen mehr benötigt werden. Dort befindet sich auch der Vergleich zu Abschnitt 15.1, in welchem die Drehzahländerungen explizit berücksichtigt wurden.

16.2. Least-squares – basierte Verfahren

Bei Kenntnis der Signale i_S^R und u_S^R sowie derer Ableitungen zu mehreren Zeitpunkten $t = t_k, k = 1, \dots, N$ können alle Koeffizienten der Differentialgleichung (16.2) ermittelt werden, indem ein (überbestimmtes) Gleichungssystem mit Gleichungen der Form

$$\left[\begin{array}{ccc} -\frac{di_S^R}{dt} & -i_S^R & \frac{du_S^R}{dt} \\ & & u_S^R \end{array} \right] \Big|_{t=t_k} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \frac{d^2 i_S^R}{dt^2} \Big|_{t=t_k} \tag{16.15}$$

aufgestellt und gelöst wird.

Da die Rotordrehzahl gemessen werden kann, ist ω_R ein bekannter Parameter und muss nicht geschätzt werden. Es verbleiben fünf reelle Parameter K_j ,

$i = 1, \dots, 5$

$$\begin{aligned} K_1 &:= \frac{1}{\sigma\tau_R} + \frac{1}{\tau_S}, & K_2 &:= \frac{1}{\tau_R\tau_S}, & K_3 &:= \frac{1}{\sigma\tau_R}, \\ K_4 &:= \frac{1}{L\sigma}, & K_5 &:= \frac{1}{L\sigma\tau_R}, \end{aligned} \quad (16.16)$$

die Gleichungen (16.15) werden umgeschrieben zu

$$\left[\begin{array}{ccccc} -\frac{di_S^R}{dt} & -i_S^R & -j\omega_R i_S^R & \frac{du_S^R}{dt} & u_S^R \end{array} \right] \Big|_{t=t_k} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \frac{d^2 i_S^R}{dt^2} + j\omega_R \frac{di_S^R}{dt} \end{array} \right] \Big|_{t=t_k}. \quad (16.17)$$

Trennt man diese in Real- und Imaginärteil, erhält man schließlich¹

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} -\frac{di_{Sk}}{dt} & -i_{Sk} & \omega_R i_{Sl} & \frac{du_{Sk}}{dt} & u_{Sk} \\ -\frac{di_{Sl}}{dt} & -i_{Sl} & -\omega_R i_{Sk} & \frac{du_{Sl}}{dt} & u_{Sl} \end{array} \right] \Big|_{t=t_k}}_{=: \varphi_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_5 \end{bmatrix}}_{=: \theta} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \frac{d^2 i_{Sk}}{dt^2} - \omega_R \frac{di_{Sl}}{dt} \\ \frac{d^2 i_{Sl}}{dt^2} + \omega_R \frac{di_{Sk}}{dt} \end{array} \right] \Big|_{t=t_k}}_{=: y_k}. \quad (16.18)$$

Damit das entstandene Gleichungssystem eine (überbestimmte) Lösung besitzt, muss die Maschine dermaßen angeregt werden, dass alle zu identifizierenden Parameter unterscheidbare Auswirkungen auf das Ausgangssignal hatten. Dies ist der Fall, wenn die Matrix $\Phi := [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_N]^T$ vollen Spaltenrang besitzt.

Im stationären Zustand $\omega_S = \text{konst}$ gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} u_S^R &= |u_S| e^{j\varphi_u} e^{j\omega_S t}, & \frac{du_S^R}{dt} &= j\omega_S |u_S| e^{j\varphi_u} e^{j\omega_S t}, \\ i_S^R &= |i_S| e^{j\varphi_i} e^{j\omega_S t}, & \frac{di_S^R}{dt} &= j\omega_S |i_S| e^{j\varphi_i} e^{j\omega_S t}, & \frac{d^2 i_S^R}{dt^2} &= -\omega_S^2 |i_S| e^{j\varphi_i} e^{j\omega_S t}, \end{aligned}$$

die Gleichungen (16.17) reduzieren sich zu

$$\left[\begin{array}{ccccc} -j\omega_S & -1 & -j\omega_R & j\omega_S \frac{|u_S|}{|i_S|} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} & \frac{|u_S|}{|i_S|} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \end{array} \right] \Big|_{t=t_k} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_5 \end{bmatrix} =$$

¹Die Matrix φ wird hier wie ein Vektor angeschrieben, um die Analogie zur Fachliteratur [41, 2], welche meist den Fall skalarer Ein- und Ausgangsgrößen behandelt, nicht zu verlieren.

$$-\omega_S [\omega_S + \omega_R] \Big|_{t=t_k}.$$

Damit können – nach Auftrennung in Real- und Imaginärteil – nur noch zwei Parameter identifiziert werden. Dies entspricht den Überlegungen aus Kapitel 17, dass im stationären Zustand nur Betrag und Phase von Statorstrom und -spannung verglichen werden können, womit sich zwei Gleichungen für zwei Unbekannte ergeben. Erst die Berücksichtigung mehrerer, unterschiedlicher stationärer Zustände erlaubt eine Identifikation aller Parameter.

Die fünf reellen Parameter K_i sind Funktionen der vier unabhängigen elektrischen Parameter. Diese können aus ihnen auf mehrere Arten hergeleitet werden:

$$\frac{1}{\tau_S} = K_2 \frac{K_4}{K_5} = K_1 - K_3, \quad \frac{1}{\sigma} = K_3 \frac{K_4}{K_5}, \quad \frac{1}{L_\sigma} = K_5 \frac{K_4}{K_5}, \quad \frac{1}{\tau_R} = \left(\frac{K_4}{K_5} \right)^{-1}. \quad (16.19)$$

Das Gleichungssystem ist somit überparametrisiert, es existiert ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen den zu identifizierenden Parametern

$$K_2 K_4 + K_3 K_5 - K_1 K_5 = 0. \quad (16.20)$$

Fasst man die Parameter $K_i, i = 1, \dots, 5$ zu einem Vektor $\boldsymbol{\theta}$ zusammen, kann die Nebenbedingung (16.20) in quadratischer Form

$$\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} \stackrel{!}{=} 0, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} := \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_5 \end{bmatrix} \quad (16.21)$$

mit der symmetrischen, indefiniten Matrix \mathbf{C} dargestellt werden. Es handelt sich somit um ein Problem der Art, wie es in Anhang A beschrieben ist.

Ferner können die zu identifizierenden Parameter nicht als konstant angesehen werden, da sie sich unter anderem durch Erwärmung langsam (R_S, R_R) beziehungsweise durch Sättigung schnell (τ_R) ändern können. Es muss folglich ein Identifikationsschema eingesetzt werden, welches Parameter *während des Betriebes* schätzen kann. Dazu eignen sich zwei eng miteinander verwandte Konzepte: die rekursive Variante der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (MKQ, engl: *recursive least squares*) sowie das KALMAN-Filter. Diese sowie mögliche nützliche Erweiterungen, um die beschriebenen Probleme in den Griff zu bekommen, sollen im Folgenden vorgestellt und auf ihre Tauglichkeit überprüft werden.

16.2.1. Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Fasst man mehrere Gleichungen $k = 1, \dots, N$ der Form (16.18) zu einem überbestimmten Gleichungssystem zusammen (die Zeitpunkte t_k , zu denen die Daten aufgenommen werden, sind dabei beliebig wählbar!)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_N^T \end{bmatrix}}_{=: \boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{y}}, \quad (16.22)$$

so ist dieses auf Grund von Messfehlern, Ungenauigkeiten bei der Ableitungsschätzung und Modellungenauigkeiten sicher nicht genau erfüllt. Vielmehr wird ein Fehler auftreten, welcher durch den Vektor \mathbf{e} symbolisiert werden soll:

$$\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y} = \mathbf{e}. \quad (16.23)$$

Ein naheliegendes Ziel ist es nun, den unbekannt Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ so zu bestimmen, dass die Norm dieser Fehler möglichst klein wird $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \min$. Der Einfachheit halber bedient man sich der EUKLIDISCHEN Norm und definiert damit eine zu minimierende quadratische Zielfunktion

$$J(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^T (\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}_k)^T (\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}_k) \quad (16.24)$$

Da hier die Summe der Quadrate der Fehler jeder Gleichung k minimiert wird, spricht man von der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung in $\boldsymbol{\theta}$, daher kann die Lösung analytisch angegeben werden:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} J(\boldsymbol{\theta}) = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}. \quad (16.25)$$

Die darin vorkommende sogenannte Informationsmatrix

$$\mathbf{S} := \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \quad (16.26)$$

muss regulär sein, d.h. die Matrix $\boldsymbol{\Phi}$ muss wie eingangs erwähnt vollen Spaltenrang besitzen.

16.2.2. Rekursive Formulierung

Wie bereits eingangs erwähnt ändern sich die zu identifizierenden Parameter mit der Zeit; auch möchte man nicht die gesamte Berechnung (16.25) nach einem Aufzeichnungsprozess der Daten Φ , \mathbf{y} einmalig, sondern im Betrieb schrittweise durchführen. Dies führt zu einer rekursiven Formulierung der Methode, im Englischen kurz RLS (*recursive least squares*) genannt

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\mathbf{E}_{m \times m} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1}, \\ \mathbf{P}_k &= \left(\mathbf{E}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \right) \mathbf{P}_{k-1}, \\ \boldsymbol{\theta}_k &= \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_{k-1} \right).\end{aligned}\quad (16.27)$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl der zu identifizierenden Parameter (hier: $n = 5$) und m die Anzahl der pro Iterationsschritt verarbeiteten Gleichungen (hier auf Grund der gleichzeitigen Berücksichtigung von Real- und Imaginärteil $m = 2$). Die $n \times n$ -Matrix \mathbf{P}_k stellt die Inverse der bis zu dem Zeitpunkt $t = t_k$ ermittelten Informationsmatrix \mathbf{S} dar,

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{S}_k)^{-1}, \quad \mathbf{S}_k := \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T. \quad (16.28)$$

Im Gegensatz zur nicht-rekursiven Formulierung müssen hier sinnvolle Startwerte für den Schätzwert $\boldsymbol{\theta}$ sowie die inverse Informationsmatrix \mathbf{P} ermittelt werden. In der Praxis können diese gefunden werden, indem die nicht-rekursive Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf eine zu wählende Zahl $N \geq n$ von Messwerten angewandt wird und das Ergebnis als Startwert herangezogen wird.

16.2.3. Exponentielles Vergessen

In obiger Form würde jede neue Gleichung immer weniger Einfluss auf das Ergebnis $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ haben, das Ergebnis nach N Zeitschritten würde dem der nicht-rekursiven Form gleichen. Will man jedoch zeitlich veränderlichen Parametern nachfolgen, muss man alte Gleichungen „vergessen“. Dies geschieht im Rahmen der rekursiven Methodik am einfachsten durch einen reellen „Vergessensfaktor“

λ_k , $0 < \lambda_k \leq 1$ bei der Bildung von \mathbf{S}_k , so dass ältere Gleichungen exponentiell weniger stark gewichtet werden

$$\mathbf{S}_k = \sum_{i=1}^k \beta(i, k) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T = \lambda_k \mathbf{S}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T, \quad \beta(i, k) := \prod_{j=i}^{k-1} \lambda_j. \quad (16.29)$$

In der Fachliteratur spricht man von der rekursiven Methode der kleinsten Fehlerquadrate mit exponentiellem Vergessen (engl. *exponential forgetting recursive least squares*, kurz EFRLS, oder *exponentially weighted least squares*, kurz EWLS), wobei der Vergessenfaktor meist als konstant $\lambda_k \equiv \lambda$ angenommen wird.

Auf die Rekursionsgleichungen in (16.27) wirkt sich das folgendermaßen aus:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\lambda_k \mathbf{E}_{2 \times 2} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1}, \quad (16.30a)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_k} \left(\mathbf{E}_{5 \times 5} - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \right) \mathbf{P}_{k-1}, \quad (16.30b)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_{k-1} \right). \quad (16.30c)$$

Für die Initialisierung bietet sich damit die Möglichkeit, $\boldsymbol{\theta}_0$ mit einem *a priori*-Schätzwert des Parametervektors zu initialisieren und \mathbf{P}_0 als eine Diagonalmatrix festzulegen

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\epsilon_n} \end{bmatrix} \quad (16.31)$$

Dabei stellen die positiven Parameter $\epsilon_i > 0$ Maße für das Vertrauen in die Komponenten K_i des *a priori*-Schätzwertes $\boldsymbol{\theta}_0$ dar. Liegt keinerlei Wissen über die Parameterwerte vor, wählt man sie nahe bei null und setzt $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$. Für eine Interpretationsmöglichkeit dieser Vorgehensweise sei auf das KALMAN-Filter in Abschnitt 16.2.7 verwiesen.

Es gilt hier zu beachten, den Vergessenfaktor mit der zu erwartenden Änderungsgeschwindigkeit der Parameter, der Zeit zwischen den Abtastzeitpunkten sowie der zu erwartenden Signalqualität abzustimmen. In [2, 61] wird zum Beispiel das Gedächtnis des RLS-Algorithmus bei konstantem $\lambda_k \equiv \lambda$ mit

$$N = \frac{2}{1 - \lambda} \quad (16.32)$$

abgeschätzt, womit der Schätzwert θ_k für $\lambda = 0,99$ von circa den letzten 200 Gleichungen abhängen würde. Bei äquidistanter Abtastung $t_k = t_1 + (k - 1)T$ kann damit auf das berücksichtigte Zeitintervall rückgeschlossen und dieses mit der erwarteten Parameteränderungsrate abgestimmt werden.

Ein wesentlicher Vorteil der zeitkontinuierlichen Betrachtungsweise der Signale liegt darin, die Zeitpunkte der Abtastung frei wählen zu können. So ist es im Allgemeinen nicht erforderlich, die Parameterschätzung mit einer hohen Abtastung durchzuführen; im Gegenteil würden bei einer zu hohen Abtastung redundante Gleichungen berücksichtigt, welche die Konditionierung von \mathbf{S}_k gefährden können (dazu im Abschnitt 16.2.4 mehr). Es sollten daher nach Möglichkeit Zeitpunkte gewählt werden, bei welchen sich der Betriebszustand der Maschine relativ zu den vorherigen Zeitpunkten zumindest geringfügig geändert hat. Infolgedessen kann nicht von äquidistanten Abtastzeiten t_k gesprochen werden, eine Wahl des Vergessensfaktors λ_k in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit $t_k - t_{k-1}$ liegt nahe, zum Beispiel der Einfachheit halber

$$\lambda_k = \lambda^{\Delta k}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad \Delta k := \frac{t_k - t_{k-1}}{T}. \quad (16.33)$$

16.2.4. Richtungsabhängiges Vergessen

Die bisherigen Überlegungen führten zu der Erkenntnis, dass für die fortwährende Schätzung der zeitlich veränderlichen Systemparameter eine rekursive Vorgehensweise mit einer gewissen Form des „Vergessens“ notwendig ist. Dieses wurde in Form eines „Vergessensfaktors“ λ , $0 < \lambda < 1$ eingeführt, welcher zu einem exponentiell abklingenden Einfluss alter Gleichungen führt.

Betrachtet man die rekursive Relation für die inverse Informationsmatrix \mathbf{P}_k (16.30b) genauer, so erkennt man ein prinzipiell *instabiles* Verhalten, da der Vergessensfaktor invers eingeht

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{P}_{k-1} - \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\mathbf{E}_{p \times p} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{P}_{k-1}. \quad (16.34)$$

Damit verbunden ist ein exponentielles Wachstum *aller* Eigenwerte von \mathbf{P}_k . Die Korrektur hingegen erfolgt nur in dem von der neuen Information $\boldsymbol{\varphi}_k$ aufgespannten Unterraum, welcher im Fall von zwei linearen Gleichungen pro Zeitschritt nur zwei der fünf Eigenwerte beeinflussen kann.

Um ein unbeschränktes Wachstum der Eigenwerte von \mathbf{P}_k zu vermeiden, müsste die Informationsmatrix $\mathbf{S}_k = \mathbf{P}_k^{-1}$ theoretisch stets vollen Rang besitzen [40, 69], das heißt

$$\mathbf{S}_k \geq c \cdot \mathbf{E} \quad \forall k. \quad (16.35)$$

Durch das – wie auch immer geartete – Vergessen oder die Minderwertung alter Gleichungen wird eine härtere Bedingung als (16.26) zu erfüllen sein. In der Praxis wünscht man sich, dass die neueren Gleichungen für sich genommen stets die sogenannte Bedingung der fort dauernden Anregung (engl. *persistence of excitation*) erfüllen. Mathematisch ausgedrückt müssen positive Konstanten c und N existieren, für die

$$c \cdot \mathbf{E} \leq \sum_{j=k-N}^k \beta(j,k) \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_j^T \quad \forall k \quad (16.36)$$

gilt. Die Gleichungen müssen folglich zusammengenommen in einem endlichen Indexintervall den gesamten \mathbb{R}^5 aufspannen. Dies ist aber gerade im stationären Betriebszustand nicht – oder nur für sehr große N , wenn man mehrere aufeinander folgende stationäre Betriebszustände berücksichtigt – gewährleistet, was zu einer temporären „Explosion“ der Eigenwerte von \mathbf{P}_k und damit einer sehr hohen Störanfälligkeit des Algorithmus in den zugehörigen Eigenrichtungen führt. Dieses Phänomen wird in der englischsprachigen Fachliteratur als *covariance windup* [6] oder *matrix „blow up“* bezeichnet [16]. Zu dessen Vermeidung finden sich mehrere Lösungsvorschläge, welche sich in zwei Gruppen unterteilen lassen:

Die erste Gruppe begnügt sich damit, den Vergessensfaktor λ_k dynamisch anzupassen (*Variable Forgetting Factor RLS*). Ältere Ergebnisse versuchten den „Informationsgehalt“ konstant zu belassen [16], scheiterten aber an der vagen Definition desselben. Aufgrund des ungerichteten Effekts solcher Maßnahmen wirken sich diese auf alle Eigenwerte von \mathbf{P}_k aus und behindern somit die richtige Verarbeitung der vorhandenen Information. Um dies zu vermeiden besteht ein weiterer Ansatz darin, mehrere Vergessensfaktoren zu verwenden. Dadurch sollen die Diagonalelemente von \mathbf{P}_k nach einer Initialisierungsphase konstant bleiben [61].

Die zweite Gruppe passt direkt die rekursive Relation der Informationsmatrix \mathbf{S}_k (16.29) beziehungsweise derer Inversen \mathbf{P}_k (16.30b) an, anstatt den skalaren Parameter λ_k zu ändern. Dabei wird Information nur in jenen Richtungen „vergessen“, in welchen neue Informationen zur Verfügung stehen (im Englischen

mit *directional forgetting* bezeichnet). Die ersten Methoden gehen auf Häggglund [20] und Kulhavý zurück [38], scheitern aber daran, dass die Eigenwerte von \mathbf{P}_k zwar nach oben hin, aber nicht nach unten hin beschränkt sind. Damit verliert der Algorithmus in einige Richtungen die Fähigkeit, zeitvariablen Parametern nachzufolgen.

Zwei ähnliche Ansätze werden in [55] und [6] beschrieben. Im ersten Artikel wird die Kovarianzmatrix \mathbf{P}_k in ihre Eigenrichtungen zerlegt und jedem Eigenwert ein eigener Vergessensfaktor zugewiesen. Dieser wird so festgelegt, dass ein maximaler Wert nicht überschritten, beziehungsweise ein minimaler Wert nicht unterschritten werden kann. Weiters können die Vergessensfaktoren so gewählt werden, dass in Richtung der neuen Information am meisten von der alten Information vergessen wird.

Im Folgenden soll aber der Ansatz aus [6] beschrieben werden, welcher numerisch weniger aufwändig und dennoch intuitiv erscheint. Um den Ansatz für das vorliegende Problem nutzbar zu machen, wird dieser von einer skalaren Messgröße auf eine vektorielle Meßgröße der Dimension p – und damit einer Matrix $\boldsymbol{\varphi}_k$ mit der Dimension $n \times p$ als Regressor – erweitert.

Die Grundidee liegt auch hier darin, alte Information nur in Richtung der neuen Information zu vergessen. Im Gegensatz zu der ungerichteten Gewichtung in (16.29) wird die alte Korrelationsmatrix \mathbf{S}_{k-1} in einen Teil, der im Kern, und einen, der im Bild der neuen Information liegt aufgeteilt

$$\mathbf{S}_{k-1} = \mathbf{S}_{\parallel, k-1} + \mathbf{S}_{\perp, k-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_{\perp, k-1} \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_{\parallel, k-1} \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k. \quad (16.37)$$

Diese Aufteilung ist *a priori* nicht eindeutig, da auch in $\mathbf{S}_{\parallel, k-1}$ noch zu $\boldsymbol{\varphi}_k$ orthogonale Elemente vorkommen können. Um sicherzugehen, dass ausschließlich Informationen die von $\boldsymbol{\varphi}_k$ verändert werden in der Matrix $\mathbf{S}_{\parallel, k-1}$ vorkommen, wird deren Rang mit dem Zeilenrang von $\boldsymbol{\varphi}_k^T$ abgeglichen²:

$$\text{rank } \mathbf{S}_{\parallel, k-1} = \text{rank } \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.38)$$

Mit der Rangbedingung ergibt sich $\mathbf{S}_{\parallel, k-1}$ eindeutig zu

$$\mathbf{S}_{\parallel, k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1}. \quad (16.39)$$

Multipliziert man beide Seiten von rechts mit $\boldsymbol{\varphi}_k$, so ergibt sich wieder die Forderung $\mathbf{S}_{\parallel, k-1} \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k$.

²In [6] ist $\boldsymbol{\varphi}_k$ ein Vektor, daher wird dort für $\mathbf{S}_{\parallel, k-1}$ der Rang eins gefordert.

Die rekursive Berechnung der Informationsmatrix \mathbf{S} erfolgt nun *nicht* wie gewohnt durch

$$\mathbf{S}_k = \lambda_k \mathbf{S}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T, \quad (16.40)$$

sondern indem nur der Bereich „vergessen“ wird, der durch neue Informationen verändert wird:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_{\perp, k-1} + \lambda_k \mathbf{S}_{\parallel, k-1} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.41)$$

Daher wird diese Variante als RLS-Algorithmus mit richtungsabhängigem Vergessen (engl. *Directional Forgetting Recursive Least Squares*) bezeichnet.

Bedingungen an $\boldsymbol{\varphi}_k$

Damit die Inverse $(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1}$ gebildet werden kann, muss die $p \times n$ -Matrix $\boldsymbol{\varphi}_k^T$ vollen Zeilenrang besitzen!

Ist dies nicht gegeben, $\text{rank } \boldsymbol{\varphi}_k^T = r < p$, müssen die relevanten Daten extrahiert werden. Dies erfolgt zum Beispiel mittels einer **QR**-Zerlegung:

$$\mathbf{QR} = \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.42)$$

Dabei ist \mathbf{Q} eine unitäre $p \times p$ -Matrix, d.h. $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, und \mathbf{R} eine obere $p \times n$ -Dreiecksmatrix. Nur die ersten r Zeilen von \mathbf{R} sind besetzt, die unteren Zeilen sind null.

Das (unterbestimmte) Gleichungssystem kann dadurch reduziert werden zu

$$\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{y}_k \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{QR} \boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{y}_k \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\mathbf{\Pi R}}_{=: \boldsymbol{\varphi}_k^T} \boldsymbol{\theta}_k = \underbrace{\mathbf{\Pi Q}^T}_{=: \mathbf{y}_k'} \mathbf{y}_k \quad (16.43)$$

wobei $\mathbf{\Pi}$ eine $r \times p$ -Projektionsmatrix darstellt, welche die ersten r Zeilen auswählt

$$\mathbf{\Pi} := [\mathbf{E}_{r \times r} \quad \mathbf{0}_{r \times (p-r)}]. \quad (16.44)$$

Iterative Berechnung der Kovarianzmatrix

Für eine iterative Vorgehensweise benötigt man unbedingt eine iterative Berechnungsvorschrift der Matrix $\mathbf{P} = \mathbf{S}^{-1}$. Dafür schreibt man zunächst die Gleichung (16.41) um. Mit $\mathbf{S}_{\perp, k-1} = \mathbf{S}_{k-1} - \mathbf{S}_{\parallel, k-1}$ erhält man

$$\mathbf{S}_k = \underbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{M}_k) \mathbf{S}_{k-1}}_{\bar{\mathbf{S}}_{k-1}} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T, \quad \text{mit } \mathbf{M}_k := (1 - \lambda) \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.45)$$

Somit kann das verallgemeinerte Matrixinversionslemma

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \left(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \quad (16.46)$$

mit $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{S}}_{k-1}$, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}_k$, $\mathbf{C} = \mathbf{E}_{n \times n}$, $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varphi}_k^T$ eingesetzt werden. Man erhält

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{S}_k^{-1} = \bar{\mathbf{P}}_{k-1} - \bar{\mathbf{P}}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_{k-1}. \quad (16.47)$$

Dabei ist die Matrix $\bar{\mathbf{P}}_{k-1}$ definiert durch

$$\bar{\mathbf{P}}_{k-1} := \bar{\mathbf{S}}_{k-1}^{-1} = \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{E} - \mathbf{M}_k)^{-1} = \mathbf{P}_{k-1} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.48)$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich, indem man zuerst

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M}_k)^{-1} \stackrel{!}{=} \mathbf{E} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \left(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T. \quad (16.49)$$

festhält. Multipliziert man nun die invertierte linke mit der rechten Seite, muss sich die Einheitsmatrix ergeben! Schreibt man der Einfachheit halber

$$\mathbf{Q} := \boldsymbol{\varphi}_k \left(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T, \quad (16.50)$$

so sieht man:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{M}_k) \left[\mathbf{E} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q} \right] &= (\mathbf{E} - (1 - \lambda) \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q}) \left[\mathbf{E} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q} \right] = \\ &= \mathbf{E} - \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda} \underbrace{\mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q}}_{=\mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q}} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q} - (1 - \lambda) \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q} = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{E} - \underbrace{\frac{1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 + \lambda + \lambda - \lambda^2}{\lambda}}_{=0} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{Q}. \quad (16.51)$$

Ist der Rang von $\boldsymbol{\varphi}_k^T$ null, tritt also keine neue Information auf, gilt

$$\bar{\mathbf{P}}_{k-1} = \mathbf{P}_{k-1}. \quad (16.52)$$

Damit entspricht die Rekursionsvorschrift (16.47) der des normalen RLS-Algorithmus *ohne* Vergessen.

Zusammenfassung des Algorithmus

Insgesamt lautet der RLS-Algorithmus mit richtungsabhängigem Vergessen nach [6] folgendermaßen

$$\mathbf{M}_k = \begin{cases} (1 - \lambda) \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^+ \boldsymbol{\varphi}_k^T & \text{rank}(\boldsymbol{\varphi}_k^T) > 0 \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \quad (16.53a)$$

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{M}_k) \mathbf{S}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \quad (16.53b)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{k-1} = \begin{cases} \mathbf{P}_{k-1} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^+ \boldsymbol{\varphi}_k^T & \text{rank}(\boldsymbol{\varphi}_k^T) > 0 \\ \mathbf{P}_{k-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (16.53c)$$

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_{k-1} - \bar{\mathbf{P}}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{\mathbf{P}}_{k-1} \quad (16.53d)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (16.53e)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k). \quad (16.53f)$$

Es fällt auf, dass im Gegensatz zum Standard-RLS sowohl die Korrelationsmatrix \mathbf{S}_k als auch deren Inverse \mathbf{P}_k mitgeführt werden muss. Das wirkt sich problematisch auf die Initialisierung aus, wie im Weiteren ausgeführt wird.

Initialisierung

Gewöhnlich wird ein RLS-Algorithmus mit einer Diagonalmatrix mit relativ großen Einträgen initialisiert:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}_{n \times n}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (16.54)$$

Damit wird hier die Informationsmatrix beinahe null:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_0^{-1} = \epsilon \mathbf{E}_{n \times n}. \quad (16.55)$$

In der ersten Iteration kann die Berechnung von $(\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\varphi}_1)^{-1}$ noch erfolgen; spätestens danach kommt es zu einer Diskrepanz zwischen den (potentiell großen) Werten von $\boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T$, die nur einen m -dimensionalen Raum aufspannen, und den (niedrigen) Werten von \mathbf{S}_{k-1} . Dies kann zu einer sehr schlechten Konditionierung der Matrix \mathbf{S}_k führen.

Will man das Problem der unterschiedlichen Größenordnungen vermeiden, kann man erst mit der Identifikation anfangen, wenn bereits zumindest n linear unabhängige Gleichungen vorliegen (die Einträge der Informationsmatrix sind dann den zu erwartenden Regressionsvektoren $\boldsymbol{\varphi}_k^T$ größtmäßig angepasst). Das richtungsabhängige Vergessen garantiert zwar prinzipiell, dass die Informationsmatrix nie mehr singular wird, große Größenunterschiede in den einzelnen Regressionsvektoren $\boldsymbol{\varphi}_k^T$ können aber weiterhin zu einer schlechten Konditionierung führen!

Auch dies ist also keine echte Lösung. Abhilfe würde eine Normierung der Gleichungen

$$\boldsymbol{\Lambda}_k^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Lambda}_k^{-1} \mathbf{y}_k, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Lambda}_k := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{k,1}^T \boldsymbol{\varphi}_{k,1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{\varphi}_{k,m}^T \boldsymbol{\varphi}_{k,m} \end{bmatrix} \quad (16.56)$$

schaffen, wobei $\boldsymbol{\varphi}_{k,i}$ die i -te Spalte der Matrix $\boldsymbol{\varphi}_k$ bezeichnet. Das Problem hierbei liegt nun bei Regressionsvektoren mit kleiner Norm, bei denen bereits kleine Mess- und Ableitungsschätzfehler stark ins Gewicht fallen. Diese werden unverhältnismäßig verstärkt und beeinflussen somit das Schätzergebnis negativ.

16.2.5. Berücksichtigung der quadratischen Nebenbedingung

Hat man einmal einen Vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ für die Parameter K_i , $i = 1, \dots, 5$ gefunden, welcher die Gleichungen (16.18) in einem bestimmten Sinn „optimal“ löst, so müsste dieser die quadratische Nebenbedingung $\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$ erfüllen. Dies ist in der Praxis natürlich nie (exakt) der Fall. Stattdessen gilt es, einen Schätzwert $\boldsymbol{\theta}^*$ zu finden, welcher die Nebenbedingung erfüllt und „möglichst nahe“ am ursprünglichen Schätzwert $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ liegt.

Die Umsetzung dieses Wunsches ist in Anhang A detailliert beschrieben. Im konkreten Fall des RLS-Algorithmus tritt jedoch das Problem auf, dass zwar ein Schätzwert θ^* gefunden werden kann, welcher die Nebenbedingungen erfüllt; die Bedeutung der iterativ konstruierten Matrizen \mathbf{P} und – bei Anwendung der Methode des richtungsabhängigen Vergessens – \mathbf{S} jedoch geht verloren. Das liegt daran, dass stets die Beziehung $\mathbf{P} = \mathbf{S}^{-1}$ gelten muss und folglich \mathbf{P} nicht einfach als Kovarianzmatrix des Schätzfehlers betrachtet werden darf! Damit kann die in Kapitel A.3 vorgestellte Anpassung von \mathbf{P} nicht erfolgen. Es verbleibt nur die Möglichkeit, in der iterativen Berechnung stets mit unbeschränkten Parametern $\hat{\theta}$ zu arbeiten und jeweils das letzte Ergebnis zu beschränken. Das Ergebnis ist zwar theoretisch noch immer optimal, bei der Berechnung der beschränkten Lösung können aber Probleme auftreten, wenn sich die unbeschränkte Lösung zu weit von dem von der Beschränkung aufgespannten Unterraum entfernt hat (die Methode der linearen Approximation A.2.3 zum Beispiel könnte scheitern).

16.2.6. Berücksichtigung von Vorwissen

Zwischen den zwei Extremen – alle Parameter schätzen zu wollen oder nur einen – gibt es durch Einbindung von Vorwissen natürlich Zwischenstufen. Hier sollen einige Vereinfachungen gezeigt werden, die sich ergeben, wenn zumindest einige der elektrischen Parameter bereits bekannt sind.

Statorwiderstand bekannt

Der schönste Fall tritt auf, wenn der Statorwiderstand R_S bekannt ist. Dieser kann bei Stillstand der Maschine einfach durch Strom-/Spannungsmessungen an den Statorwicklungen ermittelt werden, unterliegt aber wie jeder Widerstand einer temperaturabhängigen Veränderung. In Gleichung (16.2) können der Term

$$u_S^R - R_S i_S^R =: u_\Psi \quad (16.57)$$

und dessen Ableitung zusammengefasst werden, man erhält folgende komplexwertige Gleichung

$$\left[-\frac{di_S^R}{dt} - j\omega_R i_S^R \quad u_\Psi \quad \frac{du_\Psi}{dt} \right] \Big|_{t=t_k} \begin{bmatrix} K'_1 \\ K'_2 \\ K'_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{d^2 i_S^R}{dt^2} + j\omega_R \frac{di_S^R}{dt} \right] \Big|_{t=t_k} \quad (16.58)$$

mit nur noch drei Unbekannten, welche keine Nebenbedingungen erfüllen müssen

$$K'_1 := \frac{1}{\sigma\tau_R}, \quad K'_2 := \frac{1}{L_\sigma\tau_R}, \quad K'_3 := \frac{1}{L_\sigma}. \quad (16.59)$$

Statorstreuinduktivität bekannt

Ist die Statorstreuinduktivität L_σ bekannt (diese sollte relativ temperaturunabhängig sein und nicht in Sättigung gehen), kann die Identifikation auf vier Parameter reduziert werden. Diese lauten

$$K'_1 := \frac{1}{\tau_R}, \quad K'_2 := \frac{1}{\sigma\tau_R}, \quad K'_3 := \frac{1}{\tau_S}, \quad K'_4 := \frac{1}{\tau_R\tau_S}, \quad (16.60)$$

die Gleichungen für jeden Zeitschritt aus (16.18) vereinfachen sich zu

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_\sigma}u_{Sk} & \frac{di_{Sk}}{dt} - \omega_R i_{Sl} & \frac{di_{Sk}}{dt} & i_{Sk} \\ -\frac{1}{L_\sigma}u_{Sl} & \frac{di_{Sl}}{dt} + \omega_R i_{Sk} & \frac{di_{Sl}}{dt} & i_{Sl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K'_1 \\ \vdots \\ K'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} \frac{du_{Sk}}{dt} - \frac{d^2 i_{Sk}}{dt^2} + \omega_R \frac{di_{Sl}}{dt} \\ \frac{1}{L_\sigma} \frac{du_{Sl}}{dt} - \frac{d^2 i_{Sl}}{dt^2} - \omega_R \frac{di_{Sk}}{dt} \end{bmatrix}. \quad (16.61)$$

Die Umrechnung von den identifizierten Parametern K'_i auf die elektrischen Parameter erfolgt durch

$$\frac{1}{\tau_R} = K'_1, \quad \frac{1}{\tau_S} = K'_3, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{K'_2}{K'_1} \stackrel{!}{=} \frac{K'_2 K'_3}{K'_4}. \quad (16.62)$$

Aus dem Ausdruck für $1/\sigma$ lässt sich die quadratische Nebenbedingung direkt ablesen

$$K'_1 K'_3 = K'_4 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{d}^T \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (16.63)$$

mit

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} := [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T, \quad \boldsymbol{\theta} := [K'_1 \ \dots \ K'_4]^T. \quad (16.64)$$

Im Gegensatz zum allgemeinen Identifikationsproblem besitzt die Matrix \mathbf{C} hier nur den Rang zwei; damit wird die in Abschnitt A.2.2 beschriebene Methode zur Vereinfachung der Berechnungen besonders interessant. Eine Vereinfachung der Nebenbedingung im Sinne von Kapitel A.1, also die Elimination des linearen Terms $\mathbf{d}^T \boldsymbol{\theta}$, ist leider nicht möglich. Der Vektor \mathbf{d} ist ein Eigenvektor zu einem Eigenwert $s = 0$ der Matrix \mathbf{C} und liegt damit nicht in deren Bild.

16.2.7. KALMAN-Filter

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist intuitiv einsichtig und in ihrer ursprünglichen Formulierung auch optimal. Die rekursive Variante mit exponentiellem Vergessen, welche auf Grund der Zeitvarianz der zu ermittelnden Parameter eingesetzt werden muss, ist hingegen nur eine *ad hoc*-Lösung und stellt keine Optimalitätsansprüche mehr [40]. Mehr noch, sie weist schwerwiegende Nachteile bei der Stabilität im nicht angeregten Fall auf, weshalb eine Modifikation eingesetzt werden musste, welche in Abschnitt 16.2.4 beschrieben wurde.

Die Einbeziehung von quadratischen Nebenbedingungen, so wie sie der konkrete Anwendungsfall benötigt, ist ebenfalls nicht zufriedenstellend gelöst. Es werden zwar die Schätzwerte so projiziert, dass sie die Nebenbedingung erfüllen; die Kovarianzmatrix \mathbf{P} jedoch ändert sich nicht, obwohl die ihr zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung einer nichtlinearen Projektion unterworfen wurde. Der Grund besteht darin, dass \mathbf{P} nicht wirklich einer Kovarianzmatrix entspricht, sondern der Inversen der Regressionsmatrix \mathbf{S} . Da diese in Algorithmus (16.53) ebenfalls mitgeführt wird, müssten beide Matrizen gleich modifiziert werden, was nicht ohne erheblichen rechnerischen Aufwand geschehen kann.

Eine Möglichkeit, dieser Probleme Herr zu werden, liegt in der Anwendung des zeitvarianten KALMAN-Filters [31]. Das zugrundeliegende Modell beschreibt die Dynamik der Parameterwerte, welche im Allgemeinen konstant bleiben, aber unbekanntem Schwankungen unterliegen. Im einfachsten Fall beschreibt man dies durch ein *random walk*-Modell [40]

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{w}_k \quad (16.65)$$

mit dem sogenannten Zustandsrauschen, der Zufallsvektorenfolge \mathbf{w}_k , deren Komponenten durch mittelwertfreie, Gaußsche stochastische Prozesse beschrieben werden und deren Kovarianzmatrix durch

$$E \left\{ \mathbf{w}_i \mathbf{w}_k^T \right\} =: \delta_{ik} \mathbf{Q} \quad (16.66)$$

gegeben ist [40]. Dabei stellt δ_{ik} den DIRAC-Delta-Impuls

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (16.67)$$

dar.

Die Ausgangsgleichung beschreibt die lineare Regression

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{v}_k, \quad E \left\{ \mathbf{v}_i \mathbf{v}_k^T \right\} =: \delta_{ik} \mathbf{R} \quad (16.68)$$

mit der Zufallsvektorenfolge \mathbf{v}_k , dem sogenannten Messrauschen, welches dieselben Eigenschaften wie \mathbf{w}_k , aber eine andere Kovarianzmatrix \mathbf{R} besitzt und mit dem Zustandsrauschen unkorreliert ist

$$E \left\{ \mathbf{w}_i \mathbf{v}_k^T \right\} = \mathbf{0} \quad \forall k, i. \quad (16.69)$$

Ferner seien sowohl das Zustands- als auch das Messrauschen mit dem Anfangsschätzwert $\boldsymbol{\theta}_0$ unkorreliert

$$E \left\{ \mathbf{w}_k \boldsymbol{\theta}_0^T \right\} = \mathbf{0}, \quad E \left\{ \mathbf{v}_k \boldsymbol{\theta}_0^T \right\} = \mathbf{0} \quad \forall k, i. \quad (16.70)$$

Falls diese Annahmen bezüglich der Störungen \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k nicht zutreffen, stellt auch das KALMAN-Filter nur einen suboptimalen Ansatz dar, der aber verhältnismäßig gute Ergebnisse liefern kann [7].

Der iterative Algorithmus zur Ermittlung von Schätzwerten $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ der Parameter $\boldsymbol{\theta}$ kann angeschrieben werden als³

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\varphi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}, \quad \text{Innovation} \quad (16.71a)$$

$$\mathbf{S}_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{R}, \quad \text{Kovarianz der Innovation} \quad (16.71b)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{S}_k^{-1}, \quad \text{KALMAN-Verstärkung} \quad (16.71c)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k, \quad \text{A posteriori Schätzwert} \quad (16.71d)$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \right) \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{Q} \quad \text{A posteriori Kovarianz des Schätzfehlers} \quad (16.71e)$$

Die Matrix \mathbf{P}_k bezeichnet nun tatsächlich die Kovarianz des Schätzfehlers

$$\mathbf{P}_k := E \left\{ (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) (\boldsymbol{\theta}_k - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)^T \right\}. \quad (16.72)$$

³Häufiger kommt in der Fachliteratur ein Zweischrittverfahren zum Einsatz, in welchem die Kovarianzmatrix zuerst mittels des Streckenmodells in eine *a priori*-Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k|k-1}$ umgerechnet (Prädiktion) und erst im zweiten Schritt die *a posteriori*-Kovarianz \mathbf{P}_k berechnet wird (Korrektur). Dies wird hier bewusst nicht getan, weil die folgende Herleitung des richtungsabhängigen Vergessens mittels einer zeitvarianten Matrix \mathbf{Q}_k wesentlich vereinfacht wird.

Wind-up–Problematik

Aus Gleichung (16.71e) wird ersichtlich, dass das klassische KALMAN-Filter ebenfalls von der in Abschnitt 16.2.4 beschriebenen *wind-up*–Problematik betroffen ist, wenn auch im Gegensatz zum RLS-Algorithmus nur mit einer linearen Steigerungsrate anstatt einer exponentiellen. Der Grund liegt in der fortwährenden Addition einer positiv definiten Matrix \mathbf{Q} , welcher eine von der Regressionsmatrix $\boldsymbol{\varphi}_k$ abhängige Subtraktion entgegensteht. Im Falle mangelnder Anregung wirkt Gleichung (16.71e) also in gewissen Richtungen wie ein Summierer.

Auch hierfür gibt es Lösungsvorschläge, die eine willkürliche Modifikation der Modellrauschmatrix \mathbf{Q} voraussetzen und damit die theoretische Optimalität des KALMAN-Filters „opfern“. In [67] wird eine gewünschte Matrix \mathbf{P}_d vorgegeben und im Sinne einer Regelung mittels Wahl von \mathbf{Q}_k versucht, die Kovarianzmatrix \mathbf{P}_k dieser anzugleichen. Der aus den Gleichungen (16.71b), (16.71c) und (16.71e) ersichtliche Algorithmus wird als Adaptives KALMAN-Filter bezeichnet:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{P}_d \boldsymbol{\varphi}_k \left(\mathbf{R} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_d \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{P}_d. \quad (16.73)$$

In [7] wird dasselbe Prinzip wie in [6] und Abschnitt 16.2.4 umgesetzt, das heißt Information wird nur in Richtung des neuen Regressors vergessen

$$\mathbf{Q}_k = \mu \mathbf{Q}_{k-1} + \gamma \boldsymbol{\varphi}_k \left(\epsilon \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T, \quad (16.74)$$

wobei der positive, reelle Faktor ϵ der Vermeidung von numerischen Problemen bei der Inversion dient. Der reelle Vergessensfaktor $0 \leq \mu \leq 1$ erlaubt einen fließenden Übergang zwischen dem klassischen KALMAN-Filter ($\mu = 1$, $\gamma = 0$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}$) und reinem richtungsabhängigem Vergessen ($\mu = 0$). Der positive, reelle Faktor γ kann als skalarer Repräsentant für die Größe des Modellrauschens interpretiert werden.

Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Im Gegensatz zum RLS-Algorithmus mit richtungsabhängigem Vergessen kann hier die Kovarianzmatrix \mathbf{P} adaptiert werden, wenn die Lösung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ in den Iterationsschritten auf den die Nebenbedingung (16.21) erfüllenden Unterraum projiziert wird (siehe Abschnitt A.3).

16.2.8. Ergebnisse

Für die Beurteilung der in den vorigen Kapiteln vorgestellten Methode zur Identifikation aller elektrischen Parameter wurde eine langsam ansteigende Drehzahlrampe gewählt. Am Ende der Rampe wird die Drehzahl einige Zeit konstant gehalten, danach die Maschine wieder abgebremst und das Verhalten der Algorithmen auch im Stillstand beobachtet.

Die Ableitungen wurden mit FIR-Filtern berechnet, wie sie in Anhang D präsentiert werden. Die Filterlänge wurde mit $N = 350$ sehr lang gewählt, die Polynomordnung betrug $n = 3$. Zusätzlich wurde das Stromsignal mit einem zweiten Filter mit geringfügig anderer Filterlänge geglättet. Auf Grund der langen Filterlänge werden besonders dynamische Vorgänge durch die Filterung verfälscht; ein Vergleich der Ergebnisse beider Filter erlaubt die Detektion von Unstimmigkeiten, die entsprechenden Messwerte werden in der Folge ignoriert. Ferner wurde nur jeder zehnte Messwert für die Identifikation herangezogen, um den Rechenaufwand gering zu halten. Dies ist einer der Hauptvorteile, wenn anstatt des zeitdiskreten Modells das zeitkontinuierliche Modell geschätzt wird: Die Zeitpunkte der verwendeten Messungen sind beliebig wählbar, da der temporale Kontext durch die Ableitungen hergestellt wird und nicht unmittelbar über die vorhergehenden Messwerte berechnet werden muss.

Die Drehzahlrampe genügt der approximativen Forderung (16.1), ist also ausreichend wenig steil, so dass die Ergebnisse der auf konstanter Drehzahl beruhenden Algorithmen nicht allzu sehr gestört sein sollten. Auf der anderen Seite sollte die kontinuierliche Änderung von ω_R gewährleisten, dass die Gleichungen (16.17) stets neue Informationen liefern und somit die Bedingung der *persistence of excitation* (16.36) erfüllt ist.

Während der stationären Zustände bei hoher Drehzahl und bei Stillstand ist diese hingegen ganz offensichtlich nicht erfüllt. Bei Stillstand ist noch dazu die Schlupfwinkelgeschwindigkeit $\omega_S = 0$, womit eine Identifikation der Rotorzeitkonstante unmöglich ist. Die Güte der untersuchten Methoden wird also unter anderem daran zu bewerten sein, wie sie in diesen Zuständen auf die mangelnde Anregung reagieren.

Zunächst ist in Abbildung 16.1 die Entwicklung der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix \mathbf{P} im Laufe der Zeit dargestellt. Dabei wird die Methode der rekursiven Fehlerquadrate dem KALMAN-Filter, jeweils mit und ohne richtungsabhängigem Vergessen, gegenübergestellt. Die verwendeten Modell- und Messkovarianzen wurden empirisch so ermittelt, dass sie auch mit Messdaten

Verfahren	Standard		Richtungsabh. Vergessen	
	Name	Wert	Name	Wert
RLS	λ	0,99	λ	0,99
	\mathbf{P}_0	$10^{-4} \cdot \mathbf{E}$	\mathbf{P}_0	$10^{-4} \cdot \mathbf{E}$
KALMAN-Filter	\mathbf{R}	$10^9 \cdot \mathbf{E}$	\mathbf{R}	$10^9 \cdot \mathbf{E}$
	\mathbf{P}_0	$10^{-4} \cdot \mathbf{E}$	\mathbf{P}_0	$10^{-4} \cdot \mathbf{E}$
	\mathbf{Q}	$0,01/T \cdot \mathbf{E}$	μ	0
			γ	$0,01/T$

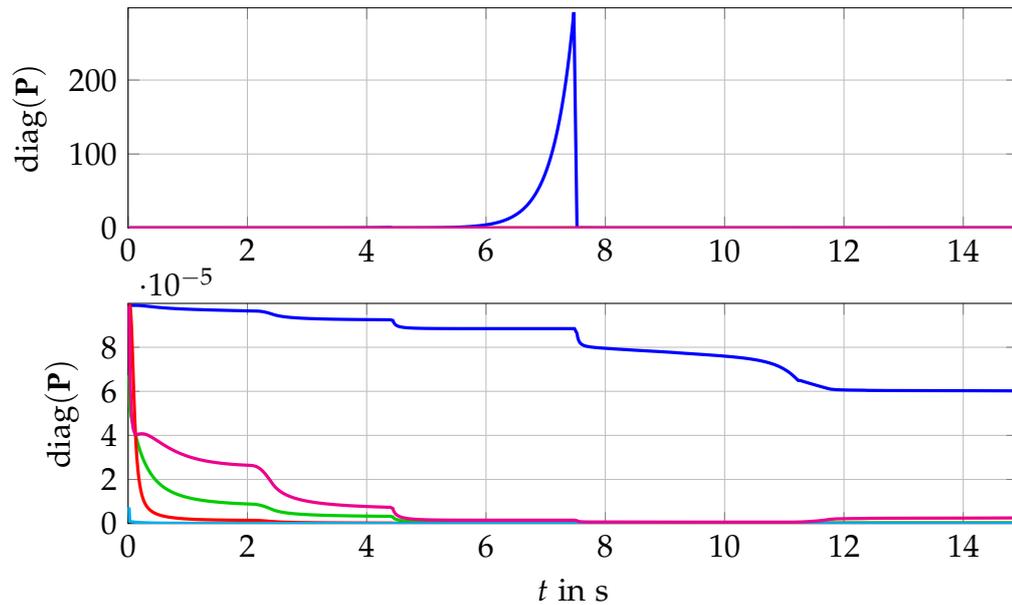
Tabelle 16.1.: Für die Parameteridentifikation mittels RLS und KALMAN-Filter verwendete Kovarianzmatrizen und Einstellungen

sinnvolle Ergebnisse lieferten. Sie sind in Tabelle 16.1 aufgelistet. Erwartungsgemäß steigt die Größe der Diagonalelemente bei den Methoden ohne richtungsabhängiges Vergessen massiv an, wodurch eine höhere Rauschanfälligkeit oder – im Falle des RLS-Algorithmus – sogar die Möglichkeit von Instabilität resultiert. Besonders sticht die Varianz des zweiten Parameters K_2 (blau) hervor. Der allgemein in der Fachliteratur als Problemfall bezeichnete Parameter [9, 68] steht in Verbindung mit der Statorzeitkonstante und kann nur bei niedrigen Drehzahlen sinnvoll ermittelt werden.

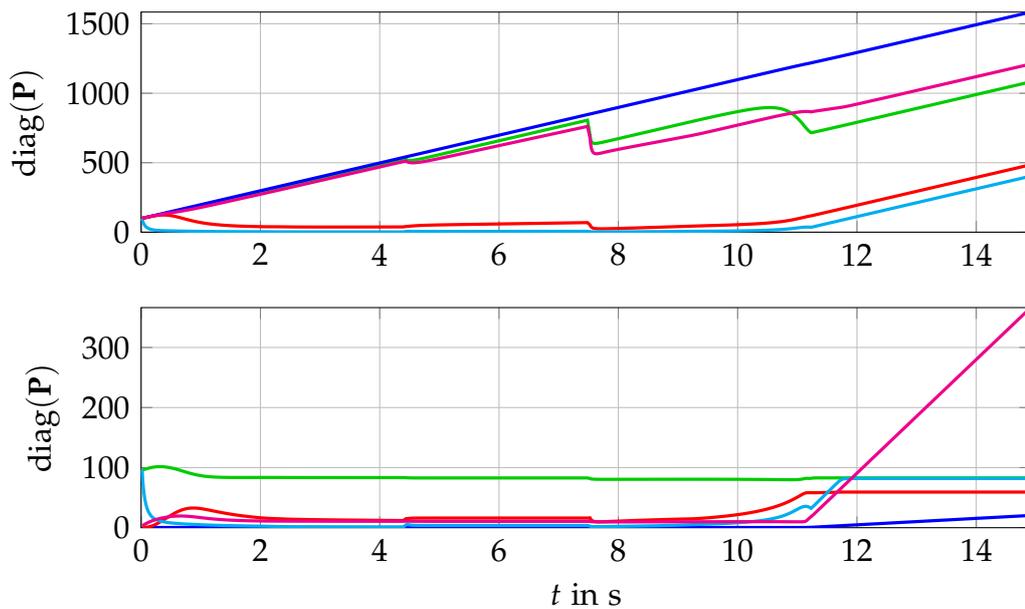
Die Simulationsergebnisse des KALMAN-Filters finden sich in Abbildung 16.2. Dargestellt sind die relativen Fehler in Prozent, wobei nicht die identifizierten Parameter K_i , $i = 1, \dots, 5$ selbst, sondern die daraus errechneten elektrischen Größen $1/L_\sigma$, R_R , R_S und L_S als Anschauungsobjekte gewählt wurden. Die Berechnung des Rotorwiderstandes erfolgte unter der Annahme $L_R \approx L_S = L_\sigma/\sigma$; ansonsten könnte dieser alleine nicht bestimmt werden! Es lässt sich erkennen, dass selbst mit Simulationsdaten keine genauen Ergebnisse erzielt werden können. Das liegt unter anderem an der nötigen Differenzierung der Signale, zum anderen an der Berücksichtigung von durch den Pulswechselrichter und die Strommessung hervorgerufenen Totzeiten. Die approximative Berechnung der projizierten Schätzwerte θ^* aus Abschnitt A.2.3 ergab in den Simulationen keine von optimierungsbasierten Berechnungen unterscheidbaren Ergebnisse. Detto sieht man in der Abbildung keinen wahrnehmbaren Unterschied zwischen der Projektion der Kovarianzmatrix \mathbf{P} mittels Linearisierung (Abschnitt A.3.1) oder mittels der *unscented transform* aus Abschnitt A.3.2. Der Unterschied bei der Rechenzeit ist jedoch massiv!

In den Abbildungen 16.3 und 16.4 sind die experimentellen Ergebnisse für das

16. Langsame Änderung der Drehzahl



(a) RLS



(b) KALMAN-Filter

Abbildung 16.1.: Entwicklung der Diagonalelemente von P bei der Schätzung aller vier elektrischen Parameter an Hand von Simulationsdaten mittels (a) RLS (b) eines KALMAN-Filters. Oben jeweils ohne, unten mit richtungsabhängigem Vergessen. Der exponentielle Verlauf beim RLS-Verfahren sowie der lineare beim KALMAN-Filter sind deutlich erkennbar.

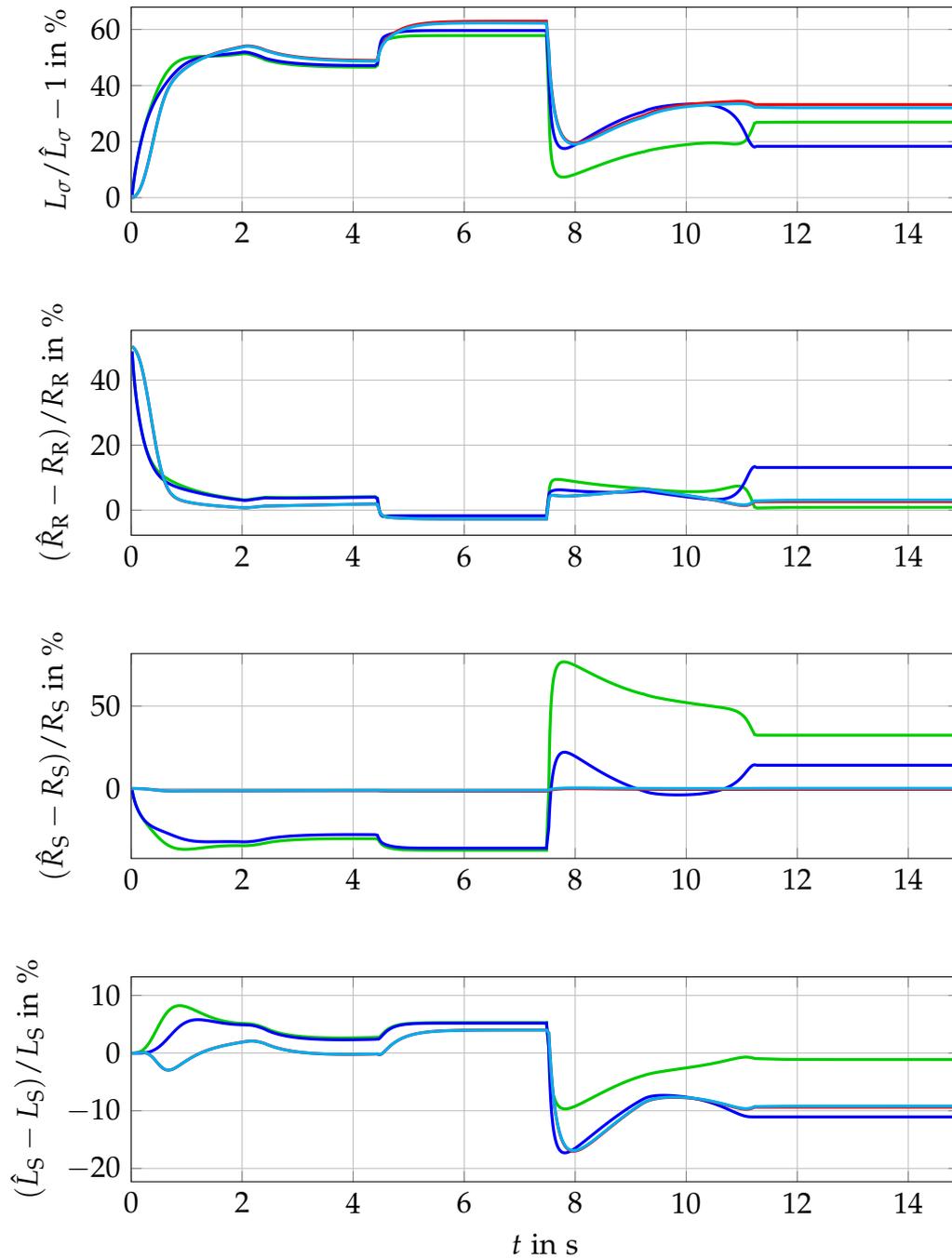


Abbildung 16.2.: Simulationsergebnis der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels eines KALMAN-Filters. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau. Die Berücksichtigung von Beschränkungen verbessert das Ergebnis deutlich (linearisierte Projektion der Kovarianzmatrix in rot, mittels UT transformiert in türkis)

RLS-Verfahren und das KALMAN-Filter dargestellt. Ein vorliegender „Fehler“ stellt eine Abweichung von der initialen Schätzung dar und keine tatsächliche Abweichung von dem – unbekanntem! – realen Wert. So sieht man, dass die Rotorzeitkonstante zu groß angenommen wurde, der Statorwiderstand scheinbar zu klein.

Die Vorteile des richtungsabhängigen Vergessens, die schon bei den Diagonalelementen der Kovarianzmatrizen offenbar waren, treten hier noch einmal in Erscheinung. Die Auswirkungen auf das KALMAN-Filter sind verhältnismäßig klein. Die lineare Steigerungsrate der Kovarianzmatrixeigenwerte ist nicht so dramatisch, durch das Messrauschen kommt es im Gegensatz zur Simulation eher zu einer Anregung aller Eigenrichtungen. Der exponentielle Anstieg beim RLS-Verfahren hingegen führte bei der Simulation zu unbrauchbaren Ergebnissen; bei den Messergebnissen wirkt er sich immer noch negativ aus, insbesondere auf die Schätzung des Statorwiderstandes \hat{R}_S bei hoher Drehzahl. Der Effekt des richtungsabhängigen Vergessens ist hier deutlich sichtbar.

Die Berücksichtigung der Nebenbedingungen wurde nur beim KALMAN-Filter eingesetzt. Dort hilft sie, den zweiten Parameter K_2 – und damit unter anderem den Statorwiderstandsschätzwert \hat{R}_S – bei hohen Drehzahlen und der darauffolgenden Abbremsung auf einem sinnvollen Wert zu halten. Die verschiedenen Methoden zur Projektion der Kovarianz ergaben wie bei der Simulation keine unterscheidbaren Ergebnisse, die Linearisierung ist also ausreichend.

Man erkennt leider auch, dass die Ergebnisse beim KALMAN-Filter starken Schwankungen unterliegen, obwohl das Modellrauschen gering und das Messrauschen groß gewählt wurden. Vor allem die Schätzwerte der Statorstreuinduktivität L_σ und des -widerstands R_S sind unbrauchbar. Der RLS-Algorithmus ist nicht weniger empfindlich, eine geringfügig andere Wahl der Parameter führte ebenfalls zu keinen zufriedenstellenden Ergebnissen. Das liegt nicht zuletzt daran, dass Parameter auch dann angepasst werden, wenn ihre Einflüsse auf die Messgröße marginal sind und schon aus numerischen Gründen von ihrer Identifikation abgesehen werden sollte.

Nicht zu vernachlässigen ist auch die schwierige korrekte Synchronisierung der Signale. Gelingt diese nicht, führt dies zum Beispiel im stationären Zustand zu einer Phasenverschiebung und markant beeinflussten Schätzergebnissen. Dazu kommt der recht massive Rechenaufwand der beiden Methoden, insbesondere bei der Berücksichtigung von Nebenbedingungen. Dieser muss auch bei den approximativen Verfahrensweisen noch in Betracht gezogen werden.

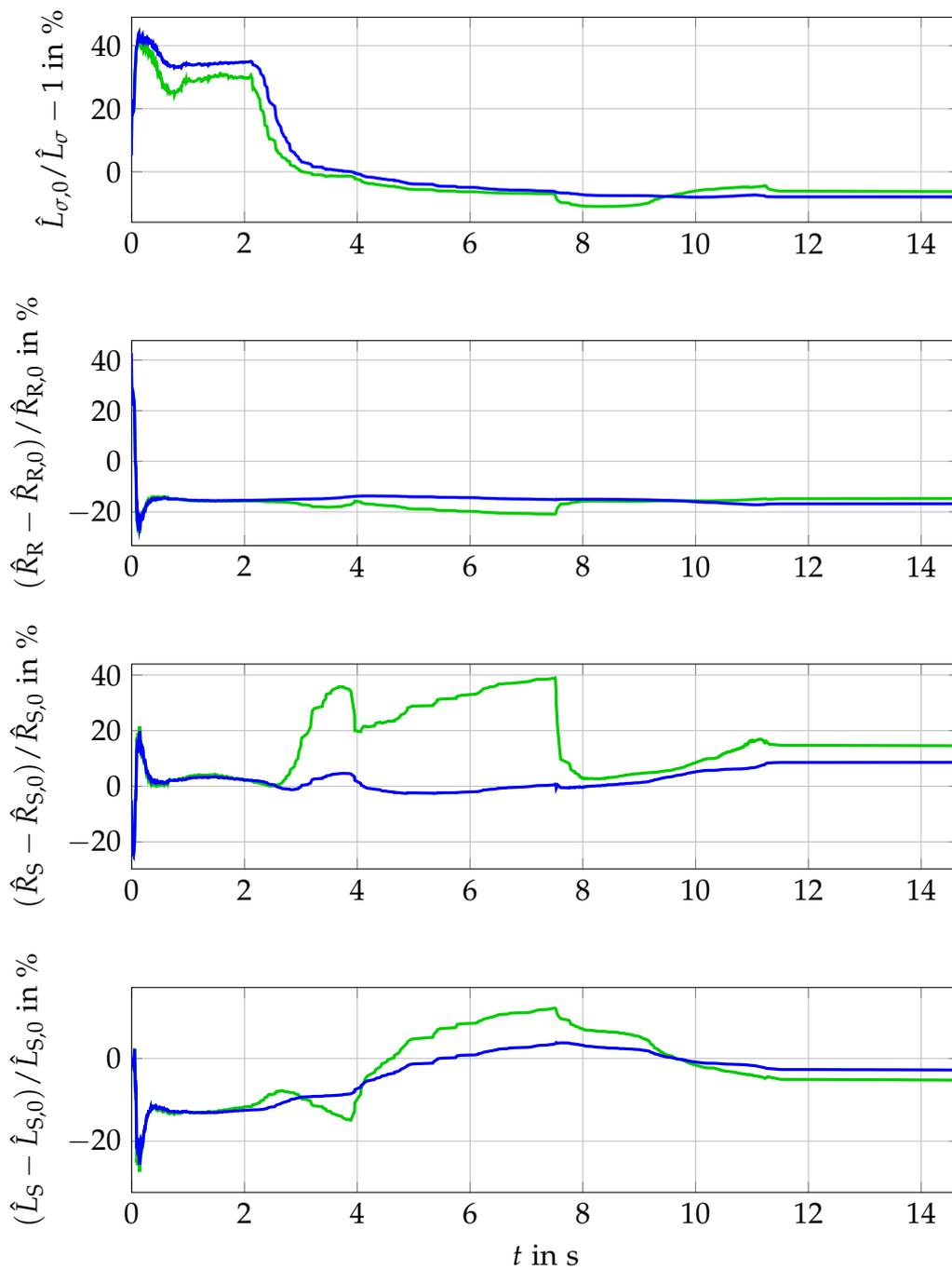


Abbildung 16.3.: Experimentelle Ergebnisse der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels des RLS-Verfahrens. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau.

16. Langsame Änderung der Drehzahl

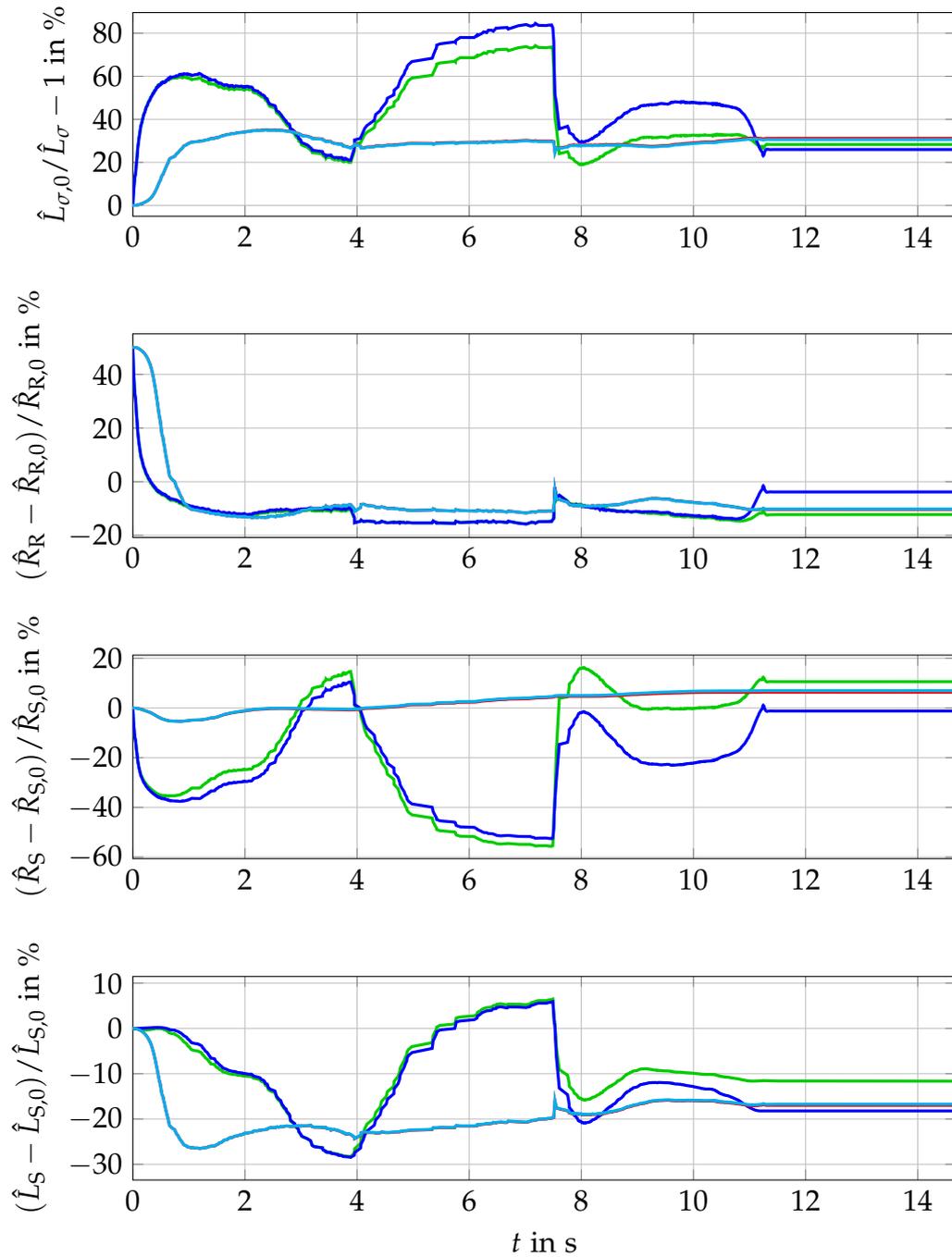


Abbildung 16.4.: Experimentelle Ergebnisse der Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels eines KALMAN-Filters. Ohne Erweiterungen in grün, mit richtungsabhängigem Vergessen in blau. Linearisierte Projektion der Kovarianzmatrix in rot, mittels UT transformiert in türkis

Summa summarum muss die gleichzeitige Bestimmung aller Parameter in Frage gestellt werden. Die Anzahl der einzustellenden Parameter, die Dimensionierung der Ableitungsschätzungsfilter, der Rechenaufwand, die nicht beeinflussbare Anregung des Systems und die bescheidenen Ergebnisse sprechen gegen eine Anwendung während des Betriebs. Zur *a priori*-Bestimmung der Parameter bei der Inbetriebnahme jedoch ist sie durchaus geeignet! Man sollte dafür jedoch auch andere Methoden wie *Total Least Squares* in Betracht ziehen, welche berücksichtigen, dass nicht nur der Vektor \mathbf{y} in (16.18), sondern auch die Matrix $\boldsymbol{\varphi}$ rauschbehaftet ist [10].

17. Stationärer Zustand

Im stationären Zustand reduziert sich der Informationsgehalt der Messungen auf die Phasenverschiebung und Amplitudenänderung des gemessenen Stromraumzeigers in Bezug auf deren berechnete Werte. Zu jedem Zeitpunkt können also höchstens zwei Parameter bestimmt werden; einer davon wird aus praktischen Gründen meist die Rotorzeitkonstante τ_R sein. Dafür fällt die komplizierte Signalverarbeitung zur Erzeugung von Ableitungen weg, die Filter können eine niedrigere Grenzfrequenz und dadurch eine bessere Rauschunterdrückung aufweisen.

Eine Möglichkeit zur Parameteridentifikation im stationären Zustand wurde bereits in Kapitel 8 in Form eines Störgrößenbeobachters vorgestellt. Es gelten hier die gleichen Richtlinien: Zum Betreiben von Parameteridentifikationsmethoden müssen Grenzwerte für die Winkelbeschleunigungen sowie Bedingungen an die Betriebspunkte (minimales Moment, minimaler Rotorflussbetrag) festgelegt werden. Anders ausgedrückt muss sichergestellt werden, dass ein stationärer Zustand vorliegt und die Identifikationsmethode im jeweiligen Betriebszustand überhaupt numerisch sinnvoll angewendet werden kann.

In der Fachliteratur sehr beliebt sind Modellabgleichmethoden (engl. *Model Reference Adaptive Systems*, MRAS). Dabei handelt es sich um Methoden, welche eine von einem Modell generierte Referenzgröße \hat{y} mit einer gemessenen Größe y vergleichen, den Unterschied beziehungsweise Modellfehler bestimmen und diesen zur Adaptierung des Modells heranziehen [2]. Ihre allgemeine Struktur ist in Abbildung 17.1 dargestellt.

Im einfachsten Fall ist das Fehlervorzeichen der gewählten Größe mit jenem des Parameterfehlers ident. Dann genügt ein integrierender Regler, welcher den Modellfehler durch Adaptierung des Parameterschätzwertes zu null regelt. In Abbildung 17.2 ist ein solches, zur Bestimmung der Rotorzeitkonstante entworfenes System dargestellt. Die Multiplikation des Fehlers e mit dem Sollwert des momentenbildenden Stromes i_{Sq}^* verhindert eine Anpassung des Parameterschätzwertes bei niedrigem Schlupf und erhöht die Empfindlichkeit bei hohem

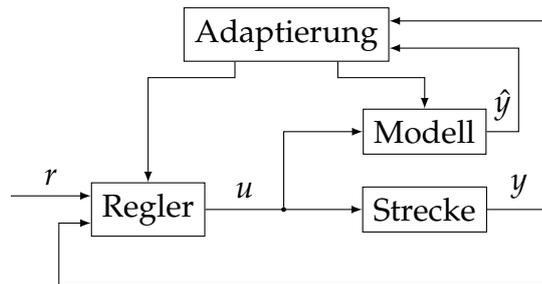


Abbildung 17.1.: Allgemeine Struktur einer Referenzmodell- beziehungsweise Modellabgleich- methode

Schlupf, wenn die Auswirkung der Rotorzeitkonstante auf die Referenzgröße stärker ausgeprägt ist [42].

Der früheste solche Ansatz findet sich in [17] und verwendet als Referenzgröße die berechnete Blindleistung Q (4.43). Spätere Publikationen untersuchen andere Referenzgrößen, darunter die Wirkleistung P [12, 66], das elektrische Moment m_M [42], die Statorspannungskomponenten u_{Sd} sowie u_{Sq} [12, 66] und weitere, „künstlich“ berechnete Größen wie die *criterion function* [74] oder den *field disorientation factor* [71].

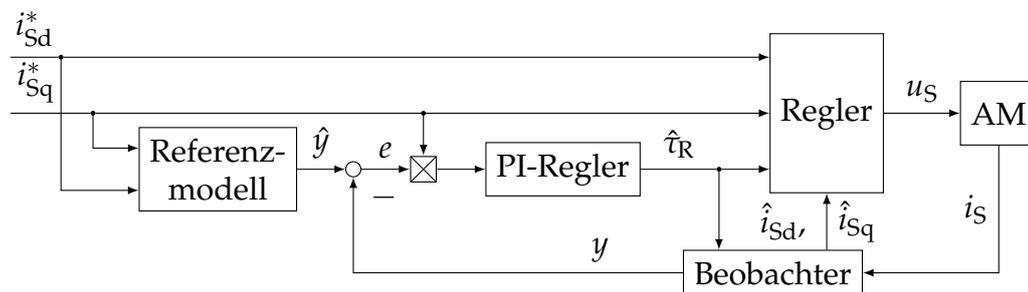


Abbildung 17.2.: Realisierung der Referenzmodellmethode mittels eines PI-Reglers

Der Unterschied der Verfahren liegt in den unterschiedlichen Sensitivitäten der gewählten Referenzgrößen bezüglich der übrigen, nicht mitgeschätzten Maschinenparameter. Dabei wurde ignoriert, dass die einzige vorhandene Information in der Phase und Amplitude des Frequenzganges liegt! Bis auf das elektrische Moment m_M , welches im Idealfall zusätzlich gemessen werden kann, können alle der obengenannten Größen als Funktionen von zwei repräsentativen Größen (zum Beispiel Wirk- und Blindleistung) dargestellt werden und liefern somit keinen weiteren Informationsgewinn. Eine Beschäftigung mit anderen Referenzgrößen ist daher nicht gerechtfertigt.

Im folgenden Abschnitt 17.1 werden die drei repräsentativen Größen elektrisches Moment, Wirkleistung und Blindleistung auf Ihre Sensitivitäten bezüglich der elektrischen Parameter der Asynchronmaschine untersucht. Die Sensitivitäten bezüglich der Rotorzeitkonstante wurden schon in den Abschnitten 4.3 und 4.4 hergeleitet; sie bestimmen, welche Betriebspunkte überhaupt zu einer Berechnung beziehungsweise Anpassung der geschätzten Rotorzeitkonstante geeignet sind. Ziel muss es sein, Parameter dort anzupassen, wo die Sensitivitäten bezüglich ihrer selbst groß, bezüglich aller anderen Parameter aber minimal sind.

Da die MRAS-Struktur mit PI-Regler bei zu großer Abweichung der anderen Parameterschätzwerte von den wahren Werten instabil werden kann, wird in Abschnitt 17.2 stattdessen für eine direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante zu jedem Zeitpunkt plädiert. Durch eine anschließende Tiefpassfilterung wird ein ähnlicher Effekt erzielt, ohne die destabilisierende Wirkung eines Integrators in Kauf nehmen zu müssen.

17.1. Sensitivitätsanalyse

In Kapitel 4 wurde über den Einfluss einer falsch geschätzten Rotorzeitkonstante auf die im stationären Zustand wirkenden Größen elektrisches Moment m_M , Wirkleistung P und Blindleistung Q berichtet. Hier sollen ausgehend von diesem Wissen die Sensitivitäten bezüglich der zu identifizierenden Parameter τ_R , R_S , L_σ und σ untersucht werden, um den Einsatz der Referenzgrößen bei modellreferenzbasierten Parameteridentifikationsmethoden zu bewerten.

Dazu werden relative Sensitivitätsfunktionen gemäß [62, 72] gebildet, wie sie schon in [26] in der Regelungstechnik eingesetzt wurden:

$$S_x^y := \frac{x}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} \quad (17.1)$$

Diese geben an, wie sich die berechneten Werte für die Kenngrößen ändern, wenn die Parameter von den wahren Parametern abweichen. Durch die Normierung werden die Ausdrücke besonders einfach und erlauben qualitative Einblicke.

17.1.1. Elektrisches Moment

Das elektrische Moment lautet im stationären Zustand

$$m_M = \frac{3p}{2} \frac{L_h^2}{L_R} i_{Sd} i_{Sq}. \quad (17.2)$$

Mit

$$\mu := \frac{3p}{2}, \quad \frac{L_h^2}{L_R} = L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right), \quad \gamma := \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}} \quad (17.3)$$

sowie den Gleichungen in (4.8) erhält man

$$m_M = \mu L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} |i_S|^2. \quad (17.4)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\gamma = \omega_S \tau_R \Rightarrow \frac{\tau_R}{y} \frac{\partial y(\tau_R)}{\partial \tau_R} = \frac{\gamma}{y} \frac{\partial y}{\partial \gamma} \quad (17.5)$$

ergeben sich folgende relativen Sensitivitäten:

$$\frac{\tau_R}{m_M} \frac{\partial m_M}{\partial \tau_R} = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } \gamma < 1 \\ = 0 & \text{für } \gamma = 1, \\ < 0 & \text{für } \gamma > 1 \end{cases} \quad (17.6a)$$

$$\frac{R_S}{m_M} \frac{\partial m_M}{\partial R_S} = 0, \quad (17.6b)$$

$$\frac{L_\sigma}{m_M} \frac{\partial m_M}{\partial L_\sigma} = 1, \quad (17.6c)$$

$$\frac{\sigma}{m_M} \frac{\partial m_M}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma - 1}. \quad (17.6d)$$

Die bereits aus Kapitel 4 bekannte Eigenschaft wird hier noch einmal deutlich: Eine Identifikation der Rotorzeitkonstante ist für $\gamma = 1$ nicht möglich, die relative Sensitivität beträgt null. Die Sensitivität bezüglich der Streuziffer σ sowie der Statorstreuinduktivität L_σ ist hingegen durchwegs hoch. Für kleinen oder verschwindenden Schlupf $\gamma \rightarrow 0$, also verschwindendes Moment $m_M \rightarrow 0$, kann aus numerischen Gründen keine Identifikation erfolgen.

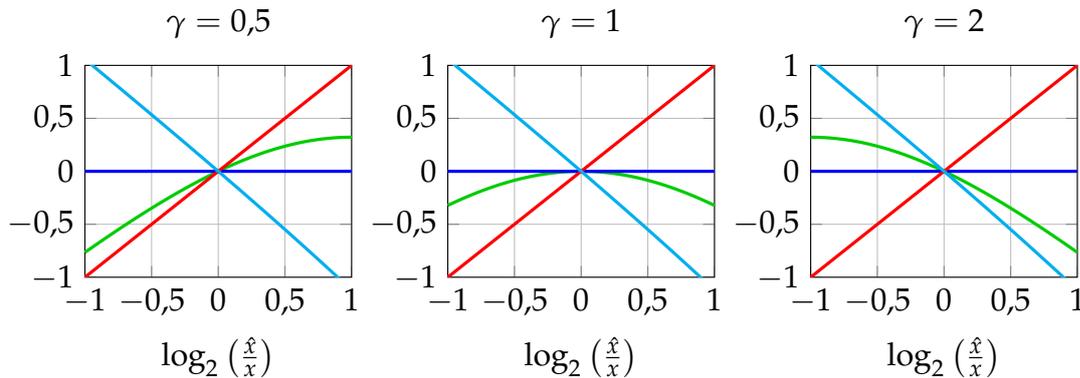


Abbildung 17.3.: Relative Änderungen $\log_2(\hat{m}_M/m_M)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$. In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$.

17.1.2. Wirkleistung

Es wird sich herausstellen, dass die Wirkleistung für hohe Drehzahlen ein ähnliches Verhalten aufweist wie das elektrische Moment. Es gilt gemäß (4.35):

$$P = |i_S|^2 \left[R_S + \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \right]. \quad (17.7)$$

Mit Hilfe des elektrischen Moments m_M aus (17.4) erhält man sofort

$$P = |i_S|^2 R_S + \frac{\omega_\Psi}{\mu} m_M. \quad (17.8)$$

Aus der Wirkleistung sowie dem gemessenen Moment ließe sich also umgekehrt der Statorwiderstand R_S errechnen!

Die Feldwinkelgeschwindigkeit beinhaltet die Schlupfwinkelgeschwindigkeit

$$\omega_\Psi = \omega_R + \omega_S. \quad (17.9)$$

Diese kann man zwar mittels der Rotorzeitkonstante ausdrücken

$$\omega_S = \frac{1}{\tau_R} \frac{i_{Sq}}{i_{Sd}}, \quad (17.10)$$

allerdings wurde schon früher festgestellt, dass sie keiner Veränderung unterliegt, wenn die Rotorzeitkonstante falsch geschätzt wird, $\omega_S = \hat{\omega}_S$. Daher muss sie bei den Ableitungen nicht berücksichtigt werden.

Es ergeben sich die folgenden relativen Sensitivitäten:

$$\frac{\tau_R}{P} \frac{\partial P}{\partial \tau_R} = \frac{\gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)}{(1 + \gamma^2) R_S + \gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad (17.11a)$$

$$\frac{R_S}{P} \frac{\partial P}{\partial R_S} = \frac{(1 + \gamma^2) R_S}{(1 + \gamma^2) R_S + \gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)}, \quad (17.11b)$$

$$\frac{L_\sigma}{P} \frac{\partial P}{\partial L_\sigma} = \frac{\gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)}{(1 + \gamma^2) R_S + \gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)}, \quad (17.11c)$$

$$\frac{\sigma}{P} \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{-\gamma \omega_\Psi L_\sigma \frac{1}{\sigma}}{(1 + \gamma^2) R_S + \gamma \omega_\Psi L_\sigma \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)}. \quad (17.11d)$$

Für $\omega_\Psi = \omega_R + \omega_S \rightarrow \infty$ ergeben sich exakt dieselben relativen Sensitivitäten wie für das elektrische Moment m_M ! Wirkt kein Moment, also $\gamma = 0$, $\omega_\Psi = \omega_R$, erhält man die einfachen Zusammenhänge

$$\frac{\tau_R}{P} \frac{\partial P}{\partial \tau_R} = 0, \quad \frac{R_S}{P} \frac{\partial P}{\partial R_S} = 1, \quad (17.12)$$

$$\frac{L_\sigma}{P} \frac{\partial P}{\partial L_\sigma} = 0, \quad \frac{\sigma}{P} \frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0. \quad (17.13)$$

Die Wirkleistung hängt dann – unabhängig von der Drehzahl – nur mehr von dem Statorwiderstand ab.

17.1.3. Blindleistung

Die Blindleistung Q besitzt den Vorteil, dass sie von dem Statorwiderstand unabhängig ist. Aus (4.41), (4.8) und $L_\sigma = \sigma L_S$ ergibt sich

$$Q = \omega_\Psi L_\sigma \frac{\frac{1}{\sigma} + \gamma^2}{1 + \gamma^2} |i_S|^2. \quad (17.14)$$

Die Streuziffer σ geht bei niedrigem Slip voll, bei hohem Slip kaum mehr in die Berechnung ein. Die von der Rotordrehzahl unabhängigen (!) relativen Sensitivitäten betragen

$$\frac{\tau_R}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \tau_R} = 2 \frac{\sigma - 1}{\sigma \gamma^2 + 1} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \quad (17.15a)$$

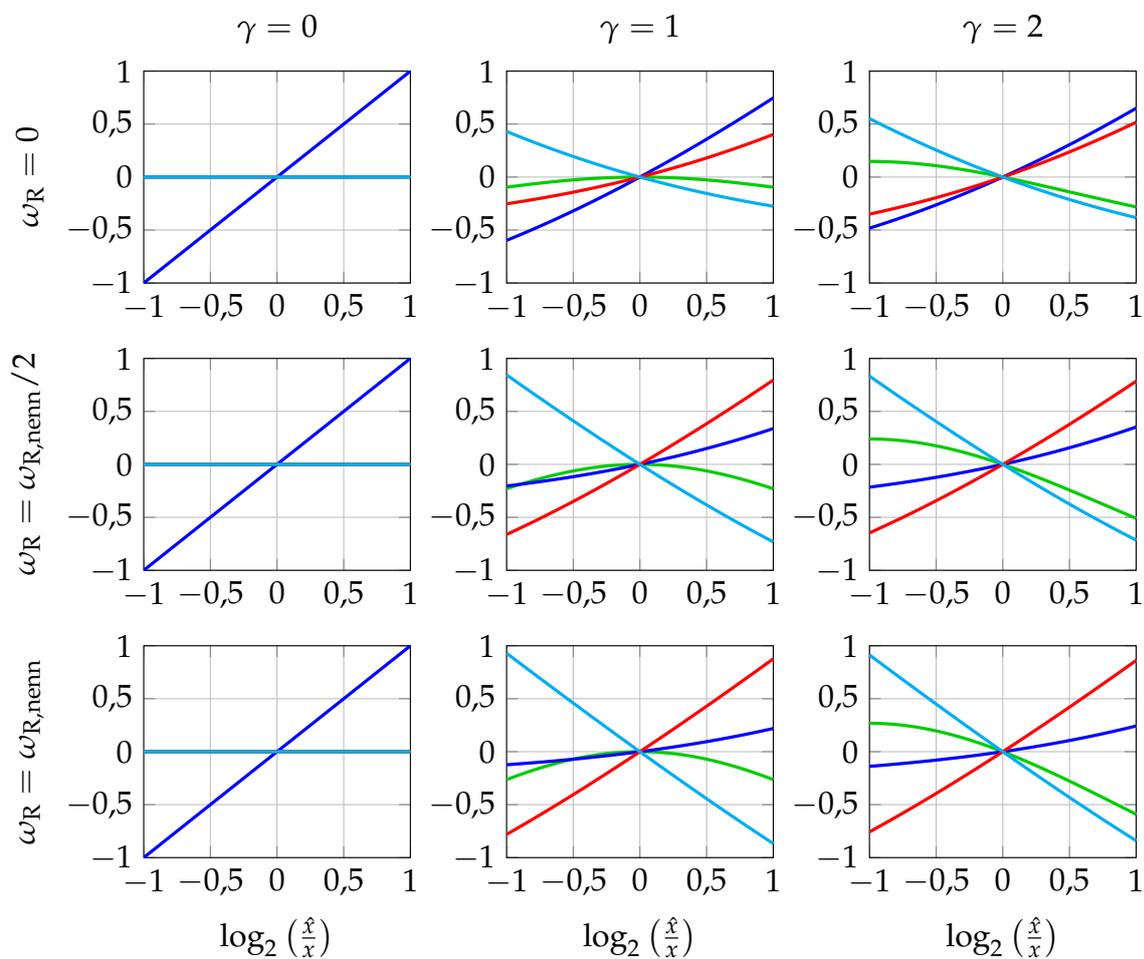


Abbildung 17.4.: Relative Änderungen $\log_2(\hat{P}/P)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$.

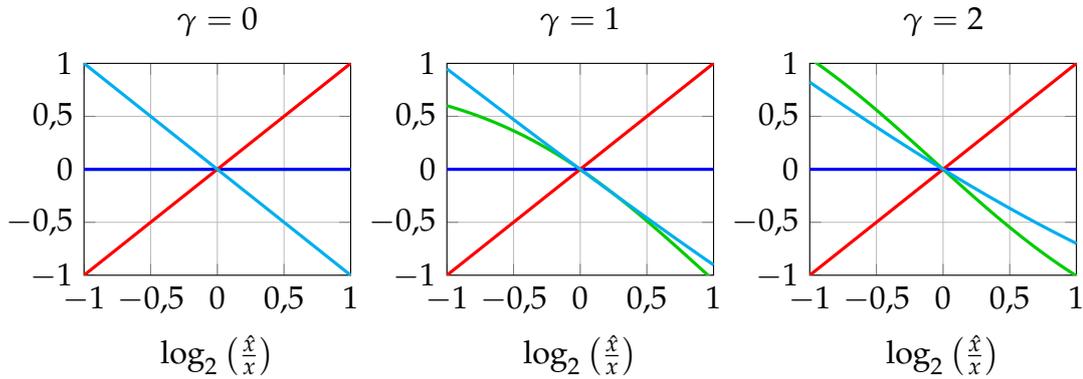


Abbildung 17.5.: Relative Änderungen $\log_2(\hat{Q}/Q)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$. In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$.

$$\frac{R_S}{Q} \frac{\partial Q}{\partial R_S} = 0, \tag{17.15b}$$

$$\frac{L_\sigma}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L_\sigma} = 1, \tag{17.15c}$$

$$\frac{\sigma}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma\gamma^2 + 1}. \tag{17.15d}$$

Da die Streuziffer σ meist sehr klein ist, ergibt sich für die relative Sensitivität bezüglich der Rotorzeitkonstante τ_R ein negatives Vorzeichen. Eine zu groß geschätzte Rotorzeitkonstante $\hat{\tau}_R > \tau_R$ hat demgemäß – unabhängig von dem Schlupf – eine zu klein berechnete Blindleistung \hat{Q} zur Folge (vergleiche auch Abbildung 17.5).

17.2. Direkte Berechnung der Rotorzeitkonstante

So wie in den Abschnitten 15.1 und 16.1 beschrieben, kann die Rotorzeitkonstante auch im stationären Zustand direkt aus dem Betrag und der Phase des komplexen Raumzeigers $i_S^R(j\omega_S)/u_S^R(j\omega_S)$ berechnet werden. Dazu setzt man in der Differentialgleichung (16.2) $di_S^R/dt = j\omega_S i_S^R$ beziehungsweise $du_S^R/dt = j\omega_S u_S^R$ und erhält mit der Abkürzung (15.4)

$$\frac{1}{\tau_R} = -\omega_S \frac{\omega_\Psi i_S^R + j \frac{1}{L_\sigma} u_\Psi}{\frac{1}{L_\sigma} u_\Psi - j \omega_\Psi \frac{1}{\sigma} i_S^R}. \tag{17.16}$$

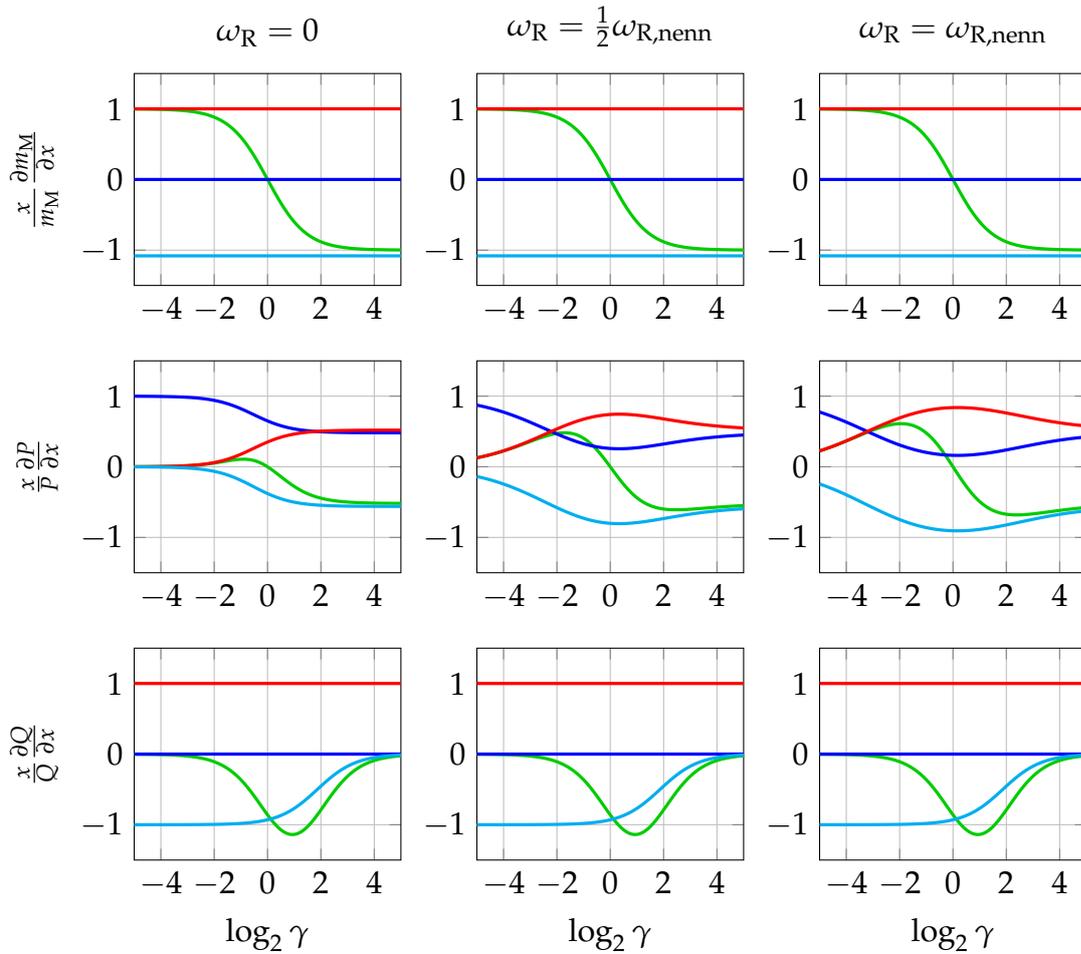


Abbildung 17.6.: Relative Sensitivitäten bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = \tau_R$, blau für $x = R_S$, rot für $x = L_\sigma$ und türkis für $x = \sigma$.

Dieser Quotient stellt im fehlerfreien Fall wieder eine reelle Zahl dar, die inverse Rotorzeitkonstante kann daher über dessen Realteil

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{\omega_S \omega_\Psi \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) (P - R_S |i|^2)}{L_\sigma \left| \frac{1}{L_\sigma} u_\Psi - j \omega_\Psi \frac{1}{\sigma} i_S^R \right|^2} \quad (17.17)$$

berechnet werden.

Durch Nullsetzung des Imaginärteils von (17.16) ergeben sich wiederum Rechenvorschriften für einen weiteren unbekannt Parameter, zum Beispiel die inverse Streuziffer

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\frac{1}{L_\sigma} \left(\frac{1}{L_\sigma} |u_\Psi|^2 - \omega_\Psi Q \right)}{\omega_\Psi \left(\frac{1}{L_\sigma} Q - \omega_\Psi |i_S^R|^2 \right)}. \quad (17.18)$$

Es können also stets zwei Parameter direkt berechnet werden; im Gegensatz zu dem dynamischen Fall in Abschnitt 16.1 werden hier keinerlei Ableitungen der Signale benötigt und die Formeln haben einfachere Struktur.

In Tabelle 17.1 sind alle möglichen Rechenvorschriften angegeben, wie man Parameter unabhängig von jeweils einem anderen berechnet. Die allgemeinen Formeln hingegen sind in jenen Einträgen zu finden, wo Zeile und Spalte denselben Parameter bezeichnen. Möchte man zum Beispiel die Parameter σ und τ_R gemeinsam bestimmen, berechnet man zuerst τ_R unabhängig von σ (erste Zeile, zweite Spalte) und setzt das Ergebnis in (17.16) ein. Für die Parameter σ und L_σ kann man entweder zuerst σ unabhängig von L_σ (3. Zeile, 4. Spalte) und danach L_σ allgemein berechnen (4. Zeile, 3. Spalte) oder umgekehrt.

Es ist leicht zu erkennen, in welchen Betriebszuständen eine Identifikation gewisser Parameter nicht möglich ist. Sämtliche Berechnungen der Rotorzeitkonstante τ_R besitzen einen Faktor ω_S , so dass keine Identifikation bei Nullmoment erfolgen kann. Die Streuziffer σ besitzt den Ausdruck $\omega_\Psi = \omega_S + \omega_R$ im Zähler, die Statorstreuinduktivität L_σ denselben im Nenner, es kann also im generatorischen Betrieb zu einem Verlust der Identifizierbarkeit der zwei Parameter kommen. Eine gleichzeitige Bestimmung von σ und L_σ bei niedrigem Schlupf ist ebenfalls nicht möglich! Diese Einschränkungen müssen in der Folge berücksichtigt werden.

Unbekannter Parameter

	R_S	$\frac{1}{\sigma}$	$\frac{1}{L_\sigma}$
$\frac{1}{\tau_R}$	$ \omega_S \sqrt{\frac{ i_S^R ^2 \omega_\Psi - \frac{1}{L_\sigma} Q}{\frac{1}{L_\sigma} Q - \frac{1}{\sigma} \omega_\Psi i_S^R ^2}}$	$\frac{1}{L_\sigma} \frac{Q - \omega_\Psi i_S^R ^2}{(P - R_S i_S^R ^2)}$	$\omega_S \frac{\sqrt{(\frac{1}{\sigma} - 1)^2 Q^2 - \frac{4}{\sigma} (P - R_S i_S^R ^2)^2} + (\frac{1}{\sigma} - 1) Q}{2(P - R_S i_S^R ^2)}$
R_S	$\frac{1}{L_\sigma} \left(\frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) P - \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) i_S^R ^2 \omega_\Psi \omega_S \frac{1}{\tau_R}$	$\frac{1}{L_\sigma} P - \frac{1}{L_\sigma} \omega_S Q + \frac{ i_S^R ^2 \omega_\Psi \omega_S}{L_\sigma}$	$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) P \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\omega_S Q}{\tau_R}$
$\frac{1}{\sigma}$	$\frac{1}{L_\sigma} \left(\frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) Q - i_S^R ^2 \omega_\Psi \omega_S^2$	$\frac{1}{L_\sigma} \left[\omega_S (P - R_S i ^2) + \frac{1}{\tau_R} Q \right]$	$\frac{\omega_S \frac{1}{\tau_R} Q + \omega_S (P - R_S i ^2)}{\left(\frac{1}{\sigma} \frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) Q + \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\omega_S}{\tau_R} (P - R_S i_S^R ^2)}$
$\frac{1}{L_\sigma}$	$\omega_\Psi i_S^R ^2 \frac{\frac{1}{\sigma} + \omega_S^2}{\sigma \tau_R}$	$\frac{\omega_S \omega_\Psi i_S^R ^2}{\omega_S Q - \frac{1}{\tau_R} (P - R_S i_S^R ^2)}$	$\omega_\Psi \frac{\left(\frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) u_\Psi ^2}{\left(\frac{1}{\tau_R} + \omega_S^2 \right) u_\Psi ^2}$

Tabelle 17.1.: Auflistung der möglichen Berechnungen von Parametern unabhängig von jeweils einem anderen. Zeilen stehen für den zu berechnenden, Spalten für den unbekanntesten Parameter. In den Kreuzungspunkten gleicher Parameter ist die allgemeine Formel angegeben.

17.2.1. Ergebnisse

In Abbildung 17.7 sind Simulationsergebnisse zu sehen, welche einem Vergleich der unterschiedlichen Annahmen (dynamisch, konstante Drehzahl, stationärer Zustand) dienen sollen. Hierfür ist der relative Schätzfehler in Prozent aufgetragen.

Dabei wurde bei der Berechnung von τ_R eine zu kleine Statorzeitkonstante angenommen ($\hat{\tau}_S = 2/3\tau_S$). Der Versuchsablauf beschreibt einen stufenweisen Drehzahlanstieg; während der Beschleunigungsphasen steigt der Schlupf, bei konstanter Drehzahl sind das Reibmoment und damit der Schlupf gering. Auf Grund der beschränkten Drehzahländerungsrate unterscheidet sich das

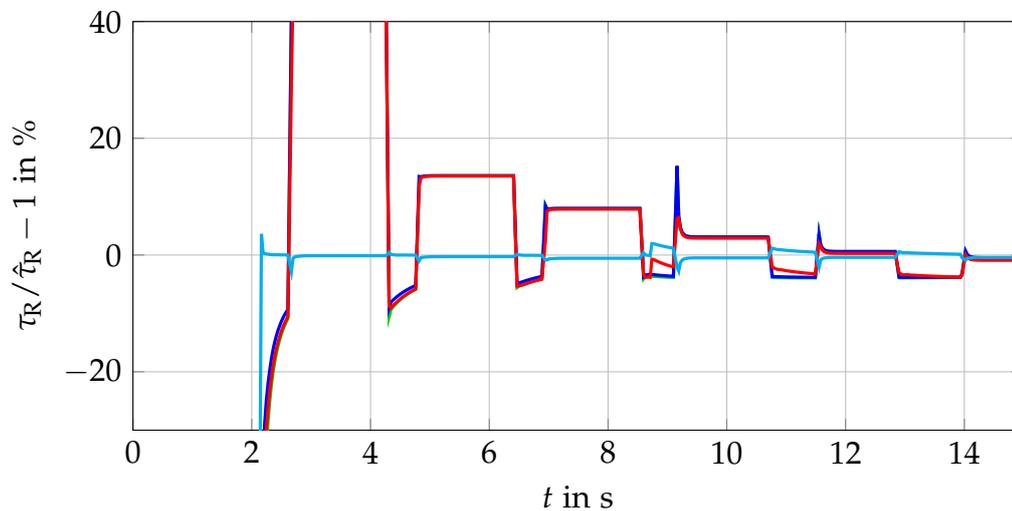


Abbildung 17.7.: Simulationsergebnis der direkten Berechnung der inversen Rotorzeitkonstante $1/\tau_R$ im dynamischen Fall (grün, (15.8)) sowie unter der Annahme konstanter Drehzahl (blau, (16.4)) und stationärer Verhältnisse (rot, (17.16)). Schließlich unabhängig von τ_S berechnet (türkis).

Ergebnis der dynamischen Berechnung nicht wesentlich von dem mit konstant angenommener Drehzahl. Die Annahme des stationären Zustandes ist aber oft verletzt und führt zu starken Ausreißern während der transienten Vorgänge; hier muss die Identifikation gezielt unterbrochen werden.

Es bestätigen sich die Vermutungen: Anfangs gibt es kein Moment und keinen Schlupf, daher ist eine Identifikation von τ_R nicht möglich. Dann wird zwar ein Moment aufgebaut, der Einfluss der Statorzeitkonstante dominiert jedoch das Berechnungsergebnis, nur die von R_S unabhängigen Gleichungen liefern

brauchbare Resultate. Mit zunehmender Drehzahl hingegen relativiert sich der Einfluss von τ_S , die Ergebnisse konvergieren.

17.2.2. Berücksichtigung von Parametersensitivitäten

Dieses Sensitivitätsverhalten ist in den Abbildungen 17.8, 17.9 und 17.10 dargestellt. In ersterer wird die Rotorzeitkonstante direkt über (17.16) bestimmt, also ohne weitere Parameter mitzuberechnen. Man erkennt deutlich die Abhängigkeit von dem Statorwiderstand R_S bei niedriger Drehzahl sowie die Unbrauchbarkeit der Methode bei verschwindendem Schlupf. Das Problem der Abhängigkeit von R_S wird in Abbildung 17.9 umgangen, indem zuerst R_S berechnet und dann in die Rechenvorschrift für τ_R eingesetzt wird. Dem massiven Einfluss der Streuinduktivitäten bei höheren Drehzahlen hingegen wird durch Elimination von σ entgegengewirkt, siehe Abbildung 17.10.

Kombiniert man diese Erkenntnisse mit jenen aus Teil II, kommt man bezüglich der Schätzung des Rotorflusses zu folgendem Schluss: Bei niedrigem Schlupf sollte das Strommodell verwendet werden; die Rotorzeitkonstante hat auf die Schätzung nur wenig Einfluss, sie kann auch nicht verlässlich bestimmt werden. Stattdessen bietet sich eine gleichzeitige Bestimmung des Statorwiderstandes R_S (für $\omega_R \ll$) oder der Streuinduktivität L_σ respektive der Streuziffer σ (für $\omega_R \gg$) an.

Bei niedrigen Drehzahlen muss ebenfalls das Strommodell oder ein Beobachter zum Einsatz kommen, das Spannungsmodell ist auf Grund der offenen Integration nicht geeignet. Der dominierende Statorwiderstand kann gemeinsam mit der Rotorzeitkonstante geschätzt werden, sofern ein ausreichender Schlupf besteht. Die Induktivitäten beeinflussen aber stets das Ergebnis, so dass dies der kritischste Betriebszustand ist.

Bei höheren Drehzahlen und Schlupfwinkelgeschwindigkeiten verschwindet der Einfluss des Statorwiderstandes sowohl auf die Schätzung des Rotorflusses als auch auf die der Rotorzeitkonstante. Mittels gleichzeitiger Bestimmung von τ_R und σ beziehungsweise L_σ ist man gerüstet für den Einsatz des Strommodells oder auch des Spannungsmodells.

Kurz: Das einfache Strommodell ist in allen Bereichen einsetzbar, sofern die richtigen Parameter mitgeschätzt werden. In Tabelle 17.2 ist aufgelistet, wann welche Parameter geschätzt werden sollten. Dabei darf jedoch nicht auf die oben

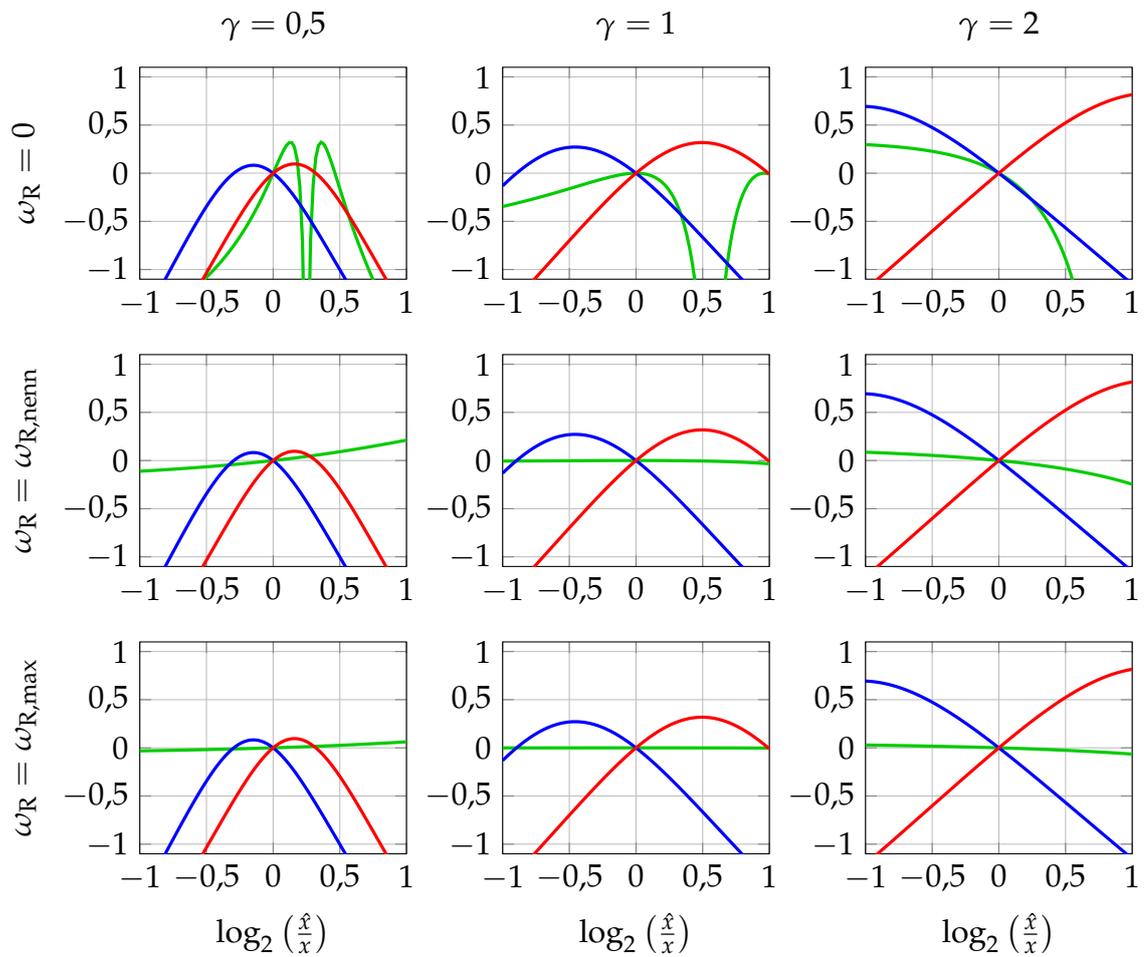


Abbildung 17.8.: Relative Änderungen $\log_2(\tau_R/\hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$.

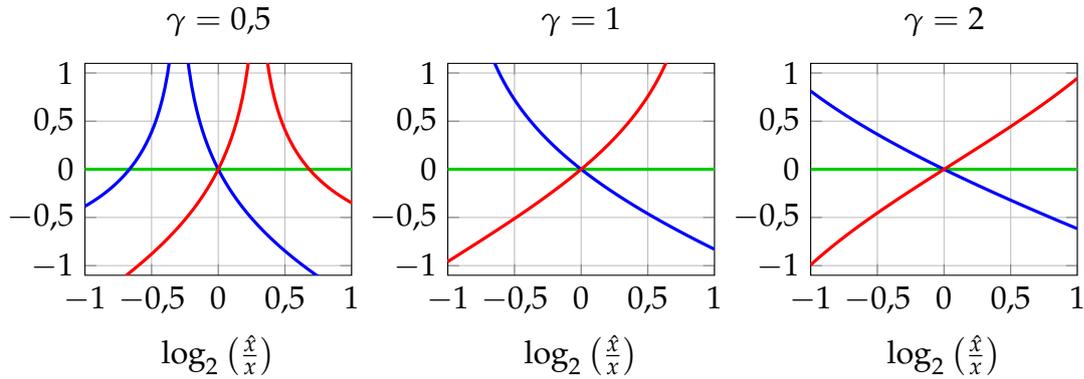


Abbildung 17.9.: Relative Änderungen $\log_2(\tau_R / \hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma / \tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . Berechnung *unabhängig* von dem Statorwiderstand R_S . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$.

genannten Einschränkungen bezüglich des Verlustes der Identifizierbarkeit von σ und L_σ vergessen werden!

	$\omega_S \ll$	$\omega_S \gg$
$\omega_R \ll$	R_S	$\frac{1}{\tau_R}, R_S$
$\omega_R \gg$	$\frac{1}{L_\sigma}, \frac{1}{\sigma}$	$\frac{1}{\tau_R}, \frac{1}{\sigma}$

Tabelle 17.2.: Auflistung der gleichzeitig in den jeweiligen Betriebszuständen zu identifizierenden Parameter.

Die einfachstmögliche Form der Parameteridentifikation stellt ein abhängig vom Betriebszustand gewichteter Tiefpass

$$\hat{x}_{k+1} = \alpha_k \hat{x}_k + (1 - \alpha_k) u_k, \quad (17.19a)$$

$$u_k = \alpha_{k,1} \hat{x}_{k,1} + \dots + \alpha_{k,N} \hat{x}_{k,N}, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} = 1 \quad (17.19b)$$

dar, dessen Zustand einer zu schätzenden Größe entspricht

$$\hat{x} \in \{1/\hat{\tau}_R, \hat{R}_S, 1/\hat{\sigma}, 1/\hat{L}_\sigma\} \quad (17.20)$$

und dessen Eingangsgröße u_k als Gewichtung mehrerer Schätzverfahren berechnet wird. Die reellen Wichtungsfaktoren $\alpha_{k,i}$, $0 \leq \alpha_{k,i} \leq 1$ sind dabei Funktionen des Betriebszustandes $\alpha_{k,i} = \alpha_{k,i}(\omega_{R,k}, \omega_{S,k})$.

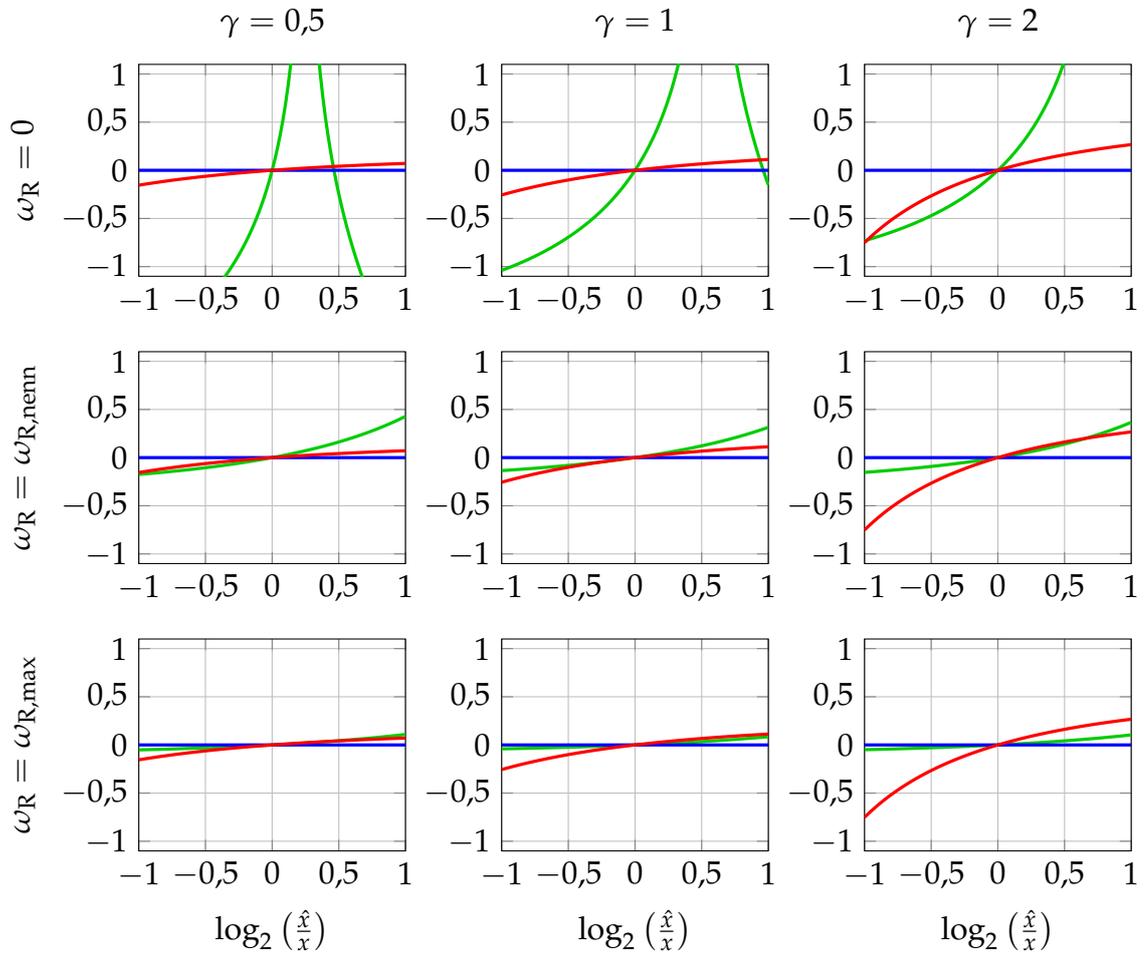


Abbildung 17.10.: Relative Änderungen $\log_2(\tau_R/\hat{\tau}_R)$ bei unterschiedlichen Schlupfwinkelgeschwindigkeiten $\omega_S = \gamma/\tau_R$ sowie unterschiedlichen Rotorwinkelgeschwindigkeiten ω_R . Berechnung *unabhängig* von der Streuziffer σ . In grün für $x = R_S$, blau für $x = 1/\sigma$, und rot für $x = 1/L_\sigma$.

In Abbildung 17.11 ist ein mögliches Ergebnis dieser einfachen Identifikationsmethode zu sehen. Zum besseren Vergleich mit z.B. Abbildung 16.4 wurden statt der Parameter τ_R und σ die daraus ableitbaren Parameter R_R und L_S dargestellt. Die Formel (17.19a) wurde für eine einfachere Wahl der Parameter α_i in eine hierarchische Form umgeschrieben. Für die Rotorzeitkonstante zum Beispiel lautet diese

$$\hat{\tau}_{R,k+1} = \gamma \hat{\tau}_{R,k} + (1 - \gamma) \left\{ \alpha_{R_S} \tau_{R,R_S,k} + (1 - \alpha_{R_S}) \left[\alpha_\sigma \tau_{R,\sigma,k} + (1 - \alpha_\sigma) \tau_{R,\text{allg},k} \right] \right\} \quad (17.21)$$

Dabei bezeichnen τ_{R,R_S} und $\tau_{R,\sigma}$ die berechneten Werte der Rotorzeitkonstante ohne Berücksichtigung von R_S beziehungsweise σ , $\tau_{R,\text{allg}}$ die allgemeine Rechenvorschrift (17.17). Die zeitvarianten reellen Wichtungsfaktoren $\gamma = \gamma(\omega_S)$, $\alpha_{R_S} = \alpha_{R_S}(\omega_R)$ und $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(\omega_R + \omega_S)$, $0 \leq \gamma, \alpha_i \leq 1$ wurden so realisiert, dass die Überlegungen aus Tabelle 17.2 sowie die Identifizierbarkeitsbedingungen berücksichtigt werden. Durch die hierarchische Form wird stets eine Berechnung zusammen mit dem Statorwiderstand R_S favorisiert, sofern diese möglich ist. Erst dann kommt die Berechnung gemeinsam mit der Streuziffer σ , dann die allgemeine Berechnung ins Spiel.

Konkret gilt $\gamma(0) = 1$, $\alpha_\sigma(0) = 0$ und $\alpha_{R_S}(\omega_R) = 0$ für $\omega_R > \omega_{R,\text{max}}$. Dies wurde über glatte Übergänge zwischen zwei Schwellwerten $\bar{\omega}$ und $\underline{\omega}$ realisiert. Der Parameter γ bestimmt, ob eine Adaptierung stattfindet ($\omega_S > \bar{\omega}_{S,\text{min}}$, $\gamma = \gamma^*$) oder nicht ($\omega_S < \underline{\omega}_{S,\text{min}}$, $\gamma = 1$). Der Wert von γ^* legt dabei die Adaptionrate fest und liegt im vorliegenden Fall bei $\exp\{-0,1/\hat{\tau}_{R,0} \Delta t\}$, wobei Δt die Zeit zwischen zwei verwendeten Datenpunkten und $\hat{\tau}_{R,0}$ den initialen Schätzwert für die Rotorzeitkonstante darstellt. Da nur Datenpunkte herangezogen werden, bei denen stationäre Verhältnisse bestehen, kann die Zeit Δt sehr groß werden und es könnte zu unerwünschten Sprüngen kommen. Daher wird sie mit $\Delta t = \min(\Delta t, \Delta t_{\text{max}})$ beschränkt (hier: $\Delta t_{\text{max}} = 0,1$ s).

Die Werte der Wichtungsfaktoren α_{R_S} und α_σ liegen zwischen null ($\omega_R > \bar{\omega}_{R,\text{max}}$ bzw. $\omega_\Psi < \underline{\omega}_{\Psi,\text{min}}$) und 1/2 ($\omega_R < \underline{\omega}_{R,\text{max}}$ bzw. $\omega_\Psi > \bar{\omega}_{\Psi,\text{min}}$). Die Werte für die verwendeten Grenzwerte sind in Tabelle 17.3 angeführt und wurden empirisch ermittelt.

Man erkennt in Abbildung 17.11, dass jede Methode für sich genommen unpraktikabel wäre. Die oben angeführte, rudimentäre Einstellung der Wichtungsfaktoren hingegen liefert brauchbare Ergebnisse. Man erkennt deutlich den Anstieg der Statorinduktivität L_S im Feldschwächbereich ($4,5$ s $< t < 7,5$ s). Die gute Übereinstimmung aller Berechnungsmethoden in diesem Betriebspunkt

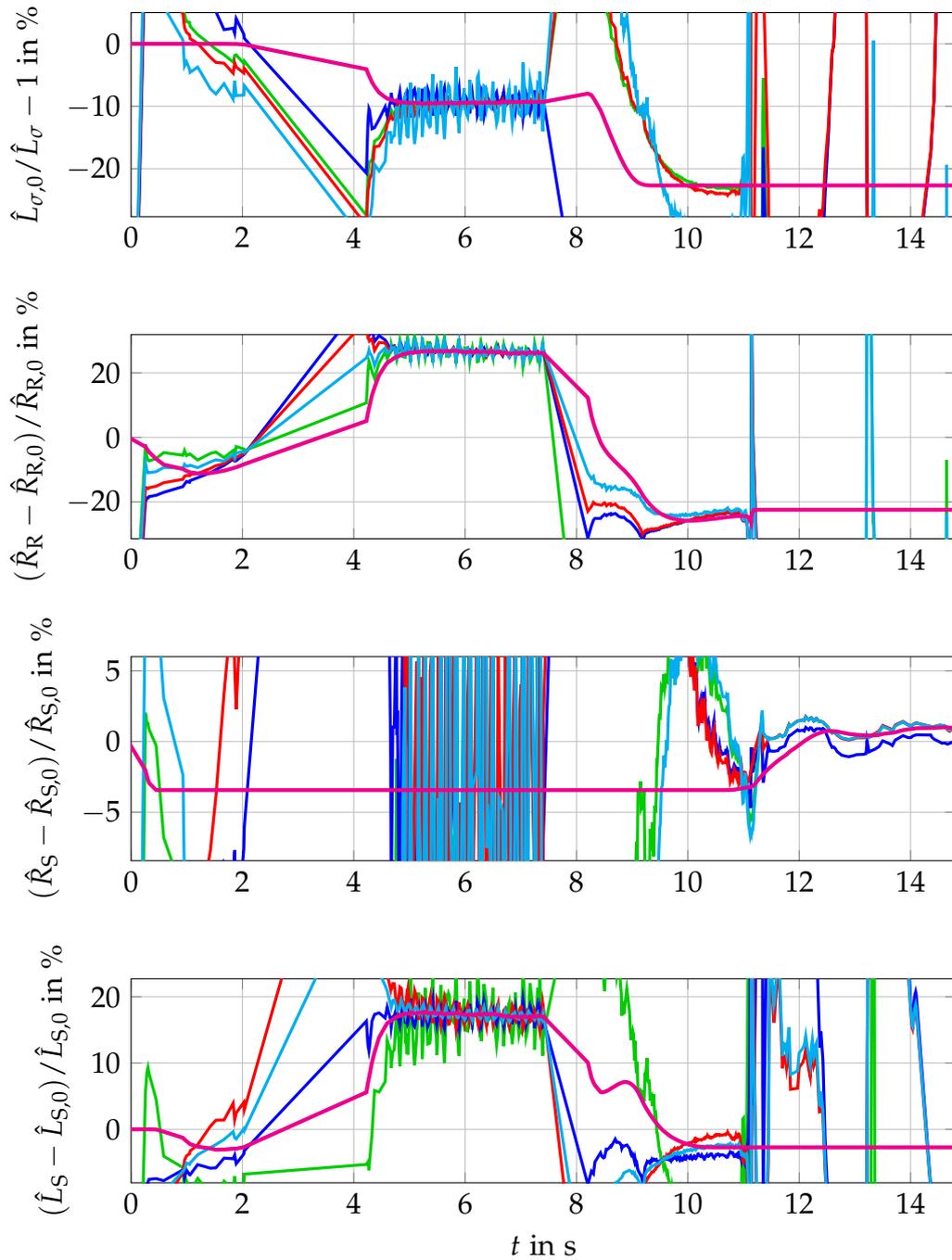


Abbildung 17.11.: Experimentelles Ergebnis der iterativen Berechnung aller vier elektrischen Parameter mittels der direkten Methode für stationäre Zustände. Ohne Berücksichtigung von L_{σ} , τ_R , R_S und σ in grün, blau, rot respektive türkis. In magenta schließlich die über (17.21) iterativ angepasste Schätzgröße.

	$\underline{\omega}$	$\bar{\omega}$
ω_S	5	10
ω_R	0	100
$\omega_\Psi (\sigma)$	100	200
$\omega_\Psi (L_\sigma)$	300	500

Tabelle 17.3.: Verwendete Grenzwinkelgeschwindigkeiten zur Berechnung der Faktoren α und γ

zeugt von einer guten Qualität der Schätzwerte. Wie befürchtet stellt der Bereich mit niedriger Drehzahl und niedrigem Moment ($t > 11$ s) eine Problemzone dar. Einzig die Identifikation des Statorwiderstandes reüssiert hier erwartungsgemäß.

18. Verstimmungsbasierte Verfahren

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden zur Parameteridentifikation der Rotorzeitkonstante τ_R gehen von den Erkenntnissen des Teils II aus. Konkret betreibt man die Asynchronmaschine so, dass die Verstimmung des elektrischen Moments m_M zu messbaren Auswirkungen entweder bei dem Drehzahlverlauf oder bei der Stromamplitude führt.

Im Gegensatz zu den Methoden in Kapitel 17, die nur die Existenz stationärer Zustände beim Betrieb der Maschine fordern, handelt es sich hier um aktive Eingriffe, so dass man nicht von Parameteridentifikation während des Betriebes reden kann. In speziellen Anwendungsgebieten kommt es aber durchaus vor, dass genau die hier beschriebenen Abläufe durchgeführt werden, womit die Methoden auch *online* eingesetzt werden können.

Ein Vorteil aller vorgestellten Methoden gegenüber der klassischen *offline*-Ermittlung der Rotorzeitkonstante durch einen Kurzschlussversuch [34, 37] ist der Verzicht auf einen physikalischen Eingriff in die Maschine (Festklemmen des Rotors). Sie können also bequem in den üblichen Prozess der Parameteridentifikation während der Kommissionierung integriert werden, welcher typischerweise im Leerlauf erfolgt. Nachteilig erweist sich, dass bei allen Methoden bereits eine gewisse Grundkenntnis der Parameter und damit ermittelte provisorische Regler vorliegen müssen.

So wird in der ersten, direkten Methode in Abschnitt 18.1 eine Drehzahlrampe abgefahren und das errechnete mit dem benötigten Moment verglichen. Unter der Bedingung initialen Nullmoments gelingt damit sogar eine Abschätzung des Trägheitsmomentes.

Die zweite Methode in Abschnitt 18.2 untersucht das Verhalten der Maschine am Ende einer Drehzahlrampe. Einer konstant geregelten Drehzahl wird das Integral des benötigten geschätzten Moments gegenübergestellt. Damit kann iterativ und ohne Einfluss irgendeines anderen Parameters auf die Rotorzeitkonstante geschlossen werden. Beide Methoden verlangen die Möglichkeit des Betriebs im Leerlauf, so dass eine Drehzahl mit vernachlässigbar geringem Moment gehalten werden kann.

Die dritte Methode hingegen beruht auf einer iterativen Anpassung der Rotorzeitkonstante bei konstant gehaltenem Sollmoment beziehungsweise konstant gehaltener Drehzahl (siehe Abschnitt 18.3). Damit dabei sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können, muss eine signifikante viskose Reibung (oder allgemein eine geschwindigkeitsproportionale Last) vorhanden sein. Ansonsten würde der Rotor unkontrolliert beschleunigen oder, im zweiten Fall, keine Verstimmung auftreten. In beiden Fällen wäre dabei keine Identifikation möglich.

18.1. Direkte Bestimmung mittels der Momentenverstimmung

Über die in Teil II hergeleitete Näherungsformel (4.26) kann bei Kenntnis des Moments m_M direkt auf die Rotorzeitkonstante geschlossen werden. Voraussetzung dafür ist eine ausreichend genaue Kenntnis der Hauptinduktivität L_h . Weiters muss das Verhältnis der Ströme $\hat{\gamma} = \hat{i}_{sq}/\hat{i}_{sd}$ dabei, wie in 4.3 bereits ausgeführt, möglichst fern von eins gewählt werden, damit die Berechnung sinnvolle Ergebnisse liefert.

Die Bestimmung des echten Maschinenmoments m_M wird wesentlich vereinfacht, wenn die Asynchronmaschine ungebremst und unbelastet laufen kann. Der Drallsatz (2.20) vereinfacht sich dann zu:

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_R}{dt} = m_M, \quad m_L = 0. \quad (18.1)$$

Diese Annahme ist bei großen Maschinen, wie sie in Prüfständen eingesetzt werden, realistisch, da diese ein hohes Trägheitsmoment besitzen und daher das Reibmoment vernachlässigt werden kann.

In diesem lastfreien Fall kann das echte Moment m_M über den messbaren Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ω_R bestimmt werden, sofern das Trägheitsmoment J bekannt ist. Die dazu nötige Differentiation von ω_R wird vermieden, indem man dem Moment m_M ein bekanntes Verhalten aufprägt.

Dazu wird ein integrierender Drehzahlregler mit dem positiven Proportional- k_p beziehungsweise Integralanteil k_i eingesetzt, so dass die Asynchronmaschine einer Drehzahlrampe mit Steigung α

$$\omega_R^*(t) = \omega_R(t_0) + \alpha (t - t_0) \quad (18.2)$$

stationär genau folgt:

$$\hat{m}_M = k_p \Delta\omega_R + k_i \int_{t_0}^t \Delta\omega_R \, d\tau, \quad \Delta\omega_R := \omega_R^* - \omega_R. \quad (18.3)$$

Das im eingeschwungenen Zustand erzeugte Moment berechnet sich zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_M = \frac{J}{p} \alpha. \quad (18.4)$$

Ein Vergleich von berechnetem und vom Regler gefordertem Moment liefert mit (4.26) einen Wert für das Verhältnis von τ_R zu $\hat{\tau}_R$ und damit einen neuen Schätzwert der Rotorzeitkonstante.

Da die Näherungsformel für kleinere Rotorflusswinkelfehler $\Delta\rho$ genauer wird, kann diese Methode auch iterativ durchgeführt werden, indem die Rotorzeitkonstante schrittweise angepasst wird. Dem stehen das Messrauschen und andere Störungen gegenüber, welche der genauen Bestimmung der Verhältnisse m_M/\hat{m}_M und $\hat{\gamma}$ entgegenwirken. Problematisch ist außerdem, dass das Trägheitsmoment J genau bekannt sein muss. Dieses kann aber im selben Versuchsablauf mitbestimmt werden.

18.1.1. Bestimmung des Trägheitsmomentes

Vor dem Rampenversuch drehe sich die Asynchronmaschine mit konstanter Drehzahl ohne aufgeschaltetes Moment

$$\omega_R(t) = \omega_{R,0} = \text{konst}, \quad t < t_0, \quad \hat{m}_M = \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\gamma} = 0. \quad (18.5)$$

Ohne Einwirkung eines Moments kommt es zu keiner Verstimmung, es gilt $\hat{\rho} = \rho$, $\hat{i}_{sd} = i_{sd}$.

Nun wird zum Zeitpunkt $t = t_0$ ein Momentensprung $m_M \stackrel{!}{=} m_M^* = (J\alpha)/p$ in Form der oben beschriebenen Drehzahlrampe kommandiert. Auf Grund der relativ großen Zeitkonstante τ_R wird eine Verstimmung nur langsam eintreten, es gilt im ersten Moment näherungsweise weiterhin $\hat{\rho} = \rho$, also auch $\hat{m}_M = m_M$.

Betrachtet man ein Zeitintervall kurz nach dem Momentensprung $[t_0 + \Delta t, t_f]$, mit $0 < \Delta t \ll \hat{\tau}_R$, in welchem noch keine nennenswerte Verstimmung aufgetreten ist (z.B. $t_f - t_0 < \hat{\tau}_R/2$), so kann durch den Vergleich von berechneter zu wahrer Winkelgeschwindigkeit ein Schätzwert für das Trägheitsmoment J

ermittelt werden. Dazu bildet man den Mittelwert über die geschätzte Beschleunigung

$$\hat{\alpha} = \frac{p}{\hat{J}} \bar{m}_M, \quad \bar{m}_M := \frac{1}{t_f - (t_0 + \Delta t)} \int_{t_0 + \Delta t}^{t_f} \hat{m}_M d\tau \quad (18.6)$$

und dividiert deren Steigung durch den wahren Wert α

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} = \frac{J \bar{m}_M}{\hat{J} m_M} \approx \frac{J}{\hat{J}}. \quad (18.7)$$

Wird der Wert Δt zu klein gewählt, kommt es zu Schätzfehlern, da hier das Sollmoment des Drehzahlreglers noch nicht eingeschwungen ist. Ferner kann es durch das plötzlich ansetzende Moment zu mechanischen Schwingungen kommen. Ein zu langes Zeitfenster $t_f - t_0 \gg \tau_R/2$ hingegen verfälscht das Ergebnis durch die einsetzende Verstimmung. Eine vom Trägheitsmoment J unabhängige Methode zur Bestimmung der Rotorzeitkonstante τ_R ist also weiterhin wünschenswert.

18.2. Iterative Bestimmung mittels des geschätzten Drehzahlverlaufes

Will man die Abhängigkeit von dem Trägheitsmoment J vermeiden, kann man zu einem iterativen Verfahren zur Bestimmung der Rotorzeitkonstante τ_R übergehen. Hierbei geht man von einem verstimmten Zustand $\Delta\rho \neq 0$ (z.B. direkt nach einer Drehzahlrampe) aus und kommandiert zum Zeitpunkt t_0 eine konstante Drehzahl ω_R^* . Der Drehzahlregler wird das echte Moment m_M auf den Sollwert $m_M^* = 0$ regeln, indem der echte momentenbildende Strom i_{Sq} zu null gemacht wird. Aufgrund der anfänglichen Verstimmung ist der geschätzte Wert \hat{i}_{Sq} zunächst verschieden von null:

$$\hat{i}_{Sq} = \cos(\Delta\rho) i_{Sq} + \sin(\Delta\rho) i_{Sd} \approx i_{Sd} \Delta\rho. \quad (18.8)$$

In Abhängigkeit von dem Vorzeichen des Winkelfehlers $\Delta\rho$ (i_{Sd} ist bei konstantem Fluss $\Psi_R > 0$ immer positiv) ergibt sich ein positives oder negatives geschätztes Moment

$$\hat{m}_M \approx \frac{3}{2} p \frac{L_h}{L_R} \hat{\Psi}_R i_{Sd} \Delta\rho. \quad (18.9)$$

Gemäß (4.18) wird die berechnete Drehzahl $\hat{\omega}_R$

$$\hat{\omega}_R(t) = \omega_R(t_0) + \frac{p}{\hat{J}} \int_{t_0}^t \hat{m}_M d\tau \quad (18.10)$$

für $\tau_R < \hat{\tau}_R$ ansteigen, für $\tau_R > \hat{\tau}_R$ sinken. Entspricht der Schätzwert für τ_R dem wahren Wert, bleibt die berechnete Drehzahl wie gewünscht konstant $\hat{\omega}_R(t) \equiv \omega_R^*$. In Abbildung 18.1 sind die möglichen Fälle dargestellt.

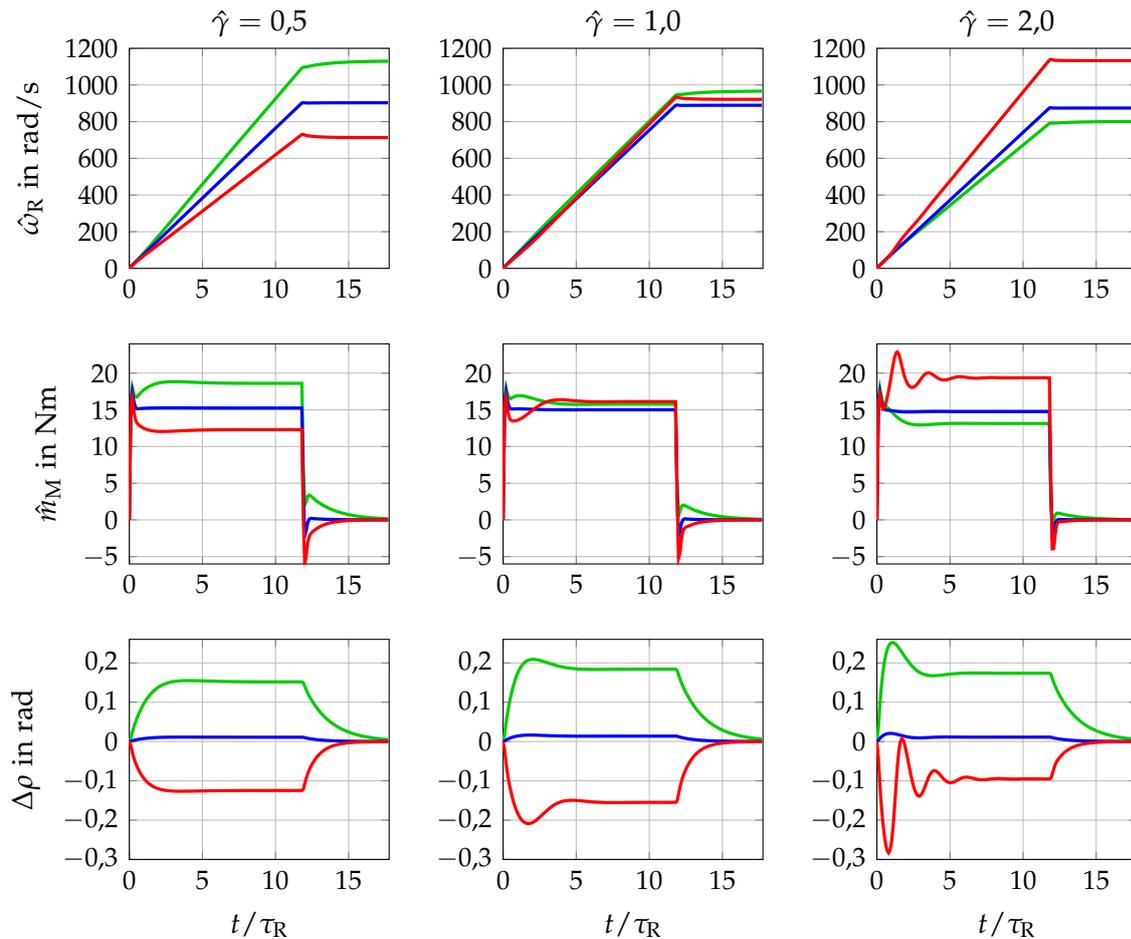


Abbildung 18.1.: Entwicklung der berechneten Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_R$, des geschätzten Drehmoments \hat{m}_M und des Winkelfehlers $\Delta\rho$ während und nach einer geregelten Drehzahlrampe. Die Farben grün, blau und rot entsprechen dabei $\tau_R/\hat{\tau}_R = 1/\sqrt{2}$, $\tau_R/\hat{\tau}_R = 1$ bzw. $\tau_R/\hat{\tau}_R = \sqrt{2}$.

Mittels eines Suchverfahrens (z.B. Intervallhalbierung) kann nun der Schätzwert $\hat{\tau}_R$ so lange angepasst werden, bis es zu keiner Drehzahländerung am

Ende einer Drehzahlrampe mehr kommt. Will man auch zeitlich veränderliche Zeitkonstanten berücksichtigen, muss das Suchverfahren bei Wiederauftreten von Drehzahländerungen geeignet reinitialisiert werden.

Zusätzlich zu der Unabhängigkeit von dem Trägheitsmoment J ist dieses Verfahren unabhängig von dem Schätzwert der Hauptinduktivität L_h , da sich diese nicht auf das Vorzeichen von $\Delta\rho$ auswirkt.

Bei viskoser und Coulombscher Reibung

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_R}{dt} = m_M - k_1\omega_R - k_2\text{sign}(\omega_R) \quad (18.11)$$

(die positiven Parameter k_1, k_2 symbolisieren hierbei die Reibungskoeffizienten) ist das Verfahren ebenfalls einsetzbar. Dazu wird als Zielgeschwindigkeit $\omega_R^* = 0$ vorgegeben, damit das benötigte Moment zur Erhaltung der Drehzahl weiterhin null beträgt. Die Notwendigkeit einer Bremsung bis zum Stillstand schränkt jedoch die Einsatzfähigkeit der Methode im Betrieb stark ein.

18.3. Iterative Bestimmung mittels Momentenmaximierung/ Stromminimierung

Bis jetzt wurde der Sonderfall $\hat{\gamma} = 0$ betrachtet, also das Verschwinden der Verstimmung bei Nullmoment. Als zweiter besonderer Fall soll hier der Betrieb bei $\hat{\gamma} = 1$ untersucht werden. Bei vorgegebener Amplitude des Statorstromraumzeigers $|i_S|$ wird genau dann das Moment im stationären Zustand maximal, wenn der flussbildende Strom i_{Sd} dem momentenbildenden Strom i_{Sq} entspricht (*maximum torque per amp*). Das ergibt sich aus dem Optimierungsproblem

$$\underset{\gamma}{\text{argmax}} m_M \propto i_{Sd}i_{Sq} \quad \text{unter} \quad i_{Sd}^2 + i_{Sq}^2 = |i_S|^2. \quad (18.12)$$

Mit $\gamma = i_{Sq}/i_{Sd}$ erhält man aus der Betragsgleichung sofort

$$i_{Sd}^2 = \frac{1}{1 + \gamma^2} |i_S|^2$$

und damit für das Moment

$$m_M \propto \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} |i_S| \quad \rightarrow \quad \text{max.}$$

Das Extremum wird für $\gamma = 1$, also $i_{sd} = i_{sq}$, erreicht.

Daraus lassen sich zwei Optimierungsaufgaben bezüglich der Rotorzeitkonstante τ_R ableiten. Grundidee dabei ist, dass bei der Forderung nach maximalem Moment bei konstanter Stromamplitude $\hat{i}_{sd} = \hat{i}_{sq}$ auf Grund der Verstimmung die tatsächlichen Ströme i_{sd} und i_{sq} einander *nicht* gleichen werden $i_{sq} \neq i_{sd}$. Das resultierende Moment wird also zwangsweise kleiner ausfallen als das maximal mögliche, wenn die Rotorzeitkonstante nicht exakt bekannt ist.

Zum einen kann eine Parameteridentifikation von τ_R hier über eine Drehzahlmaximierung erfolgen [24]. Dabei wird ein konstantes Moment $\hat{m}_M = m_M^*$ gefordert und die stationäre Drehzahl gemessen. Der Schätzwert $\hat{\tau}_R$ wird hierauf so lange verändert, bis das sich ergebende wahre Moment m_M die maximale stationäre Drehzahl bewirkt. Da immer auf stationäre mechanische Verhältnisse „gewartet“ werden muss, damit der Grenzwert der sich ergebenden Drehzahl ermittelt werden kann, erweist sich diese Methode allerdings als sehr zeitaufwändig. Ferner muss eine ausreichend hohe viskose Reibung vorhanden sein, damit die Drehzahl bei einem Betrieb mit (mehr oder weniger) konstantem Moment nicht zu groß wird.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Drehzahl mit Hilfe eines Reglers zu fixieren, wofür das geschätzte Moment m_M^* benötigt wird. Anschließend wird, bei kontinuierlich angepassten Strömen

$$\hat{i}_{sq} = \hat{i}_{sd} = \sqrt{\frac{2}{3p} \frac{L_R}{L_h^2} m_M^*} \quad (18.13)$$

durch Variation der Rotorzeitkonstante $\hat{\tau}_R$ die Länge des zur Erhaltung der Drehzahl nötigen Stromraumzeigers $|i_S|$ minimiert.

18.4. Iterative Bestimmung über Verstimmungsminimierung

Oft existiert bereits ein Regelkonzept, welches die Rotorflussamplitude über einen großen Drehzahlbereich konstant lässt $\Psi_R = \Psi_{R,0}$ und erst bei höheren Drehzahlen proportional zur Geschwindigkeit reduziert. Dabei ist der Fluss $\Psi_{R,0}$ relativ groß, das Verhältnis von i_{sq} zu i_{sd} kleiner als eins gewählt, weil sonst bei höheren geforderten Momenten erst langsam ein Fluss aufgebaut werden müsste. Das wäre bei hochdynamischen Regelungsaufgaben inakzeptabel.

Auch unter diesen Bedingungen ($\hat{\gamma} \neq 1$) kann die Rotorzeitkonstante iterativ ermittelt werden. Dabei wird die Drehzahl konstant gehalten $\omega_R = \text{konst}$, während der Rotorfluss zwischen zwei verschiedenen, in der Nähe von $\Psi_{R,0}$ gewählten Werten $\Psi_{R,1}$ und $\Psi_{R,2}$ hin- und hergeregelt wird. Bei konstantem benötigten echten Moment $m_M = \text{konst}$ stellt sich jeweils ein bestimmter Strom \hat{i}_{S_q} ein. Auch das Verhältnis $\hat{\gamma}$ und das geschätzte Moment \hat{m}_M pendeln daher zwischen zwei eingeschwungenen Zuständen $\hat{\gamma}_1$ und $\hat{\gamma}_2$ beziehungsweise $\hat{m}_{M,1}$ und $\hat{m}_{M,2}$. Dabei stimmen die geschätzten Momente für $\hat{\gamma}_1 \neq \hat{\gamma}_2$ nur dann überein, wenn $\hat{\tau}_R = \tau_R$ gilt und sie damit beide dem echten Moment m_M entsprechen! Durch iterative Anpassung der Rotorzeitkonstante wird also die Differenz $|\hat{m}_{M,1} - \hat{m}_{M,2}|$ minimiert.

Auch diese Methode ist vollständig unabhängig von allen anderen Parameterschätzwerten. Numerisch und messtechnisch sinnvoll angewandt kann sie aber nur werden, wenn die beiden Verhältnisse $\hat{\gamma}_1$ und $\hat{\gamma}_2$ möglichst verschieden voneinander sind. Im Idealfall liegt dabei ein Verhältnis unter eins, das andere darüber. Die Methode der Stromminimierung [18.3](#) erscheint daher einfacher realisierbar.

19. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Einfluss von falsch geschätzten Parameterwerten der Asynchronmaschine auf Beobachter des Rotorflusses Ψ_R erörtert. Die vielfältigen Möglichkeiten, Beobachter zu realisieren und zu dimensionieren, können jedoch nur zu Kompromisslösungen führen, welche der Parameter sich in welchen Betriebszuständen wie auf das Schätzergebnis auswirken; eine freie Wahl der Sensitivitäten ist aber genauso unmöglich wie eine für alle Betriebspunkte optimale Konfiguration.

Der vorgeschlagene Störgrößenbeobachter kann den Einfluss der Rotorzeitkonstante und der Hauptinduktivität auf das Ergebnis eliminieren, was sonst nur mittels des grenzstabilen Spannungsmodells möglich war. Mittels des derart gebildeten Schätzwertes können die umgangenen Parameter wiederum umgehend berechnet werden. Die Beschränkung der Gültigkeit auf stationäre Betriebspunkte führt jedoch zu Problemen bei der Realisierung, da geeignete Grenzwerte für stationäre Zustände eingestellt und deren Einhaltung robust überprüft werden muss.

Sobald ein derartiger Aufwand getrieben wird, kann allerdings gleich eine von der Rotorflussschätzung unabhängige Parameteridentifikation durchgeführt werden, deren Ergebnis den Beobachtern wiederum zugeführt werden kann. Gerade im stationären Zustand ergeben sich sehr einfache Zusammenhänge. Der in der Fachliteratur übliche Weg über ein Modellreferenzsystem verschleiert die klare Sicht auf die Dinge. Statt mit undurchsichtigen Überlegungen zur Parametersensitivität bestimmter Modellgrößen zu operieren, wurde der direkte Weg der Berechnung der Parameter über die Wirk- und Blindleistungen beschrieben. Diesen plagen keine Stabilitätsprobleme, die Filterung und Gewichtung der Rechenergebnisse kann direkt vorgegeben werden.

Ist man stattdessen an einer gleichzeitigen Identifikation aller Parameter interessiert und möchte sich nicht auf den stationären Zustand beschränken, kann die Methode der kleinsten Fehlerquadrate oder das KALMAN-Filter eingesetzt werden. Diese klassischen Methoden wurden um zwei Erweiterungen ergänzt, welche eine Anwendung während des praktischen Betriebes

ermöglichen. Zum einen würden die Filter auf langfristige mangelnde Anregung mit einer überhöhten Rauschempfindlichkeit, hervorgerufen durch exponentiell beziehungsweise linear anwachsende Eigenwerte der Kovarianzmatrix, reagieren. Hier kann die Methode des richtungsabhängigen Vergessens Abhilfe schaffen.

Zum anderen stehen den fünf identifizierten Parametern nur vier elektrische Parameter gegenüber. Die direkte Folge ist eine nichtlineare Beziehung zwischen den identifizierten Parametern, welche in Form von Nebenbedingungen in das Optimierungsproblem eingebaut werden können. Im Fall des KALMAN-Filters kann auch die Entwicklung der Kovarianzmatrix korrekt behandelt werden.

Die schwierige Dimensionierung des KALMAN-Filters sowie der erhöhte Rechenaufwand sprechen jedoch gegen den Einsatz dieser Methode in echten Anlagen. Ganz prinzipiell ist die gleichzeitige Identifikation aller Parameter, welche abgesehen von den Messgrößen Statorstrom, -spannung und Rotordrehzahl auch deren zeitliche Ableitungen benötigt, kritisch zu hinterfragen. Je nach Betriebszustand ist die Auswirkung mancher Parameter auf die Messwerte nur vernachlässigbar klein; bereits geringfügige Fehler bei der Synchronisation der gemessenen Signale führen zudem zu stark veränderten Ergebnissen. Die direkte Berechnungsmethode während der stationären Zustände hingegen bietet bessere Kontrolle, erlaubt eine weniger kritische Filterung der Signale und erfordert wesentlich weniger Rechenaufwand.

Appendix

Anhang A.

Berücksichtigung von quadratischen Nebenbedingungen

Gegeben sei ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\text{A.1})$$

mit der $N \times n$ -Matrix \mathbf{A} vollen Spaltenranges sowie den $n \times 1$ -Spaltenvektoren \mathbf{x} und \mathbf{b} . Der unbekannte Vektor \mathbf{x} sei im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate gesucht $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min$, wobei er gleichzeitig die allgemeine quadratische Nebenbedingung

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\mathbf{x} + e = 0 \quad (\text{A.2})$$

erfüllen soll. Dabei ist die Matrix \mathbf{C} ohne Beschränkung der Allgemeinheit symmetrisch $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ und besitze den Rang $\text{rank } \mathbf{C} = r, r \leq n$.

Diese Aufgabe kann als unbeschränktes Optimierungsproblem mit dem LAGRANGE-Multiplikator λ und der Kostenfunktion J angeschrieben werden:

$$J(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + \lambda \left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\mathbf{x} + e \right) \rightarrow \min \quad (\text{A.3})$$

Das gesuchte Optimum \mathbf{x}^*, λ^* muss die Gleichungen

$$\left. \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda^*\mathbf{C} \right) \mathbf{x}^* - \mathbf{A}^T\mathbf{b} + \lambda^*\mathbf{d} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \lambda} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}^T\mathbf{x}^* + e \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.4b})$$

erfüllen.

Multipliziert man (A.4a) von links mit $\mathbf{P} := (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ und löst nach dem Vektor \mathbf{x}^* auf, erhält man die beschränkte Lösung in Abhängigkeit des optimalen LAGRANGE-Multiplikators λ^*

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P} \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \lambda^* \mathbf{P} \mathbf{d}). \quad (\text{A.5})$$

Damit die darin vorkommende inverse Matrix gebildet werden kann, darf $-1/\lambda^*$ kein Eigenwert von $\mathbf{P} \mathbf{C}$ sein.

Diese Lösung in Gleichung (A.4b) eingesetzt ergibt eine Gleichung für λ^* , welche nicht direkt nach λ^* auflösbar ist.

Es fällt auf, dass die *beschränkte* Lösung \mathbf{x}^* aus einer affinen Transformation der *unbeschränkten* Lösung

$$\hat{\mathbf{x}} := (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{P} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.6})$$

hervorgeht

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P} \mathbf{C})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P} \mathbf{d}). \quad (\text{A.7})$$

Sie entspricht somit der Lösung des Optimierungsproblems, einen im Sinne der Matrix \mathbf{P} möglichst „ähnlichen“ Vektor \mathbf{x} zu der unbeschränkten Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ zu finden, welcher die quadratische Nebenbedingung (A.2) erfüllt:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \lambda \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + e \right) \rightarrow \min \quad (\text{A.8})$$

Es ist also egal, ob zuerst das unbeschränkte Optimierungsproblem gelöst und dann die Beschränkung berücksichtigt wird, oder ob gleich die Beschränkung in das Optimierungsproblem integriert wird! Liegen jedoch nicht alle Zeilen von \mathbf{A} gleichzeitig vor und soll in rekursiver Art und Weise ein zeitlich veränderlicher Vektor \mathbf{x}_k geschätzt werden, wie dies bei rekursiven Methoden wie EFRLS (siehe Abschnitt 16.2.3) oder dem Einsatz des KALMAN-Filters (Abschnitt 16.2.7) geschieht, ist man zu jedem Iterationsschritt an einer gültigen Lösung \mathbf{x}_k^* interessiert. Dort ist $\hat{\mathbf{x}}_k$ der in Schritt k auf Grund von Prädiktion und Korrektur, aber nicht anhand der Nebenbedingung ermittelte Schätzwert für den Zustandsvektor \mathbf{x} sowie \mathbf{P}_k die zugehörige Kovarianzmatrix des Schätzfehlers. Der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_k$ erfüllt im Allgemeinen die Nebenbedingung (A.2) nicht und muss mittels (A.7) transformiert werden $\hat{\mathbf{x}}_k \rightarrow \mathbf{x}_k^*$.

Es ist dabei darauf zu achten, dass auch die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers anzupassen ist $\mathbf{P}_k \rightarrow \mathbf{P}_k^*$! Dieser Schritt wurde in bisherigen Arbeiten zu dem Thema (siehe z.B. [9]) leider ignoriert. Da die Projektion $\mathbf{x}^*(\hat{\mathbf{x}})$ jedoch eine nichtlineare Funktion darstellt, wird in Abschnitt A.3 im Detail auf dieses Problem eingegangen.

Betrachtet man die Gleichungen (A.7) und (A.4b) genauer, so erkennt man die Schwierigkeit, den LAGRANGE-Multiplikator λ^* zu ermitteln. Diese liegt darin, dass der Multiplikator als Faktor in der Inversen einer Summe von Matrizen auftritt und somit nicht explizit nach ihm aufgelöst werden kann. Mögliche Vorschläge, dieses Problem weitgehend zu vereinfachen, finden sich in Abschnitt A.2. Die Lösungen ergeben sich entweder aus einer Approximation oder einer algebraischen Umwandlung, verbunden mit der Nullstellensuche einer polynomialen Gleichung.

Es wird sich herausstellen, dass der lineare Term $\mathbf{d}^T \mathbf{x}$, so er existiert $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, die approximative Berechnung von λ^* erschwert, da er in der resultierenden Gleichung die Polynomordnung erhöht. Deshalb wird im folgenden Abschnitt A.1 kurz auf die Möglichkeit seiner Eliminierung eingegangen.

A.1. Vereinfachung der Nebenbedingung

In manchen Fällen ist es sinnvoll, die quadratische Nebenbedingung (A.2) zu vereinfachen, indem der lineare Faktor \mathbf{d} eliminiert wird. Dies ist jedoch nicht immer möglich, wie im Folgenden dargestellt wird.

Die Grundidee besteht darin, den gesuchten Vektor \mathbf{x} in eine Konstante \mathbf{x}_0 und eine Unbekannte $\tilde{\mathbf{x}}$ aufzuteilen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.9})$$

Es ergibt sich aus (A.2) eine neue Nebenbedingung für $\tilde{\mathbf{x}}$ mit neuen Koeffizienten

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{d}^T + \mathbf{x}_0^T \mathbf{C} \right) \tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_0 + e = 0. \quad (\text{A.10})$$

Soll der lineare Term eliminiert werden, muss \mathbf{x}_0 so gewählt werden, dass

$$\mathbf{C} \mathbf{x}_0 + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

erfüllt ist. Dies kann aber nur geschehen, wenn \mathbf{d} im Bild der Matrix \mathbf{C} liegt, also insbesondere dann, wenn \mathbf{C} regulär ist

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d}. \quad (\text{A.12})$$

Ist \mathbf{C} nicht regulär, $\text{rank } \mathbf{C} = r < n$, kann man sich der SVD-Zerlegung bedienen

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad \begin{array}{l} \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_r \ \dots \ \mathbf{u}_n] \\ \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_r \ \dots \ \mathbf{v}_n] \end{array}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{E}. \quad (\text{A.14})$$

Die rechteckigen Matrizen \mathbf{U}' und \mathbf{V}' , welche aus den jeweils ersten r Spalten von \mathbf{U} und \mathbf{V} gebildet werden, stellen die Basis des Bildes von \mathbf{C} dar; die restlichen Spalten bilden die Basis der Kerns

$$\begin{array}{l} \mathbf{U}' := [\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_r] \\ \mathbf{V}' := [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_r] \end{array}, \quad \mathbf{\Sigma}' := \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Eingesetzt in (A.11) und von links mit \mathbf{U}'^T multipliziert erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}' & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{V}')^T \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{U}')^T \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (\text{A.16})$$

Die letzten $n - r$ Zeilen ergeben links sicher null. Damit eine Lösung existiert, muss \mathbf{d} im Bild von \mathbf{C} liegen, die Gleichung kann auf diesen Unterraum beschränkt werden und man erhält als eine mögliche Lösung

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{V}' (\mathbf{\Sigma}')^{-1} (\mathbf{U}')^T \mathbf{d}. \quad (\text{A.17})$$

Das Produkt $\mathbf{V}' (\mathbf{\Sigma}')^{-1} (\mathbf{U}')^T$ wird auch Pseudoinverse von \mathbf{C} genannt. Liegt \mathbf{d} nicht im Bild von \mathbf{C} , kann *keine* Vereinfachung vorgenommen werden.

Schließlich erhält man aus (A.7) mit $\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{x}}^* + \mathbf{x}_0$ als Lösung

$$\tilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{C})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0), \quad (\text{A.18a})$$

$$\lambda^* = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_0 + e = 0, \quad (\text{A.18b})$$

$$\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{x}}^* + \mathbf{x}_0. \quad (\text{A.18c})$$

A.1.1. Beispiel Punkt auf Kreis

Das folgende Beispiel ist [78] nachempfunden und stellt quasi das Standardbeispiel für eine Optimierung mit einer quadratischen Nebenbedingung dar.

Der Vektor $\mathbf{x} := [x \ y]^T$ beschreibe die Koordinaten eines Punktes, welcher sich auf einer Kreisbahn mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}_m := [x_m \ y_m]^T$ und dem Radius r bewegt. Es gilt somit zu jeder Zeit

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}_m^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_m - r^2) = 0. \quad (\text{A.19})$$

In der Notation von (A.2) angeschrieben erhält man

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d} = -\mathbf{x}_m, \quad e = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_m - r^2). \quad (\text{A.20})$$

Da die Matrix \mathbf{C} vollen Rang besitzt, kann die Vereinfachung aus Abschnitt A.1 durchgeführt und der lineare Term eliminiert werden:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{x}_m, \quad (\text{A.21})$$

womit die neue Nebenbedingung

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} r^2 = 0 \quad (\text{A.22})$$

resultiert. Dies entspricht einer Koordinatenverschiebung, sodass der Kreismittelpunkt im Ursprung zu liegen kommt; die eigentliche Lösung \mathbf{x} erhält man nach der entsprechenden Rücktransformation.

Es soll der einfache Fall $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ untersucht werden, d.h. die Kovarianzen der Schätzfehler in x -Richtung und y -Richtung sind gleich groß. Das Ergebnis der *least squares*-Schätzung, $\hat{\mathbf{x}}$, liege vor, der nächstgelegene Punkt auf dem Kreis muss die Gleichungen (A.18) erfüllen

$$\tilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{E})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_m), \quad (\text{A.23a})$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^*)^T \tilde{\mathbf{x}}^* - \frac{1}{2} r^2 = 0, \quad (\text{A.23b})$$

$$\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{x}}^* + \mathbf{x}_m, \quad (\text{A.23c})$$

womit sich nach einigen Umformungen die logisch erwartete Lösung

$$\mathbf{x}^* = \frac{\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_m}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_m\|} r + \mathbf{x}_m, \quad \lambda^* = \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_m\|}{r} - 1 \quad (\text{A.24})$$

ergibt.

A.2. Auflösen der Gleichungen nach λ^*

Setzt man die Lösung für \mathbf{x}^* in die Nebenbedingung (A.4b) ein, erhält man eine Gleichung für λ^* , welche aber nicht direkt nach λ^* auflösbar ist

$$\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d})^T (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{C}\mathbf{P})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}) + \mathbf{d}^T (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}) + e = 0. \quad (\text{A.25})$$

Hauptproblem ist die Inverse der $n \times n$ -Matrix $\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}$. Würde man diese analytisch als Produkt von Adjunkte und inverser Determinante anschreiben, erhielte man Polynome in λ^* maximal n -ten Grades im Nenner sowie maximal $n - 1$ -ten Grades im Zähler. Auf Grund des quadratischen Terms sowie der weiteren Faktoren mit $\lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}$ würde sich – nach einer Überführung auf den gemeinsamen Nenner – ein Polynom maximal $2n + 2$ -ten Grades in λ^* ergeben. Die Eliminierung des linearen Terms \mathbf{d} würde für eine Gradreduktion von zwei sorgen.

Im Folgenden werden drei Methoden vorgestellt, die inverse Matrix $(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1}$ umzuformen, welche zu einfacheren analytischen Formen führen. Dies ist einerseits die simple Approximation mit Hilfe einer Entwicklung in eine TAYLOR-Reihe in Abschnitt A.2.3, andererseits zwei auf der linearen Algebra basierende Methoden. Dabei wird entweder die Kovarianzmatrix \mathbf{P} CHOLESKY-zerlegt (siehe Abschnitt A.2.1) oder aber die Dimension der zu invertierenden Matrix reduziert, indem die Matrix \mathbf{C} mit Hilfe der Singulärwertzerlegung aufgeteilt wird (siehe Abschnitt A.2.2).

A.2.1. CHOLESKY-Zerlegung der Kovarianzmatrix

Ziel ist es, schon Gleichung (A.7) so umzuformen, dass der LAGRANGE-Multiplikator λ^* möglichst effizient berechnet werden kann. Dabei wird der Übersichtlichkeit halber der lineare Term als null angenommen $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Dies geschieht dadurch, dass die zu invertierende Matrix, in der λ^* vorkommt, in *Diagonalform* umgewandelt wird. Dazu geht man ähnlich wie in [78] vor: Die Kovarianzmatrix \mathbf{P} ist positiv definit, es existiert also eine CHOLESKY-Zerlegung der Form $\mathbf{P} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$. Dabei ist \mathbf{G} eine rechte obere Dreiecksmatrix, die ebenso

wie \mathbf{P} positiv definit ist. Multipliziert man den Term $\lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}$ von links mit \mathbf{G}^{-T} und von rechts mit \mathbf{G}^T , ergibt sich

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}^T \left(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T \right)^{-1} \mathbf{G}^{-T} \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.26})$$

Im Gegensatz zum Produkt $\mathbf{P}\mathbf{C}$ in (A.7) ist die Matrix $\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T$ offensichtlich symmetrisch. Das bedeutet, dass ihre Eigenvektoren orthogonal aufeinander stehen und eine Zerlegung der Form

$$\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad (\text{A.27})$$

existiert, wobei $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(l_1, \dots, l_r, 0, \dots, 0)$ eine Diagonalmatrix darstellt, deren letzte $n - r$ Einträge o.B.d.A. null lauten. Eine Multiplikation mit \mathbf{U}^T von links und mit \mathbf{U} von rechts bewirkt also die gewünschte Umformung in Diagonalform

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}^T \mathbf{U} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{G}^{-T} \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.28})$$

Diesen Ausdruck setzt man nun in die quadratische Nebenbedingung (A.4b) ein und erhält

$$\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T \mathbf{U} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{G}^{-T} \hat{\mathbf{x}} + e = 0.$$

Das zentrale Produkt $\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}^T$ ist bereits bekannt und wird gleich wie zuvor faktorisiert. Die Gleichung vereinfacht sich dadurch zu

$$\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{G}^{-T} \hat{\mathbf{x}} + e = 0.$$

Definiert man nun den Vektor

$$\boldsymbol{\zeta} := \mathbf{U}^T \mathbf{G}^{-T} \hat{\mathbf{x}} =: [\zeta_1 \quad \dots \quad \zeta_n]^T, \quad (\text{A.29})$$

so erhält man für λ^* die folgende skalare Gleichung

$$\sum_{i=1}^r \frac{l_i \zeta_i^2}{(1 + \lambda^* l_i)^2} + 2e = 0. \quad (\text{A.30})$$

Bringt man weiters alle Terme auf gemeinsamen Nenner, ergibt sich ein Polynom $2r$ -ten Grades in λ^*

$$\sum_{i=1}^r \left[l_i \zeta_i^2 \prod_{j=1, i \neq j}^r (1 + \lambda^* l_j)^2 \right] + 2e \prod_{j=1}^r (1 + \lambda^* l_j)^2 = 0 \quad (\text{A.31})$$

welches numerisch gelöst werden muss.

Es ergeben sich bei dieser Vorgehensweise somit drei praktische Probleme: erstens die CHOLESKY-Zerlegung von \mathbf{P} , zweitens die Eigenwertzerlegung von \mathbf{GCG}^T , und drittens die numerische Lösung der Polynomgleichung sechsten Grades. Alle drei Schritte sind bei einer iterativen Lösungsweise in jedem Optimierungsschritt durchzuführen und höchst rechenintensiv, was gegen eine praktische Anwendung für größere n beziehungsweise r spricht.

A.2.2. Dimensionsreduktion der zu invertierenden Matrix

Wie bereits in A.2.1 angedeutet wurde, kann das Problem der Ermittlung der Inversen von $\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{PC}$ in der Dimension reduziert werden. Die Matrix \mathbf{C} ist notwendigerweise von der Dimension des zu schätzenden Vektors \mathbf{x} , d.h. $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ihr Rang kann jedoch allgemein kleiner ausfallen, $\text{rank } \mathbf{C} = r \leq n$. Dann ist auch das Produkt mit der regulären Kovarianzmatrix \mathbf{P} vom Rang her gleich r .

Für den Fall $r < n$ erweist es sich bei der Berechnung von $(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{PC})^{-1}$ als günstig, das allgemeine Matrixinversionslemma

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \left(\mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A} \quad (\text{A.32})$$

einzusetzen. Dabei entspricht die reguläre Matrix \mathbf{A} der $n \times n$ -Einheitsmatrix \mathbf{E} und das Produkt $\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}$ dem Produkt $\lambda^* \mathbf{PC}$, wobei \mathbf{B} eine $n \times r$ -, $\mathbf{\Gamma}$ eine $r \times r$ - und \mathbf{D} eine $r \times n$ -Matrix darstellt. Es gilt also, \mathbf{PC} entsprechend zu faktorisieren. Dies kann zum Beispiel über die SVD-Zerlegung der Matrix \mathbf{C} passieren

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}, \quad (\text{A.33})$$

welche den Vorteil hat, dass sie nur einmal zu Beginn aller Berechnungen durchgeführt werden muss. Die Matrix $\mathbf{\Sigma}$ enthält dabei die Singulärwerte von \mathbf{C} in ihrer Diagonale, wovon sich nur die ersten r von null unterscheiden

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0). \quad (\text{A.34})$$

Nimmt man nur die r ersten Spalten von \mathbf{U} und \mathbf{V} sowie die nordwestliche $r \times r$ -Untermatrix von $\mathbf{\Sigma}$, so verändert sich an dem Produkt nichts:

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}'\mathbf{\Sigma}'(\mathbf{V}')^T, \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n], \quad \mathbf{U}' = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r], \dots \quad (\text{A.35})$$

Dann gilt die Entsprechung

$$\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{D} \hat{=} \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{U}' \mathbf{\Sigma}' (\mathbf{V}')^T, \quad \text{d.h. } \mathbf{B} := \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{U}', \quad \mathbf{\Gamma} := \mathbf{\Sigma}', \quad \mathbf{D} := (\mathbf{V}')^T. \quad (\text{A.36})$$

Für die Inverse ergibt sich

$$(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{E} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{U}' \left((\mathbf{\Sigma}')^{-1} + \lambda^* (\mathbf{V}')^T \mathbf{P}\mathbf{U}' \right)^{-1} (\mathbf{V}')^T, \quad (\text{A.37})$$

wobei nur noch die Inverse einer $r \times r$ -Matrix gebildet werden muss! Diese enthält rational gebrochene Funktionen in λ^* mit maximalem Nennergrad r .

Setzt man weiters die Lösung \mathbf{x}^* in die Nebenbedingung (A.4b) ein, ergibt sich wieder ein Polynom vom Grad $2r$ in λ^* , welches numerisch gelöst werden muss. Das Problem lässt sich allerdings vereinfachen, wenn man davon ausgeht, dass der unbeschränkte Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ nicht zu weit vom beschränkten entfernt liegt, also $\lambda^* \ll 1$ gilt. Dann können die höheren Terme von λ^* vernachlässigt werden. Diese Annahme kann man aber schon vorher treffen, woraus sich der folgende Ansatz ergibt.

A.2.3. Approximative Lösung

Weder die in Abschnitt A.2.1 noch die in Abschnitt A.2.2 beschriebene Methode ist für größere n beziehungsweise r mit wenig Rechenaufwand durchführbar. Solange der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ die Nebenbedingung (A.2) nicht „stark“ verletzt, werden die Lösungen für λ^* jedoch nahe bei null liegen (für $\mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{x}}$ gilt $\lambda^* = 0$)!

Eine in [53] vorgeschlagene Vereinfachung der Gleichung (A.7) besteht deshalb darin, die Berechnung der Inversen der Matrix $(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})$ in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln und nur den linearen Term zu berücksichtigen. Es gilt für eine allgemeine Matrixfunktion $\mathbf{F}(\lambda)$

$$\mathbf{F}(\lambda) := \mathbf{F}(0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} \lambda^2 + \dots \quad (\text{A.38})$$

sowie für eine reguläre Matrixfunktion $\mathbf{F}(\lambda)$

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \frac{d\mathbf{F}}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{A.39})$$

Somit ergibt sich im vorliegenden Fall $\mathbf{F}(\lambda) := (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{A})^{-1}$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{E} - \left[(\mathbf{E} + \lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{A})^{-1} \right] \Big|_{\lambda=0} \lambda + \dots \approx \mathbf{E} - \lambda \mathbf{A}. \quad (\text{A.40})$$

Setzt man diese Approximation in (A.7) ein, erhält man als Näherung

$$\mathbf{x}^* \approx (\mathbf{E} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}) (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}) \quad (\text{A.41})$$

und damit für die quadratische Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d})^T (\mathbf{E} - \lambda^* \mathbf{C}\mathbf{P}) \mathbf{C} (\mathbf{E} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}) (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}) + \\ + \mathbf{d}^T (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}) + e = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Dies entspricht für $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ einer quadratischen Gleichung in λ^* , wobei laut [53] die betragsmäßig kleinere Lösung gewählt werden sollte, da eine TAYLORreihenentwicklung verwendet wurde:

$$\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} (\lambda^*)^2 - 2 \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} \lambda^* + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} + e = 0. \quad (\text{A.43})$$

Für $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ hingegen ergibt sich eine kubische Gleichung in λ^* , welche numerisch gelöst werden müsste.

Wieder kann man sich mit der Annahme $\lambda^* \ll \text{helfen}$, denn dann gilt $(\lambda^*)^n \approx 0$, $n > 1$ und es verbleiben ausschließlich lineare Gleichungen.

A.3. Projektion der Kovarianzmatrix

Da es sich bei der Transformation (A.7) um eine nichtlineare Funktionen in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{x}}$ handelt, muss diese entweder linearisiert und die Kovarianz wie bei einem erweiterten KALMAN-Filter angepasst werden

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{x}^* = (\mathbf{E} + \lambda^*(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \lambda^*(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P}\mathbf{d}), \quad (\text{A.44a})$$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \quad (\text{A.44b})$$

oder man bedient sich numerischer Methoden wie der *Unscented Transformation*.

A.3.1. Linearisierung der Transformation

Die Linearisierung ist in der Durchführung einfach, jedoch weniger exakt als zum Beispiel die *Unscented Transformation*.

Der Einfachheit halber wird die Transformation (A.7) umgeschrieben, so dass keine inversen Matrizen mehr vorkommen

$$(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}) \mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{x}} - \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{d}. \quad (\text{A.45})$$

Allgemein gilt auf Grund der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A} [\lambda^*(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda^*} \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}. \quad (\text{A.46})$$

Leitet man Gleichung (A.45) mittels dieser Regel nach $\hat{\mathbf{x}}$ ab, erhält man

$$(\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C}) \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{P} (\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{E}. \quad (\text{A.47})$$

Als Unbekannte treten die gesuchte JACOBI-Matrix $\partial \mathbf{x}^* / \partial \hat{\mathbf{x}}$ sowie der Spaltenvektor $\partial \lambda^* / \partial \hat{\mathbf{x}}$ auf. Für eine weitere Gleichung leitet man die Nebenbedingung (A.4b) ebenfalls nach $\hat{\mathbf{x}}$ ab und erhält

$$(\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d})^T \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}^T. \quad (\text{A.48})$$

Zusammengefasst erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus welchem die gesuchten Größen bei Kenntnis der optimalen Werte \mathbf{x}^* und λ^* ermittelt werden können

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C} & \mathbf{P} (\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) \\ (\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Lösung \mathbf{x}^* aus (A.7) direkt in die Nebenbedingung einzusetzen, nach $\hat{\mathbf{x}}$ abzuleiten und den Term $\partial \lambda^* / \partial \hat{\mathbf{x}}$ zu extrahieren. Dieser lautet

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{(\mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d})^T \mathbf{A}}{\frac{1}{2} (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{C} (\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}) \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}^T (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}^T \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{d}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} := (\mathbf{E} + \lambda^* \mathbf{P}\mathbf{C})^{-1} \quad (\text{A.50})$$

und kann in Gleichung (A.47) zur Ermittlung der JACOBI-Matrix eingesetzt werden.

A.3.2. Die Unscented Transformation

Die *Unscented Transformation* (UT) oder „geruchslose“ Transformation wurde als praktische Methode entwickelt, um Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche nichtlinearen Funktionen unterworfen wurden, zumindest über ihre Momente approximativ beschreiben zu können. Beim Einsatz in KALMAN-Filtern für nichtlineare Systeme wird sie gerne verwendet, um den Mittelwert und die Varianz der den Zustand beschreibenden, Gaußsch angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung in den einzelnen Prädiktions- und Korrektionschritten abschätzen zu können. Sie liefert dabei meist bessere Ergebnisse als die einfache Linearisierung [30, 75].

Dabei werden m repräsentative Punkte der Verteilung, sogenannte Sigma-Punkte $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ betrachtet. Deren Mittelwert und Kovarianz entsprechen dem Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}$ und der Kovarianz \mathbf{P} der ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\bar{\sigma} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i = \hat{\mathbf{x}}, \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_i - \bar{\sigma})^T (\sigma_i - \bar{\sigma}) = \mathbf{P}. \quad (\text{A.51})$$

Die Sigma-Punkte werden der nichtlinearen Funktion unterworfen und aus den Ergebnissen σ_i^* wieder der Mittelwert $\bar{\sigma}^*$ und die Kovarianzmatrix \mathbf{P}^* berechnet. Diese Werte entsprechen dem tatsächlichen Mittelwert und der tatsächlichen Kovarianz bis zur dritten Ordnung der TAYLORreihenentwicklung von \mathbf{f} [75]!

Typischerweise ermittelt man die Sigma-Punkte über die effiziente und numerisch stabile CHOLESKY-Zerlegung der ursprünglichen $n \times n$ - Kovarianzmatrix

$$\sqrt{n\mathbf{P}} = [\mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \quad (\text{A.52})$$

und der Addition beziehungsweise Subtraktion der Spalten \mathbf{p}_i vom Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_i, & i &= 1, \dots, n \\ \sigma_{i+n} &= \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_i, & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Nach der Transformation $\sigma_i^* = \mathbf{f}(\sigma_i)$ berechnet sich die Kovarianzmatrix empirisch zu

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\sigma_i^* - \mathbf{x}^*)^T (\sigma_i^* - \mathbf{x}^*), \quad (\text{A.54})$$

wobei \mathbf{x}^* der Projektion des Mittelwertes $\bar{\sigma} = \hat{\mathbf{x}}$ entspricht.

Die Vorteile dieser numerischen Methode liegen in einer höheren Genauigkeit als bei der Linearisierung, sowie darin, dass keine JACOBI- oder HESSE-Matrix ermittelt und ausgewertet werden muss. Als Nachteil ist der massive Rechenaufwand anzuführen, der durch die CHOLESKY-Zerlegung einerseits, vor allem aber – konkret in diesem Fall – durch die vervielfältigt nötige Berechnung von λ^* für jeden Sigma-Punkt andererseits entsteht.

A.3.3. Beispiel Punkt auf Kreis

Das Beispiel aus Abschnitt A.1.1 soll dazu dienen, auf die Gefahr insbesondere bei der Linearisierung hinzuweisen. Der Einfachheit halber wird der Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich der Punkt \mathbf{x}^* befinden soll, in den Ursprung gelegt $\mathbf{x}_m := [0 \ 0]^T$, d.h. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Mit $\mathbf{P} = \mathbf{C} = \mathbf{E}$ ergibt sich die Transformation (A.45) zu

$$(1 + \lambda^*) \mathbf{x}^* = \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.55})$$

Die Ableitung nach $\hat{\mathbf{x}}$ ergibt gemäß (A.47)

$$(1 + \lambda^*) \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{x}^* \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{E}, \quad (\text{A.56})$$

die Ableitung des LAGRANGE-Multiplikators nach (A.50) und einigen Vereinfachungen

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{(\mathbf{x}^*)^T}{(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x}^*}. \quad (\text{A.57})$$

Damit lautet die gesuchte JACOBI-Matrix in Abhängigkeit der Lösungen \mathbf{x}^* und λ^*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{1 + \lambda^*} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T}{(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x}^*} \right). \quad (\text{A.58})$$

Dies entspricht genau dem Ergebnis, das man direkt aus der Lösung erhalten hätte: Die Transformation $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ ergab sich in A.1.1 zu einer Normierung des Vektors $\hat{\mathbf{x}}$ mit darauffolgender Skalierung

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\sqrt{\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}}} r, \quad \lambda^* = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}\|}{r} - 1 \quad (\text{A.59})$$

Deren JACOBI-Matrix entspricht genau obigem Ergebnis, in welches man die Lösung für λ^* einsetzt

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{r}{\|\hat{\mathbf{x}}\|} \left(\mathbf{E} - \frac{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T}{\hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{x}}} \right) = \frac{r}{\|\hat{\mathbf{x}}\|} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T}{(\mathbf{x})^T \mathbf{x}^*} \right). \quad (\text{A.60})$$

Im Gegensatz zur *Unscented Transformation* gibt es hier ein Problem, wenn der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}} := [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$ direkt auf einer der Achsen zu liegen kommt, $\hat{x}_1 = 0$ oder $\hat{x}_2 = 0$. Dann wird die JACOBI-Matrix singulär und Aufgrund der Vorschrift (A.44b) auch die Kovarianzmatrix \mathbf{P}^* !

Auch die *Unscented Transformation* ist nicht vor diesem Unheil gefeit. Als einfaches Beispiel möge die Projektion auf eine der Achsen dienen

$$x_1 x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad e = 0. \quad (\text{A.61})$$

Je nach Wahl des Punktes $\hat{\mathbf{x}}$ und der Kovarianzmatrix \mathbf{P} kann es vorkommen, dass sämtliche der transformierten Sigma-Punkte auf einer einzigen Achse zu liegen kommen, womit auch die empirisch berechnete Kovarianzmatrix \mathbf{P}^* singulär würde. Es ist also in jedem Fall sinnvoll, eine Überprüfung der positiven Definitheit von \mathbf{P}^* vorzunehmen oder zumindest provisorisch einen Regularisierungsterm $\epsilon \mathbf{E}$, $\epsilon > 0$ und hinreichend groß, hinzuzuaddieren.

Anhang B.

Prüfstand

Für die praktische Umsetzung und Validierung der untersuchten Beobachter- und Parameteridentifikationskonzepte kam ein bereits bestehender, von der Firma Kristl, Seibt & Co GmbH zur Verfügung gestellter Prüfstand zum Einsatz¹.

Zunächst soll in Abschnitt B.1, basierend auf den Ausführungen in [65], der Aufbau des Prüfstandes sowie die darin verbauten Komponenten beschrieben werden.

Die Parameter der Asynchronmaschinen lassen sich einerseits den Datenblättern entnehmen, andererseits wurden sie basierend auf Standardverfahren – wie zum Beispiel in [64] beschrieben – bereits von anderen Personen ermittelt. Sie sind in Abschnitt B.2 angeführt.

Schließlich ist bei der Verwendung der Messsignale zur Parameter- und Zustandsschätzung Vorsicht geboten, da diese nicht den tatsächlich zum gleichen Zeitpunkt vorliegenden Signalwerten entsprechen. Die Auswirkung dieses Umstandes auf die Stromregelung wurde bereits eingehend in [15] untersucht; in Abschnitt B.3 soll deshalb nur kurz darauf eingegangen werden.

B.1. Aufbau

Der Prüfstand besteht aus zwei koaxial fixierten, durch eine flexible Kardanwelle miteinander gekoppelten Asynchronmaschinen des Typs Lenze MCA14L16. Deren Nenndaten sind in Tabelle B.1 angeführt.

¹der sogenannte „Kleine Hallenprüfstand“

Name	Wert	Einheit
Nennleistung	2,1	kW
Nenndrehzahl	1635	min ⁻¹
Nennmoment	12	Nm
Nennspannung	390	V
Nennstrom	4,8	A
Polpaarzahl	2	

Tabelle B.1.: Nenndaten der Asynchronmaschine vom Typ Lenze MCA14L16

Der mechanische Aufbau ist in Abb. B.1 als Foto und schematisch dargestellt. Dabei wird die linke Asynchronmaschine mit ASM2, die rechte mit ASM1 bezeichnet. Die berührungslosen Drehmomentsensoren von HBM, Typ T22/50NM, können maximal mit 50 Nm belastet werden, einem Wert weit jenseits des Nennmoments der Maschinen.

Die Inkrementalgeber von Heidenhain mit der Typenbezeichnung ECN 113 besitzen eine Auflösung von 2048 Strich pro Umdrehung bei vierfacher Auswertung. Alternativ können sie als sin-cos-Absolutwertgeber mit 4096-facher Auswertung betrieben werden. Sie dienen der Untersuchung des Schwingverhaltens des Aufbaus; die Motoren selbst haben rückseitig an den Motorenwellen eigene sin-cos-Drehgeber vom Typ ECN 1313 verbaut, welche für die richtige Transformation in z.B. das rotorfeste Koordinatensystem herangezogen werden.

Die Kupplung von GKN, Typenbezeichnung 228.30 besitzt ein Trägheitsmoment von $J = 0,0354 \text{ kg/m}^2$.

Die Asynchronmaschinen werden über einen Pulswechselrichter (PWR) mit Strom versorgt. Bei diesem handelt es sich um eine speziell angefertigte Lösung bestehend aus einem Zwischenstromkreis (ZSK) mit 600 V und Hochleistungs-IGBTs², deren Steuersignale von zwei FPGA-Boards der Firma dSPACE generiert werden (Typ DS5202). Der Vorteil der Eigenanfertigung besteht darin, dass es zu keinen Verzögerungszeiten durch zwischengeschaltete Bussysteme kommt und damit eine besonders reaktive Regelung möglich ist.

Das dSPACE-System übernimmt auch die Auswertung der Messdaten (Ströme, Rotorwinkeländerungen, Momente) über obiges FPGA-Board sowie ein Inkrementalgeber-Board (DS3002). Die Ausführung des Regel- beziehungsweise

²Hersteller: SEMIKRON. Typenbezeichnung des Moduls SKHI 23/12 (R), der IGBTs SKM 75GB123D

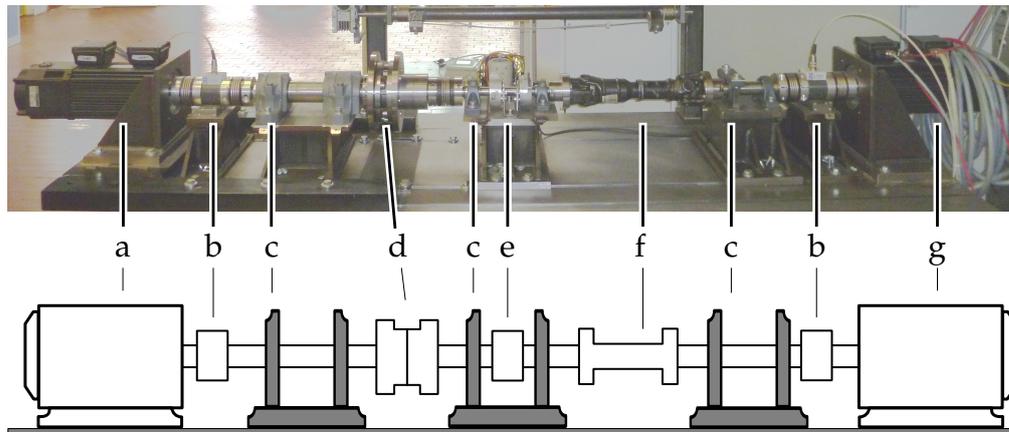


Abbildung B.1.: Mechanischer Aufbau des Prüfstandes. Die Komponenten sind a) ASM₁, b) Drehmomentsensor, c) Lagerbock, d) Schwungmasse, e) Inkrementalgeber, f) elastische Kupplung und g) ASM₂.

Identifikationsalgorithmus übernimmt ein entsprechendes Prozessor-Board (DS1006).

Die Realisierung der Algorithmen erfolgt dank der auf den Betrieb von Drehmomentmaschinen zugeschnittenen dSPACE AC Motor Control Solution (ACMC) sehr komfortabel über die Erstellung von MATLAB/Simulink-Modellen auf einem PC. Diese werden mittels des Real-Time Workshops in lauffähigen C-Code übersetzt und über eine Ethernet-Schnittstelle auf das Prozessor-Board geladen.

Mit dem Programmpaket ControlDesk erfolgt dann die Steuerung des Experiments über eine grafische Benutzeroberfläche. Hier können während des Betriebs Parameter geändert und Signalverläufe aufgezeichnet werden.

B.2. Parameterwerte

Die elektrischen Parameter der Asynchronmaschinen, welche den entworfenen Reglern zugrundeliegen und als Basis für die Parameteridentifikationsmethoden dienen, wurden einerseits den Datenblättern, andererseits den experimentellen Ergebnissen in [65] entnommen und sind in Tabelle B.2 zusammengefasst.

Dabei stellt die Hauptinduktivität L_h einen Mittelwert des gesamten Verlaufes für verschiedene Magnetisierungsströme dar.

Parameter		Wert		
Name	Bezeichnung	Datenblatt	Messung [65]	Einheit
Statorwiderstand	R_S	3	4,36	Ω
Rotorwiderstand	R_R	4,9	2,94	Ω
Statorstreuinduktivität	$L_{\sigma S}$	9,5	11,7	mH
Rotorstreuinduktivität	$L_{\sigma R}$	9,3	11,7	mH
Hauptinduktivität	L_h	251,5	220,16	mH

Tabelle B.2.: Parameterwerte der Asynchronmaschinen vom Typ Lenze MCA14L16

B.3. Messsignale

Die Messsignale, die zu jedem Zeitpunkt $t_k = kT$ aufgezeichnet werden, stellen nicht wirklich die zu diesem Zeitpunkt wirkenden beziehungsweise gemessenen Signale dar. Vielmehr sind es entweder bereits gefilterte Signale (i_S^S, ω_R), oder aber werden Sie erst auf die Maschine aufgeschaltet (u_S^S). Dementsprechend kommt es zu Problemen, wenn man sie als synchron annimmt. Insbesondere bei der Transformation in ein anderes Koordinatensystem haben bereits kleine zeitliche Verzögerungen zwischen Messsignal und Winkel große Auswirkungen.

In Abbildung B.2 sind die zeitlichen Zusammenhänge dargestellt, wie sie in [15] erarbeitet wurden. Dabei stellt ZSK den Einfluss des Zwischenstromkreises und Pulswechselrichters dar, MA steht für *moving average* und entspricht näherungsweise dem Effekt der integralen Strommessung [15]. Der Tiefpass für die Filterung des Winkelgeschwindigkeitssignals ist zur Unterdrückung von Rauschen nötig. Dieses entsteht dadurch, dass sich die (diskrete!) Strichzahl des Drehgebers, die während einer Abtastperiode aufgezeichnet wurde, von einer Abtastperiode zur anderen auch bei konstanter Drehzahl geringfügig unterscheiden kann [65].

Die aufgezeichneten Daten entsprechen daher näherungsweise:

$$u_S^S = u_{S,k+1}, \quad i_S^S \approx i_{S,k-2}, \quad \varphi_R = \varphi_{R,k}, \quad \omega_R \approx \omega_{R,k-1}. \quad (\text{B.1})$$

Wurden die Daten mit einer anderen Abtastzeit als T aufgezeichnet, zum Beispiel $T_S \neq T$, können die Messwerte nicht einfach verschoben, sondern muss eine Interpolation vorgenommen werden. Die einfachste, lineare Interpolation für eine Verzögerung von NT lautet

$$y_k = \left(1 - N \frac{T}{T_S}\right) y_k + N \frac{T}{T_S} y_{k+1}, \quad T_S \geq NT \quad (\text{B.2})$$

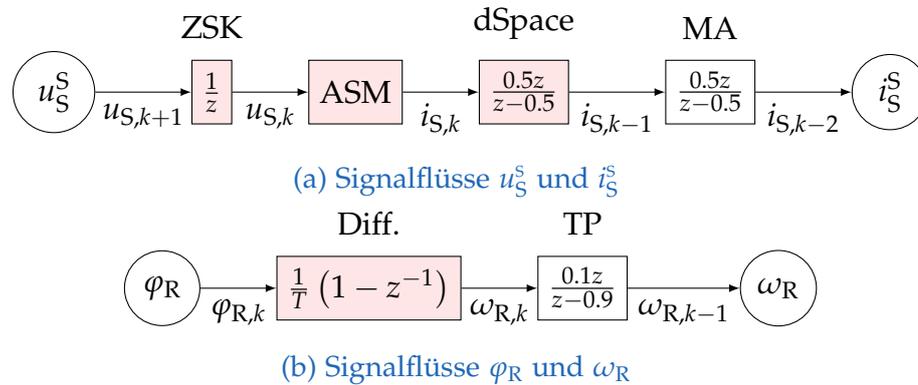


Abbildung B.2.: Signalflüsse der einzelnen gemessenen Größen. Rot hinterlegt die internen, nicht beeinflussbaren Vorgänge. In den Kreisen sind die aufgezeichneten Größen eingezeichnet.

und liefert bei der *off-line*-Parameteridentifikation bereits deutlich bessere Ergebnisse.

Während des Betriebes der Maschine existiert der Luxus der variablen Indizierung der Signale nicht, es muss daher penibel auf eine Synchronisierung der Signale geachtet werden.

B.4. Verwendete Szenarien

Zum Vergleich verschiedener Beobachter- und Parameteridentifikationskonzepte kamen zwei verschiedene Szenarien zum Einsatz. Dabei wurde jeweils die Maschine ASM1 angetrieben und Maschine ASM2 im Leerlauf betrieben.

Das erste Szenario beschreibt einen rampenförmigen Drehzahlanstieg, gefolgt von einer konstant gehaltenen Drehzahl und einer Abbremsung zum Stillstand. Das geforderte Geschwindigkeits- sowie Momentenprofil ist in Abbildung B.3 abgebildet. Der Drehzahlanstieg ist so klein gehalten, dass er der Bedingung (16.1) erfüllt. Die langen stationären Zustände bei hoher Drehzahl und Stillstand stellen Herausforderungen für die Parameteridentifikationsverfahren dar. Insbesondere wird die Asynchronmaschine bei hoher Drehzahl bereits im Feldschwäcbereich betrieben, wodurch sich die Hauptinduktivität ändert. Bei Stillstand und Nullmoment wiederum ist die Rotorzeitkonstante nicht identifizierbar.

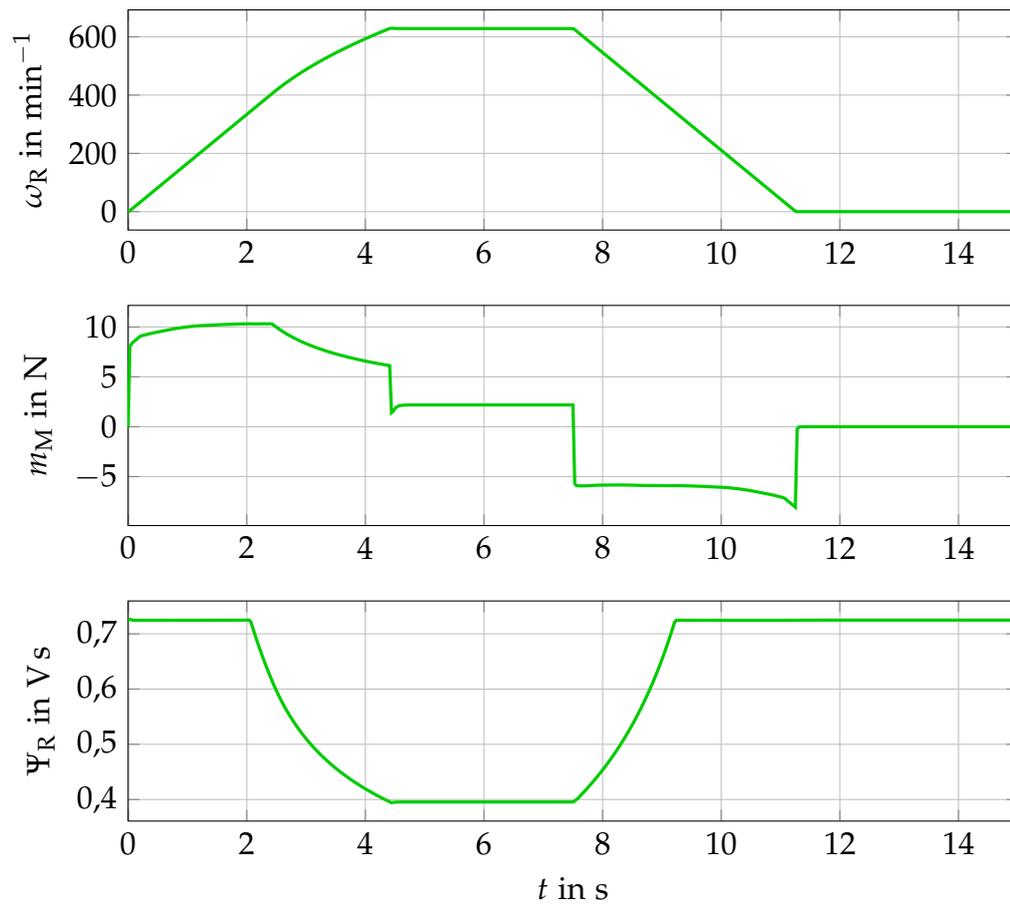


Abbildung B.3.: Erstes Szenario: Auf- und absteigende Drehzahlrampen

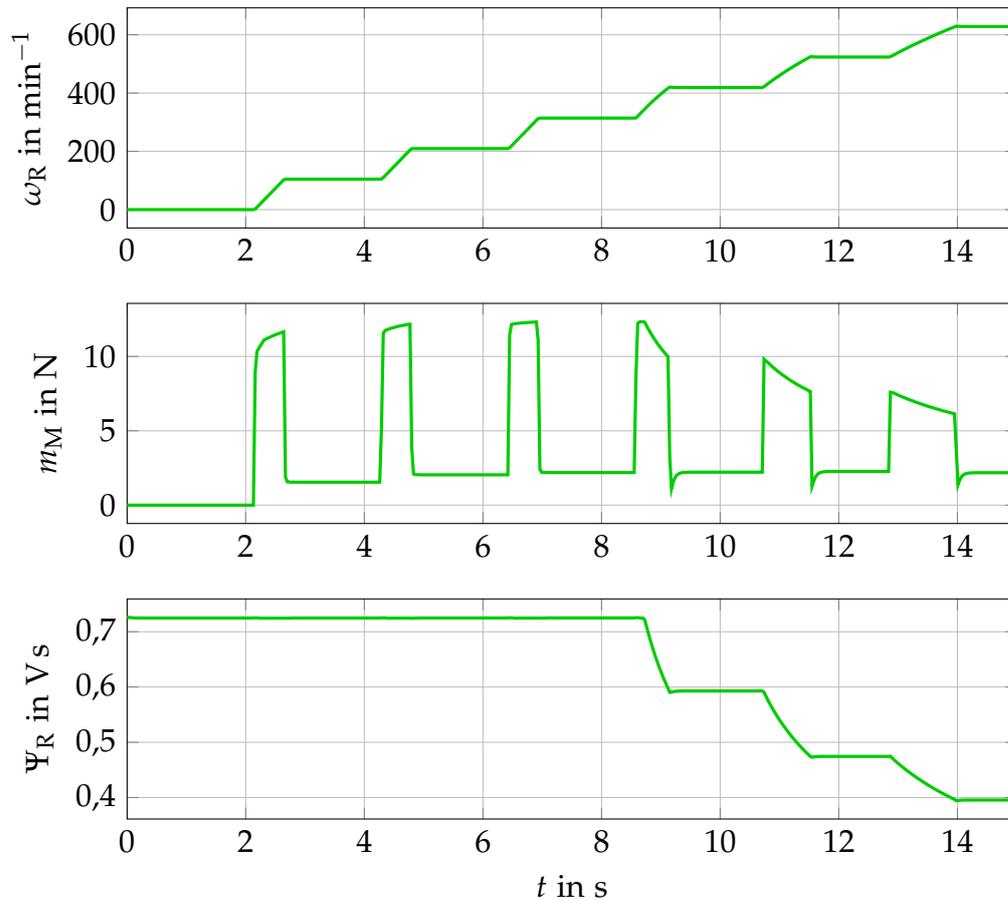


Abbildung B.4.: Zweites Szenario: Stückweise konstante, monoton steigende Solldrehzahlen

Das zweite Szenario zeichnet sich durch sprunghafte Erhöhungen der Rotordrehzahl aus und ist in [Abbildung B.4](#) dargestellt. Daraus ergibt sich ein stetiger Wechsel zwischen stationären und dynamischen Betriebsbedingungen, was insbesondere für den Störgrößenbeobachter in [Kapitel 8](#), aber auch für die Parameteridentifikationsverfahren in den [Kapiteln 16](#) und [17](#) eine Schwierigkeit darstellt.

Anhang C.

Regelung

Dieses Kapitel soll einen kleinen Einblick in die verwendeten Regelkonzepte gewähren. Obwohl diese nicht im Mittelpunkt der Arbeit stehen, ist es doch sinnvoll, darüber Bescheid zu wissen, um die Simulationsergebnisse richtig deuten zu können.

Die Grundlage bildet die feldorientierte Regelung nach Blaschke [4], also die entkoppelte Regelung von Rotorfluss und Drehmoment im rotorflussfesten Koordinatensystem (RFKS). Der andere weitverbreitete Ansatz, *direct torque control*, wird hier nicht näher beachtet, es wird auf die Fachliteratur, z.B. [64] verwiesen.

C.1. Stromregler

Der Stromregler wurde in dieser Arbeit noch als klassischer PID-Regler mit einer *Anti-Windup*-Maßnahme nach HANUS realisiert [21, 36]. Als Modell fungierte die Übertragungsfunktion von Statorspannung $u_{S,i}^{\Psi}$ zu Statorstrom $i_{S,i}^{\Psi}$, (2.42)

$$\frac{i_{S,i}^{\Psi}(s)}{u_{S,i}^{\Psi}(s)} = \frac{1}{L_{\sigma}s + R_S}. \quad (\text{C.1})$$

Diese wurde in den z -Bereich transformiert und um ein Verzögerungsglied z^{-1} erweitert, um den Einfluss des Pulswechselrichters zu berücksichtigen. Für eine vernünftigeren Dimensionierung des Stromreglers wird auf [15] verwiesen.

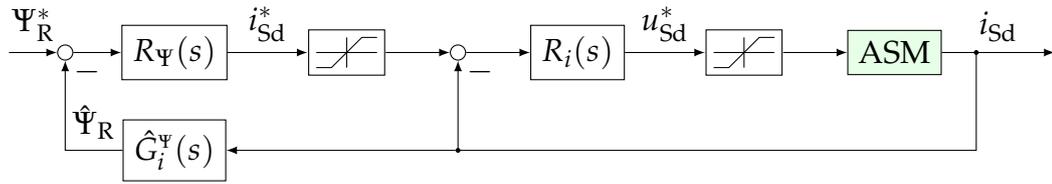


Abbildung C.1.: Kaskadenregelkreisstruktur für die Rotorflussregelung

C.2. Flussregler

Die derzeitige Flussregelung basiert auf der Kaskadenregelkreisstruktur, deren Schema in Abbildung C.1 zu sehen ist. Sowohl der Stromregler $R_i(s)$ als auch der Flussregler $R_\Psi(s)$ sind dabei als integrierende Regler mit Anti-Windup-Maßnahmen implementiert und können zum Beispiel mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens [18, 25] entworfen werden.

Es fällt auf, dass die äußere Regelschleife keinen stationär wirksamen Störeinflüssen ausgesetzt ist, da nur eine geregelte Größe i_{Sd} sowie das exakt bekannte Modell des Flussbeobachters $\hat{G}_i^\Psi(s)$ in die Berechnungen der Sollgröße i_{Sd}^* eingehen. Es ist daher *nicht* nötig, einen weiteren integrierenden Anteil in die Flussregelung einzubauen. Ein Proportionalregler mit dem reellen Verstärkungsfaktor $K > 0$ ist völlig ausreichend; für den stationären Zustand liefert ein Vorsteuerungsweig Ψ_R^*/\hat{L}_h den korrekten Strombetrag (siehe Abbildung C.2). Die Führungsübertragungsfunktion stellt (unter Vernachlässigung

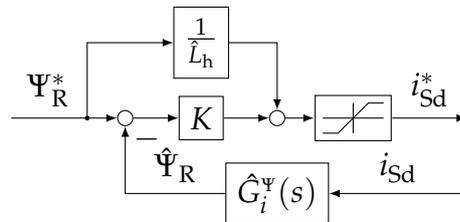


Abbildung C.2.: Einfacherer Proportionalregler mit Vorsteuerung

der viel schnelleren Stromdynamik) somit ein stationär genaues PT₁-Glied

$$T(s) = \left. \frac{\Psi_R^*(s)}{\hat{\Psi}_R(s)} \right|_{AW=0} = \frac{1 + K\hat{L}_h}{\hat{\tau}_R s + (1 + K\hat{L}_h)} \quad (C.2)$$

mit der neuen Zeitkonstante

$$\tau_R' = \frac{\hat{\tau}_R}{1 + K\hat{L}_h} \quad (C.3)$$

dar, welche durch Wahl von K als ein Vielfaches der Rotorzeitkonstante eingestellt werden kann:

$$\tau_R' \stackrel{!}{=} \frac{\hat{\tau}_R}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\alpha - 1}{\hat{L}_h}. \quad (\text{C.4})$$

Auch eine Dimensionierung mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens fällt auf Grund des Wegfallens des Integrators leicht, es kann eine gewünschte Anstiegszeit t_r direkt umgesetzt werden

$$\omega_c \approx \frac{3}{2t_r}, \quad |L(j\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sqrt{1 + (\hat{\tau}_R\omega_c)^2}}{\hat{L}_h}. \quad (\text{C.5})$$

Die Vorteile des modifizierten Regelkonzepts sind einerseits die einfachere Dimensionierung, andererseits der geringere Realisierungsaufwand, da kein unnötiges dynamisches Element eingesetzt wird.

Zusätzlich kann dieser Regler auch sofort auf andere Schätzwerte der elektrischen Parameter reagieren, indem diese einfach im Beobachter sowie im Verstärkungsfaktor K und dem Vorsteuerungsweig ausgetauscht werden. Bei der Kaskadenregelkreisstruktur hingegen müsste erst der stationäre Anteil des Integrators ausgeregelt werden.

C.3. Drehzahlregler

Ausgangspunkt für den Drehzahlregler ist der Drallsatz aus (2.20), erweitert um einen Reibterm

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_M - m_L - m_R(\omega), \quad (\text{C.6})$$

wobei ω die mechanische Winkelgeschwindigkeit des Rotors, m_M das Luftspaltpmoment des Motors, m_L das Lastmoment und m_R das – im Allgemeinen nichtlinear von der Rotordrehzahl abhängende – Reibmoment darstellen. Ausgehend von dem linearen Teil kann mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens ein PI-Regler entworfen werden, welcher mit einer *Anti-windup*-Maßnahme z.B. nach HANUS [21] versehen werden muss. Derartige Reglerentwürfe werden in [65] oder [36] beschrieben.

Hier soll alternativ ein auf dem reduzierten Störgrößenbeobachter basierender Regler vorgestellt werden. Dieser setzt sich aus einer statischen Vorsteuerung, einer Kompensation des bekannten Reib- und des zu schätzenden Lastmomentes, sowie einem linearen Zustandsregler zusammen

$$m_M = V\omega^* + \hat{m}_R(\omega) + \hat{m}_L - k\omega \quad (\text{C.7})$$

Dabei symbolisiert ω^* die gewünschte Winkelgeschwindigkeit, V und k sind positive reelle Parameter. Das Lastmoment wird als unbekannt, aber konstant angenommen $dm_L/dt = 0$.

Die Differentialgleichungen für einen linearen Schätzer lauten

$$J \frac{d\hat{\omega}}{dt} = m_M - \hat{m}_L \quad (\text{C.8a})$$

$$\frac{d\hat{m}_L}{dt} = 0. \quad (\text{C.8b})$$

Führt man den Schätzfehler $d\omega/dt - d\hat{\omega}/dt$ mittels des Faktors \hat{b} zurück, erhält man den reduzierten Störgrößenbeobachter

$$\frac{d\hat{m}_L}{dt} = \hat{b} \left(\hat{m}_L - m_M + J \frac{d\omega}{dt} \right). \quad (\text{C.9})$$

Der Eigenwert dieser Differentialgleichung – und damit der des Schätzfehlers $e := m_L - \hat{m}_L$ – kann durch Wahl von \hat{b} beliebig eingestellt werden. Zur Vermeidung der Ableitung von ω wird die Hilfsgröße z eingeführt

$$z := \hat{m}_L - \hat{b}J\omega \quad (\text{C.10})$$

für deren Ableitung sich

$$\frac{dz}{dt} = \hat{b}z + \hat{b} \left(\hat{b}J\omega - m_M \right) \quad (\text{C.11})$$

ergibt.

Setzt man nun $m_L = \hat{m}_L$ in (C.7) ein, ergibt sich ein geschlossener Regelkreis von

$$J \frac{d\omega}{dt} = -k\omega + V\omega^*, \quad (\text{C.12})$$

so dass mittels der Wahl von $k > 0$ trivial direkt der negative Eigenwert vorgegeben werden kann. Die stationäre Verstärkung des geschlossenen Regelkreises beträgt V/k , womit der Verstärkungsfaktor V für stationäre Genauigkeit $V = k$ betragen muss und sich ein einfacher P-Regler ergibt.

Das vollständige Drehzahlregelkonzept ist in Abbildung C.3 dargestellt.

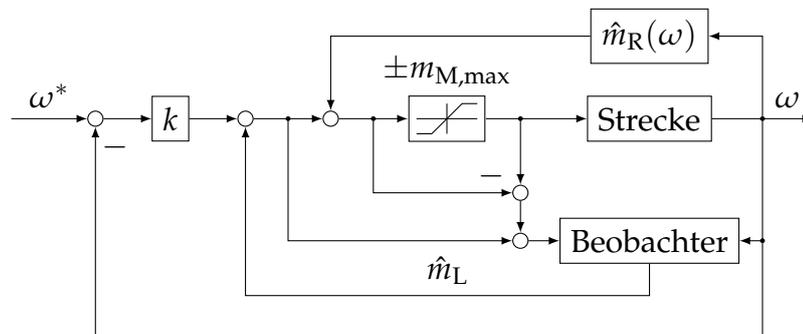


Abbildung C.3.: Drehzahlregler mit Störgrößenbeobachter

Anhang D.

Ableitungsschätzungen

Für einige Methoden der Parameteridentifikation wird die Kenntnis der Ableitungen gemessener oder vorgegebener Signale vorausgesetzt.

Die Bildung dieser Ableitungen geschieht üblicherweise durch eine Tiefpassfilterung (da sonst hochfrequentes Rauschen nach der Ableitung dominiert) der zeitdiskret aufgezeichneten Signale $x_k = x(kT)$, gefolgt von einer numerischen Differentiation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_k \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T}. \quad (\text{D.1})$$

Je nach gewähltem Tiefpassfilter kommt es zu einer unterschiedlichen Veränderung des Betrages sowie einer Phasenverschiebung. Die Ableitung zum aktuellen Zeitpunkt $t = kT$ kann daher niemals „exakt“ bestimmt werden. Die Genauigkeit der Schätzung hängt vielmehr stark von dem verwendeten Filter sowie der Abtastzeit T ab. Auf Grund des Rauschens bewirkt eine kürzere Abtastzeit dabei nicht notwendigerweise ein besseres Ergebnis.

Eine andere Art der Ableitungsschätzung stellt die Berechnung mittels Polynome dar [63]. Dabei wird ein Polynom n -ten Grades

$$p_k(\tau) = a_{k0} + a_{k1}\tau + \dots + a_{kn}\tau^n \quad (\text{D.2})$$

in N zurückliegende Punkte $x_{k-N+1}, x_{k-N+1}, \dots, x_k$ eingepasst, wobei $p_k(0)$ dem ältesten Messwert x_{k-N+1} , $p_k((N-1)T)$ dem neuesten Messwert x_k entspricht. Damit ergibt sich für $N > n + 1$ ein überbestimmtes Gleichungssystem

für die Polynomkoeffizienten a_{ki} , $i = 0, \dots, n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & T & T^2 & \dots & T^n \\ 1 & 2T & (2T)^2 & \dots & (2T)^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & (N-1)T & [(N-1)T]^2 & \dots & [(N-1)T]^n \end{bmatrix}}_{=: \Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{a}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{k-N+1} \\ x_{k-N+2} \\ x_{k-N+3} \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{x}_k}, \quad (\text{D.3})$$

welches über die Pseudoinverse zu jedem Zeitpunkt t_k gelöst werden kann:

$$\mathbf{a}_k = \left(\Theta^T \Theta \right)^{-1} \Theta^T \mathbf{x}_k. \quad (\text{D.4})$$

Dabei ist zu beachten, dass sich nur der \mathbf{x}_k -Vektor ändert, die Pseudoinverse also nur einmal berechnet werden muss!

Will man nun die d -te Ableitung des Signals $x(t)$ bilden, so genügt es, die d -te Ableitung des ermittelten Polynoms an einer geeignet gewählten Stelle τ auszuwerten. Dabei entspricht $\tau = 0$ dem Zeitpunkt $t = (k - N + 1)T$ und $\tau = (N - 1)T$ dem aktuellen Zeitpunkt $t = kT$. Die Phasenverschiebung kann bei dieser Variante also beinahe frei vorgegeben werden! Es gilt jedoch zu bedenken, dass die Schätzungen der Ableitungen sowohl am Anfang als auch am Ende des Approximationsintervalls beliebig schlecht werden können.

Für die Ableitungen des Polynoms $p_k(\tau)$ gilt allgemein

$$\begin{aligned} p_k(\tau) &= a_{k0} + a_{k1}\tau + a_{k2}\tau^2 + \dots + a_{k(n-1)}\tau^{n-1} + a_{kn}\tau^n, \\ \frac{dp_k}{d\tau} &= a_{k1} + 2a_{k2}\tau + \dots + n a_{kn}\tau^{n-1}, \\ &\vdots \\ \frac{d^d p_k}{d\tau^d} &= \sum_{i=d}^n \frac{i!}{(i-d)!} a_{ki} \tau^{i-d} =: a_{k0,d} + a_{k1,d}\tau + \dots + a_{k(n-d),d}\tau^{n-d}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Die Koeffizienten der d -ten Ableitung $a_{ki,d}$ kann man auch über eine Matrix-

multiplikation aus den Koeffizienten \mathbf{a}_k erhalten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k0,d} \\ a_{k1,d} \\ \vdots \\ a_{k(n-d),d} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{a}_{kd}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}^d}_{=:\mathbf{\Gamma}^d} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{a}_k}. \quad (\text{D.6})$$

Damit und mit

$$\boldsymbol{\tau}_d := \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}^d}_{=:\mathbf{\Delta}^d} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \vdots \\ \tau^n \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{D.7})$$

kann die d -te Ableitung als Skalarprodukt angeschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^d p_k}{\mathrm{d}\tau^d} = \boldsymbol{\tau}_d^T \mathbf{a}_{kd}. \quad (\text{D.8})$$

Führt man all dies zusammen, erhält man ein FIR-Filter zur Berechnung der d -ten Ableitung zum Zeitpunkt $(k - i)T$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^d x}{\mathrm{d}t^d} \right)_{k-i} \approx \underbrace{(\mathbf{\Delta}^d \boldsymbol{\tau})^T \mathbf{\Gamma}^d (\mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta})^{-1} \mathbf{\Theta}^T}_{\boldsymbol{\gamma}^T} \mathbf{x}_k, \quad \text{mit } \tau = [(N - 1) - i] T. \quad (\text{D.9})$$

D.1. Zur Wahl von n und N

Die Wahl des Polynomgrades n ergibt sich aus der geforderten Ableitung d

$$n \geq d. \quad (\text{D.10})$$

Für die Anzahl an Messpunkten N hilft folgende Überlegung: Die höchste im Signal vorkommende Frequenz laute f_{\max} ; diese wird mit

$$N_T = \frac{1}{f_{\max} T} = \frac{T_{\min}}{T} \quad (\text{D.11})$$

Tastschritten abgetastet.

Um eine volle Schwingung halbwegs sinnvoll wiederzugeben, benötigt man zumindest ein Polynom 4. Grades. Betrachtet man die Schwingung von $T_{\min}/4$ bis $3T_{\min}/4$ (also mit der Länge $T_{\min}/2$), so benötigt man dafür ein Polynom mindestens 3. Grades. Jedes Achtel der Schwingung kann wiederum durch eine Parabel angenähert werden. Es kann also abhängig vom Grad des gewünschten Polynoms n folgende Daumenregel eingesetzt werden:

$$N \leq \begin{cases} \frac{N_T}{4} & \text{für } n = 2 \\ \frac{N_T}{2} & \text{für } n = 3 \\ N_T & \text{für } n = 4. \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

D.2. Übergang zu Integralrechnung: Äquivalenz zur algebraischen Ableitungsschätzung

Was passiert, wenn die Anzahl der Stützstellen N in einem endlichen Zeitintervall T_1 gegen Unendlich geht? Dann wird die Berechnung der Ableitung zum Zeitpunkt t statt mittels einer Faltungssumme mittels eines Faltungsintegrals über das Zeitfenster $[t - T_1, t]$ zu berechnen sein.

Hier soll für ein einfaches Beispiel gezeigt werden, dass das damit erreichte Ergebnis mit der algebraischen Ableitungsschätzung über ein Zeitfenster übereinstimmt, wie diese in [14, 48, 58] dargelegt wurde.

Für die erste Ableitung genügt als Polynom eine lineare Gleichung.

$$p_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t \quad \text{mit} \quad T = \frac{T_1}{N-1}. \quad (\text{D.13})$$

Die Lösung für die erste Ableitung lautet mit Hilfe der algebraischen Methode [58]

$$\dot{x}(t) \approx \frac{6}{T_1^3} \int_0^{T_1} (T_1 - 2\tau)y(t - \tau)d\tau. \quad (\text{D.14})$$

D.2. Übergang zu Integralrechnung: Äquivalenz zur algebraischen Ableitungsschätzung

Mittels *least squares* ergibt sich bei N Stützstellen das überbestimmte Gleichungssystem (D.3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1)T \end{bmatrix}}_{=: \Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{a}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} x(t - T_1 + 0 \cdot T) \\ x(t - T_1 + 1 \cdot T) \\ \vdots \\ x(t - T_1 + (N-1)T) \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{x}_k}. \quad (\text{D.15})$$

Für die Ableitungsschätzung zum Zeitpunkt t ergibt sich damit die Gleichung

$$\hat{x}(t) = a_{k1} = [0 \ 1] \left(\Theta^T \Theta \right)^{-1} \Theta^T \mathbf{x}_k. \quad (\text{D.16})$$

Die Matrix $\Theta^T \Theta$ ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & T & \dots & (N-1)T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1)T \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 & \frac{T_1}{2} \\ \frac{T_1}{2} & \frac{2N-1}{6(N-1)} T_1^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.17})$$

Dem Zugrunde liegen die folgenden Erkenntnisse:

$$\begin{aligned} T \sum_{i=0}^{N-1} i &= \frac{N(N-1)}{2} T = N \frac{T_1}{2}, \\ T^2 \sum_{i=0}^{N-1} i^2 &= \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} T^2 = N \frac{2N-1}{6(N-1)} T_1^2. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Damit erhält man für die Inverse

$$\left(\Theta^T \Theta \right)^{-1} = \frac{12(N-1)}{N(N+1)} \frac{1}{T_1^2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ -\frac{T_1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.19})$$

Für die Ableitung ergibt sich damit

$$\hat{x}(t) = \frac{12(N-1)}{N(N+1)} \frac{1}{T_1^2} \begin{bmatrix} -\frac{T_1}{2} & -\frac{T_1}{2} + T & \dots & \frac{T_1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (\text{D.20})$$

Als Summe angeschrieben ergibt das

$$\hat{x}(t) = \frac{12(N-1)}{N(N+1)} \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(n \frac{T}{T_1} - \frac{1}{2} \right) x_{k-N+n+1}. \quad (\text{D.21})$$

Für $N = 2$ zum Beispiel erhält man

$$N = 2: \quad \hat{x}(t) = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_1}, \quad (\text{D.22})$$

was zu erwarten war. Für $N = 3$ ergibt sich wiederum

$$\begin{aligned} N = 3: \quad \hat{x}(t) &= \frac{2}{T_1^2} \begin{bmatrix} -\frac{T_1}{2} & -\frac{T_1}{2} + \frac{T_1}{2} & \frac{T_1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k = \\ &= \frac{1}{T_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k = \frac{1}{T_1} (x_k - x_{k-2}). \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Für den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ multiplizieren wir den Summanden mit T und dividieren die gesamte Gleichung durch T . Im Grenzübergang wird daraufhin $T \rightarrow d\tau$, aus nT wird τ :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{12(N-1)}{N(N+1)} \frac{1}{T} \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{nT}{T_1} - \frac{1}{2} \right) x(t - T_1 + nT) T = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N-1)^2}{N(N+1)} \frac{12}{T_1^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{nT}{T_1} - \frac{1}{2} \right) x(t - T_1 + nT) T = \\ &= \frac{12}{T_1^2} \int_0^{T_1} \left(\frac{\tau}{T_1} - \frac{1}{2} \right) x(t - T_1 + \tau) d\tau = \\ &= \frac{6}{T_1^3} \int_0^{T_1} (T_1 - 2\tau) y(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Das ist aber genau dasselbe Ergebnis wie bei der algebraischen Methode in Gleichung (D.14). Ein allgemeiner Beweis ist meines Erachtens noch ausstehend; im Übrigen wird schon in [57] angedeutet, dass die algebraische Ableitungsschätzung auf Grund ihrer Faltungsstruktur mit FIR-Filtern vergleichbar sein muss.

Literatur

- [1] Saadettin Aksoy, Aydin Mühürçü und Hakan Kizmaz. »State and Parameter Estimation in Induction Motor Using the Extended Kalman Filtering Algorithm«. In: *Modern Electric Power Systems* (2010) (siehe S. 90).
- [2] Karl J. Aström und Björn Wittenmark. *Adaptive Control*. 2nd. Dover, 2008 (siehe S. 97, 101, 123).
- [3] David J. Atkinson, Paul P. Acarnley und John W. Finch. »Observers for Induction Motor State and Parameter Estimation«. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 27.6 (1991), S. 1119–1127 (siehe S. 90).
- [4] F. Blaschke. »Das Prinzip der Feldorientierung, die Grundlage für die Transvector-Regelung von Asynchronmaschinen«. In: *Siemens-Zeitschrift* 45 (1971), S. 757–760 (siehe S. 177).
- [5] Marc Bodson, John N. Chiasson und Robert T. Novotnak. »A Systematic Approach to Selecting Flux References for Torque Maximization in Induction Motors«. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 3.4 (Dez. 1995), S. 388–397 (siehe S. 32).
- [6] Liyu Cao und Howard M. Schwartz. »A Directional Forgetting Algorithm Based on the Decomposition of the Information Matrix«. In: *Automatica* 36.11 (2000), S. 1725–1731. ISSN: 0005-1098. DOI: [10.1016/S0005-1098\(00\)00093-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00093-5). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109800000935> (siehe S. 103, 104, 107, 113).
- [7] Liyu Cao und Howard M. Schwartz. »Analysis of the Kalman filter based estimation algorithm: an orthogonal decomposition approach«. In: *Automatica* 40 (2004), S. 5–19 (siehe S. 112, 113).
- [8] B. Castillo-Toledo u. a. »On the Discrete-Time Modelling and Control of Induction Motors with Sliding Modes«. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. 2004, S. 2598–2602 (siehe S. 68).

- [9] Maurizio Cirrincione u. a. »Constrained least-squares method for the estimation of the electrical parameters of an induction motor«. In: *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronics Engineering* 22.4 (2003), S. 1089–1101 (siehe S. [115](#), [157](#)).
- [10] Maurizio Cirrincione u. a. »On the Application of TLS Techniques to AC Electrical Drives«. In: *J. Electrical Systems* (2005) (siehe S. [121](#)).
- [11] P. A. Cook. »Stability of Linear Systems with Slowly Changing Parameters«. In: *Systems and Control Letters* (Juni 1999) (siehe S. [41](#)).
- [12] A. Dittrich. »Parameter sensitivity of procedures for on-line adaptation of the rotor time constant of induction machines with field oriented control«. In: *IEE Proc.-Electr. Power Appl.* Bd. 141. 6. 1994, S. 353–359 (siehe S. [32](#), [124](#)).
- [13] T. Du, P. Vas und F. Stronach. »Design and application of extended observers for joint state and parameter estimation in high-performance AC drives«. In: *Proc. Inst. Elect. Eng. – Elect. Power Applications*. Bd. 142. 2. 1995, S. 71–78 (siehe S. [90](#)).
- [14] M. Fliess u. a. »Estimation des dérivées d’un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos«. In: *Actes 20e Coll. GRETSI* (1997) (siehe S. [186](#)).
- [15] Martin Forstinger. »Vergleich verschiedener Stromregelkonzepte für die feldorientierte Regelung von Drehfeldmaschinen«. Masterarbeit. Technische Universität Graz, 2013 (siehe S. [169](#), [172](#), [177](#)).
- [16] T. R. Fortescue, L. S. Kerschenbaum und B. E. Ydstie. »Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors«. In: *Automatica* 17 (1981), S. 831–835 (siehe S. [103](#)).
- [17] Luis J. Garces. »Parameter Adaption for the Speed-Controlled Static AC Drive with a Squirrel-Cage Induction Motor«. In: *Industry Applications, IEEE Transactions on IA-16.2* (März 1980), S. 173–178. ISSN: 0093-9994. DOI: [10.1109/TIA.1980.4503768](#) (siehe S. [32](#), [124](#)).
- [18] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher. *Digitale Regelkreise*. Oldenbourg Verlag, 1993 (siehe S. [178](#)).
- [19] Veit Hagenmeyer, Andrea Ranftl und Emmanuel Delaleau. »Flatness-based control of the induction drive minimising energy dissipation«. In: *Nonlinear and adaptive control: NCN4 2001*. Hrsg. von Zinober und Owens. Springer, 2001, S. 149–160 (siehe S. [77](#)).

-
- [20] T. Hägglund. »Recursive Estimation of Slowly Time-varying Parameters«. In: *The 7th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation* (1985), S. 1137–1142 (siehe S. 104).
- [21] R. Hanus, M. Kinnaert und J.-L. Henrotte. »Conditioning Technique, a General Anti-windup and Bumpless Transfer Method«. In: *Automatica* 23.6 (1987), S. 729–739 (siehe S. 177, 179).
- [22] C. J. Harris und J. F. Miles. *Stability of linear systems: some aspects of kinematic similarity*. Academic Press, 1980 (siehe S. 41).
- [23] Marko Hinkkanen und Jorma Luomi. »Parameter Sensitivity of Full-Order Flux Observers for Induction Motors«. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 39.4 (2003), S. 1127–1135 (siehe S. 11).
- [24] Anton Hofer u. a. »Induction Machine Torque Control with Self-Tuning Capabilities«. Präsentation in St. Petersburg. 2012 (siehe S. 149).
- [25] Martin Horn und Nicolaos Dourdoumas. *Regelungstechnik*. Pearson Studium, 2004 (siehe S. 28, 178).
- [26] Isaac M. Horowitz. *Synthesis of feedback systems*. Academic Press, 1963 (siehe S. 125).
- [27] P.L. Jansen und R.D. Lorenz. »A Physically Insightful Approach to the Design and Accuracy Assessment of Flux Observers for Field Oriented Induction Machine Drives«. In: *IEEE* (1992) (siehe S. 37, 38).
- [28] Seok Ho Jeon, Kwang Kyo Oh und Jin Young Choi. »Flux Observer With Online Tuning of Stator and Rotor Resistances for Induction Motors«. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 49.3 (Juni 2002), S. 653–664 (siehe S. 90).
- [29] Bhakti M. Joshi und M.C. Chandorkar. »Time Discretization Issues in Induction Machine Model Solving for Real-time Applications«. In: *IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*. 2011, S. 675–680 (siehe S. 67, 68).
- [30] Simon Julier und Jeffrey K. Uhlmann. *A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions*. Techn. Ber. Robotics Research Group, University of Oxford, 1996 (siehe S. 166).
- [31] R. E. Kalman. »A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems«. In: *Journal of Basic Engineering* 82.1 (1960), S. 35–45 (siehe S. 111).

- [32] Godpromesse Kenné u. a. »An Online Simplified Rotor Resistance Estimator for Induction Motors«. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 18 (2010), S. 1188–1194 (siehe S. 90).
- [33] Godpromesse Kenné u. a. »Nonlinear systems time-varying parameter estimation: Application to induction motors«. In: *Electric Power Systems Research* 78 (2008), S. 1881–1888 (siehe S. 90).
- [34] R. J. Kerkman u. a. »A frequency-based determination of transient inductance and rotor resistance for field commissioning purposes«. In: *IEEE Trans. Ind. Applicat.* Bd. IA-32. 1996, S. 577–584 (siehe S. 143).
- [35] Pál K. Kovács. *Transient phenomena in electrical machines*. Akademia Kiado, 1980 (siehe S. 7).
- [36] Klemens Kranawetter. »Energieoptimale Positionsregelung einer Asynchronmaschine«. Masterarbeit. Technische Universität Graz, 2014 (siehe S. 177, 179).
- [37] Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk und Scott D. Sudhoff. *Analysis of electric machinery*. IEEE Press, 1995 (siehe S. 143).
- [38] R. Kulhavý. »Restricted Exponential Forgetting in Real-time Identification«. In: *Automatica* 23.5 (1987), S. 589–600 (siehe S. 104).
- [39] Werner Leonhard. *Control of Electrical Drives*. 3. Aufl. Springer, 2001 (siehe S. 3, 17).
- [40] L. Ljung und S. Gunnarsson. »Adaptation and tracking in system identification - a survey«. In: *Automatica* 26.1 (1990), S. 7–21 (siehe S. 103, 111).
- [41] Lennart Ljung. *System Identification*. Prentice-Hall Information and System Sciences. Prentice-Hall, 1987 (siehe S. 97).
- [42] Robert D. Lorenz und Donald B. Lawson. »A simplified approach to continuous, online tuning of field oriented induction machine drives«. In: *Industry Applications Society Annual Meeting, 1988., Conference Record of the 1988 IEEE*. Okt. 1988, 444–449 vol.1. DOI: [10.1109/IAS.1988.25098](https://doi.org/10.1109/IAS.1988.25098) (siehe S. 124).
- [43] L. Loron. »Stator parameters influence on the field-oriented control tuning«. In: *Power Electronics and Applications, 1993., Fifth European Conference on*. Sep. 1993, 79–84 vol.5 (siehe S. 90).
- [44] J. von Löwis, J. Rudolph und F. Woittennek. »Discrete-time flatness-based control of an electromagnetically levitated rotating shaft«. In: *Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems*. 2000 (siehe S. 72).

-
- [45] Riccardo Marino, Sergei Pereseda und Patrizio Tomei. »On-Line Stator and Rotor Resistance Estimation for Induction Motors«. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8.3 (Mai 2000), S. 570–579 (siehe S. 90).
- [46] Riccardo Marino, Patrizio Tomei und Cristiano Maria Verrelli. »A New Flux Observer for Induction Motors with On-Line Identification of Load Torque and Resistances«. In: *18th IFAC World Congress*. 2011, S. 6172–6177 (siehe S. 90).
- [47] Ph. Martin und P. Rouchon. »Flatness and sampling control of induction motors«. In: *Proc. IFAC World Congress*. IFAC. 1996, S. 389–394 (siehe S. 72).
- [48] Mamadou Mboup, Cédric Join und Michael Fliess. »A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control«. In: *Control Automation, 2007. MED '07. Mediterranean Conference on*. Juni 2007, S. 1–6. DOI: [10.1109/MED.2007.4433728](https://doi.org/10.1109/MED.2007.4433728) (siehe S. 186).
- [49] Dr.-Ing. Wolfgang Michalik. Habilitationsschrift. 2003 (siehe S. 4).
- [50] Christiaan Moons und Bart de Moor. »Parameter Identification of Induction Motor Drives«. In: *Automatica* 31.8 (1995), S. 1137–1147 (siehe S. 89).
- [51] R. Morici, C. Rossi und A. Tonielli. »Discrete-time nonlinear controller for induction motor«. In: *Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 1993. Proceedings of the IECON '93., International Conference on*. 1993, 1134–1139 vol.2. DOI: [10.1109/IECON.1993.339162](https://doi.org/10.1109/IECON.1993.339162) (siehe S. 68).
- [52] Romeo Ortega und Damia Taoutaou. »A globally stable discrete-time controller for current-fed induction motors«. In: *Systems & Control Letters*. Bd. 28. 1996, S. 123–128 (siehe S. 68).
- [53] I. Ozcelik, I. Kale und B. Baykal. »Recursive least squares implementation of the quadratically constrained IIR filter«. In: *Signal Processing Letters, IEEE* 11.2 (2004), S. 144–147. ISSN: 1070-9908. DOI: [10.1109/LSP.2003.821754](https://doi.org/10.1109/LSP.2003.821754) (siehe S. 163, 164).
- [54] R. H. Park. »Two-reaction theory of synchronous machines«. In: *AIEE Trans.* Bd. 48. 1929 (siehe S. 15).
- [55] J. E. Parkum, N.K.Poulsen und J. Holst. »Recursive forgetting algorithms«. In: *International Journal of Control* 55.1 (1992), S. 109–128 (siehe S. 104).
- [56] R. S. Pena und G.M. Asher. »Parameter sensitivity studies for induction motor parameter identification using extended Kalman filters«. In: *Power Electronics and Applications, 1993., Fifth European Conference on*. Sep. 1993, 306–311 vol.4 (siehe S. 90).

- [57] J. Reger und J. Jouffroy. »On algebraic time-derivative estimation and deadbeat state reconstruction«. In: *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on.* 2009, S. 1740–1745. DOI: [10.1109/CDC.2009.5400719](https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5400719) (siehe S. 188).
- [58] Johann Reger und Jérôme Jouffroy. »Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit«. In: *at* 56 (2008), S. 324–331 (siehe S. 186).
- [59] H.H. Rosenbrock. »The stability of linear time-dependent control systems«. In: *Journal on Electronics and Control* 15 (Juli 1963), S. 73–80 (siehe S. 41).
- [60] Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, 1993 (siehe S. 41).
- [61] Steinar Sælid, Olav Egeland und Bjarne A. Foss. »A solution to the blow-up problem in adaptive controllers«. In: *Modeling, Identification and Control* 6.1 (1985), S. 39–56. DOI: [10.4173/mic.1985.1.3](https://doi.org/10.4173/mic.1985.1.3) (siehe S. 101, 103).
- [62] A. Satelli, K. Chan und E.M. Scott, Hrsg. *Sensitivity Analysis*. John Wiley & Sons, 2000 (siehe S. 125).
- [63] Abraham Savitzky und M. J. E. Golay. »Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures.« In: *Analytical Chemistry* 36.8 (1964), S. 1627–1639. URL: <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ac60214a047> (siehe S. 183).
- [64] Dirk Schröder. *Regelung von Antriebssystemen*. Springer, 2009 (siehe S. 3, 169, 177).
- [65] Christoph Schwärzler. »Entwurf und Realisierung einer Mehrgrößenregelung für Antriebsstrang-Prüfstände«. Masterarbeit. Technische Universität Graz, 2010 (siehe S. 169, 171, 172, 179).
- [66] L.A. de Souza Ribeiro u. a. »Parameter sensitivity of MRAC models employed in IFO-controlled AC motor drive«. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 44.4 (1997), S. 536–545. ISSN: 0278-0046. DOI: [10.1109/41.605631](https://doi.org/10.1109/41.605631) (siehe S. 32, 124).
- [67] B. Stenlund und F. Gustafsson. »Avoiding windup in recursive parameter estimation«. In: *Preprints of Reglermöte 2002* (2002) (siehe S. 113).
- [68] Jennifer Stephan und Marc Bodson. »Real-Time Estimation of the Parameters and Fluxes of Induction Motors«. In: *IEEE Trans. Industry Applications* (1994) (siehe S. 86, 93, 115).

- [69] *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970 (siehe S. 103).
- [70] Hamid A. Toliyat, Emil Levi und Mona Raina. »A review of RFO induction motor parameter estimation techniques«. In: *Energy Conversion, IEEE Transactions on* 18.2 (Juni 2003), S. 271–283. ISSN: 0885-8969. DOI: [10.1109/TEC.2003.811719](https://doi.org/10.1109/TEC.2003.811719) (siehe S. 4).
- [71] L. Umanand und S. R. Bhat. »Adaptation of the rotor time constant for variations in the rotor resistance of an induction motor«. In: *Power Electronics Specialists Conference, PESC '94 Record., 25th Annual IEEE*. Juni 1994, 738–743 vol.1. DOI: [10.1109/PESC.1994.349656](https://doi.org/10.1109/PESC.1994.349656) (siehe S. 124).
- [72] M. Velez-Reyes u. a. »Output selection for tuning of field oriented controllers: steady state analysis«. In: *Industry Applications Conference, 2003. 38th IAS Annual Meeting. Conference Record of the*. Bd. 3. 2003, 2012–2017 vol.3. DOI: [10.1109/IAS.2003.1257843](https://doi.org/10.1109/IAS.2003.1257843) (siehe S. 32, 33, 35, 125).
- [73] George C. Verghese und Seth R. Sanders. »Observers for flux estimation in induction machines«. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 35.1 (Feb. 1988), S. 85–94. ISSN: 0278-0046. DOI: [10.1109/41.3067](https://doi.org/10.1109/41.3067) (siehe S. 39).
- [74] S. N. Vukosavic und M. R. Stojic. »On-line tuning of the rotor time constant for vector-controlled induction motor in position control applications«. In: *IEEE Trans. Ind. Electron.* 40 (1993) (siehe S. 32, 124).
- [75] E.A. Wan und R. Van der Merwe. »The unscented Kalman filter for nonlinear estimation«. In: *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*. 2000, S. 153–158. DOI: [10.1109/ASSPCC.2000.882463](https://doi.org/10.1109/ASSPCC.2000.882463) (siehe S. 166).
- [76] Kaiyu Wang u. a. »A Nonlinear Least-Squares Approach for Identification of the Induction Motor Parameters«. In: *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Dez. 2004, S. 3857–3861 (siehe S. 86).
- [77] Kaiyu Wang u. a. »An Online Rotor Time Constant Estimator for the Induction Machine«. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 15.2 (2007), S. 339–348 (siehe S. 86).
- [78] Chun Yang und E. Blasch. »Kalman Filtering with Nonlinear State Constraints«. In: *Information Fusion, 2006 9th International Conference on*. Juli 2006, S. 1–8. DOI: [10.1109/ICIF.2006.301553](https://doi.org/10.1109/ICIF.2006.301553) (siehe S. 159, 160).
- [79] Li-Cheng Zai, Christopher L. DeMarco und Thomas A. Lipo. »An Extended Kalman Filter Approach to Rotor Time Constant Measurement in PWM Induction Motor Drives«. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28.1 (Jan. 1992), S. 96–104 (siehe S. 90).