

Admir MEHINAGIC, BSc

# Basel III: Quantitative Methoden der Bonitätsanalyse

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



Technische Universität Graz

Betreuer:

O.Univ.-Prof. Mag. Dr.rer.soc.oec. Peter Steiner

Institut für Banken und Finanzierung

Karl-Franzens-Universität Graz

Graz, im Februar 2012

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....

(Unterschrift)

## DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei meinem Betreuer Prof. Peter Steiner bedanken, da er mir die Möglichkeit gegeben hat, mich mit der Thematik dieser Masterarbeit, auseinanderzusetzen. Ein besonderer Dank geht an meine Eltern, die mich während meines gesamten Studiums stets unterstützt und motiviert haben. Ebenso möchte ich mich bei meiner Schwester und meinen Freunden bedanken, die meine Studienzeit mit viel Freude und Spaß gefüllt haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht . . . . .	1
1.1.1	Basel I . . . . .	2
1.1.2	Basel II . . . . .	3
1.1.3	Basel III . . . . .	4
1.2	Bedeutung von Ratings . . . . .	7
1.2.1	Ratings . . . . .	7
1.2.2	Ratingagenturen . . . . .	8
1.3	Motivation der Zeitreihenanalyse von CDS-Spreads . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Kreditderivate</b>	<b>11</b>
2.1	Funktionsweise von CDS . . . . .	12
2.2	Bewertung von Credit Default Swaps . . . . .	13
2.2.1	Einleitung . . . . .	13
2.2.2	Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten . . . . .	14
2.2.3	Bepreisung von Credit Default Swaps . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Stationäre Modelle</b>	<b>20</b>
3.1	Einleitung und fundamentale Begriffe . . . . .	21
3.1.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen . . . . .	21
3.1.2	Zeitreihen und stochastische Prozesse . . . . .	22
3.1.3	Stationarität . . . . .	24
3.2	Stationäre Modelle . . . . .	28
3.2.1	Moving-Average-Modell . . . . .	29
3.2.2	Das autoregressive Modell . . . . .	30
3.2.3	Das ARMA-Modell . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Heteroskedastische Modelle</b>	<b>35</b>
4.1	Eigenschaften von Finanzzeitreihen . . . . .	35
4.2	ARCH - Modell . . . . .	36
4.2.1	Herleitung . . . . .	36
4.2.2	Stationarität . . . . .	41
4.3	GARCH - Modell . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Empirische Analyse der Zeitreihen</b>	<b>47</b>
5.1	Beschreibung des Datenmaterials . . . . .	47
5.2	Explorative Datenanalyse . . . . .	48
5.2.1	Test auf Normalverteilung . . . . .	54
5.2.2	Anpassung der Daten an eine bekannte Verteilung . . . . .	56
5.2.3	Test auf Homoskedastizität . . . . .	60
5.2.4	Test auf Stationarität . . . . .	61
5.2.5	Test auf Unabhängigkeit . . . . .	63
5.2.6	Zusammenfassung der Tests . . . . .	66
5.3	Modellierung und Evaluierung . . . . .	67
5.3.1	ARCH(1)-Modell . . . . .	69
5.3.2	ARCH(2)-Modell . . . . .	70
5.3.3	GARCH(1,1)-Modell . . . . .	71
5.3.4	GARCH(2,1)-Modell . . . . .	71
5.3.5	GARCH(1,3)-Modell . . . . .	72
5.3.6	ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modell . . . . .	72
5.4	Ergebnis der Modellierung für die restlichen Variablen . . . . .	73
5.5	Vorhersage . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung des Baseler Akkords, Quelle: [2] . . . . .	4
1.2	Eigenkapitalvorschriften von Basel II und Basel III, Quelle: [2] . . . . .	6
2.1	Credit Default Swap, Quelle: Eigene Darstellung . . . . .	13
5.1	Originalzeitreihen der vier betrachteten Großbanken . . . . .	48
5.2	Originalzeitreihen zwischen 02.07.2007 und 30.09.2010 . . . . .	49
5.3	Graphische Darstellung des Zusammenhangs der Banken . . . . .	50
5.4	Histogramme der Returns und Log>Returns . . . . .	51
5.5	Histogramme der Returns, Log>Returns und der ersten Differenz . . . . .	52
5.6	Zeitreihen der drei betrachteten Größen . . . . .	53
5.7	Q-Q-Plot der betrachteten Größen . . . . .	54
5.8	Anpassung der t-Dichten an die Daten . . . . .	57
5.9	Q-Q-Plots der t-Verteilung . . . . .	58
5.10	Autokorrelationsfunktionen der drei Größen und der Spreads von Credit Suisse . . . . .	63
5.11	Autokorrelationsfunktionen der Returns, Log>Returns und ersten Differenz . . . . .	64
5.12	Autokorrelationsfunktionen der Absolutbeträge der Variablen . . . . .	66
5.13	Autokorrelationsfunktionen der quadrierten Variablen . . . . .	67
5.14	Vorhersage des Log>Returns vom Credit Suisse Spread im GARCH(1,1)- Modell . . . . .	76
5.15	Vorhersage der Returns der Credit Suisse Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	77
5.16	Vorhersage der Returns der Uni Credit Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	78

5.17	Vorhersage der Log>Returns der Credit Suisse Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	79
5.18	Vorhersage der Log>Returns der Uni Credit Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	80
5.19	Vorhersage der ersten Differenz vom Credit Suisse Spread in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	81
5.20	Vorhersage der ersten Differenz vom Uni Credit Spread in den sechs konkurrierenden Modellen . . . . .	82

# Tabellenverzeichnis

1.1	Risikogewichte unter Basel I, Quelle: [4] S.96 . . . . .	2
1.2	Rating-Migrationstabelle (einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten in%) für Daten von 1981-2007 , Quelle: Standard & Poor's Default, Transition and Recovery: 2007 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions. . . . .	8
5.1	Ergebnis des <i>Jarque-Bera-Tests</i> . . . . .	56
5.2	Anpassungsparameter der Daten an t-Verteilung . . . . .	56
5.3	Tailmaße $\tau_t$ und $\hat{\tau}$ . . . . .	60
5.4	Ergebnis des <i>Augmented-Dickey-Fuller-Tests</i> . . . . .	62
5.5	Ergebnis des <i>Ljung-Box-Tests</i> . . . . .	65
5.6	Ergebnis des <i>Ljung-Box-Tests</i> für die Absolutbeträge der Variablen	68
5.7	Ergebnis des <i>Ljung-Box-Tests</i> für die quadrierten Variablen . . . .	68
5.8	Parameter des ARCH(1)-Modells . . . . .	69
5.9	AIC und BIC des ARCH(1)-Modells . . . . .	70
5.10	Parameter des ARCH(2)-Modells . . . . .	70
5.11	AIC und BIC des ARCH(2)-Modells . . . . .	70
5.12	Parameter des GARCH(1,1)-Modells . . . . .	71
5.13	AIC und BIC des GARCH(1,1)-Modells . . . . .	71
5.14	Parameter des GARCH(2,1)-Modells . . . . .	71
5.15	AIC und BIC des GARCH(2,1)-Modells . . . . .	72
5.16	Parameter des GARCH(1,3)-Modells . . . . .	72
5.17	AIC und BIC des GARCH(1,3)-Modells . . . . .	72
5.18	Parameter des ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modells . . . . .	73
5.19	AIC und BIC des ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modells . . . . .	73
5.20	Ergebnisse der Modelle ARCH(1) und GARCH(1,3) . . . . .	74

5.21	Ergebnisse der Modelle ARCH(2) und ARMA(1,1)/GARCH(1,1) .	74
5.22	Ergebnisse der Modelle GARCH(1,1) und GARCH(2,1) . . . . .	74
5.23	AIC- und BIC-Werte der sechs Variablen und Modelle . . . . .	75

# Kapitel 1

## Einführung

Im heutigen Bankwesen unterliegen Banken besonderen Regeln. Diese Regeln haben auch einen guten Grund, denn Banken tragen eine große Verantwortung gegenüber der Wirtschaft und damit verbunden auch gegenüber der Gesellschaft. Die Haupttätigkeit von Geschäftsbanken ist die Kreditvergabe. Um jedoch Kredite vergeben zu können, brauchen die Banken selbst Kapital. Dieses Kapital bekommen sie einerseits durch Kreditaufnahme bei der Notenbank oder am Geldmarkt und andererseits von Kunden, die ihr Geld als Spareinlagen bei den Banken anlegen. Vergibt eine Bank einen Kredit, so ist es nicht sicher, dass dieser zurückgezahlt wird. In diesem Fall ist die Rede von einem Ausfall und die Wahrscheinlichkeit mit welcher dieser Ausfall eintritt heißt Ausfallwahrscheinlichkeit. Fällt ein Kreditnehmer aus, so muss die Bank genügend Eigenmittel vorhalten, um einerseits nicht gleich in Turbulenzen zu geraten und andererseits um die Spareinlagen der Kunden nicht zu gefährden. Hier kommt man wieder zu den oben erwähnten besonderen Regeln: den Eigenkapitalvorschriften.

### 1.1 Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht

Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht wurde 1974 von den G10-Staaten, Luxemburg und der Schweiz gegründet. Ziel der Gründung war eine Vereinheitlichung der Aufsichtsregeln für die Finanzbranche und die Förderung der Zusammenarbeit und Kommunikation der Zentralbanken. Das wichtigste Anliegen dieses Ausschusses ist die Stabilität des internationalen Bankwesens.<sup>1</sup> Diese Stabilität wird in erster Linie durch die Eigenkapitalvorschriften erzielt, welche dazu beitragen

---

<sup>1</sup>Vgl. [1] S.13

Kreditausfälle zu kompensieren.<sup>2</sup>

### 1.1.1 Basel I

Unter Basel I, oder auch dem ersten Baseler Akkord, versteht man das im Jahr 1988 geschlossene Abkommen, welches die Kreditvergabe und die damit verbundenen Risiken mit dem Eigenkapital der Banken koppelte. Der Baseler Akkord wurde 1993 in eine EU-Richtlinie umgesetzt.<sup>3</sup> Ein Hauptgrund für diesen ersten Baseler Akkord war es, dass nationale Aufsichtsbehörden durch die individuellen Eigenkapitalvorschriften Wettbewerbsvorteile für ihre eigenen nationalen Banken bewirken wollten und dies zur Destabilisierung des gesamten Finanzmarktes beitrug.

Die bei Basel I aufgestellte Regel legte fest, dass Banken mindestens acht Prozent an Eigenkapital für ihre gewichteten Risikoaktiva vorhalten müssen. Die durch diese Regel festgelegte Quote wird als Cook-Ratio bezeichnet und kann folgendermaßen errechnet werden:<sup>4</sup>

$$\text{Cook-Ratio} = \frac{\text{bankaufsichtliches Eigenkapital}}{\text{gewichtete Risikoaktiva}} \geq 8\%$$

Das Eigenkapital gliedert sich nach Basel I in zwei Teile: Kernkapital und Ergänzungskapital, auf das später ausführlicher eingegangen wird.

Die erwähnten Risikoaktiva wurden in vier unterschiedliche Kategorien unterteilt:<sup>5</sup>

Schuldnerkategorie	Staaten und Zentralbanken	Banken	Grundpfandrechtl. besicherte Forderungen	Unternehmen
Risikogewicht	0%	20%	50%	100%

**Tabelle 1.1:** Risikogewichte unter Basel I, Quelle: [4] S.96

<sup>2</sup>Vgl. [2]

<sup>3</sup>Vgl. [3] S.184

<sup>4</sup>Vgl. [4] S.95

<sup>5</sup>Vgl. [4] S.96f

### 1.1.2 Basel II

Die Hauptkritikpunkte an Basel I waren einerseits die Fokussierung auf das Kreditrisiko, wobei andere Risiken wie das Marktrisiko oder das operationelle Risiko nicht berücksichtigt wurden und andererseits die Diversifikationseffekte im Kreditportfolio.<sup>6</sup> Unter Letzterem ist folgendes zu verstehen: Betrachtet man die unter Basel I getroffenen Schuldnerkategorien und die dazugehörigen Risikogewichte, so stellt man fest, dass beispielsweise keine Unterschiede zwischen einem gut und einem schlecht diversifizierten Kreditportfolio gemacht werden. Es wird angenommen, dass jeder Kreditnehmer der selben Schuldnerkategorie das gleiche Risiko für die Bank darstellt, was in der Realität nicht der Fall ist.

Basel II sieht vor die vier Risikoklassen aus Basel I weiter zu verfeinern. Diese Verfeinerung soll durch externe Ratingagenturen, oder durch interne Ratingmodelle bewirkt werden. Die unterschiedliche Risikobelastung für die Bank, kann durch unterschiedliche Eigenkapitalunterlegung dargestellt werden, welche den unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten des Schuldners entspricht. Für die Bank stellt sich die Frage: Wie hoch ist die Ausfallwahrscheinlichkeit der einzelnen Kunden? Ist es ein guter, also sicherer, Kunde der eine geringe Ausfallwahrscheinlichkeit aufweist, so ist nach Basel II eine kleinere Eigenkapitalrücklage zu bilden, als bei einem Kunden mit einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit.

### Die drei Säulen von Basel II<sup>7</sup>

Im Jahr 2004 erfolgte die aktuell geltende, internationale und einheitliche Festlegung des zweiten Baseler Akkords, welcher auf folgenden drei Säulen beruht:

- Säule 1: Vorschriften zur Eigenkapitalunterlegung
- Säule 2: Qualitative Anforderungen an den Aufsichtsprozess
- Säule 3: Transparenz durch Offenlegungspflichten

Bei der ersten Säule geht es in erster Linie um qualitative Vorschriften zur Eigenkapitalunterlegung des risikobehafteten Geschäfts. Da Kreditinstitute zu einem sogenannten „moral hazard“-Verhalten neigen können und somit unverantwortli-

---

<sup>6</sup>Vgl. [4] S.97

<sup>7</sup>Vgl. [3] S.186

che Risiken eingehen, werden diese durch die erste Säule zur Risikobeteiligung und Risikovorsorge gezwungen. Die Eigenkapitalvorschriften wirken somit dreifach:

- das Insolvenzrisiko wird reduziert
- Anreiz zum moral hazard-Verhalten wird reduziert
- Eingriff durch Aufsichtsbehörde zur Prävention von Insolvenz

Die zweite Säule beschäftigt sich mit dem Überprüfungsprozess, der in Säule 1 festgelegten Vorschriften, durch die jeweiligen nationalen Institutionen. In Österreich sind dies die Österreichische Nationalbank und die Finanzmarktaufsicht. Die Transparenz und die Bereitstellung von Informationen wird in Säule 3 durch die Offenlegungspflichten bewirkt.

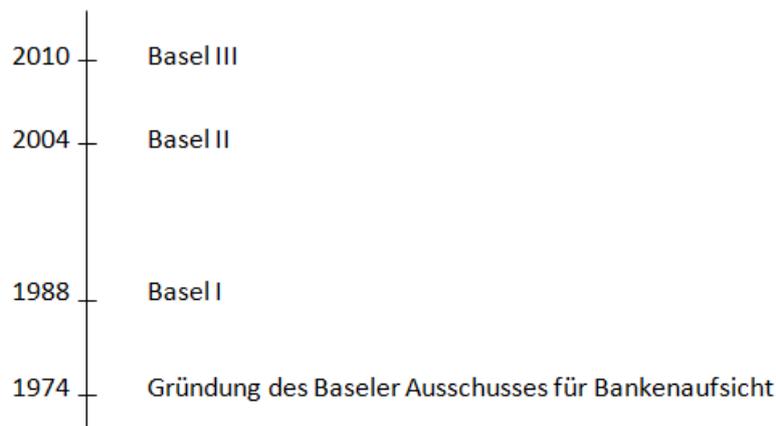


Abbildung 1.1: Entwicklung des Baseler Akkords, Quelle: [2]

### 1.1.3 Basel III

Als Reaktion auf die im Jahr 2007 ausgebrochene Finanz- und Wirtschaftskrise beschloss der Baseler Ausschuss im Jahr 2010, unter dem Namen Basel III, ein Reformpaket welches eine strengere Bankenregulierung vorsieht. Die Finanz- und Wirtschaftskrise hat gezeigt, dass die aktuell gültige Bankenregulierung nicht in der Lage ist dem wichtigsten Anliegen des Baseler Ausschusses nachzukommen: der Erhaltung der Stabilität des Finanzsektors.<sup>8</sup>

Grundsätzlich besteht das neue Reformpaket Basel III, das Ende 2010 entgültig

---

<sup>8</sup>Vgl. [3] S.193

formuliert wurde und dessen Umsetzung schrittweise ab 2013 beginnen soll aus folgenden Regelungen:

- Verbesserung der Qualität des aufsichtsrechtlichen Eigenkapitals durch einen höheren Anteil an hartem Kernkapital.
- Erhöhung der Eigenmittelunterlegung für das Kontrahentenrisiko: Gehen Banken als Kontrahenten Risiken in derivativen Geschäften ein, so müssen sie Modelle vorweisen bzw. Szenarien simulieren, welche die entstehenden Verluste der Derivate bei einem Ausfall abbilden.
- Einführung von Liquiditätsstandards durch die Liquidity Coverage Ratio, welche gewährleisten, dass die Bank in einem Stressszenario genügend liquide Mittel halten soll, um Barabflüssen 30 Tage entgegen wirken zu können. Dazu kommt die Net Stable Funding Ratio, welche einen Nachweis verlangt, dass die Bank über ausreichend langfristige Finanzierungsquellen verfügt.
- Einführung einer Verschuldungsquote, der sog. Leverage-Rate.

Dies sind grob skizziert einige Neuerungen, die Basel III mit sich bringt. Das Thema mit dem sich die vorliegende Arbeit beschäftigt ist die Bonitätsanalyse und mit dieser verbunden ist die Wichtigkeit eines sinnvollen Ratings bzw. einer Bonitätseinstufung um dementsprechend den richtigen Anteil an Eigenkapital reservieren zu können. Aus diesem Grund wird nun auf den ersten der vier oben angeführten Punkte ausführlicher eingegangen.

### **Eigenkapitalvorschriften unter Basel III<sup>9</sup>**

Welche Art von Kapital und in welcher Höhe eine Bank vorhalten muss, um ihre Risiken absichern zu können, wird durch die Eigenkapitalvorschriften bestimmt.

Abbildung 1.2 zeigt den Übergang von Basel II auf Basel III bezüglich der Eigenkapitalvorschriften. Eine Bank muss weiterhin Eigenkapital in Höhe von acht Prozent im Verhältnis zu ihren Risikopositionen vorweisen. Wird diese Grenze unterschritten, so werden von der Bankaufsicht Maßnahmen getroffen um schlimmere Gefahren abzuwenden. Dieses Eigenkapital wird unterteilt in Kernkapital und Ergänzungskapital. Im Unterschied zu Basel II werden unter Basel III Banken da-

---

<sup>9</sup>Vgl. [2]

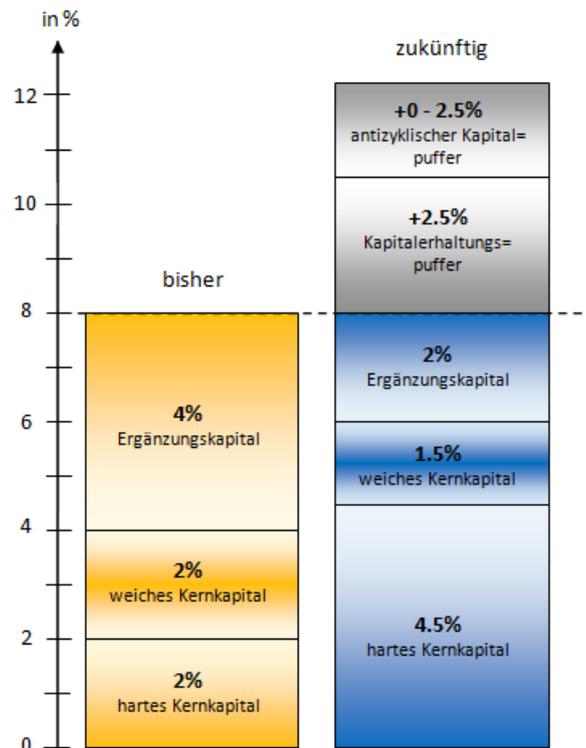


Abbildung 1.2: Eigenkapitalvorschriften von Basel II und Basel III, Quelle: [2]

zu verpflichtet einen Zusatzpuffer einzurichten, welcher ebenso stabilisierend und präventiv wirken soll.

### *Eigenkapital*

Ein wichtiger Bestandteil vom Eigenkapital ist das Kernkapital. Dieses ist für die Absicherung von Risiken aufgrund seiner Qualität besonders wichtig. Dabei unterscheidet man zwischen hartem und weichem Kernkapital. Gerade für die Stabilität einer Bank ist hartes Kernkapital besonders wichtig, welches z.B. bei Aktiengesellschaften aus reinem bilanziellen Eigenkapital, also Grundkapital und Gewinnrücklagen, besteht.<sup>10</sup>

Mit Basel III wird die Struktur des Eigenkapitals geändert und die Quote für hartes Kernkapital erhöht. Wie in Abbildung 1.2 ersichtlich ist, wird ebenso die gesamte Kernkapitalquote erhöht, welche angibt wie viele risikotragende Positionen einer Bank – in erster Linie sind dies Kredite – durch Kernkapital gedeckt

<sup>10</sup>Vgl. [5] S.135

sein müssen.

Weiches Kernkapital stellen hingegen Positionen dar, die kein hartes Kernkapital sind, jedoch dem Eigenkapital zuzuordnen sind und der Bank möglichst unbefristet zur Verfügung stehen.

Weiters zählt zum Eigenkapital das Ergänzungskapital, welches kein Kernkapital ist (z.B.: Genussmittel).<sup>11</sup>

### *Zusatzpuffer*

Basel III sieht eine weitere Sicherheitsmaßnahme vor, den Zusatzpuffer, welcher dazu dient, dass Banken ihre Risiken besser auffangen und Krisensituationen aus eigener Kraft und ohne staatliche Hilfe überstehen.

Dieser Zusatzpuffer besteht aus dem Kapitalerhaltungspuffer und dem antizyklischen Kapitalpuffer.

Der Kapitalerhaltungspuffer dient dazu, dass das Kapital in Krisensituationen nicht zu schnell verbrennt und erhöht aufgrund seiner Qualität die Kernkapitalquote.<sup>12</sup> Hält eine Bank die vorgegebene Quote für diesen Puffer nicht ein, so kann sie bspw. durch Beschränkung der Dividende sanktioniert werden.

Der zweite Teil des Zusatzpuffers ist der antizyklische Kapitalpuffer, welcher eine Neuerung aus volkswirtschaftlicher Sicht darstellt und die Verluste der Bank in wirtschaftlich schwierigen Zeiten durch in wirtschaftlich guten Zeiten angelegtem Kapital ausgleichen soll. Die Umsetzung des antizyklischen Kapitalpuffers ist laut Basel III den jeweiligen nationalen Aufsichtsbehörden überlassen.

## **1.2 Bedeutung von Ratings**

### **1.2.1 Ratings**

Ratings können verstanden werden als die Wahrscheinlichkeit der zukünftigen Zahlungsfähigkeit eines Schuldners. Aufgrund ökonomischer Kennzahlen werden Schuldner in verschiedene Klassen eingeteilt, welche ihrem individuellen Bonitätsgrad entsprechen. Diese Ratingklassen sind von der Struktur her bei den meisten Ratingagenturen sehr ähnlich aufgebaut: AAA (Triple A), AA (Double A), A (Single A), BBB (Triple B), BB (Double B), B (Single B), CCC (Triple C), CC

---

<sup>11</sup>Vgl. [5] S.135f

<sup>12</sup>Vgl. [5] S.135f

(Double C), C (Single C), D (Default). Dazwischen gibt es weitere Einteilungen wie z.B.: AA-, B+, etc.<sup>13</sup>

Aufgrund der Richtlinie Basel II stellt sich für jede Bank die Frage: Wie hoch ist die Ausfallwahrscheinlichkeit meines Kunden? Eine Antwort auf diese Frage geben die Ratings. Nach Basel II hat jede Bank die Möglichkeit eigene Ratingmodelle aufzustellen, die von den Aufsichtsbehörden begutachtet werden, oder Ratingagenturen zu beauftragen um die Bonität ihrer Kunden zu bewerten. Je nach Bonitätsgrad muss die Bank bei schlechten Kunden mehr, bei guten weniger Eigenkapital reservieren.

Ratings sind somit nichts anderes als Noten, wobei anzumerken ist, dass der Abstand zwischen den einzelnen Noten, z.B. AAA und AA vom Abstand zwischen AA und A, verschieden ist. Das soll heißen, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Klassen unterschiedlich sind. Auskunft über die Übergangswahrscheinlichkeiten geben sogenannte Migrationstabellen.<sup>14</sup>

Von/Nach	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	88.53	7.70	0.46	0.09	0.09	0.00	0.00	0.00	3.15
AA	0.60	87.50	7.33	0.54	0.06	0.10	0.02	0.01	3.84
A	0.04	2.07	87.21	5.36	0.39	0.16	0.03	0.06	4.67
BBB	0.01	0.17	3.96	84.13	4.03	0.72	0.16	0.23	6.61
BB	0.02	0.05	0.21	5.32	75.62	7.15	0.78	1.00	9.84
B	0.00	0.05	0.16	0.28	5.92	73.00	3.96	4.57	12.05
CCC	0.00	0.00	0.24	0.36	1.02	11.74	47.38	25.59	13.67

**Tabelle 1.2:** Rating-Migrationstabelle (einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten in%) für Daten von 1981-2007, Quelle: Standard & Poor's Default, Transition and Recovery: 2007 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions.

In Tabelle 1.2 bedeutet NR, dass das Unternehmen am Ende des Jahres nicht mehr geratet wurde. Die Klassen C, CC und CCC wurden unter CCC zusammengefasst.

### 1.2.2 Ratingagenturen

In den letzten Jahren waren Ratingagenturen immer wieder großer Kritik ausgesetzt. Späte Warnhinweise oder Fehlbeurteilungen waren Auslöser dieser Kritik.

<sup>13</sup>Vgl. [6] S.147

<sup>14</sup>Vgl. [6] S.147f

Grundsätzlich sind Ratingagenturen etwas Gutes, denn sie bauen die asymmetrische Informationsverteilung ab. Sie haben eine Vermittlungsfunktion zwischen Kapitalgebern und Kapitalnehmern und dies ist im Großen und Ganzen begrüßenswert. Doch auch wenn sie zum Abbau der Intransparenz beitragen, führen sie neue Intransparenz ein, indem sie die methodischen Grundlagen ihrer Ratings nicht veröffentlichen.<sup>15</sup> Ein weiterer Kritikpunkt ist auch die Tatsache, dass die zu beurteilenden Unternehmen dafür bezahlen ein Rating zu erhalten. Bekommen sie keine zufriedenstellende Bonitätsnote von einer Ratingagentur, so gehen sie zu einer anderen und lassen ihr Geld dort. Dies ist für eine objektive Beurteilung nicht förderlich.

### 1.3 Motivation der Zeitreihenanalyse von CDS-Spreads

Man hat bislang gesehen, wieso die Bonitätsanalyse so wichtig ist. Doch ebenso wurde gezeigt, dass Ratingagenturen und ihre Ratings in den letzten Jahren in Misskredit geraten sind. Es gibt genügend Beispiele dafür, dass Unternehmen trotz gutem Rating Insolvenz anmelden mussten oder nur durch staatliche Hilfe gerettet werden konnten<sup>16</sup>. Doch sehr oft wenn so ein Ereignis eingetreten ist, hat der Kapitalmarkt im Vorhinein gewisse Anzeichen dafür gegeben indem bspw. die Credit Spreads des Unternehmens gestiegen sind, seine Aktien gefallen, oder auch dadurch, dass seine CDS-Spreads gestiegen sind.

Sieht man sich die CDS-Spreads der insolvent gegangenen Unternehmen an und vergleicht diese im Zeitverlauf mit dem Rating der Ratingagenturen, dann stellt man fest, dass CDS-Spreads als Indikatoren dienen können, da aufgrund deren Bepreisung eine Bijektion zwischen ihnen und den Ausfallwahrscheinlichkeiten existiert, was noch im zweiten Kapitel gezeigt wird. Doch nicht nur insolvent gegangene Unternehmen betrifft dieser Zusammenhang, sondern die Ratingabstufungen im Allgemeinen.

Aus diesem Grund widmet sich die vorliegende Arbeit dem Thema der Zeitreihenanalyse der CDS-Spreads, die als Indikatoren für die Bonitätsentwicklung dienen können.

---

<sup>15</sup>Vgl. [4] S.92

<sup>16</sup>Enron im Jahr 2001 oder Lehman Brothers Inc im Jahr 2008

Diese Art von Analyse ist im Vergleich zu den Standardmethoden, wie etwa der Bilanzanalyse, viel dynamischer, denn die eher statischen Ratings der Ratingagenturen sind oft auf eine Dauer von mehreren Monaten ausgelegt und reagieren somit träge auf Marktänderungen, wobei die Bewertung der Kreditwürdigkeit durch den Markt, eben durch die CDS-Spreads, sehr zeitnah ist.

Doch gerade in der heutigen Finanzwelt werden dynamischere Methoden immer wichtiger, um auf den sich schnell ändernden Kapitalmarkt reagieren zu können.

Ebenso stellt man immer wieder weit in die Vergangenheit reichende Autokorrelationen der Finanzzeitreihen fest, was ebenso in dieser Arbeit, bezüglich der CDS-Zeitreihen, untersucht wird, um dadurch zu versuchen zukünftige Entwicklungen der CDS-Spreads, oder deren Volatilität zu prognostizieren.

## Kapitel 2

# Kreditderivate

Dieses Kapitel gibt zunächst eine Einführung in die Kreditderivate, beschreibt die Funktionsweise von CDS (*credit default swaps*) und zeigt im Anschluss einen formalen Ansatz für die Bewertung von CDS auf.

Geht eine Bank ein Geschäft ein, so entsteht für sie eine Ungewissheit über die zukünftigen Erträge dieses Geschäftes. Diese Ungewissheit zieht einen möglichen Ausfall oder eine Bonitätsverschlechterung des Geschäftspartners mit sich und wird vereinfachend als Risiko bezeichnet. Ist bei diesem Geschäft die Rede von einem Kreditgeschäft, so spricht man vom Kreditrisiko. Dieser Begriff ist für das Verständnis von Kreditderivaten sehr wichtig, denn Kreditderivate sind Produkte, die es ermöglichen das Kreditrisiko eines Geschäfts teilweise oder vollständig von anderen Risikofaktoren zu lösen und separat zu handeln.<sup>1</sup>

Betrachtet man die Entwicklungen in den letzten Jahren im Bereich des Risikomanagements, dann ist es nicht verwunderlich, dass der Markt für Kreditderivate den rasantesten Aufschwung erfahren hat. Das immer wichtiger werdende Management des Risikos hat dazu beigetragen, dass das Handelsvolumen beträchtlich gestiegen ist.

Finanzinstitute konnten in der Vergangenheit bei Übernahme eines Kreditrisikos nur warten und das Beste hoffen. Nun haben sie die Möglichkeit ihr Kreditrisiko-Portfolio selbst zu steuern. Sie können sich aussuchen welche Risiken sie selbst tragen und gegen welche sie sich mit Hilfe von Kreditderivaten absichern.

---

<sup>1</sup>Vgl. [7] S.2f

Somit zählen Banken zur größten Käufergruppe von Kreditderivaten. Da Versicherungen anderen Regulierungen unterliegen sind diese eher dazu bereit Kreditrisiken zu tragen. Sie zählen somit zur größten Verkäufergruppe der Kreditderivate.<sup>2</sup>

In den letzten Jahren wurde der kleine Markt der Kreditderivate extrem aufgeblasen, da viele Institutionen damit Geld verdienen wollten, wodurch diese Finanzprodukte auch so sehr in Misskredit geraten sind. Grundsätzlich sind Kreditderivate jedoch nichts Schlechtes, denn sie übertragen Kreditrisiken von einem Kreditgeber zu jemandem, der diese Risiken tragen möchte und dafür eine Bezahlung erhält, sie sogenannte Prämie (*spread*).

## 2.1 Funktionsweise von CDS

Wie bei allen Derivaten gibt es auch bei Kreditderivaten unterschiedlichste Gestaltungsmöglichkeiten. Bedenkt man, dass Kreditderivate überwiegend auf dem OTC-Markt (*over the counter market*) gehandelt werden und nicht an der Börse, dann kann man sich vorstellen, dass den Möglichkeiten des individuellen Kontraktes keine Grenzen gesetzt sind und somit die Anzahl an verschiedenen Arten von Kreditderivaten sehr groß ist.

Zu den am häufigsten gehandelten Kreditderivaten zählen jene mit einem einzelnen Referenzschuldner. Besonders beliebt und jene mit dem größten Handelsvolumen sind CDS.<sup>3</sup>

Gehen zwei Parteien einen CDS-Kontrakt ein, so sichert sich der Käufer des CDS, auch Sicherungsnehmer genannt, gegen den Ausfall eines sogenannten Referenzunternehmens, des Unternehmens auf das sich der Vertrag bezieht, ab. Der Sicherungsgeber, welcher gewillt ist das Ausfallsrisiko des Referenzunternehmens zu tragen, verlangt dafür eine regelmäßige Risikoprämie  $S_0^{CDS}(T)$ , die von der Laufzeit  $T$  dieser Absicherung abhängig ist.

Der Ausfall des Referenzunternehmens wird als Kreditereignis bezeichnet. Tritt nun ein Kreditereignis ein, so hat der Sicherungsgeber dem Sicherungsnehmer ei-

---

<sup>2</sup>Vgl. [8] S.612

<sup>3</sup>Vgl. [7] S.12

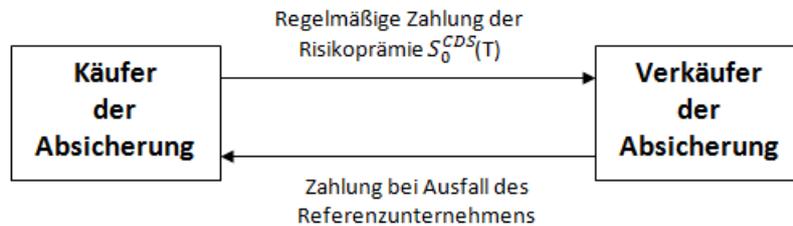


Abbildung 2.1: Credit Default Swap, Quelle: Eigene Darstellung

ne Ausgleichszahlung zu leisten. Die Höhe dieser Zahlung richtet sich nach der Differenz zwischen Restwert  $R$  und dem Nominal  $N$  des Referenzunternehmens.<sup>4</sup> Sobald ein Unternehmen Insolvenz anmeldet, sind die Gläubiger daran interessiert Ansprüche auf die Vermögenswerte geltend zu machen. Das aus diesen Vermögenswerten entstandene Kapital wird in Relation zu den bestehenden Forderungen gesetzt und als Verwertungsrate (*recovery rate*) bezeichnet.<sup>5</sup> Somit ergibt sich die Höhe der Ausgleichszahlung durch  $(1 - R)N$ .

## 2.2 Bewertung von Credit Default Swaps

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Bewertung von CDS. Die Annahme die getroffen wird ist, dass es keinen Ausfall des Kontrahenten, also der CDS-Verkäuferseite, gibt. Dies soll nur eine Motivation und Einführung für die Bewertung darstellen, da sich der Kern dieser Arbeit auf die Zeitreihenanalyse der CDS-Prämien bezieht. Die dabei verwendete Literatur [9] liefert einen verständlichen mathematischen Ansatz zur Preistheorie der CDS und stellt die Hauptliteraturquelle dieses Abschnittes dar.

### 2.2.1 Einleitung

Wie bereits erwähnt gibt es eine Vielzahl an verschiedenen CDS-Verträgen. Bei einem *binary CDS* wird im Falle eines Ausfalls eine im Vorhinein festgelegte Summe an den Käufer ausbezahlt. Ein *basket CDS* wird so definiert, dass ein Vertrag auf eine Gruppe von Referenzunternehmen abgeschlossen wird und eine Auszahlung

<sup>4</sup>Vgl. [7] S.24

<sup>5</sup>Vgl. [8] S.582

erfolgt, wenn die erste Referenzeinheit ausfällt.

In diesem Abschnitt jedoch werden *plain vanilla CDS* bewertet. Abgesehen von der Annahme über den Ausfall der Verkäuferseite, wird weiters angenommen, dass Ausfallwahrscheinlichkeit, Zinsraten und die Verwertungsrate stochastisch unabhängig sind.

### 2.2.2 Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten

Die Bewertung eines CDS bedarf der Schätzung einer risikoneutralen Wahrscheinlichkeit, welche sich auf den Ausfall der Referenzeinheit zu verschiedenen Zeitpunkten bezieht. Die von der Referenzeinheit ausgegebenen Anleihen bieten für diese Schätzung eine Hauptdatenquelle. Geht man davon aus, dass der einzige Grund, weshalb eine Unternehmensanleihe weniger kostet als eine entsprechende risikolose Anleihe,<sup>6</sup> die Möglichkeit eines Ausfalls des Unternehmens ist, dann folgt daraus, dass der Barwert der Ausfallskosten der Differenz zwischen dem Wert der risikolosen Anleihe und dem Wert der Unternehmensanleihe entspricht.

Unter Verwendung dieser Beziehung kann, über ein breiteres Spektrum an, von der Referenzeinheit emittierten, Unternehmensanleihen der Barwert der zukünftigen Ausfallkosten berechnet werden. Dadurch kann eine Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit der Referenzeinheit zu verschiedenen zukünftigen Zeitpunkten erfolgen.

Somit kann die folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$CP = e^{-(r+s)T} N,$$

wobei  $CP$  den Preis der Unternehmensanleihe (*corporate bond*),  $N$  die Nominale,  $T$  die Laufzeit und  $s$  die Differenz zwischen der risikolosen Zinsrate  $r$  und der Zinsrate der Unternehmensanleihe darstellt. Die in der Praxis gängigste Methode Kreditderivate zu bewerten ist die Berechnung von  $s$ .

Ein einfaches Beispiel soll die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit illustrieren.

#### *Beispiel 1.*

Notation: Nominale  $N$ , risikolose Zinsrate  $r$ , Zinsrate der Unternehmensanleihe

---

<sup>6</sup>Staatsanleihen von Triple A bewerteten Staaten können als nahezu risikolos angesehen werden und werden daher oft als Benchmark benutzt.

$r'$ , Ausfallwahrscheinlichkeit der Referenzeinheit  $p$ .

Gegeben:

- risikolose Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit  $T = 5$  Jahre, mit einer Nominal von 100 und einer jährlichen risikolosen Zinsrate  $r = 5\%$
- Unternehmens-Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit  $T = 5$  Jahre, mit einer Nominal von 100 und einer jährlichen Zinsrate  $r = 5,5\%$

Der Wert der risikolosen Anleihe beträgt

$$P = e^{-r \cdot T} \cdot N = e^{-0.05 \cdot 5} \cdot 100 = 77.8801,$$

und der Wert der Unternehmensanleihe beträgt

$$P' = e^{-r' \cdot T} \cdot N = e^{-0.055 \cdot 5} \cdot 100 = 75.9572.$$

Der Barwert der Ausfallkosten ist somit

$$P - P' = 77.8801 - 75.9572 = 1.9229. \quad (2.1)$$

An dieser Stelle wird eine Annahme bezüglich der Verwertungsrate getroffen. Diese soll hier null betragen und ergibt somit eine Schadenhöhe von 100 am Ende der Laufzeit. Der erwartete Verlust in einer risikoneutralen Welt ist somit gegeben durch  $100 \cdot p$  und der erwartete Barwert lautet

$$100 \cdot p \cdot e^{-0.05 \cdot 5}. \quad (2.2)$$

Setzt man die Ausdrücke (2.1) und (2.2) gleich, folgt

$$100 \cdot p \cdot e^{-0.05 \cdot 5} = 1.9229 \Rightarrow p = 0.0247.$$

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Referenzeinheit in den nächsten fünf Jahren bei 2,47%.

Dies war ein kleines einführendes Beispiel zur Motivation, jedoch sind die Beispiele in der Praxis deutlich aufwendiger, denn einerseits ist die Verwertungsrate nicht null und muss auch geschätzt werden und andererseits sind die meisten Anleihen keine Nullkuponanleihen.

Die Annahme, dass die Schadenhöhe bei Ausfall die Summe aus dem Nominalwert und der angefallenen Zinsen entspricht, ist die üblichste und somit kann die Auszahlung LGD (*loss given default*) dargestellt werden durch:

$$LGD = N - RN [1 + A(t)] = N [1 - R - A(t)], \quad (2.3)$$

wobei neben Nominalwert  $N$  und Verwertungsrate  $R$ , die Funktion  $A(t)$  die Höhe der angefallenen Zinsen der Unternehmensanleihe zur Zeit  $t$  als Prozentsatz des Nominalwertes darstellt.

### Analyse der Ausfälle zu diskreten Zeitpunkten

Es werden nun  $n$  Anleihen ausgewählt, die in keinem Zusammenhang mit der Referenzeinheit stehen. Zusätzlich wird angenommen, dass ein Ausfall nur zu den Fälligkeiten der  $n$  Anleihen statt finden kann.

Dabei stellt der Zeitpunkt  $t_i$  die Fälligkeit der  $i$ -ten Anleihe dar und es gilt  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ .

Notation:

- $B_j \dots$  der aktuelle Preis der  $j$ -ten Anleihe
- $G_j \dots$  der aktuelle Preis der  $j$ -ten risikolosen Anleihe
- $F_j(t) \dots$  Preis eines Forwards der zugrunde liegenden  $j$ -ten risikolosen Anleihe mit Fälligkeit  $t$ , wobei  $t < t_j$
- $v(t) \dots$  Barwert von 1, erhalten zum Zeitpunkt  $t$
- $C_j(t) \dots$  Schadenhöhe der  $j$ -ten Anleihe zum Ausfallszeitpunkt  $t < t_j$
- $R_j(t) \dots$  Verwertungsrate der  $j$ -ten Anleihe zum Ausfallszeitpunkt  $t < t_j$
- $\alpha_{ij} \dots$  Barwert des Verlustes der  $j$ -ten Anleihe zum Ausfallszeitpunkt  $t_i$  im Verhältnis zum Wert der risikolosen Anleihe
- $p_i \dots$  risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $t_i$

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Zinsrate deterministisch ist und dass sowohl die Verwertungsrate als auch die Schadenhöhen bekannt sind. Später wird gezeigt, wie diese Annahmen relaxiert werden können.

Da die Zinsrate deterministisch ist, ist der Preis der  $j$ -ten risikolosen Anleihe zum Zeitpunkt  $t$  gleich  $F_j(t)$ .

Tritt ein Ausfall zum Zeitpunkt  $t$  ein, verwertet der Halter der Anleihe den angefallenen Schaden  $C_j(t)$  mit der Verwertungsrate  $R_j(t)$ . Somit folgt

$$\alpha_{ij} = v(t_i) [F_j(t_i) - R_j(t_i) \cdot C_j(t_i)]. \quad (2.4)$$

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für den Verlust  $\alpha_{ij}$  ist  $p_i$  und somit kann der Barwert der Verluste der  $j$ -ten Anleihe angegeben werden durch

$$G_j - B_j = \sum_{i=1}^j p_i \cdot \alpha_{ij} \quad (2.5)$$

und daraus kann durch Umformung

$$G_j - B_j = p_j \cdot \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{j-1} p_i \cdot \alpha_{ij} \quad (2.6)$$

die riskoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit geschrieben werden als

$$p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i \cdot \alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}. \quad (2.7)$$

### Erweiterung der Analyse auf ein stetiges Modell

Die Annahme, dass der Ausfall nur zu Fälligkeiten der Bonds geschehen kann, führte zur Gleichung (2.7). Nun wird das Modell erweitert indem man zulässt, dass der Ausfall zu beliebigen Zeitpunkten eintreten kann. Sei  $q(t)\Delta t$  die Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \Delta t$ , betrachtet vom Zeitpunkt null aus, dann kann die Ausfallintensität  $h(t)$  so definiert werden, dass  $h(t)\Delta t$  die Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \Delta t$ , vom Zeitpunkt  $t$  betrachtet unter der Voraussetzung, dass zwischen den Zeitpunkten null und  $t$  kein Ausfall eingetreten ist. Die Variablen  $q(t)$  und  $h(t)$  hängen folgendermaßen formal zusammen

$$q(t) = h(t) \cdot e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau}. \quad (2.8)$$

$q(t)$  wird auch Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte genannt.

Unter der Annahme, dass  $q(t)$  konstant ist und  $q_i$ , mit  $t_{i-1} < t < t_i$ , entspricht, setzt man

$$\beta_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(t) (F_j(t) - \hat{R} \cdot C_j(t)) dt \quad (2.9)$$

und erhält auf ähnlichem Weg für die Entwicklung von Gleichung (2.7)

$$q_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i \cdot \beta_{ij}}{\beta_{jj}}. \quad (2.10)$$

Die Variable  $\hat{R}$  stellt dabei die aus empirischen Daten geschätzte Verwertungsrate dar.

### 2.2.3 Bepreisung von Credit Default Swaps

Dieser Abschnitt widmet sich der Bepreisung eines *plain vanilla* CDS mit einem Nominalwert von 1. Eine weitere Annahme wird getroffen und zwar die Unabhängigkeit von Ausfallereignissen, der risikolosen Zinsrate und der Verwertungsrate. Weiters wird für die Schadenhöhe als Schätzung die Summe von Nominalwert und angefallenen Zinsen verwendet.

Notation:

- $q(t)$  ... risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte zum Zeitpunkt  $t$
- $u(t)$  ... Barwert der periodenbezogenen Zahlungen in Höhe von 1 zu Zahlungszeitpunkten zwischen null und  $t$
- $e(t)$  ... Barwert der angefallenen Zahlungen zum Zeitpunkt  $t - t^*$ , wobei  $t^*$  ein Zahlungszeitpunkt unmittelbar vor  $t$  ist
- $v(t)$  ... Barwert von 1, erhalten zum Zeitpunkt  $t$
- $w$  ... Summe der periodenbezogenen Prämien, die vom CDS-Käufer bezahlt wurden
- $s$  ... Wert von  $w$ , welcher den Wert des CDS zu null macht
- $\pi$  ... risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, dass kein Ausfallereignis während der Laufzeit des CDS eintritt
- $A(t)$  ... angefallene Zinsen des Referenzunternehmens zur Zeit  $t$ , als Prozentsatz des Nominalwerts

Die Größe  $\pi$  kann mit Hilfe von  $q(t)$  berechnet werden

$$\pi = 1 - \int_0^T q(t) dt \quad (2.11)$$

und kann gesehen werden als die Gegenwahrscheinlichkeit eines Ausfalls zum Zeitpunkt  $T$ . Die Zahlungen der Prämie finden so lange statt, bis das Ausfallereignis

eintritt. Tritt der Ausfall zum Zeitpunkt  $t < T$  ein, beträgt der Barwert der Zahlungen

$$w \cdot (u(t) + e(t)). \quad (2.12)$$

Tritt kein Ausfall ein, beträgt der Barwert der Zahlungen

$$w \cdot u(T). \quad (2.13)$$

Der erwartete Barwert der Zahlungen ist somit

$$w \cdot \int_0^T q(t)(u(t) + e(t)) dt + w\pi u(T). \quad (2.14)$$

Mit dieser Herleitung und der Gleichung (2.3) kann die erwartete risikoneutrale Auszahlung des CDS ausgedrückt werden durch

$$1 - (1 + A(t)) \cdot \hat{R} = 1 - \hat{R} - A(t) \cdot \hat{R}. \quad (2.15)$$

Der Barwert dieser Auszahlung ist somit gegeben durch

$$\int_0^T (1 - \hat{R} - A(t) \cdot \hat{R}) \cdot q(t) \cdot v(t) dt. \quad (2.16)$$

Wie bereits erwähnt, stellt der Wert des CDS die Differenz zwischen dem Barwert der erwarteten Auszahlung und dem Barwert der einbezahlten Prämien dar

$$\int_0^T (1 - \hat{R} - A(t) \cdot \hat{R}) \cdot q(t) \cdot v(t) dt - w \cdot \int_0^T q(t)(u(t) + e(t)) dt + w\pi u(T). \quad (2.17)$$

Die Prämie  $s$  des CDS ist jener Wert von  $w$ , der den Ausdruck (2.17) null werden lässt und ist gegeben durch

$$s = \frac{\int_0^T (1 - \hat{R} - A(t) \cdot \hat{R}) \cdot q(t) \cdot v(t) dt}{\int_0^T q(t)(u(t) + e(t)) dt + w\pi u(T)}. \quad (2.18)$$

Die Variable  $s$  stellt somit die Prämie eines CDS dar, welche periodenbezogen bezahlt werden muss, um sich vor einem Ausfall des Referenzunternehmens abzusichern.

Es wurde ein mathematischer Ansatz zur Bepreisung von CDS gezeigt und man hat gesehen, dass die CDS-Prämien anhand von Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dies ist der zu Beginn erwähnte Zusammenhang zum Rating eines Unternehmens und ein Grund wieso sich CDS als Bewertungsmittel des Marktes zur Bonitätsschätzung von Unternehmen eignen.

## Kapitel 3

# Stationäre Modelle

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den grundlegenden Konzepten der Zeitreihenmodellierung. Es werden stochastische Prozesse eingeführt und Begriffe wie Erwartungswert, Varianz, Autokorrelationsfunktion und Stationarität definiert, welche für die Zeitreihenanalyse der CDS-Spreads benötigt werden. Danach werden stationäre Modelle behandelt. Die Hauptliteraturquellen die für dieses Kapitel verwendet wurden sind [10], [11], [12] und [21]. Weitere Literaturquellen sind [13] und [14].

Eine der nützlichsten Methoden um Parsimonie zu erhalten ist die Annahme der Stationarität. Betrachtet man eine Zeitreihe dann treten, von einer Zeitperiode auf die nächste, Schwankungen zwar zufällig auf, jedoch oft mit dem selben stochastischen Verhalten. Beispielsweise können sich Aktienreturns oder Zinsraten sehr stark vom Vorjahr unterscheiden, aber ihr Durchschnittswert, die Standardabweichung und andere statistische Eigenschaften sind oft denen aus dem Vorjahr sehr ähnlich.

Stationäre stochastische Prozesse sind Wahrscheinlichkeitsmodelle für Zeitreihen mit einem sich zeitlich nicht änderndem Verhalten.

Viele Finanzzeitreihen sind nicht stationär, jedoch sind dies oft ihre Transformationen. Aus diesem Grund sind stationäre Modelle viel anwendbarer als sie es zu sein scheinen. Aus dem Blickwinkel der statistischen Modellierung ist es nicht wichtig ob nun die Zeitreihe selbst oder ihre Transformation stationär ist da man in beiden Fällen zu einem parsimonischen Modell gelangt.

### 3.1 Einleitung und fundamentale Begriffe

Damit die Theorie der Analyse und Modellierung von Zeitreihen entwickelt und hergeleitet werden kann, bedarf es an Definitionen und grundlegenden Begrifflichkeiten.

#### 3.1.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

##### Definition 1. (Maßraum)

Ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt Maßraum, wenn

- $\Omega$  eine nicht leere Menge ist
- $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, d.h.  $\mathcal{F}$  ist eine Menge von Teilmengen von  $\Omega$  mit den Eigenschaften:
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$
  - $(F_n)_{n \geq 1}$  ist eine Folge von Mengen  $F_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} F_n \in \mathcal{F}$
  - $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C = \Omega \setminus F \in \mathcal{F}$
- $\mu$  ist ein Maß, d.h.:  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  mit
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} F_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(F_i)$

##### Definition 2. (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  heißt Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathbb{P}$  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß.

*Bemerkung 1.* Ein Maßraum ohne Maß heißt Messraum und ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß heißt Ereignisraum.

##### Definition 3. (messbare Funktion)

Seien  $(\Omega, \mathcal{F})$  und  $(\Omega', \mathcal{F}')$  zwei Messräume (noch kein Maß), dann heißt eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  messbar, wenn

$$f^{-1}(F') \in \mathcal{F} \quad \forall F' \in \mathcal{F}'.$$

##### Definition 4. (Zufallsvariable)

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{F}')$  ein Messraum, dann heißt eine messbare Funktion  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  eine  $\Omega'$ -wertige Zufallsvariable.

**Definition 5.** (stochastischer Prozess)

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{F}')$  ein Messraum, dann heißt eine Familie von  $\Omega'$ -wertigen Zufallsvariablen  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , welche alle auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  definiert sind ein  $\Omega'$ -wertiger stochastischer Prozess.

**Definition 6.** (Filtration)

1. Eine aufsteigende Familie von Untersigmaalgebren  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  heißt Filtration.
2. Ein stochastischer Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  heißt an die Filtration adaptiert, wenn  $X_t$  für alle  $t \geq 0$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist.

*Bemerkung 2.* Die Filtration kann man sich als eine Beschreibung vom Informationsverlauf vorstellen. Zum Zeitpunkt  $t$  sind alle Realisationen einer  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Zufallsvariable  $X$  bekannt. Damit ist ein Prozess  $(X_t)_{t \leq T}$  genau dann adaptiert, wenn er zu jedem Zeitpunkt  $t \leq T$  mit der zur Verfügung stehenden Information ausgewertet werden kann.

### 3.1.2 Zeitreihen und stochastische Prozesse

Eine Zeitreihe kann aufgefasst werden als eine Folge von zeitlich geordneten Beobachtungen.

**Definition 7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für ein festes  $\omega \in \Omega$  heißt  $(X_t(\omega))_{t \in T}$  eine Realisation, Pfad oder Trajektorie des stochastischen Prozesses  $(X_t)_{t \in T}$ .

Somit kann eine Zeitreihe ebenso gesehen werden als eine Realisation eines stochastischen Prozesses.

Ab hier sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  unterstellt und  $(X_t)_{t \in T}$  sei eine Zeitreihe.

*Bemerkung 3.* Hier werden Zeitreihen mit der Indexmenge  $T = \mathbb{Z}$  betrachtet.

Eine komplette Beschreibung einer Zeitreihe, also einer Menge von  $n$  Zufallsvariablen, welche zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  beobachtet wurden, ist durch ihre Gesamtverteilung  $F$  gegeben, welche berechnet wird durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zeitreihe gemeinsam kleiner sind als die  $n$  Konstanten

$c_1, c_2, \dots, c_n$ , also:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \mathbb{P}(x_{t_1} \leq c_1, x_{t_2} \leq c_2, \dots, x_{t_n} \leq c_n), \quad (3.1)$$

wobei  $x_{t_i}$  für  $i = 1, \dots, n$  die  $i$ -te Beobachtung der Zeitreihe darstellt.

Leider kann diese multivariate Verteilung in den meisten Fällen nicht einfach berechnet werden.

Obwohl die Gesamtverteilung die Daten komplett beschreibt, ist sie ein unhandliches Werkzeug für die Darstellung und Analyse von Zeitreihen. Die Verteilungsfunktion (3.1) ist eine Funktion von  $n$  Argumenten und macht eine graphische Darstellung der entsprechenden Dichtefunktion nahezu unmöglich.

Die Randverteilungsfunktionen

$$F_t(x) = \mathbb{P}(x_t \leq x), \quad (3.2)$$

oder die entsprechenden Dichtefunktionen

$$f_t(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial x}, \quad (3.3)$$

sofern sie existieren, reichen oft aus, um das marginale Verhalten der Zeitreihe zu untersuchen.

Ein anderes beschreibendes Maß für die Marginalität ist der Erwartungswert.

**Definition 8.** (Erwartungswert und Varianz)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  die Dichte von  $X$ .

1. Der Erwartungswert von  $X$ , ist definiert durch

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (3.4)$$

sofern  $X$  integrierbar ist.

2. Die Varianz von  $X$  ist definiert durch

$$\sigma^2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2). \quad (3.5)$$

Der Zusammenhang zweier Zufallsvariablen  $X_s$  und  $X_t$  kann beschrieben werden durch die klassischen statistischen Begriffe der Kovarianz und Korrelation.

**Definition 9.** (Autokovarianzfunktion und Autokorrelationsfunktion)

1. Die Autokovarianzfunktion  $\gamma_{s,t}$  von  $X$  ist definiert durch

$$\gamma_{s,t} = \text{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)], \quad (3.6)$$

2. und die Autokorrelationsfunktion  $\rho_{s,t}$  von  $X$  ist definiert durch

$$\rho_{s,t} = \text{corr}(X_s, X_t) = \frac{\gamma_{s,t}}{\sqrt{\gamma_{s,s}\gamma_{t,t}}}. \quad (3.7)$$

für alle  $s, t \in T$ .

Die Autokovarianzfunktion misst die lineare Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen der selben Zeitreihe. Die Autokorrelationsfunktion wird so konstruiert, dass die Bedingung

$$-1 \leq \rho_{s,t} \leq 1, \quad (3.8)$$

erfüllt wird. Durch die Konstruktion ergeben sich folgende Eigenschaften für  $\rho_{s,t}$ :

1.  $\rho_{t,t} = 1$ ,
2.  $\rho_{s,t} = \rho_{t,s}$ ,
3.  $|\rho_{s,t}| \leq 1$ .

Die erste Eigenschaft ergibt sich aufgrund  $\gamma_{t,t} = \text{Var}(X_t)$ . Die zweite, da die Autokorrelation nicht von den Zeitpunkten, sondern von deren Entfernung abhängig ist und somit  $\gamma_{s,t} = \gamma_{t,s}$  gilt. Die dritte Eigenschaft gilt wegen  $|\gamma_{s,t}| \leq \sqrt{\gamma_{s,s}\gamma_{t,t}}$ .

Werte von  $\rho_{s,t}$  nahe  $\pm 1$  weisen auf einen starken linearen Zusammenhang hin, wobei Werte nahe 0 einen schwachen linearen Zusammenhang bedeuten. Ist  $\rho_{s,t} = 0$ , dann sind  $X_s$  und  $X_t$  unkorreliert und stellen besonders einfache Zeitreihen dar.

### 3.1.3 Stationarität

Um statistische Analysen durchführen zu können, bedarf es an Annahmen über die Struktur von Zeitreihen. Eine wichtige Annahmen ist das Konzept der Stationarität einer Zeitreihe. Die Idee die der Stationarität zugrunde liegt ist, dass sich

gewisse wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften der Zeitreihe über die Zeit nicht verändern. Es wird unterschieden zwischen strikter und schwacher Stationarität.

**Definition 10.** Eine Zeitreihe  $(X_t)_{t \in T}$  heißt strikt stationär oder auch stationär im engeren Sinn, falls für beliebige  $t_1, \dots, t_n$  und  $k \in \mathbb{Z}$  der Zufallsvektor

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \quad (3.9)$$

die selbe Verteilung besitzt wie

$$(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}). \quad (3.10)$$

D.h.  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+k, \dots, t_n+k}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$ .

*Bemerkung 4.* Die Gesamtheit aller endlich dimensionaler Verteilungsfunktionen

$$F_{t_1, \dots, t_n}(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) \quad (3.11)$$

mit beliebigen Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$  und beliebigem  $n$ , nennt man die der Zeitreihe zugeordnete Verteilung.

**Definition 11.**

- Eine Zeitreihe  $(X_t)_{t \in T}$  heißt schwach stationär oder stationär im weiteren Sinn, wenn
  1.  $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \quad \forall t \in T$
  2.  $\mathbb{E}(X_t) = \mu \quad \forall t \in T$
  3.  $cov(X_{s+h}, X_{t+h}) = cov(X_s, X_t) \quad \forall s, t, h \in T$ .
- Eine schwach stationäre Zeitreihe  $(X_t)_{t \in T}$  heißt zentriert, wenn  $\mathbb{E}(X_t) = 0 \quad \forall t \in T$ .

*Bemerkung 5.* Hat man eine Zeitreihe gegeben, deren Verteilung sich nach einer zeitlichen Verschiebung für verschiedene Verschiebungsintervalle nicht ändert, so spricht man von einer strikt stationären Zeitreihe. Jedoch liegt nur in den seltensten Fällen eine Zeitreihe mit dieser Charakteristik vor. Aus diesem Grund beschränkt man sich auf die ersten beiden Momente und geht über auf die schwache Stationarität, die ebenso zielführend ist.

*Bemerkung 6.* Die Definition der schwachen Stationarität bedeutet, dass 1. die ersten beiden Momente existieren, 2. der Erwartungswert von der Zeit unabhängig und somit konstant ist und 3. die Kovarianz nicht von den Zeitpunkten, sondern von deren zeitlichen Abstand abhängt.

*Bemerkung 7.* In weiterer Folge versteht sich mit dem Begriff der Stationarität die schwache Stationarität.

**Definition 12.** Sei  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  ein stationärer Prozess, dann heißt  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  weißes Rauschen, falls

$$\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0, \text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2 \quad (3.12)$$

und

$$\gamma_{s,t} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } s = t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.13)$$

*Bemerkung 8.* Das weiße Rauschen ist ein fundamentaler stochastischer Prozess und stellt einen wichtigen Baustein zur Modellierung von Zeitreihen dar.

Es ist ein zeitlich unkorrelierter Prozess, d.h. die Autokovarianzfunktion ist stets null, außer für  $s = t$ . Da die Autokovarianzfunktion aufgrund der Unkorreliertheit keine Struktur aufweist, sagt man zum weißen Rauschen auch Prozess ohne Gedächtnis.

Dadurch ist die Autokorrelationsfunktion gegeben durch

$$\rho_{s,t} = \frac{\gamma_{s,t}}{\gamma_{s,s}} = \begin{cases} 1 & \text{für } s = t, \\ 0 & \text{für } s \neq t. \end{cases} \quad (3.14)$$

Da die Autokovarianzfunktion und die Autokorrelationsfunktion nicht von den Zeitpunkten  $s$  und  $t$ , sondern von deren Abstand  $|t - s|$  abhängen, kann man für stationäre Prozesse die Notation vereinfachen und schreiben:

$$\gamma(k) = \gamma_{s,t} = \text{cov}(X_s, X_t) \quad (3.15)$$

und

$$\rho(k) = \rho_{s,t} = \text{corr}(X_s, X_t). \quad (3.16)$$

Somit ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}. \quad (3.17)$$

**Satz 1.** (Eigenschaften der Autokovarianzfunktion)

Sei  $\gamma(\cdot)$  die Autokovarianzfunktion einer schwach stationären Zeitreihe  $(X_t)_{t \in T}$ , dann gilt

1.  $\gamma(0) = \text{Var}(X_t) > 0$
2.  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$ , d.h.  $|\rho(k)| \leq 1$
3.  $\gamma(k) = \gamma(-k)$
4. Die Funktion  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  ist positiv semidefinit, d.h.:  $\forall n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \gamma(t_i - t_j) a_j \geq 0. \quad (3.18)$$

*Beweis.* 1. Trivial, da die Varianz per Definition nicht negativ sein darf.

2. Mit Hilfe der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)} \quad (3.19)$$

erhält man

$$\begin{aligned} |\gamma(k)| &= |\text{cov}(X_t, X_{t+k})| = |\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(X_t - \mu)^2] \mathbb{E}[(X_{t+k} - \mu)^2]} = \text{Var}(X_t) \\ &= \gamma(0). \end{aligned}$$

Damit gilt für

$$|\rho(k)| = \frac{|\gamma(k)|}{\gamma(0)} \leq 1. \quad (3.20)$$

3. Die Eigenschaft der Symmetrie kann gezeigt werden durch

$$\gamma(-k) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(X_{t-k}, X_t) = \gamma(k) \quad (3.21)$$

4. Sei  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\mu = \mathbb{E}(X_t)$ ,  $Z = (X_{t_1} - \mu, \dots, X_{t_n} - \mu)^T$ , dann ist

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z \cdot Z^T) = \mathbb{E}((X_{t_i} - \mu)(X_{t_j} - \mu)) \text{ für } 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.22)$$

Somit ist  $\text{Var}(Z) = (\gamma(t_i - t_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und hat folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(t_1 - t_2) & \dots & \gamma(t_1 - t_n) \\ \gamma(t_2 - t_1) & \gamma(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma(t_n - t_1) & \dots & & \gamma(0) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

und heißt Kovarianzmatrix.

Sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt

$$a^T \text{Var}(Z) a = a^T \mathbb{E}(Z \cdot Z^T) a = \mathbb{E}((a^T Z) \cdot (Z^T a)). \quad (3.24)$$

Da aber  $(a^T Z) \cdot (Z^T a)$  ein Skalar ist, dann gilt mit  $Y^2 = (a^T Z) \cdot (Z^T a)$

$$\mathbb{E}((a^T Z) \cdot (Z^T a)) = \mathbb{E}(Y^2) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(a^T Z) \geq 0. \quad (3.25)$$

□

**Satz 2.** (*Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion*)

Sei  $\rho(\cdot)$  die Autokovarianzfunktion einer schwach stationären Zeitreihe  $(X_t)_{t \in T}$ , dann gilt

1.  $\rho(0) = 1$
2.  $|\rho(k)| \leq 1$
3.  $\rho(k) = \rho(-k)$
4.  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \rho(t_i - t_j) a_j \geq 0$  für alle Vektoren  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$  und  $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz 1.

## 3.2 Stationäre Modelle

Da nun die wichtigsten Werkzeuge definiert und eingeführt wurden, können Modelle hergeleitet und betrachtet werden. Die Idee der Zeitreihenanalyse ist es, komplexe Prozesse aus einfachen Prozessen, wie dem weißen Rauschen, aufzubauen. Die wichtigste Klasse stationärer Prozesse stellen die ARMA-Prozesse dar, die in diesem Abschnitt eingeführt werden. Im Folgenden werden die Begriffe Modell und Prozess synonym verwendet.

### 3.2.1 Moving-Average-Modell

**Definition 13.** (MA(q)-Prozess)

Sei  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  weißes Rauschen und der Vektor  $(\theta_0, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ , dann heißt

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (3.26)$$

ein Moving-Average-Prozess der Ordnung  $q$ , wobei  $\theta_0 = 1$  und  $\theta_q \neq 0$ .

Nun wird der einfache, jedoch nicht unbedeutende, MA(1)-Prozess näher betrachtet.

Sei  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  weißes Rauschen und  $\theta \in \mathbb{R}$ , dann ist der MA(1)-Prozess dargestellt durch

$$X_t = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}. \quad (3.27)$$

Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta \mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0. \quad (3.28)$$

Die Varianz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2) = \mathbb{E}(X_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_t^2 - 2\theta \epsilon_t \epsilon_{t-1} + \theta^2 \epsilon_{t-1}^2) \\ &= \sigma^2 - 2 \cdot \theta \cdot 0 + \theta^2 \sigma^2 \\ &= \sigma(1 + \theta^2). \end{aligned}$$

Die Kovarianz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{cov}((\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}), (\epsilon_{t-1} - \theta \epsilon_{t-2})) \\ &= \text{cov}(-\theta \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) \\ &= -\theta \sigma^2. \end{aligned}$$

Für  $\text{cov}(X_t, X_{t-k})$  mit  $k \geq 2$  gilt

$$\text{cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{cov}((\epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}), (\epsilon_{t-k} - \theta \epsilon_{t-k-1})) = 0$$

aufgrund der Unkorreliertheit des weißen Rauschens.

Zusammengefasst hat ein MA(1)-Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  folgende Eigenschaften:

- $\mathbb{E}(X_t) = 0$ ,
- $\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$ ,
- $\gamma(1) = -\theta\sigma^2$ ,
- $\rho(1) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$ ,
- $\gamma(k) = \rho(k) = 0 \geq 2$ .

Dadurch erfüllt ein MA(1)-Prozess die Bedingungen der Stationarität.

### Stationarität des MA(q)-Prozesses

Der MA(q)-Prozess ist durch Definition 13 gegeben und die äquivalente Berechnung wie beim MA(1)-Prozess liefert

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 \quad (3.29)$$

und für

$$\gamma(k) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|} & \text{für } |h| \leq q, \\ 0 & \text{für } |h| > q. \end{cases} \quad (3.30)$$

Damit gilt für die Autokorrelationsfunktion

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|} & \text{für } |h| \leq q, \\ 0 & \text{für } |h| > q \end{cases} \quad (3.31)$$

und somit ist auch ein MA(q)-Prozess für ein  $q < \infty$  stets stationär.

### 3.2.2 Das autoregressive Modell

**Definition 14.** (AR(p)-Prozess)

Sei  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  weißes Rauschen und der Vektor  $(\phi_0, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$ , dann heißt

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad (3.32)$$

ein autoregressiver Prozess der Ordnung  $p$ .

Wie zuvor wird auch an dieser Stelle zunächst ein AR(1)-Prozess betrachtet.

Sei  $\phi \in \mathbb{R} \setminus 0$  und der zentrierte AR(1)-Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  gegeben durch

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (3.33)$$

Die Varianz von  $X_t$  ist gegeben durch

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \phi^2\gamma(0) + \sigma^2. \quad (3.34)$$

Löst man die Gleichung nach  $\gamma(0)$  auf, erhält man

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}. \quad (3.35)$$

Man sieht, dass wegen der Eigenschaft der Autokovarianzfunktion aus (3.35) unmittelbar folgt, dass  $\phi^2 < 1$  bzw.  $|\phi| < 1$ .

Multipliziert man beide Seiten vom Ausdruck (3.33) mit  $X_{t-k}$  für  $(k = 1, 2, \dots)$  und nimmt man von beiden Seiten den Erwartungswert, erhält man

$$\mathbb{E}(X_{t-k}X_t) = \phi\mathbb{E}(X_{t-k}X_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) \quad (3.36)$$

bzw.

$$\gamma(k) = \phi\gamma(k-1) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}), \quad (3.37)$$

da  $X_t$  eine zentrierte Zeitreihe ist. Sei weiterhin  $\epsilon_t$  stochastisch unabhängig von  $X_t$ , erhält man

$$\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) = \mathbb{E}(\epsilon)\mathbb{E}(X_{t-k}) = 0 \quad (3.38)$$

und somit

$$\gamma(k) = \phi\gamma(k-1) \text{ für } k = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Setzt man  $k = 1$ , erhält man

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) = \frac{\phi\sigma^2}{1 - \sigma^2}. \quad (3.40)$$

Für  $k = 2$  erhält man

$$\gamma(2) = \phi^2 \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2}. \quad (3.41)$$

Man sieht leicht, dass folgender Zusammenhang gilt

$$\gamma(k) = \phi^k \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2} \quad (3.42)$$

und somit

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi^k \text{ für } k = 1, 2, \dots, \quad (3.43)$$

welcher durch vollständige Induktion formal bewiesen werden kann.

**Satz 3.** *Ein AR(1)-Prozess ist dann stationär, wenn  $|\phi| < 1$  ist.*

Die Bedingung  $|\phi| < 1$  in Satz 3 wird im Bezug auf die AR-Prozesse auch als Stationaritätsbedingung bezeichnet.

**Stationarität des AR(p)-Prozesses**

**Definition 15.** Sei  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$  ein AR(p)-Prozess, dann heißt

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p \quad (3.44)$$

charakteristisches Polynom oder AR(p)-Polynom und

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \quad (3.45)$$

die dazugehörige charakteristische Gleichung.

**Satz 4.** (*Stationarität des AR(p)-Modells*)

*Ein AR(p)-Modell ist stationär genau dann, wenn alle Nullstellen des AR(p)-Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen*

$$\phi(x) = 0 \Rightarrow |x| > 1. \quad (3.46)$$

**Lag-Polynome und Invertierbarkeit**

Zeitreihenmodelle werden häufig mit Hilfe des Lag-Operators notiert. Der Lag-Operator verschiebt die Zeitreihe um eine Zeiteinheit. Sei  $(X_t)_{t \in T}$  eine Zeitreihe, dann ist der Lag-Operator definiert als

$$LX_t = X_{t-1}. \quad (3.47)$$

Der inverse Lag-Operator hingegen ist definiert als

$$L^{-1}X_t = X_{t+1}. \quad (3.48)$$

Durch diese Definition gelten folgende Äquivalenzen

$$X_t = L^{-1}LX_t = LL^{-1}X_t. \quad (3.49)$$

Führt man den Lag-Operator mehrfach aus, so kann dies in Potenzenform geschrieben werden

$$L^i X_t = X_{t-i}, \quad (3.50)$$

wobei  $L^0$  als Identität bezeichnet wird und  $L^0 X_t = X_t$  gilt. Wendet man den Lag-Operator auf eine Konstante  $c$  an, wird keine Änderung bewirkt und es gilt  $Lc = c$ .

Ist ein Prozess  $Y_t$  durch

$$Y_t = \sum_{j=0}^p b_j X_{t-j} \text{ mit } b_j \in \mathbb{R}, \quad (3.51)$$

gegeben, so kann  $Y_t$  auch durch ein Polynom  $p$ -ter Ordnung im Lag-Operator

$$P(L) = \sum_{j=0}^p b_j L^j \quad (3.52)$$

als  $Y_t = P(L)X_t$  dargestellt werden.

*Bemerkung 9.* Das Polynom im Lag-Operator wird auch als Lag-Polynom bezeichnet.

**Satz 5.** Das Polynom  $P(L)$  aus (3.52) ist genau dann kausal invertierbar, d.h. für  $(P(L)^{-1})$  existiert genau dann die absolut summierbare Reihentwicklung

$$(P(L)^{-1}) = \frac{1}{P(L)} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j L^j \text{ mit } \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty \quad (3.53)$$

wenn alle Nullstellen des AR-Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen

$$\phi(x) = 0 \Rightarrow |x| > 1. \quad (3.54)$$

*Bemerkung 10.* Ist ein Prozess  $Y_t$  durch (3.51) gegeben, dann wird er kausal genannt, wenn er nur durch vergangene und zeitgleiche Werte von  $X_t$  definiert ist.

### 3.2.3 Das ARMA-Modell

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Klasse von Modellen ist eine der wichtigsten und meist verwendeten Klassen für stationäre Modelle. Diese Klasse stellt eine Kombination aus MA- und AR-Prozessen dar, was auch den Namen ARMA-Modell (*autoregressive moving average model*) erklärt. Diese Modelle sind auch unter dem Namen Box Jenkins-Modelle bekannt.

**Definition 16.**

1. Sei  $(\epsilon_t)_{t \in T}$  weißes Rauschen,  $(\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$  und  $(\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ , dann heißt

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (3.55)$$

ARMA(p,q)-Modell.

2. Für  $\theta_j \equiv 0$ , mit  $j = 1, \dots, q$ , ist  $X_t$  ein AR(p)-Modell.
3. Für  $\phi_i \equiv 0$ , mit  $i = 1, \dots, p$ , ist  $X_t$  ein MA(q)-Modell.

### Stationarität des ARMA(p,q)-Modells

#### Satz 6.

*Ein ARMA(p,q)-Modell ist genau dann stationär, wenn der AR(p)-Anteil stationär ist.*

Die Autokovarianzfunktion eines ARMA(p,q)-Prozesses ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma(k) = \mathbb{E}(X_t X_{t-k}) &= \mathbb{E}(\phi_1 X_{t-1} X_{t-k}) + \dots + \mathbb{E}(\phi_p X_{t-p} X_{t-k}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) + \\ &+ \mathbb{E}(\theta_1 \epsilon_{t-1} X_{t-k}) + \dots + \mathbb{E}(\theta_q \epsilon_{t-q} X_{t-k}). \end{aligned}$$

Da  $\epsilon_t$  und  $X_t$  stochastisch unabhängig sind gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) &= \mathbb{E}(\epsilon_t) \mathbb{E}(X_{t-k}) = 0 \\ &\vdots \\ \mathbb{E}(\theta_q \epsilon_{t-q} X_{t-k}) &= \theta_q \mathbb{E}(\epsilon_{t-q}) \mathbb{E}(X_{t-k}) = 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \dots + \phi_p \gamma(k-p). \quad (3.56)$$

Damit gilt für die Autokorrelationsfunktion

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \dots + \phi_p \rho(k-p). \quad (3.57)$$

## Kapitel 4

# Heteroskedastische Modelle

In diesem Kapitel sollen für Finanzzeitreihen wichtige Modelle hergeleitet werden. Die Hauptliteraturquellen dieses Kapitels stellen [10], [15] und [16] dar. Des Weiteren wurden [14], [17] und [18] verwendet.

### 4.1 Eigenschaften von Finanzzeitreihen

Die bislang betrachteten Modelle waren eine Einführung in die Thematik und betreffen vorwiegend Zeitreihen, die eine über die Zeit konstante Erwartung oder Volatilität haben. Sieht man sich jedoch Finanzzeitreihen an, so stellt man fest, dass vor allem die Volatilität alles andere als konstant ist. Bei Finanzzeitreihen sind starke Schwankungen der Volatilität zu beobachten. Perioden mit starken Ausschlägen folgen Perioden mit schwachen Ausschlägen und umgekehrt. Jedoch lässt sich innerhalb dieser Perioden folgendes beobachten. Die Korrelation der einzelnen Beobachtungen innerhalb der Perioden ist stets stark positiv, d.h. auf starke Ausschläge folgen unmittelbar starke und auf schwache Ausschläge folgen unmittelbar schwache Ausschläge.

Im Finanzwesen wird die bedingte Varianz des Returns einer Finanzposition oft als ein Risikomaß des zugrunde liegenden Basiswerts verwendet.

Somit stellt die Volatilität eine entscheidende Komponente für die mathematische Modellierung von Risiken, aber auch zur Bepreisung von Finanzmarktstiteln, dar.

In der Praxis ist man somit sehr an der bedingten Varianz interessiert, denn sie stellt den vergangenen Kursverlauf des Finanztitels dar. Die Vorstellung der Zukunft des Risikos eines Finanztitels bindet die explizite Berücksichtigung der

Vergangenheit ab. Genau darum geht es in den folgenden zwei Modellen: dem ARCH- und GARCH-Modell.

## 4.2 ARCH - Modell

Wie bereits der Name ARCH (*autoregressive conditional heteroskedastic*) vermuten lässt, wird die bedingte Varianz autoregressiv modelliert. Dies ermöglicht die Modellierung von Volatilitätsclustern. Diese sind die bereits erwähnten starken Korrelationen zwischen unmittelbar aufeinander folgenden Beobachtungen.

### 4.2.1 Herleitung

Die Schwankungen der Volatilität sind in den bisher betrachteten Modellen nicht möglich gewesen da man bei stationären Modellen von einer konstanten Volatilität ausgeht.

Um dies zu verdeutlichen soll nun der einfache Fall eines AR(1)-Modells betrachtet werden.

*Beispiel 2.* Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  der durch

$$X_t = \phi \cdot X_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.1)$$

gegebene AR(1)-Prozess, wobei  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  und  $\phi \in \mathbb{R}$ .

Weiters seien  $n$  Beobachtungen  $x_1, \dots, x_n$  gegeben, dann ist der beste lineare Schätzer für  $X_{n+1}$  gegeben durch

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{\phi} \cdot X_n, \quad (4.2)$$

wobei  $\hat{\phi}$  im Anwendungsfall den Schätzer von  $\phi$  darstellt.

Der Prognosefehler ist gegeben durch

$$X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \quad (4.3)$$

und seine bedingte Varianz entspricht

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 | X_1, \dots, X_n) &= \mathbb{E}((X_{n+1} - \hat{\phi} \cdot X_n)^2 | X_1, \dots, X_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n) \\
&\quad - 2\hat{\phi}X_n \mathbb{E}(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) + 0 \\
&= \mathbb{E}(\epsilon_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n) \\
&= \mathbb{E}(\epsilon_{n+1}^2) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Somit ist die bedingte Varianz des Einschnittprognosefehlers konstant mit  $\sigma^2$ .

Dies gilt sowohl allgemein für AR(p)-Modelle als auch für deren Erweiterungen, die ARMA(p,q)-Modelle.

Sei nun der Schätzer von  $X_{n+1}$  gegeben durch

$$\hat{X}_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots) \quad (4.4)$$

dann gilt

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 | X_1, \dots, X_n) = \text{Var}(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \sigma^2. \quad (4.5)$$

Das bedeutet, dass die bedingte Varianz bei gegebener Vergangenheit konstant bleibt.

Wie bereits erwähnt haben Finanzzeitreihen jedoch eine andere Eigenschaft, nämlich eine sich im Zeitverlauf ändernde, also variable, Varianz.

Aus diesem Grund ist es das Ziel der Modellbildung dieses Kapitels einen Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  mit folgender Eigenschaft zu erhalten

$$\text{Var}(X_t | X_{t-1}, \dots) = \sigma_t^2. \quad (4.6)$$

Dabei stellt  $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$  einen sich im Zeitverlauf ändernden Varianzprozess dar.

Man wählt für  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  nun folgenden Ansatz

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (4.7)$$

mit  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$  und stochastisch unabhängig für jedes  $t \in \mathbb{Z}$  vom Varianzprozess  $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ .

Modelliert man den Varianzprozess

$$\sigma_t^2 = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \quad (4.8)$$

als Funktion vergangener  $X_t$ -Werte, so erhält man für den bedingten Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | I_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \end{aligned}$$

Hierbei stellt  $I_{t-1}$  die Informationsmenge dar, also jene Menge an Information, die vom Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  bis zum Zeitpunkt  $t-1$  generiert wird und bis zu diesem Zeitpunkt als bekannt betrachtet werden kann.

Aufgrund der Konstruktion ist  $\epsilon_t$  stochastisch unabhängig von  $X_{t-j}$  für  $j > 0$  und somit gilt

$$\sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t). \quad (4.9)$$

Basierend auf der Annahme, dass  $\epsilon_t$  standardnormalverteilt ist, erhält man

$$\mathbb{E}(X_t | I_{t-1}) = 0. \quad (4.10)$$

Da  $\sigma_t$  nur von vergangenen Werten von  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  generiert wird und somit eine deterministische Funktion von bekannten Werten darstellt, ist es lediglich eine Konstante. Man sagt auch  $\sigma_t$  ist bezüglich der Informationsmenge  $I_{t-1}$  messbar.

Für die bedingte Varianz erhält man

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t | I_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t^2 | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \\ &= \sigma_t^2, \end{aligned}$$

also jenen Ausdruck (4.6), der zu Beginn als Ziel des Abschnitts deklariert wurde. Die unbedingte Varianz wird auf ähnliche Weise bestimmt

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) \quad (4.11)$$

$$= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) \quad (4.12)$$

$$= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \quad (4.13)$$

$$= \mathbb{E}(\sigma_t^2), \quad (4.14)$$

wobei der Schritt von (4.12) auf (4.13) aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von  $\sigma_t$  und  $\epsilon_t$  möglich ist.

Betrachtet man den einfachsten Fall und modelliert die bedingte Varianz nur durch die Daten der Vorperiode, so erhält man

$$\text{Var}(X_t | I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad (4.15)$$

mit  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_1 \geq 0$ .

In diesem Fall spricht man von einem ARCH(1)-Prozess.

Der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  besitzt somit, wie bereits allgemein in (4.10) gezeigt, einen bedingten Erwartungswert von null und eine bedingte Varianz  $\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$ .

Der unbedingte Erwartungswert und die unbedingte Varianz können auf folgende Art und Weise berechnet werden.

Führt man folgende Notation

$$\mathbb{E}_{t-1}(X_t) = \mathbb{E}(X_t | I_{t-1}), \quad (4.16)$$

ein, so kann der unbedingte Erwartungswert durch

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}_0 \mathbb{E}_1 \dots \mathbb{E}_{t-2} \mathbb{E}_{t-1}(X_t) \quad (4.17)$$

bestimmt werden.

Da jedoch  $\mathbb{E}_{t-1}(X_t)$  null ist, folgt

$$\mathbb{E}(X_t) = 0. \quad (4.18)$$

Die Varianz von  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  lässt sich zerlegen in

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}_0 \mathbb{E}_1 \dots \mathbb{E}_{t-3} \mathbb{E}_{t-2} \mathbb{E}_{t-1}(X_t^2) \quad (4.19)$$

und beim Einsetzen von (4.15) erhält man

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}_0 \dots \mathbb{E}_{t-3} \mathbb{E}_{t-2} (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) \\
 &= \mathbb{E}_0 \dots \mathbb{E}_{t-3} [\alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}_{t-2}(X_{t-1}^2)] \\
 &= \mathbb{E}_0 \dots \mathbb{E}_{t-3} [\alpha_0 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-2}^2)] \\
 &= \mathbb{E}_0 \dots \mathbb{E}_{t-3} [\alpha_0 + \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1^2 X_{t-2}^2].
 \end{aligned}$$

Führt man die Bildung der bedingten Erwartungswerte fort, erhält man

$$\text{Var}(X_t) = \alpha_0 (1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1^{t-1}) + \alpha_1^t X_0^2. \quad (4.20)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt eine geometrische Reihe dar und lässt sich durch

$$1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1^{t-1} = \frac{1 - \alpha_1^t}{1 - \alpha_1} \quad (4.21)$$

berechnen.

Dadurch vereinfacht sich die Varianz von  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  zu

$$\text{Var}(X_t) = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^t}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^t u_0^2. \quad (4.22)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  erhält man für die unbedingte Varianz

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \quad (4.23)$$

Da die Varianz per Definition nicht negativ werden kann, folgt

$$0 < \alpha_1 < 1. \quad (4.24)$$

Der Schritt  $t \rightarrow \infty$  kann durch die plausible, bis in die unbegrenzte Vergangenheit fortgesetzte, Erwartungswertbildung aus (4.19) interpretiert werden.

Das Ergebnis dieser Modellierung ist nun, dass die bedingten ersten beiden Momente zwar heteroskedastisch sind, die unbedingten ersten beiden Momente jedoch homoskedastisch.

Das einfachste und in vielen Fällen sehr nützliches ARCH-Modell ist jenes der ersten Ordnung. Das Gedächtnis des ARCH(1)-Prozesses ist begrenzt auf die letzte Periode.

Wenn  $\alpha_1 = 0$  ist, dann ist  $X_t$  ein normalverteiltes weißes Rauschen. Ist  $\alpha_1$  jedoch zu groß, so wird die Varianz unendlich groß. Betrachtet man nun einen ARCH-Prozess, der nicht nur von der letzten Periode abhängt, sondern von den letzten  $p$  Folgengliedern, dann ist die Rede von einem ARCH( $p$ )-Prozess, man sagt auch dazu ARCH-Prozess  $p$ -ter Ordnung.

**Definition 17.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ , dann wird  $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$  aus (4.8) spezifiziert durch

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2. \quad (4.25)$$

Um  $\sigma_t^2 > 0$  zu gewährleisten wird für  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  vorausgesetzt.

Der Ansatz aus Gleichung (4.7) zusammen mit der Definition des Varianzprozesses durch (4.25) ergibt einen ARCH( $p$ )-Prozess.

*Bemerkung 11.* Mit  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p$  wird Homoskedastizität modelliert.

Daher gilt auch hier für die bedingte Varianz

$$\text{Var}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2, \quad (4.26)$$

was den Namen der ARCH-Modelle erklärt. Die bedingte Varianz wird nämlich autoregressiv modelliert. Dies hat zur Folge, dass sich Volatilitätscluster bilden können, denn auf starke Ausschläge in der Vorperiode folgen mit hoher Wahrscheinlichkeit starke Ausschläge in der darauf folgenden Periode. Gleiches gilt natürlich für schwache Ausschläge. Diese Eigenschaft macht das ARCH-Modell so praxisnah.

### 4.2.2 Stationarität

Für die Varianz gilt nach (4.11)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + \dots + \alpha_p \mathbb{E}(X_{t-p}^2). \end{aligned}$$

Hat man es mit einem stationären Prozess

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-j}), \quad j = 1, \dots, p$$

zutun, folgt für seine Varianz

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}. \quad (4.27)$$

Da der Varianzausdruck per Definition wiederum positiv sein soll, muss wegen  $\alpha_0 > 0$  gelten

$$1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p > 0. \quad (4.28)$$

Diese Bedingung ist hinreichend für die Stationarität.

**Satz 7.** (*Stationarität des ARCH(p)-Modells*)

Sei  $X_t$  der durch (4.7) modellierte Prozess und sei  $\sigma_t$  das durch Definition 17 definierte ARCH(p)-Modell, dann ist  $X_t$  genau dann schwach stationär, wenn

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j < 1 \quad (4.29)$$

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass wenn folgendes gilt

$$\alpha(z) := 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p = 0 \Rightarrow |z| > 1, \quad (4.30)$$

der Prozess  $X_t$  stationär ist.

Die Bedingung (4.28) kann zu  $\alpha(1) > 0$  umgeformt werden.

„ $\Rightarrow$ “

Aufgrund der Nichtnegativität der Varianz gilt

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p} = \frac{\alpha_0}{\alpha(1)} \geq 0. \quad (4.31)$$

Durch  $\alpha_0 > 0$  folgt  $\alpha(1) \geq 0$ . Da der Fall  $\alpha(1) = 0$  aufgrund früherer Überlegungen ausgeschlossen wird, folgt  $\alpha(1) > 0$ .

„ $\Leftarrow$ “

Für eine Nullstelle  $z$  von  $\alpha(z)$  gilt

$$1 = \sum_{j=1}^p \alpha_j z^j. \quad (4.32)$$

Mit der Dreiecksungleichung und  $\alpha_i \geq 0$  für  $i = 0, \dots, p$  folgt

$$1 \leq \sum_{j=1}^p |\alpha_j z^j| = \sum_{j=1}^p \alpha_j |z^j| \leq \max_j |z^j| \sum_{j=1}^p \alpha_j \quad (4.33)$$

$$= \max_j |z^j| (1 - \alpha(1)) \quad (4.34)$$

$$< \max_j |z^j|. \quad (4.35)$$

Somit wurde für eine Nullstelle  $z$  von  $\alpha(z)$  gezeigt, dass

$$\max_j |z^j| > 1 \quad (4.36)$$

und daher

$$|z| > 1 \quad (4.37)$$

□

### Korrelation der Quadrate

Sei  $e_t$  definiert durch

$$e_t = X_t^2 - \sigma_t^2, \quad (4.38)$$

dann gilt

$$\mathbb{E}(e_t) = \mathbb{E}(X_t^2 - \sigma_t^2) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) = 0. \quad (4.39)$$

Addiert man auf beide Seiten von (4.25)  $X_t^2$ , folgt

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 + e_t. \quad (4.40)$$

Man sieht durch diese Darstellung, dass ein ARCH(p)-Prozess  $X_t$  eine autoregressive Struktur der Quadrate  $X_t^2$  besitzt.

Aufgrund von  $\alpha_i \geq 0$  sind die  $X_t^2$ -Elemente und die  $X_{t-i}^2$ -Elemente positiv korreliert. Dies hat den positiven Effekt Volatilitätscluster modellieren zu können.

### 4.3 GARCH - Modell

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, wie man AR-Modelle auf eine allgemeinere Klasse, die ARMA-Modelle überführen kann. Ähnlich zu dieser Verallgemeinerung können die ARCH-Modelle zu den GARCH-Modellen (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models*) verallgemeinert werden.

Viele empirische Untersuchungen zeigen, dass Finanzzeitreihen die Eigenschaft haben, eine weit in die Vergangenheit zurück reichende Korrelation der Quadrate zu besitzen. Aus diesem Grund ist für eine sinnvolle Modellierung oft eine große Ordnung des ARCH-Modells erforderlich.

Dies hat dann auch eine dementsprechend große Zahl an zu schätzenden Parametern zur Folge und somit auch einen hohen Rechenaufwand.

Bollerslev ([16]) hat bei seiner Einführung seines GARCH(p,q)-Modells gezeigt, dass ein GARCH(p,q)-Modell einem ARCH( $\infty$ )-Modell entspricht, sofern es stationär ist. In der Praxis heißt das, dass ein ARCH-Modell mit einer hohen Ordnung durch ein GARCH-Modell einer niedrigen Ordnung angenähert werden kann.

Die bedingte Varianz eines GARCH-Modells wird nicht allein durch die verzögerten Quadrate  $X_{t-i}^2$ , sondern auch durch verzögerte Varianzen  $\sigma_{t-i}^2$  modelliert.

**Definition 18.** Sei  $X_t$  der durch (4.7) modellierte Prozess, dann heißt  $X_t$  ein GARCH(p,q)- Prozess, wenn für den Varianzprozess gilt

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2, \quad (4.41)$$

wobei  $p, q \in \mathbb{N}$  und

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, q \text{ und } \beta_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, p. \quad (4.42)$$

Die Restriktionen (4.42) sind für einen nichtnegativen Varianzprozess  $\sigma_t^2$  notwendig.

**Stationarität**

**Satz 8.** Sei  $X_t$  ein  $GARCH(p,q)$ -Prozess, dann ist er genau dann schwach stationär, wenn gilt

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \quad (4.43)$$

In diesem Fall gilt für

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j - \sum_{j=1}^p \beta_j} < 1. \quad (4.44)$$

Wie bereits erwähnt kann ein  $ARCH(\infty)$ -Prozess durch einen  $GARCH(p,q)$ -Prozess approximiert werden. Dies zeigt der folgende Satz.

**Satz 9.** Sei  $X_t$  ein stationärer  $GARCH(p,q)$ -Prozess, dann hat  $\sigma_t^2$  folgende Darstellung

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i X_{t-i}^2, \quad (4.45)$$

mit

$$\gamma_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| < \infty.$$

*Beweis.* Sei das Lag-Polynom  $\beta(L)$  definiert durch

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \dots - \beta_p L^p. \quad (4.46)$$

Dann gilt für

$$\beta(L)\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2. \quad (4.47)$$

Für die Koeffizienten  $\beta_j$  gilt

$$\beta_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, p \text{ und } \beta(1) > 0.$$

Bereits bekannt ist folgender Zusammenhang

$$\beta(x) = 0 \Rightarrow |x| > 1. \quad (4.48)$$

Da  $\beta(L)$  kausal invertierbar ist, existiert auch eine Reihenentwicklung mit Koeffizienten  $c_j$ , sodass gilt

$$\beta(L)^{-1} = \frac{1}{\beta(L)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j L^j, \quad (4.49)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty. \quad (4.50)$$

führt man einen Koeffizientenvergleich durch, folgt aus

$$1 = (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_p L^p) \sum_{j=0}^{\infty} c_j L^j \quad (4.51)$$

folgende Darstellung für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \beta_1 c_0 = \beta_1 \geq 0 \\ c_2 &= \beta_1 c_1 + \beta_2 c_0 = \beta_1^2 + \beta_2 \geq 0 \\ &\vdots \\ c_j &= \beta_1 c_{j-1} + \dots + \beta_p c_{j-p} \geq 0, \quad j \geq p \end{aligned}$$

Somit erhält man aus dem Inversen von  $\beta(L)$

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{\beta(1)} + \frac{\alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2}{\beta(L)} \quad (4.52)$$

$$= \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i X_{t-i}^2, \quad (4.53)$$

wobei sich die Koeffizienten von  $\gamma_i$ ,  $i > 0$  durch Faltung von

$$\frac{\alpha_1 L + \dots + \alpha_q L^q}{\beta(L)} = \sum_{k=1}^q \alpha_k L^k \sum_{j=1}^{\infty} c_j L^j \quad (4.54)$$

berechnen lassen. □

Dadurch ist es möglich mit dem GARCH-Modell und  $p + q$  Parametern eine theoretisch unendlich lange Abhängigkeit der Volatilität von ihrer Vergangenheit zu modellieren.

## Kapitel 5

# Empirische Analyse der Zeitreihen

Dieses Kapitel widmet sich der Zeitreihenanalyse des zur Verfügung stehenden Datenmaterials. Nach der Beschreibung der Daten wird im Abschnitt der explorativen Datenanalyse gezeigt, dass die betrachteten Zeitreihen die Eigenschaften für die ARCH/GARCH-Modellierung erfüllen. Danach werden einige Modelle miteinander anhand von verschiedenen Kriterien verglichen und evaluiert. Der Quelle aller Abbildungen und Tabellen dieses Kapitels liegt die Statistik-Software *R* zugrunde. Die dabei verwendete Literatur ist [18], [19] und [20].

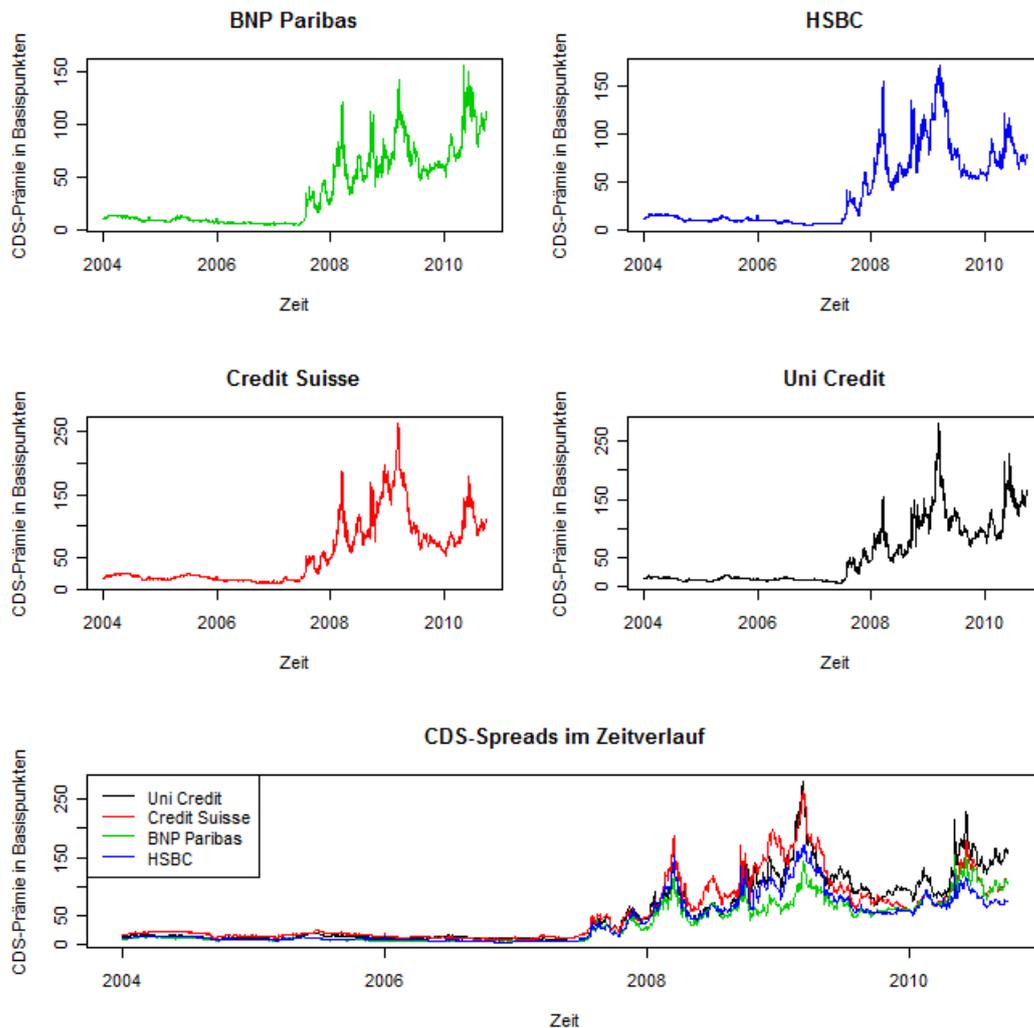
### 5.1 Beschreibung des Datenmaterials

Die Quelle des verwendeten Datenmaterials stellt das Produkt *DATASTREAM* von *Thomson Reuters* dar. Die Daten stehen in Form von Zeitreihen der 5-Jahres-CDS-Spreads im Zeitraum vom 01.01.2004 bis zum 30.09.2010 zur Verfügung. Die Daten stellen tägliche Kurswerte dar, die im betrachteten Zeitintervall an 1761 Handelstagen beobachtet wurden. Dabei wurden die CDS-Spreads von vier europäischen Großbanken untersucht:

- *BNP Paribas AG*
- *Credit Suisse AG*
- *HSBC plc*
- *Uni Credit S.p.A*

## 5.2 Explorative Datenanalyse

Zunächst werden die Originalzeitreihen betrachtet. Abbildung 5.1 zeigt die Zeitreihen der CDS-Spreads der vier Großbanken. Die vier oberen Grafiken der Abbil-

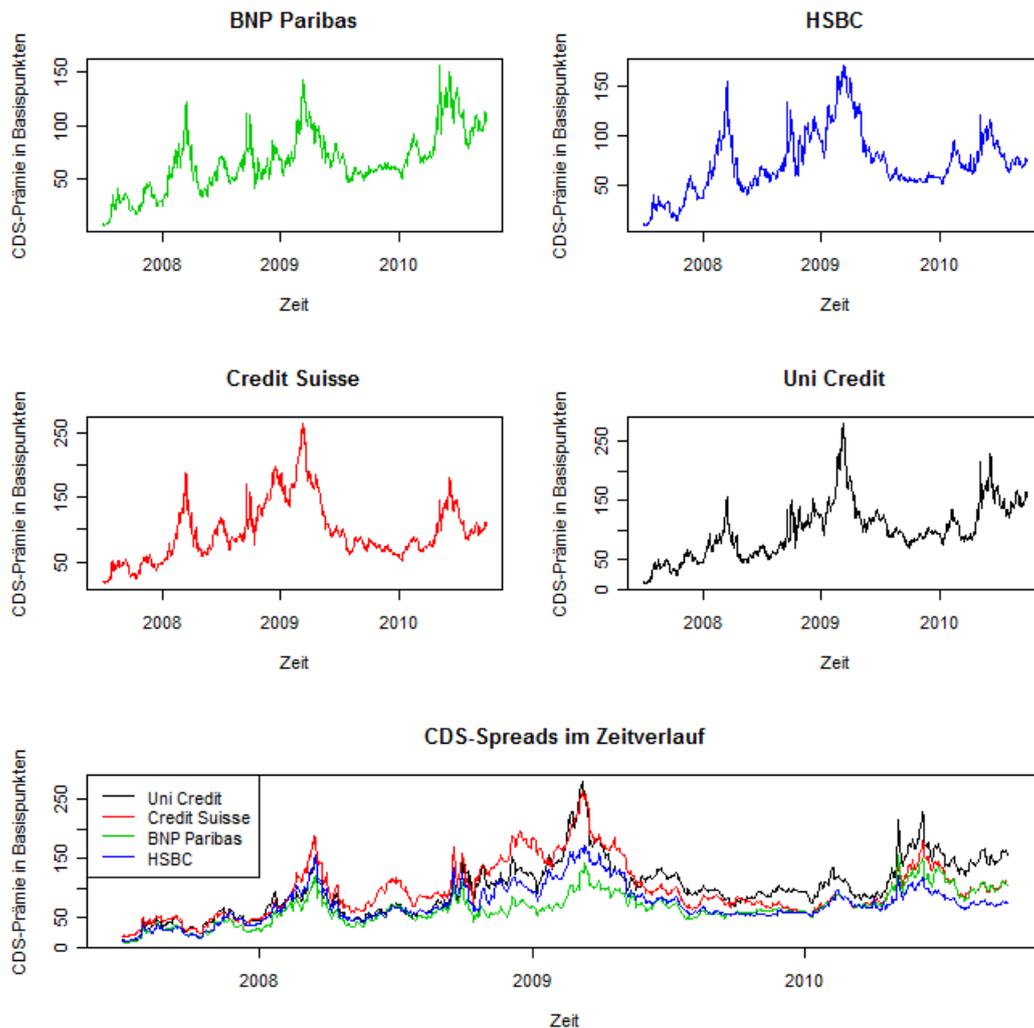


**Abbildung 5.1:** Originalzeitreihen der vier betrachteten Großbanken

dung 5.1 zeigen die einzelnen Zeitreihen. In der unteren Grafik jedoch sieht man zur besseren Vergleichbarkeit alle vier Zeitreihen dargestellt.

Man sieht auch, dass bei allen vier Zeitreihen sich die CDS-Spreads bis Mitte 2007 nur geringfügig im Zeitverlauf geändert haben. Aus diesem Grund wird für die weitere Analyse nur der Datensatz vom 02.07.2007 bis zum 30.09.2010 betrachtet.

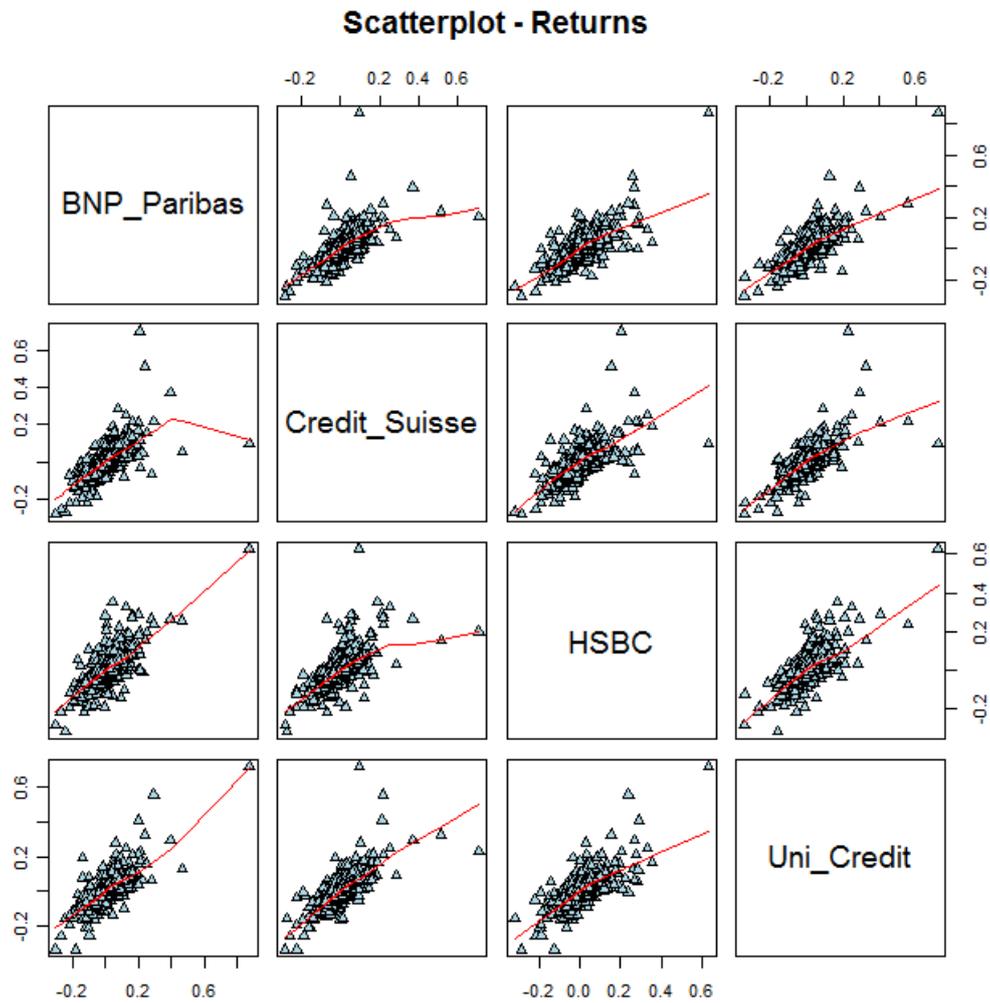
Dies entspricht 849 Handelstagen und somit 849 zur Verfügung stehenden Datenpunkten für die weitere Analyse. Abbildung 5.2 zeigt die weiter betrachteten Zeitreihen. Es ist deutlich ein ähnlicher Verlauf der CDS-Spreads zu beobachten,



**Abbildung 5.2:** Originalzeitreihen zwischen 02.07.2007 und 30.09.2010

was plausibel erscheint, da nahezu alle Banken von der jüngsten Finanzkrise betroffen waren.

Dieser Zusammenhang lässt sich auch graphisch durch folgende Scatterplotmatrix in Abbildung 5.3 darstellen. Abbildung 5.3 zeigt die starke Korrelation der einzelnen Banken untereinander anhand der Retruns der CDS-Spreads.



**Abbildung 5.3:** Graphische Darstellung des Zusammenhangs der Banken

Da die CDS-Spreads keine Struktur aufweisen ist es nicht sinnvoll mit ihnen weiter zu arbeiten. Wie bereits in Kapitel 3 erwähnt ist die Stationarität eine enorm wichtige Eigenschaft, die von Zeitreihen gefordert wird. Die CDS-Spreads weisen jedoch keine Stationarität auf. Deswegen werden nun die Zeitreihen der Spreads transformiert, um so zu statistisch sinnvollen Zeitreihen zu kommen.

**Definition 19.** (Return und Log-Return)

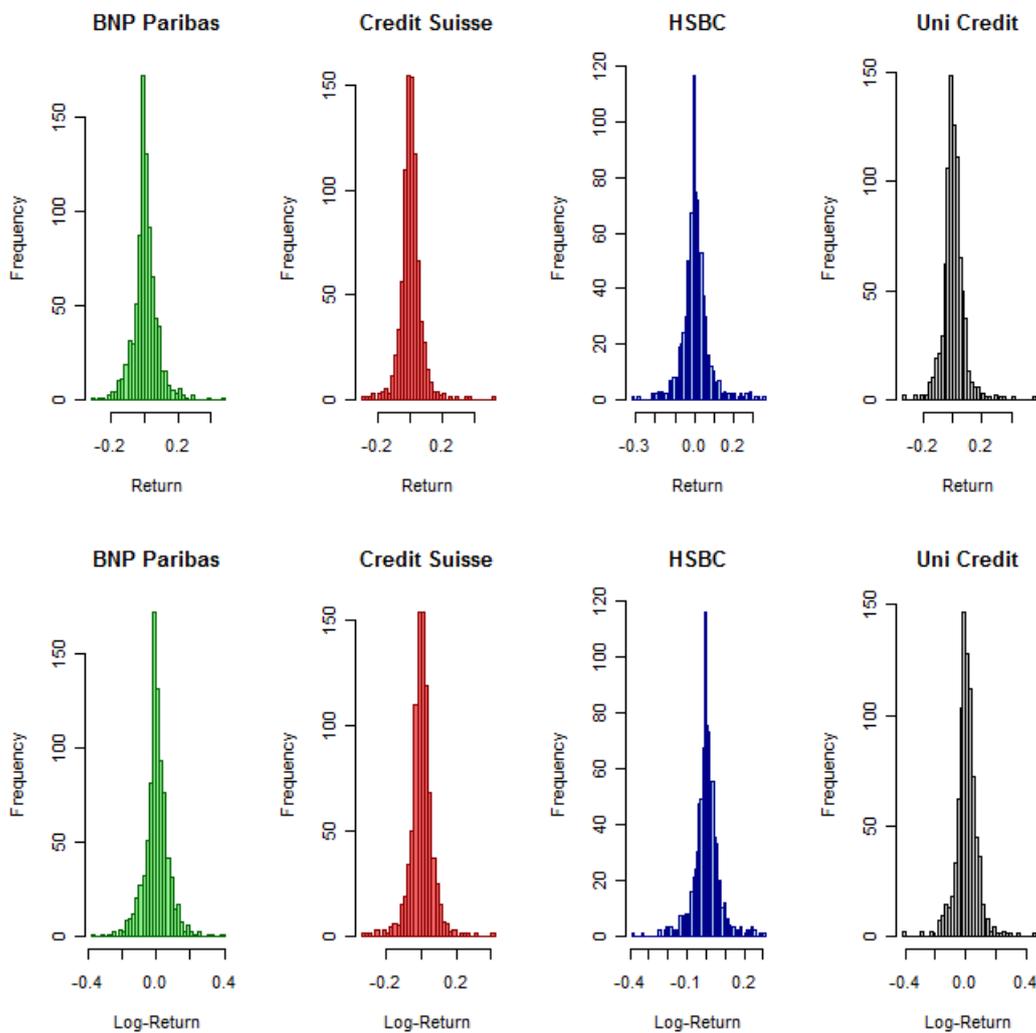
Sei  $(X_t)_{t \in T}$  die Zeitreihe des CDS-Spreads, dann ist der Return definiert durch

$$R_t = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1 = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \quad (5.1)$$

und der Log-Return ist definiert durch

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right). \quad (5.2)$$

Abbildung 5.4 zeigt die Histogramme der Returns und der Log>Returns. Aufgrund

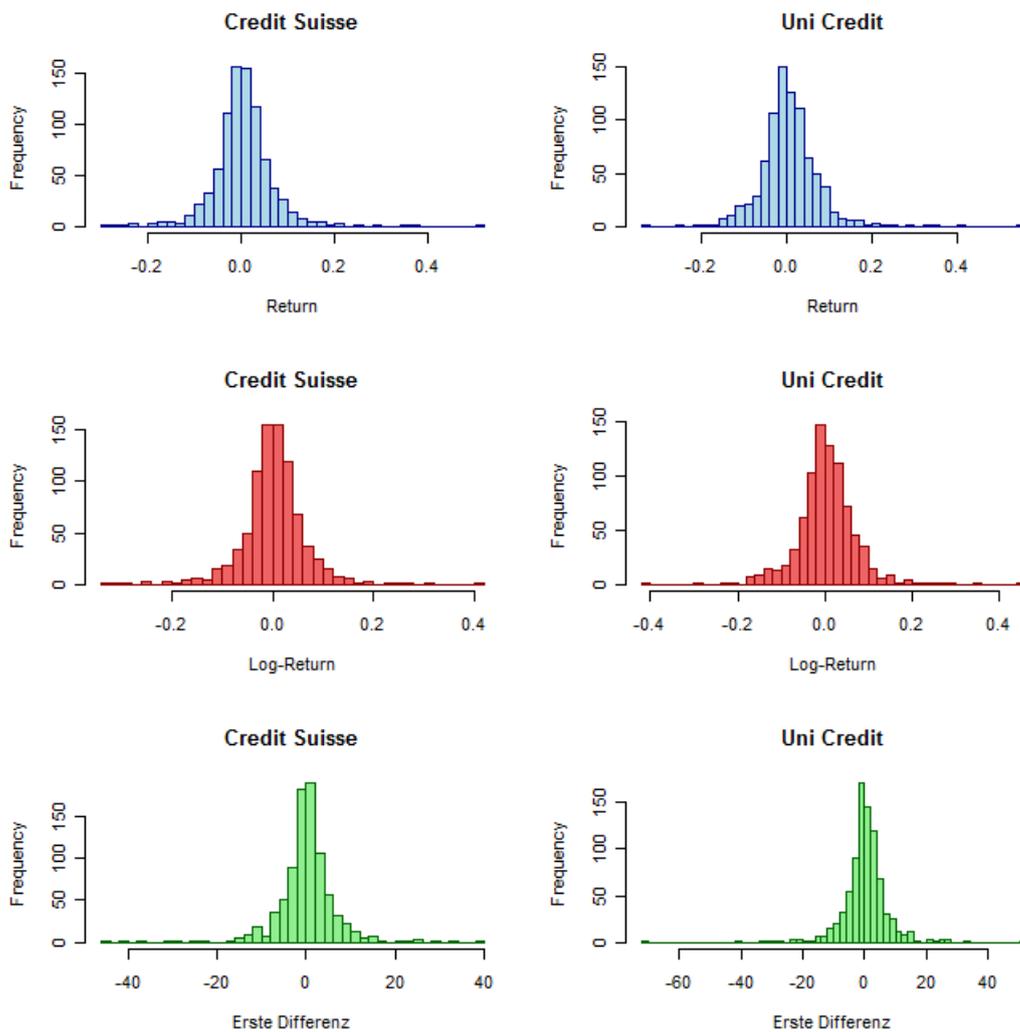


**Abbildung 5.4:** Histogramme der Returns und Log>Returns

der starken Ähnlichkeit der Daten werden für die weitere Analyse nur die Returns

und Log>Returns von *Credit Suisse* und *Uni Credit* verwendet. Hinzu kommt eine dritte Größe, die erste Differenz, welche interpretiert werden kann als die erste Ableitung oder die Änderung die von einem Zeitpunkt auf den nächsten auftritt. Die erste Differenz wird deswegen betrachtet, da sie die absolute Änderung der Daten beschreibt und keinen Quotienten in der Transformation enthält wie der Return oder Log-Return.

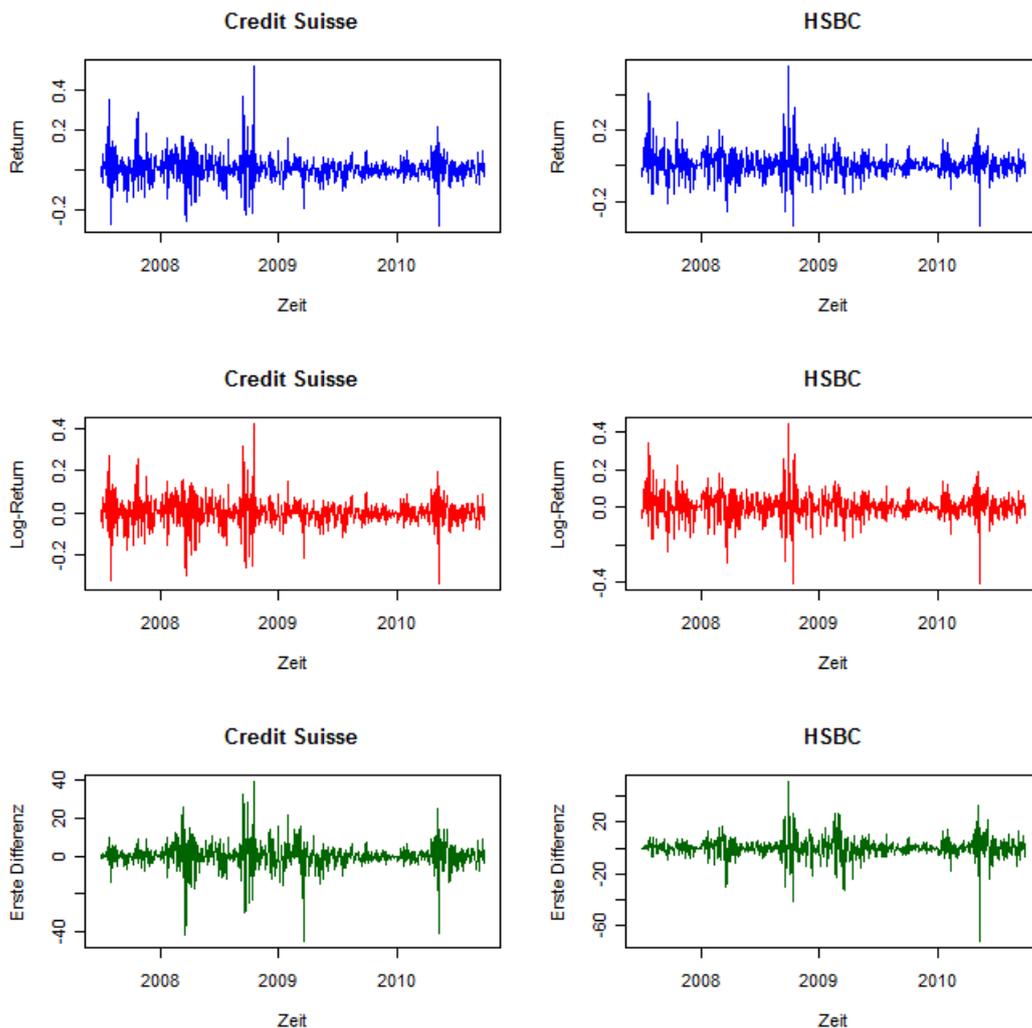
Abbildung 5.5 zeigt die weiterhin betrachteten drei Größen der beiden Banken.



**Abbildung 5.5:** Histogramme der Returns, Log>Returns und der ersten Differenz

In Abbildung 5.6 sieht man die entsprechenden Zeitreihen der drei betrachteten

Größen. Auf den ersten Blick ist ein konstanter Mittelwert und eine sich im Zeitverlauf ändernde Variabilität zu beobachten, was Heteroskedastizität vermuten lässt und somit eine zu prüfende Eigenschaft für die GARCH-Modellierung darstellt. Sieht man sich die Histogramme der Returns, Log>Returns und der ersten



**Abbildung 5.6:** Zeitreihen der drei betrachteten Größen

Differenz in Abbildung 5.5 an, so drängt sich die Vermutung auf, es handle sich nicht um normalverteilte sondern um eher leptokurtisch verteilte Daten. Diese Eigenschaft wurde bereits als Argument in Kapitel 4 für eine GARCH-Modellierung diskutiert.

### 5.2.1 Test auf Normalverteilung

Zunächst werden die Daten graphisch durch einen Q-Q-Plot, wie in Abbildung 5.7 ersichtlich ist, dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verteilung der Daten bei allen drei Größen stark von der Normalverteilung abweicht. Dies lässt

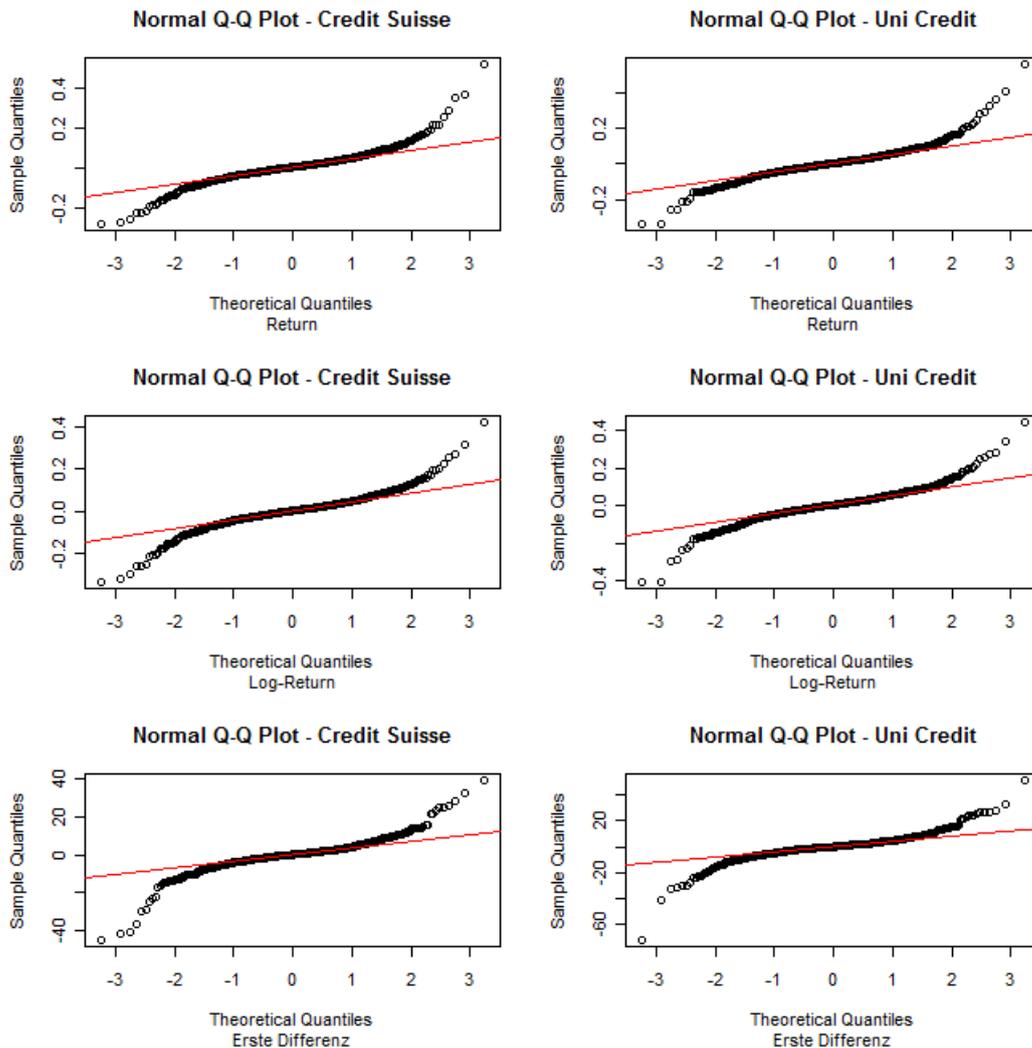


Abbildung 5.7: Q-Q-Plot der betrachteten Größen

sich auch durch einen statistischen Test, den *Jarque-Bera-Test*, überprüfen. Der *Jarque-Bera-Test* ist ein Test auf Normalverteilung. Die Null- und Alternativhypothese lauten dabei wie folgt

- $H_0$ : Die Stichprobe ist normalverteilt

- $H_1$ : Die Stichprobe ist nicht normalverteilt

Die Teststatistik  $T_{JB}$  wird durch

$$T_{JB} = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right) \quad (5.3)$$

definiert, wobei die Schiefe  $S$  durch

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{3/2}} \quad (5.4)$$

und die Kurtosis  $K$  durch

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2} \quad (5.5)$$

gegeben sind. Die Größe  $\bar{X}$  stellt das Stichprobenmittel und  $n$  die Stichprobengröße dar. Die Testgröße  $T_{JB}$  ist dabei asymptotisch Chi-Quadrat-verteilt mit zwei Freiheitsgraden:  $T_{JB} \sim \chi_2^2$ . Der *Jarque-Bera-Test* verwirft die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von  $1 - \alpha = 0.95$  für Werte von  $T_{JB}$  über 6.

Für das weitere Vorgehen werden nun sechs Notationen für die verwendeten sechs Variablen eingeführt:

- *ret2*... Return des Credit Suisse CDS-Spreads
- *ret4*... Return des Uni Credit CDS-Spreads
- *lret2*... Log-Return des Credit Suisse CDS-Spreads
- *lret4*... Log-Return des Uni Credit CDS-Spreads
- *ed2*... Erste Differenz des des Credit Suisse CDS-Spreads
- *ed4*... Erste Differenz des des Uni Credit CDS-Spreads

In Tabelle 5.1 sind die Teststatistiken und die dazugehörigen p-Werte dargestellt. Man sieht, dass die p-Werte hoch signifikant sind und die Nullhypothese verworfen werden kann. Die Daten sind somit nicht normalverteilt, worauf bereits der Q-Q-Plot hingedeutet hat.

	$T_{JB}$	p-Wert
<i>ret2</i>	2838.576	< 2.2e-16
<i>ret4</i>	2513.548	< 2.2e-16
<i>lret2</i>	1439.539	< 2.2e-16
<i>lret4</i>	1477.53	< 2.2e-16
<i>ed2</i>	4223.721	< 2.2e-16
<i>ed4</i>	8353.519	< 2.2e-16

**Tabelle 5.1:** Ergebnis des *Jarque-Bera-Tests*

### 5.2.2 Anpassung der Daten an eine bekannte Verteilung

In diesem Abschnitt wird versucht eine entsprechend gute Anpassung der empirischen Verteilungen der Daten an eine bekannte Verteilung zu erreichen, um die Vermutung, dass es sich um leptokurtisch verteilte Variablen handelt, zu bekräftigen.

In Abbilung 5.8 sieht man, dass eine t-Verteilung eine gute Approximation an die empirische Verteilung der Variablen darstellt. Bei den Variablen *ed2* und *ed4* sind Abweichungen in den Tails zu beobachten.

Die Anpassungsparameter der entsprechenden Variablen sind der Tabelle 5.2 zu entnehmen. Somit wurde die empirische Verteilung der Variablen durch eine skalierte t-Verteilung angepasst. Dabei bezeichnen *df* die Anzahl der Freiheitsgra-

	<i>df</i>	<i>m</i>	<i>s</i>
<i>ret2</i>	2.6863	0.0028	0.0376
<i>ret4</i>	2.9303	0.0036	0.0433
<i>lret2</i>	2.6879	0.0028	0.0374
<i>lret4</i>	2.9419	0.0037	0.0432
<i>ed2</i>	2.0643	0.0679	1.0433
<i>ed4</i>	2.0726	0.0973	1.1807

**Tabelle 5.2:** Anpassungsparameter der Daten an t-Verteilung

de, *m* den Lokationsparameter und *s* den Skalierungsparameter der skalierten t-Verteilung.

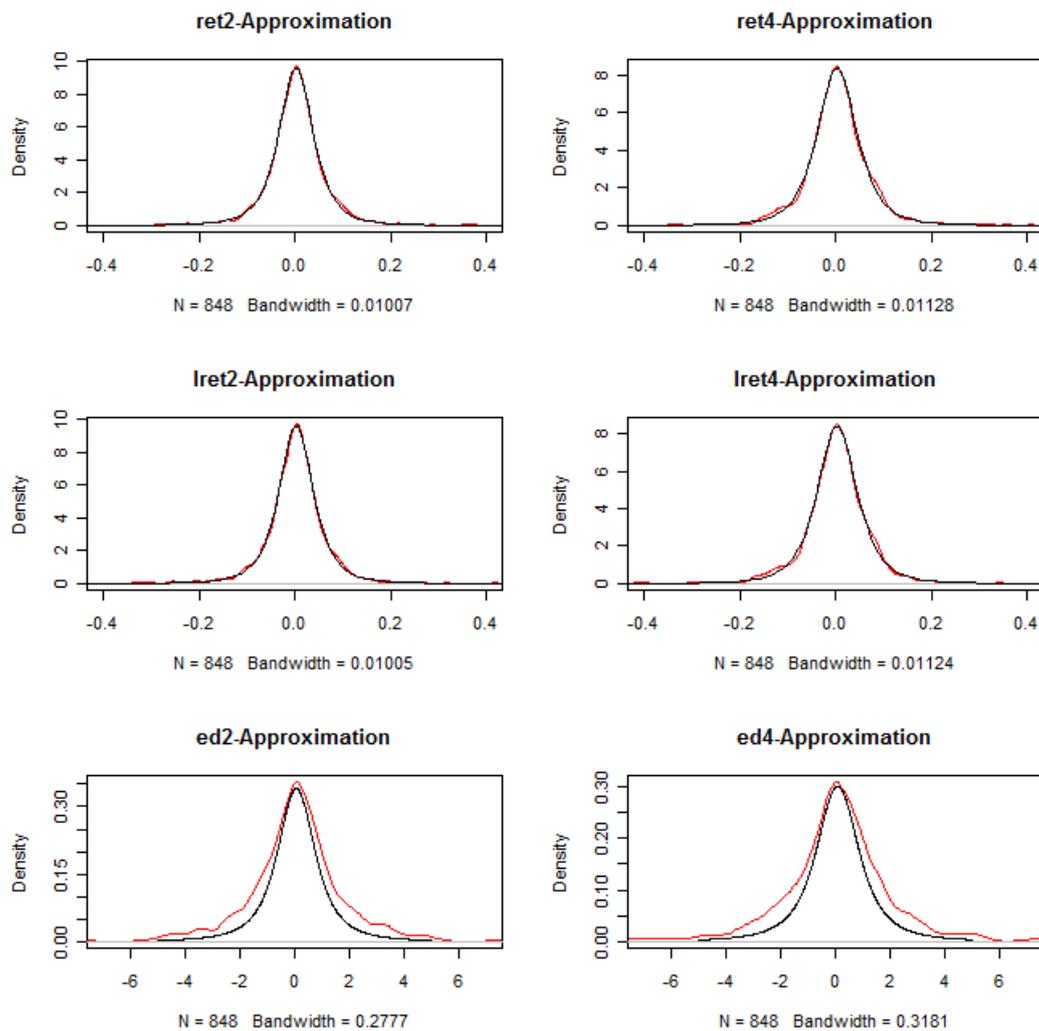


Abbildung 5.8: Anpassung der t-Dichten an die Daten

Um eine Vergleichbarkeit mit den empirischen Verteilungen der Variablen zu erreichen, wird die Dichte  $f(x)$  der unskalierten t-Verteilung mit den entsprechenden Freiheitsgraden durch

$$f_{scale}(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x - m}{s}\right) \quad (5.6)$$

linear transformiert.  $f_{scale}(x)$  stellt die jeweiligen Dichten in Abbildung 5.8 dar.

Der Q-Q-Plot in Abbildung 5.9 zeigt, dass die t-Verteilung eine sehr gute Anpassung darstellt. Man sieht deutlich das lineare Muster, wobei am Rand leichte

Abweichungen zu beobachten sind, jedoch ist die Anpassung sehr zufriedenstellend.

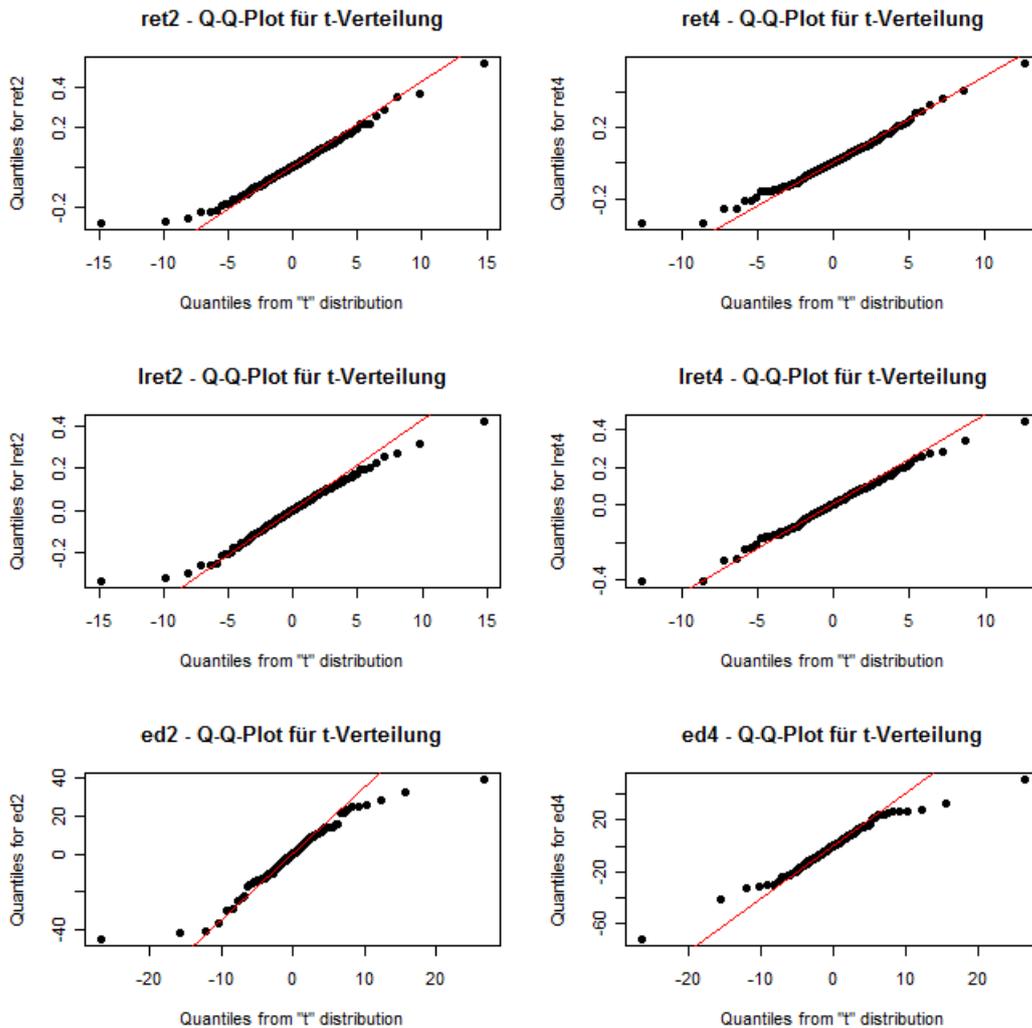


Abbildung 5.9: Q-Q-Plots der t-Verteilung

Zweck der Anpassung ist es zu zeigen, dass die empirische Verteilung der Daten leptokurtisch ist. Da sie mit einer skalierten t-Verteilung angepasst werden kann, wäre dies graphisch gezeigt, denn eine t-Verteilung hat höhere Tails als die Normalverteilung und stellt erst ab  $df = 30$  eine gute Approximation für die Normalverteilung dar. Je kleiner die Anzahl der Freiheitsgrade einer t-Verteilung,

desto höher sind ihre Tails.

Dass es sich um eine leptokurtische Verteilung handelt wird nun auch numerisch untermauert. Da die Kurtosis für die berechneten Freiheitsgrade der t-Verteilung nicht existiert, muss ein anderes Maß als Kriterium herangezogen werden: das Tailmaß. Das Tailmaß kann verstanden werden als empirisches Maß für die Kurtosis. Ist das Tailmaß positiv, so deutet dies auf höhere Tails im Vergleich zur Normalverteilung hin und man kann von leptokurtisch verteilten Daten ausgehen. Hat das Tailmaß einen negativen Wert, so sagt man die Daten sind platykurtisch verteilt. Die Normalverteilung wird, wie bei der Kurtosis, als Referenz herangezogen und als mesokurtisch bezeichnet.

**Definition 20.** (Theoretisches Tailmaß)

Das theoretische Tailmaß  $\tau$  wird über die theoretischen Quantile  $x_p$  einer Verteilung durch

$$\tau = \frac{x_{0.975} - x_{0.025}}{x_{0.875} - x_{0.125}} - 1.7 \quad (5.7)$$

definiert.

Der Wert 1.7 wird bei der Definition abgezogen damit das Tailmaß mit dieser Konstruktion einen Vergleich mit der Normalverteilung erlaubt. Das Tailmaß der Normalverteilung ist somit null.

Sei, wie im Falle der t-Verteilung, eine symmetrische Verteilung  $F(\mu, \sigma)$  und das Quantil  $x_p = F^{-1}(p)$  mit Lokation  $\mu$  und Skalierung  $\sigma$  gegeben. Dann gilt  $x_p = \mu + \sigma z_p$  mit  $z_p$  als Quantil von  $F(0, 1)$ .

Somit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Tailmaß und einer symmetrischen Verteilung

$$\tau = \frac{x_{0.975} - x_{0.025}}{x_{0.875} - x_{0.125}} - 1.7 = \frac{\mu + \sigma z_{0.975} - \mu - \sigma z_{0.025}}{\mu + \sigma z_{0.875} - \mu - \sigma z_{0.125}} - 1.7 = \frac{z_{0.975}}{z_{0.875}} - 1.7, \quad (5.8)$$

da für eine symmetrische Verteilung  $z_{0.975} = -z_{0.025}$  gilt.

Damit ist das Tailmaß bezüglich Lokation und Skalierung invariant.

In Tabelle 5.3 ist das Tailmaß der gefitteten t-Verteilungen  $\tau_t$  und das empirische Tailmaß der Daten  $\hat{\tau}$  dargestellt. Man sieht dabei erstens, dass  $\tau_t$  und  $\hat{\tau}$  der

einzelnen Variablen sehr nah aneinander liegen, was für die gute Approximation spricht und zweitens, dass sich die Tailmaße im positiven Sinne deutlich von null unterscheiden und somit höhere Tails als die Normalverteilung aufweisen.

	$\tau_t$	$\hat{\tau}$
<i>ret2</i>	0.6205	0.5285
<i>ret4</i>	0.6714	0.5570
<i>lret2</i>	0.6209	0.5307
<i>lret4</i>	0.6736	0.5629
<i>ed2</i>	0.4400	0.7169
<i>ed4</i>	0.4430	0.7099

**Tabelle 5.3:** Tailmaße  $\tau_t$  und  $\hat{\tau}$

Bei den Tailmaßen der Variablen *ed2* und *ed4* sind wie bei deren Dichten in Abbildung 5.8 höhere Tails zu beobachten. Dies ist ebenso im Q-Q-Plot zu erkennen.

### 5.2.3 Test auf Homoskedastizität

Die Familie der ARCH/GARCH-Modelle geht zwar von einem konstanten Mittelwert der Daten aus, aber von einer sich im Zeitverlauf ändernden Varianz. Deswegen werden nun die Zeitreihen auf Homoskedastizität getestet. Diese stellt die Nullhypothese dar und bedeutet, dass sich die Variabilität der Daten im Zeitverlauf nicht signifikant ändert. Dazu wird der *Breusch-Pagan-Test*<sup>1</sup> verwendet und das Hypothesenpaar lautet dabei

- $H_0$ : Die Stichprobe ist homoskedastisch
- $H_1$ : Die Stichprobe ist heteroskedastisch

Dieser Test beruht auf einer linearen Regression und baut auf der Beziehung der quadrierten Residuen untereinander auf. Er geht davon aus, dass die Varianz der Residuen von den Regressorvariablen  $Z_2, \dots, Z_p$  abhängig ist und die Struktur dieser Abhängigkeit durch

$$\sigma_t^2 = f(\delta_1 + \delta_2 Z_2 + \dots + \delta_p Z_p), \quad (5.9)$$

<sup>1</sup>Vgl. [15] S.180

mit beliebiger Funktion  $f(\cdot)$ , beschrieben wird. Die zu prüfende Nullhypothese lautet

$$H_0 = \delta_2 = \dots = \delta_p = 0 \quad (5.10)$$

und impliziert, dass für die Varianz  $\sigma_t^2 = f(\delta_1)$  für alle  $t$  gilt. Dies bedeutet Homoskedastizität.

Da die p-Werte des *Breusch-Pagan-Tests* alle bei fast null liegen, verwirft dieser klar die Nullhypothese und somit kann man davon ausgehen, dass eine weitere, für die GARCH-Modellierung wünschenswerte Eigenschaft, erfüllt ist.

#### 5.2.4 Test auf Stationarität

Nun wird auf eine weitere wichtige Eigenschaft, die Stationarität, getestet. Dazu wird der *Augmented-Dickey-Fuller-Test* verwendet. Das Hypothesenpaar des Tests lautet

- $H_0$ : Die Zeitreihe ist nicht stationär
- $H_1$ : Die Zeitreihe ist stationär

Der *Augmented-Dickey-Fuller-Test* ist die Erweiterung des Einheitswurzeltests von *Dickey* und *Fuller*. Wenn 1 die Nullstelle des charakteristischen Polynoms eines stochastischen Prozesses  $X_t$  darstellt, dann sagt man der stochastische Prozess besitzt eine Einheitswurzel und ist nicht stationär.

Der *Augmented-Dickey-Fuller-Test* basiert auf dem Modell

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (5.11)$$

Die Nullhypothese dabei ist, dass  $\phi = 1$ , also  $X_t$  eine Einheitswurzel besitzt und die Alternativhypothese lautet dabei  $\phi < 1$ , also dass  $X_t$  keine Einheitswurzel besitzt und somit Stationarität gegeben ist. Dieser Sachverhalt wurde bereits ausführlicher in Kapitel 3 behandelt.

Die dabei betrachtete Testgleichung enthält im Vergleich zum einfachen Einheitswurzeltest einen zeitlichen Trend und Lags von  $\Delta X_t$ , wobei

$$\Delta X_t = (\phi - 1)X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (5.12)$$

Somit lautet die Erweiterung

$$\Delta X = \beta_0 + \beta_1 t + (\phi - 1)X_{t-1} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta X_{t-j} + \epsilon_t. \quad (5.13)$$

Die Hypothesen sind somit gegeben durch

- $H_0: \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \phi = 1$
- $H_1: \phi - 1 < 0 \Leftrightarrow \phi < 1$

Die Teststatistik des *Augmented-Dickey-Fuller-Tests* lautet

$$T_{ADF} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\delta})}}, \quad (5.14)$$

wobei  $\delta = \phi - 1$  ist und  $\hat{\delta}$  der Schätzer von  $\delta$  ist. Man sieht in Tabelle 5.4 anhand

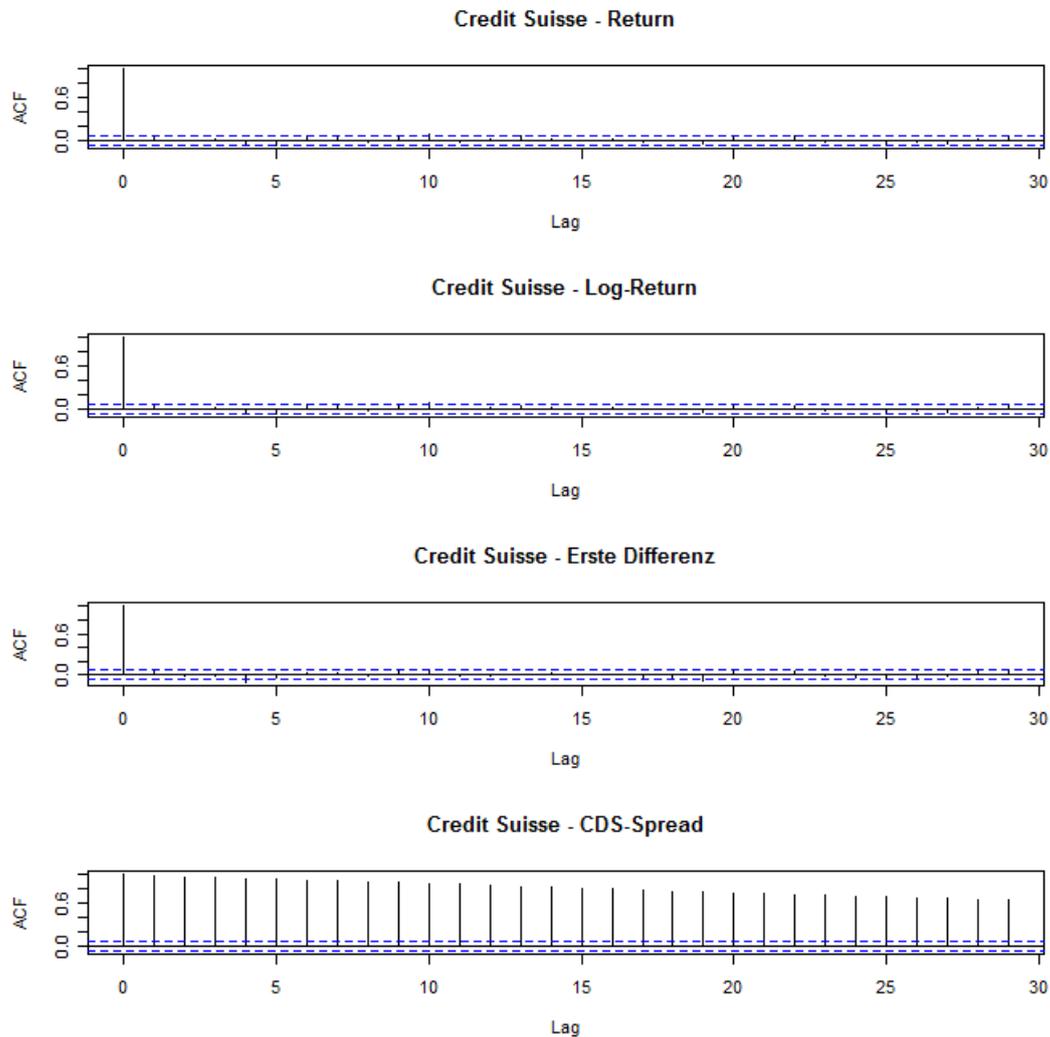
	$T_{ADF}$	p-Wert
<i>ret2</i>	-8.376	0.01
<i>ret4</i>	-8.9107	0.01
<i>lret2</i>	-8.4436	0.01
<i>lret4</i>	-9.4036	0.01
<i>ed2</i>	-8.5549	0.01
<i>ed4</i>	-10.1763	0.01

**Tabelle 5.4:** Ergebnis des *Augmented-Dickey-Fuller-Tests*

der Teststatistiken und p-Werte, dass die Nullhypothese verworfen und somit von stationären Zeitreihen ausgegangen werden kann.

Graphisch ersichtlich ist dies anhand der Autokorrelationsfunktionen. Wenn die ACF nur langsam abklingt wie beim Spread in der untersten Grafik der Abbildung 5.10, dann kann man davon ausgehen, dass es sich nicht um Stationarität handelt. Auch der Gedanke, dass es sich um einen Prozess mit langem Gedächtnis handelt wäre denkbar, welcher jedoch durch den Test auf Stationarität verworfen werden kann. Sind jedoch die Autokorrelationen alle innerhalb des Konfidenzbandes, so ist dies ein Anzeichen dafür, dass es sich um weißes Rauschen handeln könnte, welches einen stationären Prozess darstellt. Dies ist ebenso in Abbildung 5.10 in den oberen drei Grafiken zu sehen.

Abbildung 5.11 zeigt alle Autokorrelationen der sechs betrachteten Variablen und man sieht, dass fast alle Autokorrelationen sich innerhalb des Konfidenzbandes befinden und sich somit nur geringfügig von null unterscheiden.

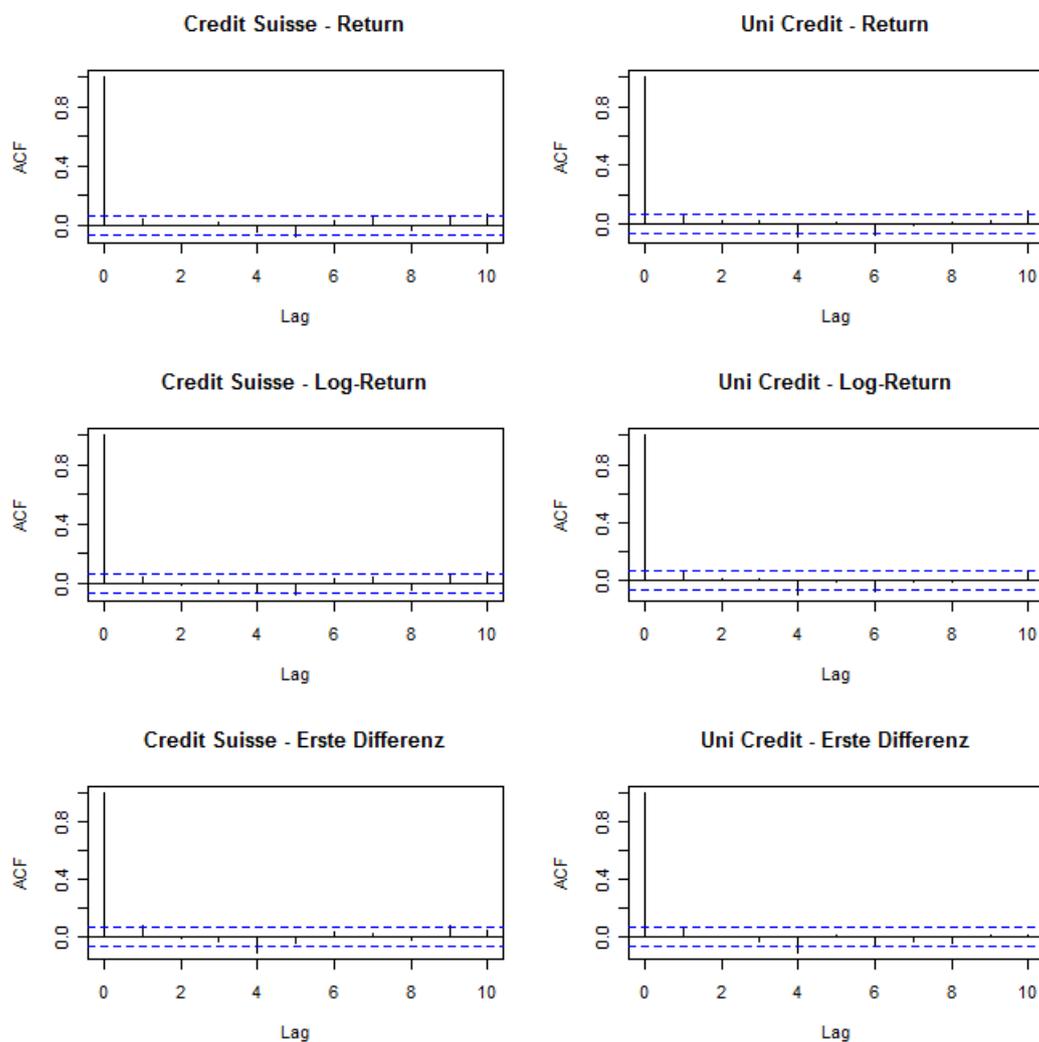


**Abbildung 5.10:** Autokorrelationsfunktionen der drei Größen und der Spreads von Credit Suisse

### 5.2.5 Test auf Unabhängigkeit

Die in Abbildung 5.11 dargestellten Autokorrelationsfunktionen lassen Unabhängigkeit vermuten. Diese Vermutung wird nun mit dem *Ljung-Box-Test* überprüft. Das Hypothesenpaar des *Ljung-Box-Tests* lautet

- $H_0$ : Die Stichprobe ist unabhängig verteilt
- $H_1$ : Die Stichprobe ist nicht unabhängig verteilt



**Abbildung 5.11:** Autokorrelationsfunktionen der Returns, Log>Returns und ersten Differenz

Die Teststatistik dabei lautet

$$T_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}, \quad (5.15)$$

wobei  $n$  die Stichprobengröße,  $\hat{\rho}_k^2$  die geschätzte Autokorrelationsfunktion zum Lag  $k$  und  $h$  die Tiefe der Autokorrelationen darstellen. Den kritischen Bereich gibt das  $\alpha$ -Quantil der  $\chi_{1-\alpha, h}^2$ -Verteilung mit  $h$  Freiheitsgraden an.

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn

$$T_{LB} > \chi_{1-\alpha, h}^2. \quad (5.16)$$

In Tabelle 5.5 sieht man die Ergebnisse des *Ljung-Box-Tests*, welche auf eine schwache Abhängigkeit hindeuten. Jedoch ist nach genauer Betrachtung der Korrelogramme diese Abhängigkeitsstruktur zu vernachlässigen denn einerseits überschreiten die Autokorrelationen nur geringfügig das Konfidenzband und andererseits ist Nullhypothese des *Ljung-Box-Tests* eine globale mit  $\rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0$ . Damit kann das Ergebnis als zufriedenstellend angesehen und von Unabhängigkeit der Daten ausgegangen werden.

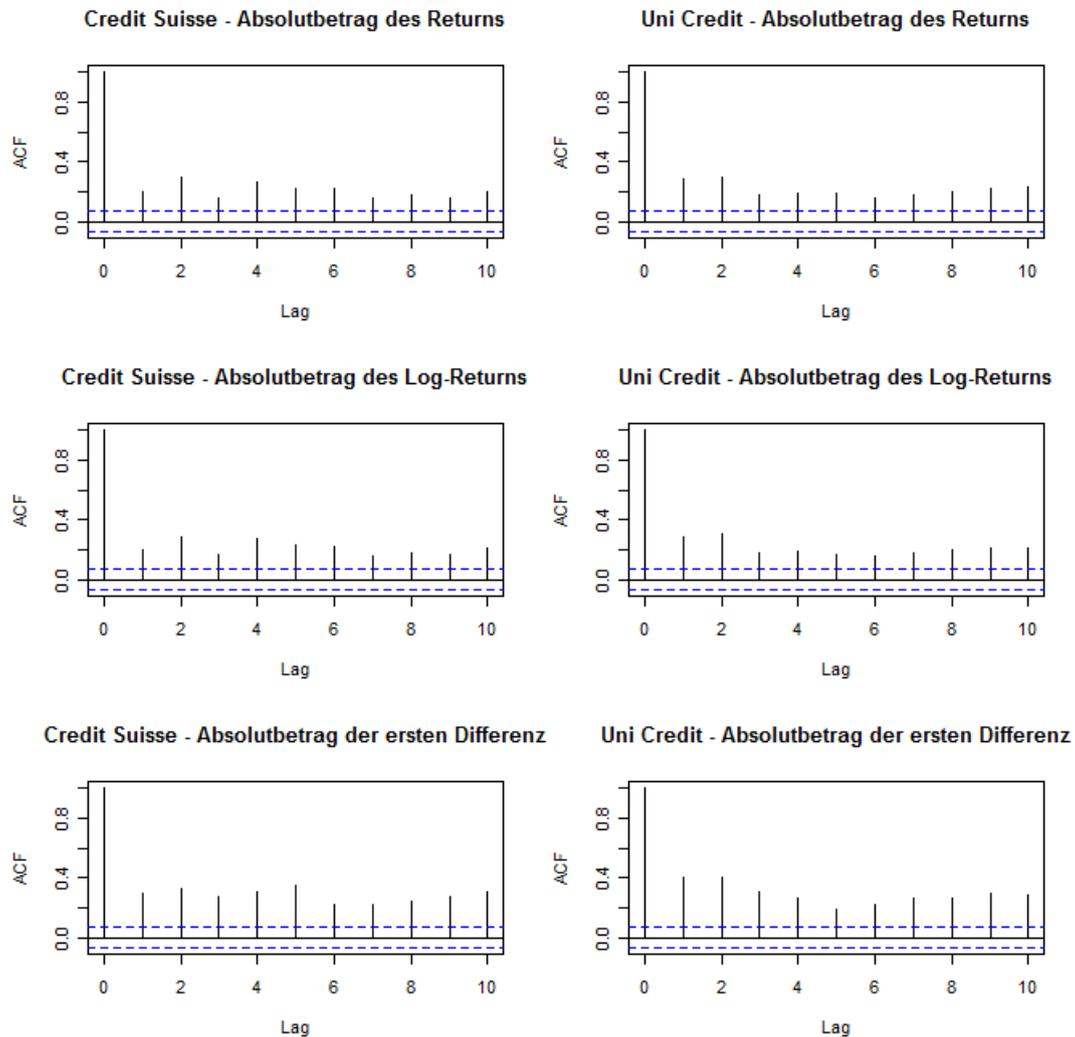
	$T_{LB}$	p-Wert
<i>ret2</i>	21.3268	0.01893
<i>ret4</i>	23.388	0.009402
<i>lret2</i>	21.5621	0.01750
<i>lret4</i>	20.9363	0.02154
<i>ed2</i>	27.5308	0.002145
<i>ed4</i>	19.7823	0.03138

**Tabelle 5.5:** Ergebnis des *Ljung-Box-Tests*

Die sechs betrachteten Variablen sind somit unabhängig verteilt. Denkt man jedoch an die Volatilitätscluster die bei Finanzzeitreihen auftreten, so muss man sich die Absolutbeträge der Variablen oder die quadrierten Variablen ansehen um diese Volatilitätscluster identifizieren zu können.

In Abbildung 5.12 bzw. 5.13 sind die Autokorrelationsfunktionen der Absolutbeträge bzw. der quadrierten Werte der sechs Variablen zu sehen. Man sieht sehr starke Abhängigkeiten, welche auf Volatilitätscluster in den Zeitreihen hindeuten. Dies wird mit wieder mit dem *Ljung-Box-Test* überprüft und in Tabelle 5.6 bzw. 5.7 dargestellt.

Die Ergebnisse der Tabellen 5.6 bzw. 5.7 weisen deutlich auf eine Ablehnung der Nullhypothese hin da, wie in den Abbildungen der Autokorrelationsfunktionen ersichtlich, eine starke Abhängigkeitsstruktur vorhanden ist.

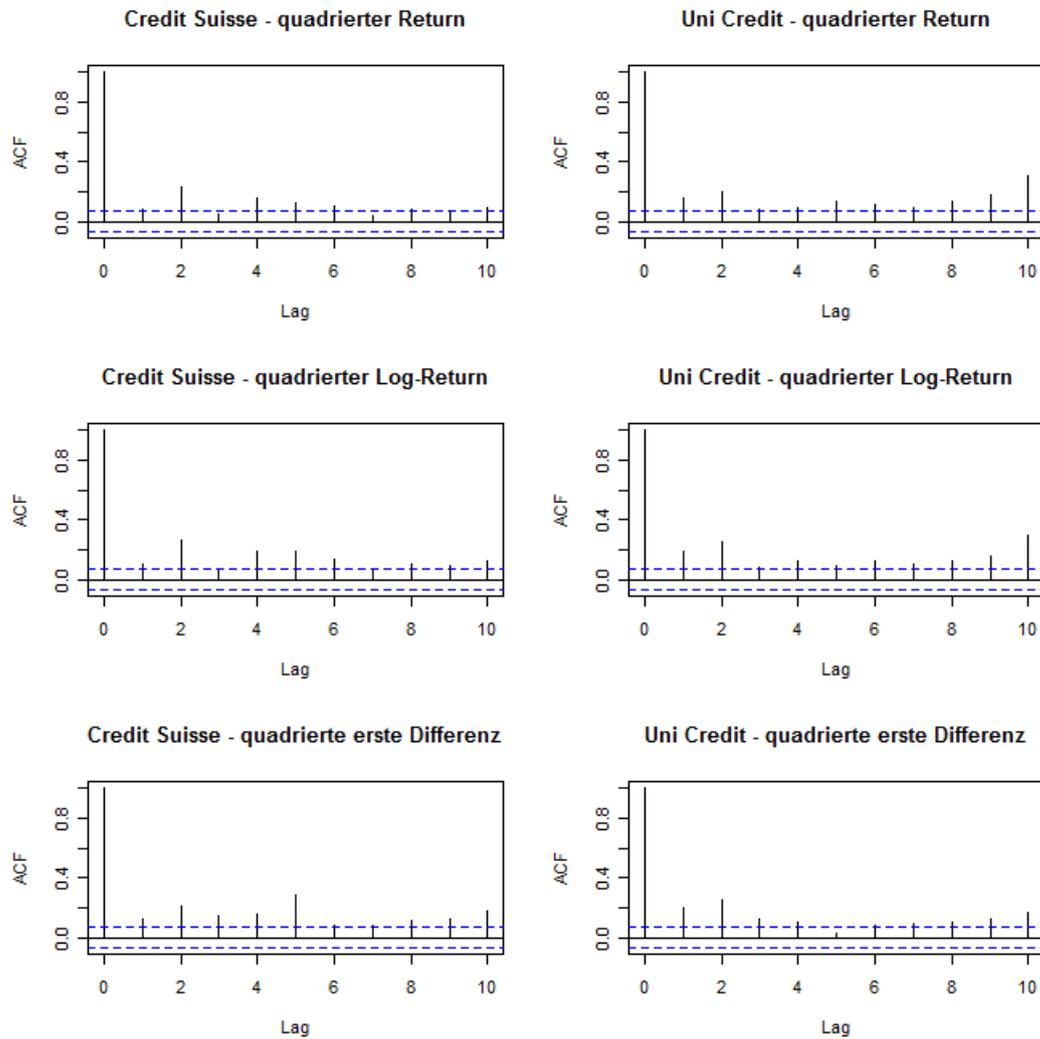


**Abbildung 5.12:** Autokorrelationsfunktionen der Absolutbeträge der Variablen

### 5.2.6 Zusammenfassung der Tests

Es ergeben sich anhand der statistischen Untersuchung zusammengefasst folgende Eigenschaften der Returns, Log>Returns und der ersten Differenz:

- keine Normalverteilung in den Daten, sondern eine leptokurtische
- Heteroskedastizität
- Stationarität
- keine Abhängigkeiten in den sechs Variablen



**Abbildung 5.13:** Autokorrelationsfunktionen der quadrierten Variablen

- starke Abhängigkeiten in den Absolutbeträgen und quadrierten Variablen

Damit sind alle Voraussetzungen der drei Größen für eine GARCH-Modellierung erfüllt.

### 5.3 Modellierung und Evaluierung

Für die Modellierung werden sechs verschiedene Modelle betrachtet und anschließend anhand von einigen Kriterien miteinander verglichen und evaluiert. Bei der

	$T_{LB}$	p-Wert
<i>ret2</i>	379.971	< 2.2e-16
<i>ret4</i>	403.5855	< 2.2e-16
<i>lret2</i>	397.4103	< 2.2e-16
<i>lret4</i>	391.6259	< 2.2e-16
<i>ed2</i>	697.1832	< 2.2e-16
<i>ed4</i>	761.5962	< 2.2e-16

**Tabelle 5.6:** Ergebnis des *Ljung-Box-Tests* für die Absolutbeträge der Variablen

	$T_{LB}$	p-Wert
<i>ret2</i>	113.0681	< 2.2e-16
<i>ret4</i>	224.1207	< 2.2e-16
<i>lret2</i>	181.5898	< 2.2e-16
<i>lret4</i>	243.4471	< 2.2e-16
<i>ed2</i>	227.9162	< 2.2e-16
<i>ed4</i>	171.0848	< 2.2e-16

**Tabelle 5.7:** Ergebnis des *Ljung-Box-Tests* für die quadrierten Variablen

Modellierung werden die letzten 20 Handelstage der Zeitreihe nicht berücksichtigt, um sie später mit den Vorhersagewerten und deren Konfidenzintervallen vergleichen zu können.

Ein typisches Problem stellt sich wenn man mehrere Modelle zur Auswahl hat und nicht weiß, welches sich am besten für die Anpassung an das gegebene Datenmaterial eignet. Der maximierte Wert der Log-Likelihoodfunktion,  $\log[L(\hat{\theta}_{ML})]$ , kann verwendet werden, um die Anpassung des Modells an die Daten zu messen. Je größer  $\log[L(\hat{\theta}_{ML})]$ , desto besser ist die Anpassung. Doch dieser Wert kann auch sehr einfach erhöht werden indem man zusätzliche Parameter im Modell hinzufügt. Aus diesem Grund sollten Modelle einerseits anhand der Anpassung und andererseits anhand der Komplexität des Modells verglichen werden. Um ein qualitativ akzeptables Modell zu finden, muss man also einen Kompromiss zwischen einer guten Anpassung und einer geringen Modell-Komplexität eingehen. Dazu werden nun zwei Informationskriterien, das Akaikes Informationskriterium und das Bayessche Informationskriterium, eingeführt welche zum erwähnten Kompromiss führen.

**Definition 21.** (Akaiikes Informationskriterium - AIC)

$$AIC = -2 \log[L(\hat{\theta}_{ML})] + 2p. \quad (5.17)$$

**Definition 22.** (Bayessches Informationskriterium - BIC)

$$BIC = -2 \log[L(\hat{\theta}_{ML})] + \log(n)p. \quad (5.18)$$

Dabei stellt  $p$  die Anzahl der im Modell verwendeten Parameter und  $n$  die Stichprobengröße dar. Für beide Informationskriterien gilt, je kleiner desto besser. Somit ist beim Vergleich verschiedener Modelle anhand der beiden Kriterien jenes Modell zu wählen, das den kleineren AIC- bzw. BIC-Wert aufweist.

### 5.3.1 ARCH(1)-Modell

Tabelle 5.8 zeigt die Parameteranalyse des ARCH(1)-Modells. Der Analyse der

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\alpha_0$	0.0030054	0.0002176	13.814	< 2e-16	***
$\alpha_1$	0.4050488	0.0911053	4.446	8.75e-06	***

**Tabelle 5.8:** Parameter des ARCH(1)-Modells

Parameter liegt ein multiples Regressionsmodell zugrunde. Man ist daran interessiert herauszufinden, ob einzelne Parameter aus dem Modell entfernt werden können, da sie nicht viel zur Erklärung des Modells beitragen. Dies ist dann der Fall, wenn ein Parameter  $p$  gleich null ist und somit lautet die Nullhypothese  $H_0 : p = 0$  und die Alternativhypothese  $H_1 : p \neq 0$ . Man testet somit ob der Parameter  $p$  null ist. Ist dies der Fall, so trägt er nicht zur Erklärung des Modells bei und kann entfernt werden. Dabei ist die Signifikanz in drei Kategorien geteilt und mittels Sternen notiert. Ein Stern bedeutet der Parameter ist *knapp signifikant*, zwei bedeuten *signifikant* und drei Sterne stehen für einen *hoch signifikanten* Parameter.

Man sieht dass die zwei Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  hoch signifikant für das Modell sind und es ergibt sich somit für die Variable *ret2* folgender spezifischer ARCH(1)-

AIC	BIC
-2.676455	-2.659358

**Tabelle 5.9:** AIC und BIC des ARCH(1)-Modells

Prozess  $X_t$

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (5.19)$$

mit weißem Rauschen  $\epsilon_t$  und

$$\sigma_t = \sqrt{0.0030054 + 0.4050488X_{t-1}^2}. \quad (5.20)$$

Alle weiterhin betrachteten Prozesse haben den gleichen Ansatz  $X_t = \sigma_t \epsilon_t$ , unterscheiden sich jedoch durch die Komponente  $\sigma_t$ . Im Weiteren wird aus diesem Grund nur die Komponente  $\sigma_t$  der konkurrierenden Modelle angegeben.

### 5.3.2 ARCH(2)-Modell

In Tabelle 5.10 sieht man, dass alle drei Parameter signifikant, zwei davon hoch signifikant, für das Modell sind. Es ergibt sich somit folgender spezifischer ARCH(2)-Prozess für die Variable *ret2*

$$\sigma_t = \sqrt{0.0022175 + 0.1569124X_{t-1}^2 + 0.3573481X_{t-2}^2}. \quad (5.21)$$

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\alpha_0$	0.0022175	0.0001785	12.424	< 2e-16	***
$\alpha_1$	0.1569124	0.0508222	3.08	0.00202	**
$\alpha_2$	0.3573481	0.0661862	5.399	6.7e-08	***

**Tabelle 5.10:** Parameter des ARCH(2)-Modells

AIC	BIC
-2.805140	-2.782343

**Tabelle 5.11:** AIC und BIC des ARCH(2)-Modells

### 5.3.3 GARCH(1,1)-Modell

In Tabelle 5.12 sieht man wieder die Signifikanz der Parameter für das Modell. Damit ergibt sich folgender spezifischer GARCH(1,1)-Prozess für die Variable *ret2*

$$\sigma_t = \sqrt{0.00011295 + 0.21822176X_{t-1}^2 + 0.78416883\sigma_{t-1}^2}. \quad (5.22)$$

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\alpha_0$	0.00011295	3.783e-05	2.985	0.00283	**
$\alpha_1$	0.21822176	3.488e-02	6.256	3.96e-10	***
$\beta_1$	0.78416883	2.736e-02	28.666	< 2e-16	***

**Tabelle 5.12:** Parameter des GARCH(1,1)-Modells

AIC	BIC
-2.960186	-2.937389

**Tabelle 5.13:** AIC und BIC des GARCH(1,1)-Modells

### 5.3.4 GARCH(2,1)-Modell

Für den spezifischen GARCH(2,1)-Prozess für die Variable *ret2* ergibt sich

$$\sigma_t = \sqrt{0.00018360 + 0.03238322X_{t-1}^2 + 0.24956811X_{t-2}^2 + 0.70712091\sigma_{t-1}^2}. \quad (5.23)$$

In Tabelle 5.14 sieht man, dass der Parameter  $\alpha_1$  nicht signifikant für das Modell

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\alpha_0$	0.00018360	5.042e-05	3.641	0.000271	***
$\alpha_1$	0.03238322	2.477e-02	1.307	0.191076	
$\alpha_2$	0.24956811	4.845e-02	5.151	2.59e-07	***
$\beta_1$	0.70712091	3.652e-02	19.364	< 2e-16	***

**Tabelle 5.14:** Parameter des GARCH(2,1)-Modells

ist und entfernt werden kann. Es wäre somit nicht sinnvoll ein GARCH(3,1)-Modell zu betrachten.

AIC	BIC
-2.984149	-2.955652

**Tabelle 5.15:** AIC und BIC des GARCH(2,1)-Modells

### 5.3.5 GARCH(1,3)-Modell

Für den spezifischen GARCH(1,3)-Prozess für die Variable *ret2* ergibt sich

$$\sigma_t = \sqrt{0.0001 + 0.2153X_{t-1}^2 + 0.7868\sigma_{t-1}^2 + 10^{-8}\sigma_{t-2}^2 + 10^{-8}\sigma_{t-3}^2}. \quad (5.24)$$

Bei diesem Modell fällt deutlich auf, dass die Parameter  $\beta_2$  und  $\beta_3$  überhaupt

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\alpha_0$	0.00011039	3.671e-05	3.007	0.00264	**
$\alpha_1$	0.21525788	2.816e-02	7.644	2.11e-14	***
$\beta_1$	0.78675984	1.089e-01	7.228	4.90e-13	***
$\beta_2$	0.00000001	2.545e-01	0.000	1.00000	
$\beta_3$	0.00000001	5.341e-02	0.000	1.00000	

**Tabelle 5.16:** Parameter des GARCH(1,3)-Modells

AIC	BIC
-2.955387	-2.921191

**Tabelle 5.17:** AIC und BIC des GARCH(1,3)-Modells

keine Relevanz für das Modell haben.

### 5.3.6 ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modell

Hier werden ein ARMA(1,1)-Prozess und ein GARCH(1,1)-Prozess miteinander kombiniert.

Sei  $g_t$  der durch

$$g_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 g_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2} \epsilon_t \quad (5.25)$$

definierte GARCH(1,1)-Prozess, dann ist der kombinierte ARMA(1,1)/GARCH(1,1) Prozess  $X_t^{[ag]}$  gegeben durch

$$X_t^{[ag]} = \phi X_{t-1}^{[ag]} + g_t + \theta g_{t-1}. \quad (5.26)$$

Der dabei entstehende spezifische Prozess für die Variable *ret2* wird dargestellt durch

$$X_t^{[ag]} = 0.3684X_{t-1}^{[ag]} + g_t - 0.2033g_{t-1} \quad (5.27)$$

mit

$$g_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (5.28)$$

und

$$\sigma_t = \sqrt{0.0001 + 0.2196g_{t-1}^2 + 0.7816\sigma_{t-1}^2}. \quad (5.29)$$

	Schätzung	Standardfehler	t-Wert	p-Wert	Signifikanz
$\phi$	0.36842536	2.027e-01	1.817	0.06915	
$\theta$	-0.20333007	2.152e-01	-0.945	0.34481	
$\alpha_0$	0.00011075	3.589e-05	3.086	0.00203	**
$\alpha_1$	0.21957995	3.373e-02	6.511	7.49e-11	***
$\beta_3$	0.78158332	2.714e-02	28.801	< 2e-16	***

**Tabelle 5.18:** Parameter des ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modells

AIC	BIC
-2.977829	-2.943633

**Tabelle 5.19:** AIC und BIC des ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modells

Auch hier fällt auf, dass zwei Parameter für das Modell nicht signifikant sind. Beim ARMA-Teil des Modells ist der AR-Anteil zwar relevanter als der MA-Anteil, was auf die im vorigen Abschnitt behandelte sehr schwache Abhängigkeitsstruktur zurückzuführen ist, aber für das Modell trotzdem nicht signifikant.

## 5.4 Ergebnis der Modellierung für die restlichen Variablen

Man sieht nun die Methodik die hinter der Modellierung steckt. Bislang wurden die Modelle bezüglich nur einer Variablen *ret2* betrachtet. Die folgenden Tabel-

len stellen die Ergebnisse der konkurrierenden Modelle bezüglich der restlichen Variablen dar.

	ARCH(1)		GARCH(1,3)				
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
<i>ret2</i>	0.0030	0.4051	0.0001	0.2152	0.7868	$10^{-8}$	$10^{-8}$
<i>ret4</i>	0.0029	0.5575	5.7e-05	0.1904	0.8235	$10^{-8}$	$10^{-8}$
<i>lret2</i>	0.0030	0.3389	0.0001	0.2090	0.7872	$10^{-8}$	$10^{-8}$
<i>lret4</i>	0.0029	0.5139	6.2e-05	0.1867	0.8230	$10^{-8}$	$10^{-8}$
<i>ed2</i>	27.022	0.6382	0.3253	0.2526	0.7877	$10^{-8}$	$10^{-8}$
<i>ed4</i>	19.179	0.8833	0.8541	0.3762	0.3596	0.3077	$10^{-8}$

**Tabelle 5.20:** Ergebnisse der Modelle ARCH(1) und GARCH(1,3)

	ARCH(2)			ARMA(1,1)/GARCH(1,1)				
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$
<i>ret2</i>	0.0022	0.1569	0.3573	0.3684	-0.2033	0.0001	0.2195	0.7815
<i>ret4</i>	0.0025	0.4308	0.1640	-0.5197	0.6639	5.5e-05	0.1934	0.8212
<i>lret2</i>	2.2e-03	0.1623	0.3083	0.3356	-0.1866	0.0001	0.2142	0.7823
<i>lret4</i>	0.0025	0.3489	0.1877	-0.5262	0.6590	5.9e-05	0.1897	0.8217
<i>ed2</i>	17.774	0.3505	0.4832	0.2403	-0.0790	0.3576	0.2567	0.7826
<i>ed4</i>	13.043	0.7349	0.3168	-0.4882	0.6251	0.6430	0.2832	0.7477

**Tabelle 5.21:** Ergebnisse der Modelle ARCH(2) und ARMA(1,1)/GARCH(1,1)

	GARCH(1,1)			GARCH(2,1)			
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
<i>ret2</i>	0.0001	0.2182	0.7841	0.0002	0.0324	0.2496	0.7071
<i>ret4</i>	5.8e-05	0.1934	0.8216	7.4e-05	0.0985	0.1123	0.8020
<i>lret2</i>	0.0001	0.2112	0.7852	0.0002	0.0340	0.2313	0.7162
<i>lret4</i>	6.3e-05	0.189	0.8214	0.8035	0.1015	0.1071	0.7996
<i>ed2</i>	0.3520	0.2585	0.7827	0.5006	0.1043	0.2155	0.7301
<i>ed4</i>	0.6815	0.2840	0.7465	0.6675	0.2808	$10^{-8}$	0.7492

**Tabelle 5.22:** Ergebnisse der Modelle GARCH(1,1) und GARCH(2,1)

Die entsprechenden AIC- und BIC-Werte der Modelle sind in Tabelle 5.23 dargestellt.

		I	II	III	IV	V	VI
<i>ret2</i>	AIC	-2.6764	-2.8051	-2.9601	-2.9841	-2.9553	-2.9778
	BIC	-2.6593	-2.7823	-2.9373	-2.9556	-2.9211	-2.9436
<i>ret4</i>	AIC	-2.5847	-2.6081	-2.7874	-2.7890	-2.7839	-2.8064
	BIC	-2.5676	-2.5853	-2.7646	-2.7605	-2.7497	-2.7722
<i>lret2</i>	AIC	-2.6991	-2.8158	-2.9853	-3.0060	-2.9804	-2.9986
	BIC	-2.6820	-2.7930	-2.9625	-2.9775	-2.9462	-2.9644
<i>lret4</i>	AIC	-2.6125	-2.6392	-2.7976	-2.7986	-2.7938	-2.8129
	BIC	-2.5954	-2.6164	-2.7748	-2.7701	-2.7596	-2.7787
<i>ed2</i>	AIC	6.5299	6.3891	5.9991	5.9892	6.0076	5.9835
	BIC	6.5470	6.4119	6.0219	6.0177	6.0418	6.0177
<i>ed4</i>	AIC	6.4518	6.3933	6.1660	6.1708	6.1746	6.1499
	BIC	6.4689	6.4161	6.1888	6.1993	6.2088	6.1841

**Tabelle 5.23:** AIC- und BIC-Werte der sechs Variablen und Modelle

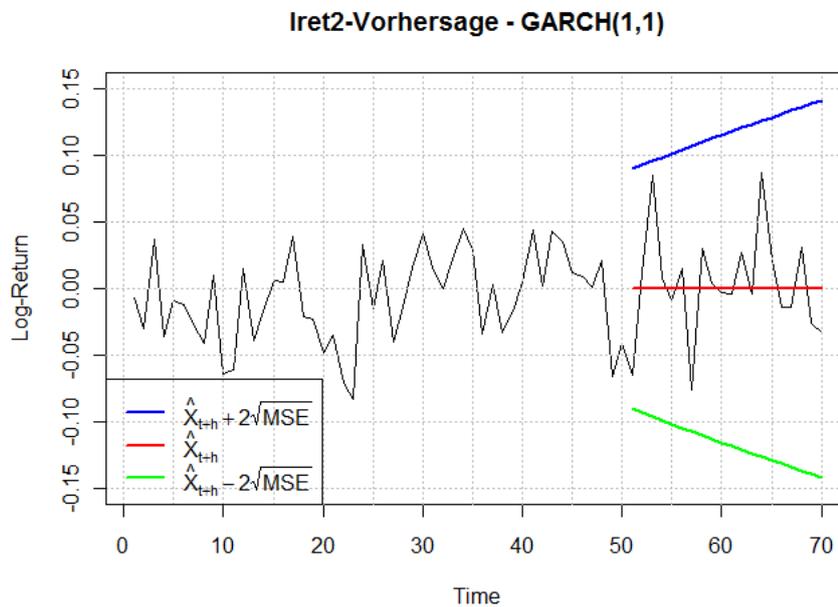
Damit es möglich ist alle AIC- bzw. BIC-Werte in einer Tabelle darzustellen werden die Modelle mit römischen Zahlen dargestellt. Die Notation dabei lautet wie folgt

- I entspricht dem ARCH(1)-Modell
- II entspricht dem ARCH(2)-Modell
- III entspricht dem GARCH(1,1)-Modell
- IV entspricht dem GARCH(2,1)-Modell
- V entspricht dem GARCH(1,3)-Modell
- VI entspricht dem ARMA(1,1)/GARCH(1,1)-Modell

## 5.5 Vorhersage

Bislang wurden als Kriterien zur Auswahl eines der konkurrierenden Modelle die beiden Informationskriterien und die Signifikanz der einzelnen Parameter im Modell herangezogen. Doch einem weiteren Kriterium widmet sich dieser Abschnitt: der Vorhersage und ihrer Konfidenzintervalle.

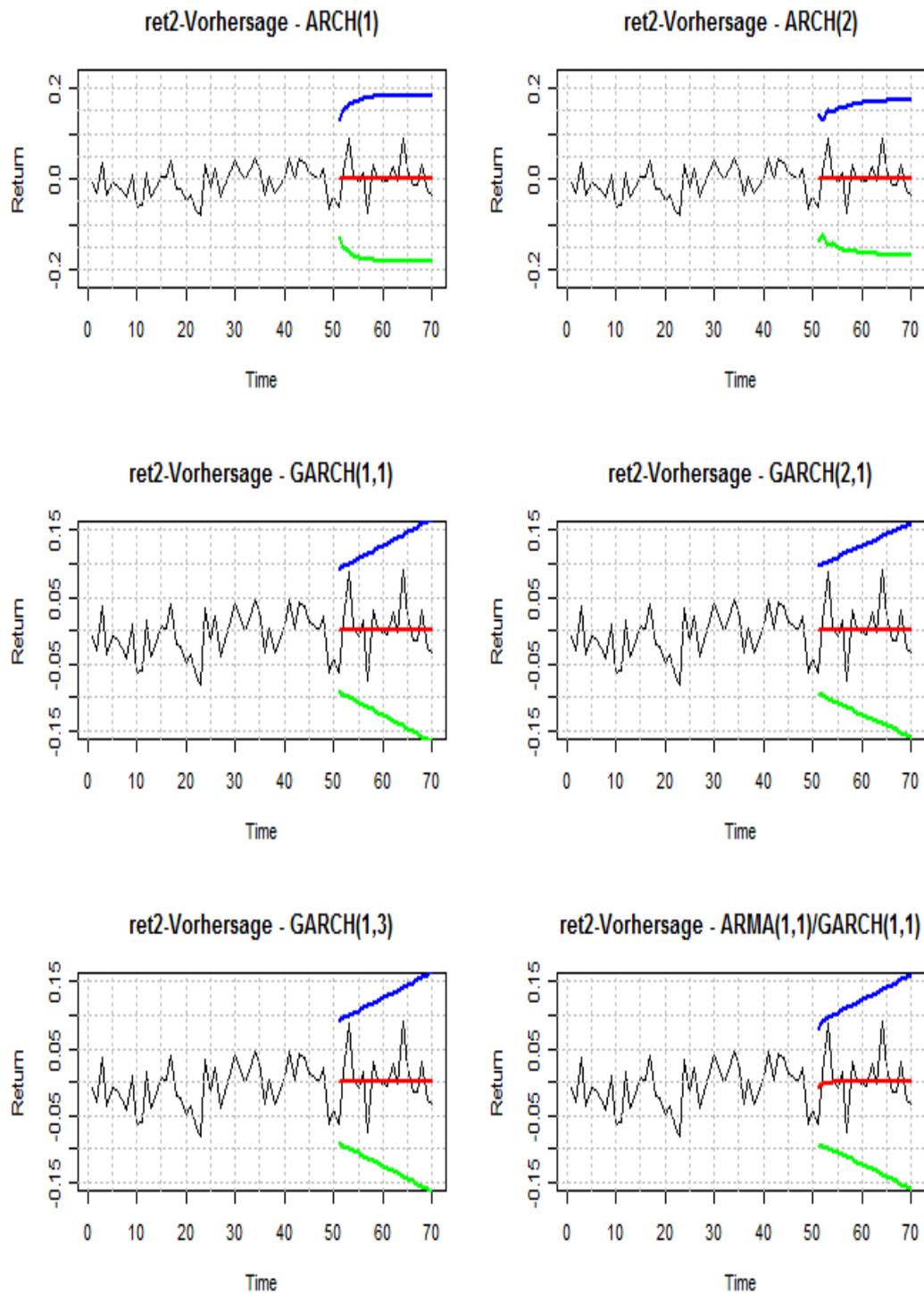
In Abbildung 5.14 ist die Vorhersage  $\hat{X}_{t+h}$  der letzten 20 Handelstage zu sehen, welche nach oben und unten von dem Konidenzintervall  $\pm 2\sqrt{MSE}$ , wobei  $MSE$  den mittleren quadratischen Fehler bezeichnet, begrenzt wird. Die Vorher-



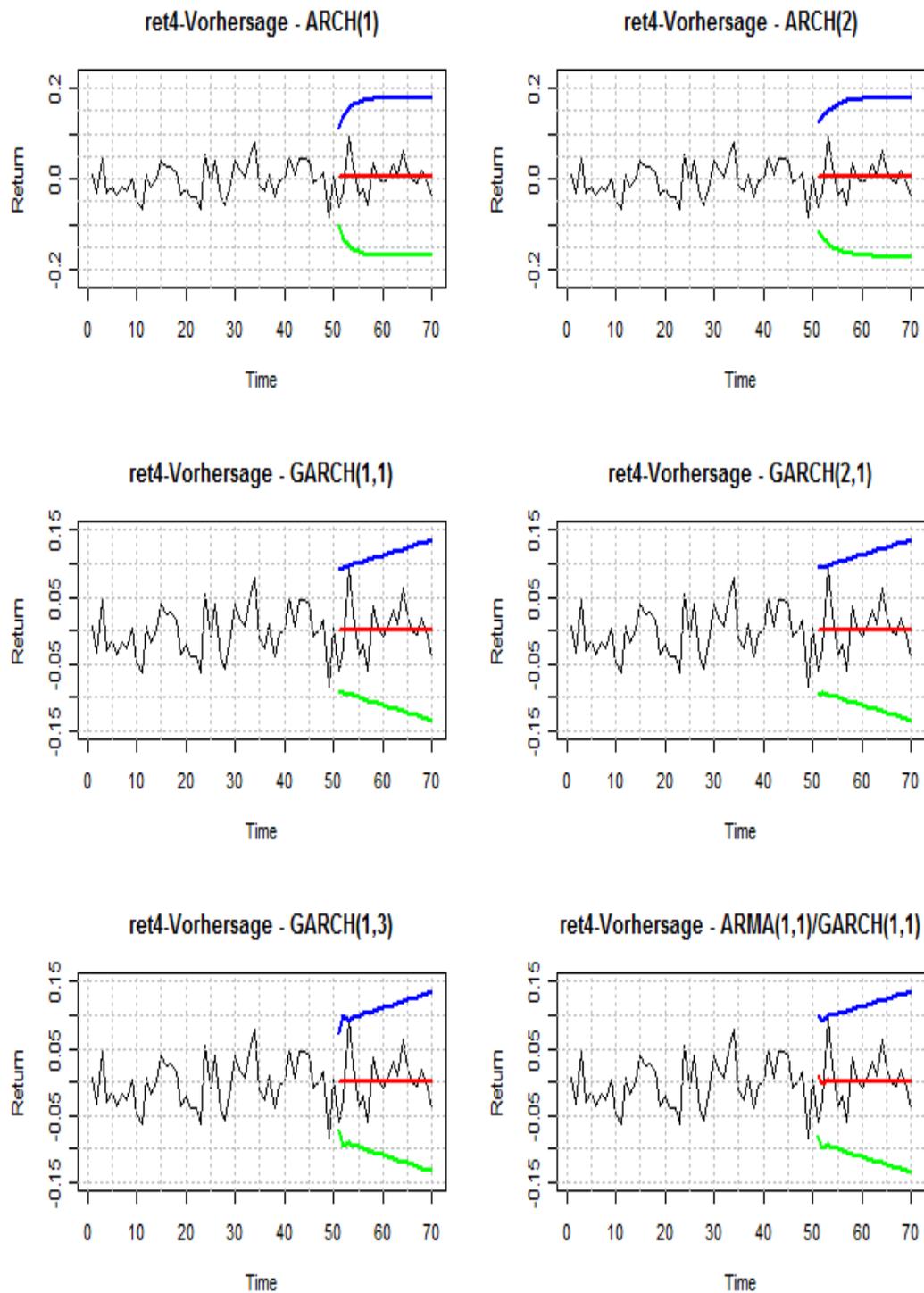
**Abbildung 5.14:** Vorhersage des Log>Returns vom Credit Suisse Spread im GARCH(1,1)-Modell

sage  $\hat{X}_{t+h}$  ist konstant und wird in den Abbildungen 5.14 bis 5.20 durch die rote Kurve dargestellt. Die obere Grenze des Konfidenzintervalls wird durch die blaue und die untere Grenze durch die grüne Kurve abgebildet. Zum Vergleich ist auch der tatsächliche Kursverlauf der letzten 20 Datenpunkte, die nicht für die Modellierung verwendet wurden dargestellt. Ebenso zu sehen in der Abbildung sind die letzten 50 Werte der Zeitreihe.

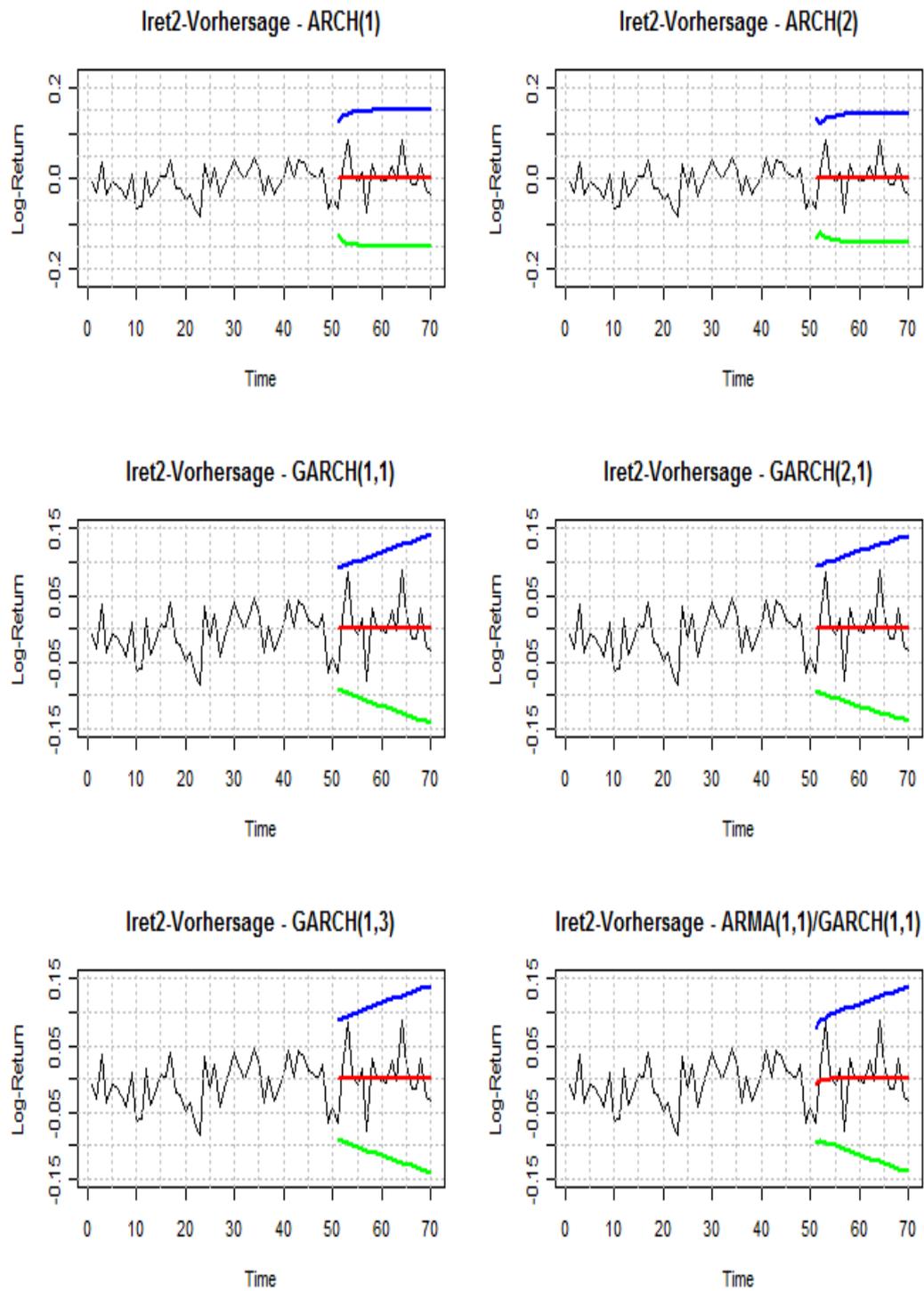
Die Abbildungen 5.15 bis 5.20 stellen die Vorhersagewerte mit Konfidenzbändern der sechs konkurrierenden Modelle aller sechs Variablen dar. Bereits der AIC- bzw. BIC-Wert haben darauf hingedeutet, dass sich die ARCH-Modelle im Vergleich zu den anderen Modellen eher nicht eignen. Sieht man sich die Konfidenzbänder der Vorhersagewerte der beiden ARCH-Modelle an und vergleicht diese mit den Konfidenzbändern der restlichen vier Modelle, so stellt man fest, dass sowohl die drei GARCH-Modelle als auch das Kombinationsmodell ARMA/GARCH, viel engere Konfidenzintervalle für die Vorhersagewerte besitzen. Dies spricht natürlich nicht für die beiden ARCH-Modelle.



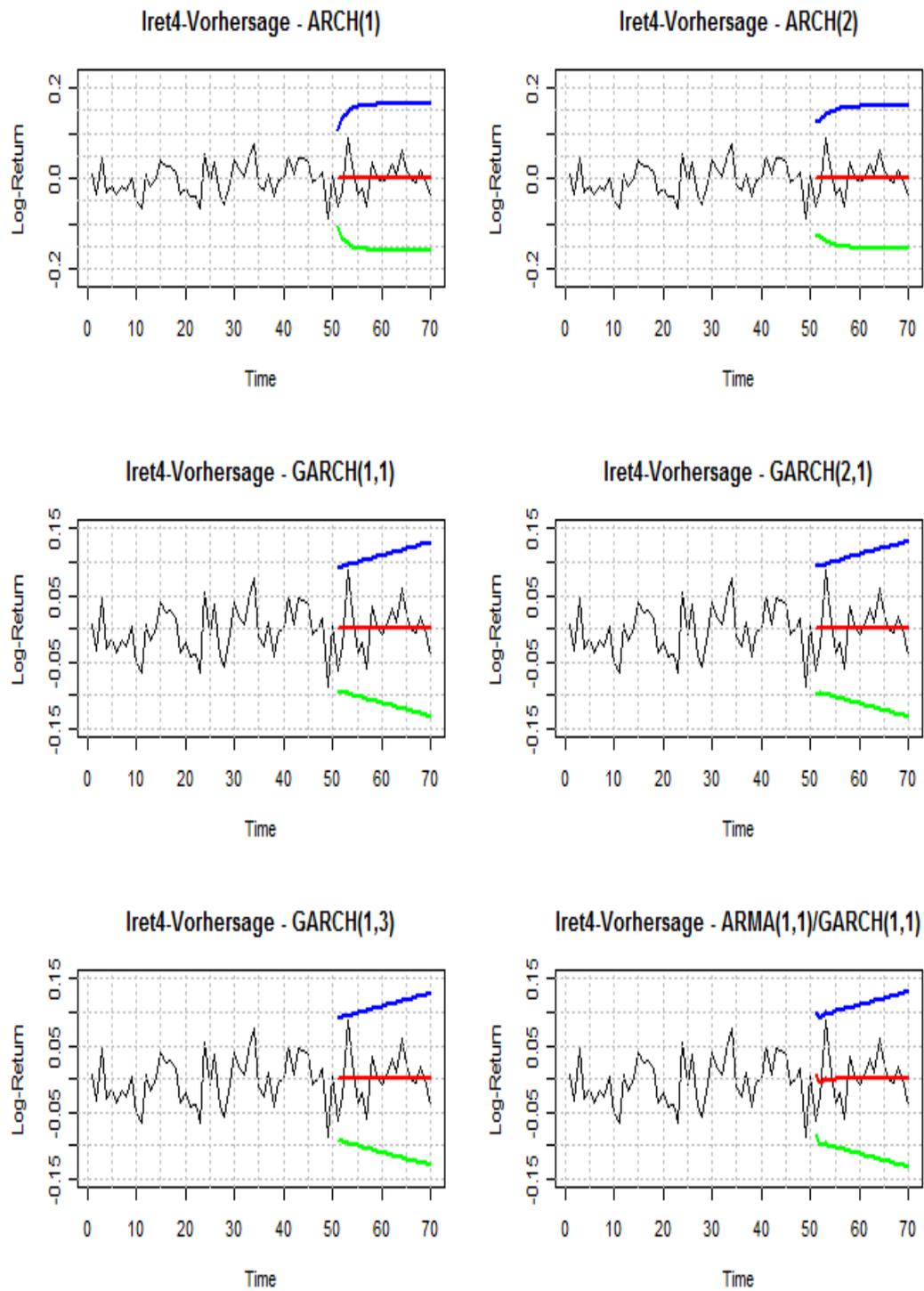
**Abbildung 5.15:** Vorhersage der Returns der Credit Suisse Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen



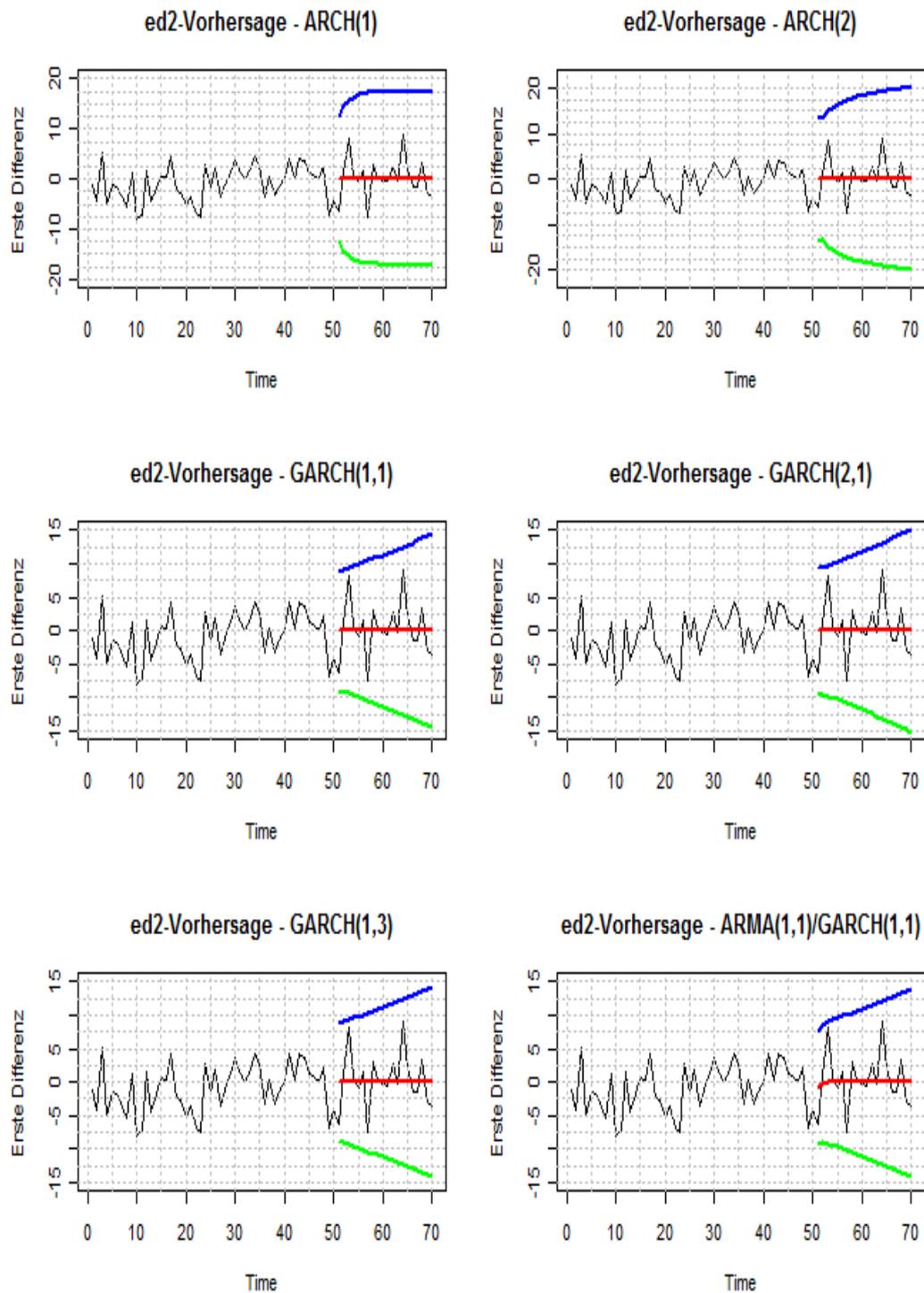
**Abbildung 5.16:** Vorhersage der Returns der Uni Credit Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen



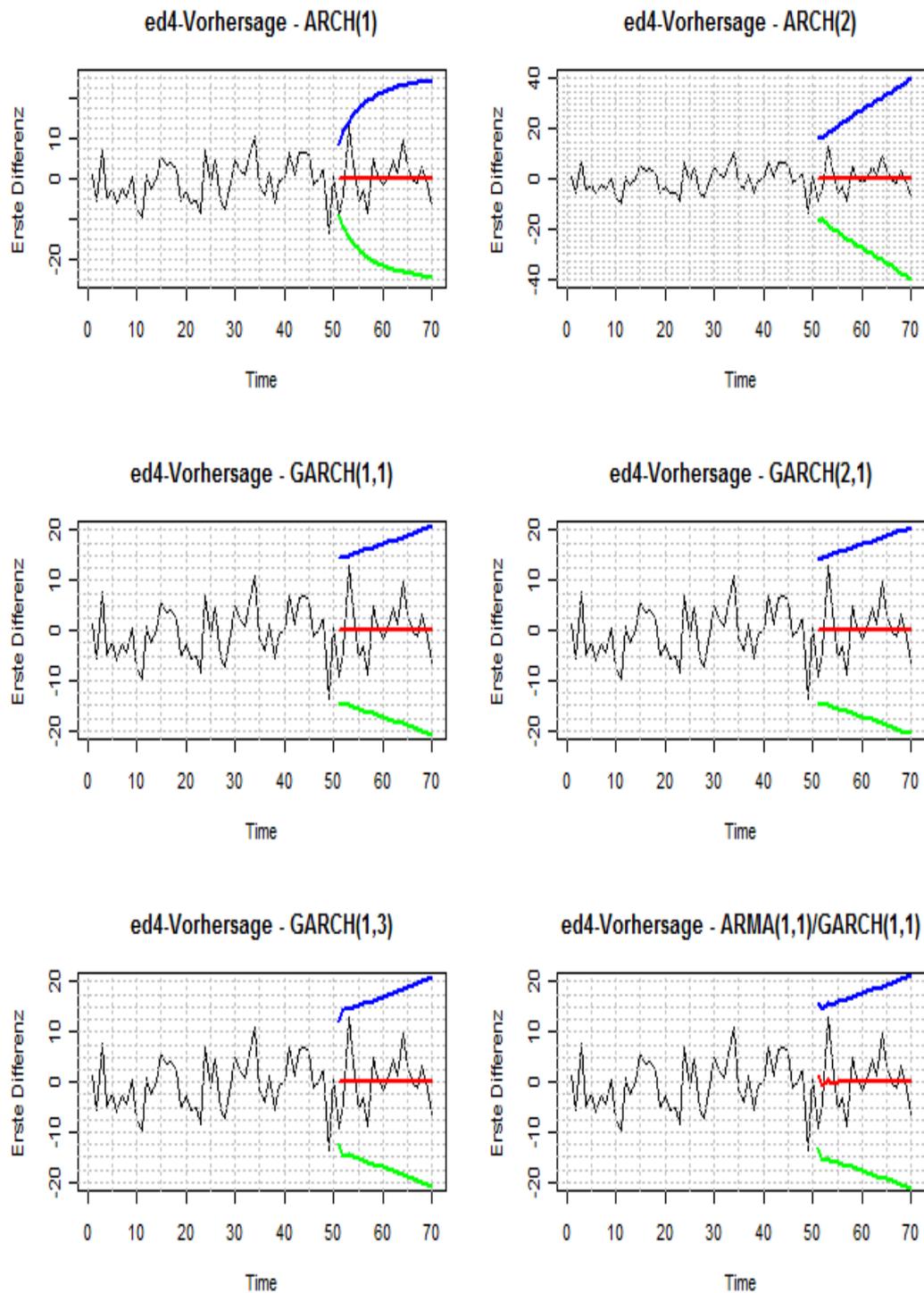
**Abbildung 5.17:** Vorhersage der Log>Returns der Credit Suisse Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen



**Abbildung 5.18:** Vorhersage der Log>Returns der Uni Credit Spreads in den sechs konkurrierenden Modellen



**Abbildung 5.19:** Vorhersage der ersten Differenz vom Credit Suisse Spread in den sechs konkurrierenden Modellen



**Abbildung 5.20:** Vorhersage der ersten Differenz vom Uni Credit Spread in den sechs konkurrierenden Modellen

## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass durch die neuen Eigenkapitalvorschriften die Notwendigkeit eines aktuellen und dem Risiko entsprechenden Ratings in der heutigen, sich schnell verändernden Finanzwelt immer größer wird.

Da heutzutage die Ratings von Ratingagenturen einen statischen Charakter haben, denn sie sind oft auf eine Dauer von mehreren Monaten ausgelegt, reagieren sie dadurch eher träge auf Marktänderungen. Daher ist man daran interessiert dynamischere Konzepte zu entwickeln, welche eine dynamische und zeitnahe Bewertung von Kreditrisiken zulassen. Aus diesem Grund widmet sich diese Arbeit der Bonitätsanalyse anhand von Kapitalmarktdaten, speziell Credit Default Swaps. Analysiert man die Zeitreihen der Credit Default Swap Spreads, welche als Indikatoren für die Bonitätsentwicklung dienen können, so ist es möglich durch geeignete Modellierung der entsprechenden Zeitreihen eine Vorhersage der Entwicklung bzw. der Trends der Zeitreihen zu erhalten.

Wie bereits erwähnt ist diese Art von Analyse im Vergleich zu den Standardmethoden, wie etwa der Bilanzanalyse, viel dynamischer, doch trotzdem soll hier die Wichtigkeit der Bilanzanalyse festgehalten werden.

Die Idee dieser Arbeit ist es die Ergebnissen der Zeitreihenanalyse der Credit Default Swap Spreads in die quantitativen Faktoren der Risikobewertung stärker einzubinden, wobei eine Erweiterung der statistischen Analyse ebenso durch andere Kapitalmarktdaten erfolgen kann. Es können Regressionsmodelle aufgestellt und untersucht werden, welche die Beziehungen verschiedener Assetklassen untereinander aufzeigen und somit zu einer besseren Einschätzung der Bonität durch

den Markt beitragen.

Die Ergebnisse enthalten dann sowohl für das Risikomanagement als auch das Asset Liability Management des Kreditinstituts unverzichtbare Informationen, welche ein Bild der aktuellen wirtschaftlichen Lage des Unternehmens wiedergeben. Diese Ergebnisse können an Risikomodelle, speziell Value at Risk - Modelle, adaptiert werden und ermöglichen dadurch eine Einbindung der Marktdynamik in die entsprechenden Risikomodelle.

# Literatur

- [1] Rating-Leitfaden für die Praxis: Empfehlungen für den Umgang mit Banken, Michael Prümer, Gabler Verlag, 2003
- [2] Bundesministerium der Finanzen - Deutschland  
[http://www.bundesfinanzministerium.de/nm\\_1776/DE/BMF\\_\\_Startseite/Multimedia/Einfach-Erklaert/Basel-III/Basel-III-Alternativversion.html](http://www.bundesfinanzministerium.de/nm_1776/DE/BMF__Startseite/Multimedia/Einfach-Erklaert/Basel-III/Basel-III-Alternativversion.html),  
Datum: 20.12.2011
- [3] Geld, Kredit und Banken: Eine Einführung, Horst Gischer, Bernhard Herz, Lukas Menkhoff, Springer Verlag, 2005
- [4] Ratingagenturen: Wettbewerb und Transparenz auf dem Ratingmarkt, Andreas Buschmeier, Gabler Verlag, 2011
- [5] Investition und Finanzierung, Ulrich Ermschel, Christian Bius, Christian Möbius, Holger Wengert, Physica-Verlag, 2009
- [6] Einführung in die Finanzmathematik, Hansjörg Albrecher, Philipp Mayer, Andreas Binder, Birkhäuser Verlag, 2009
- [7] Kreditderivate und Kreditrisikomodelle, Marcus R. W. Martin, Stefan Reitz, Carsten S. Wehn, Vieweg Verlag, 2006
- [8] Optionen Futures und andere Derivate, John Hull, Pearson Studium, 2006
- [9] Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk, John Hull, Alan White, Joseph L. Rotman School of Management - University of Toronto, 2000
- [10] Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung, Uwe Hassler, Springer Verlag, 2007

- [11] Time Series Analysis and Its Applications, Robert H. Shumway, David S. Stoffer, Springer Verlag, 2011
- [12] Time Series Analysis, Jonathan D. Cryer, Kung-Sik Chan, Springer Verlag, 2008
- [13] Introduction to Time Series Analysis and Forecasting, Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings, Murat Kulahci, John Wiley and Sons. Inc., 2008
- [14] Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften, Klaus Neusser, Teubner Verlag, 2006
- [15] Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Robert F. Engle, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 1982
- [16] Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Tim Bollerslev, Teubner Verlag, *Journal of Econometrics* 31, 1986
- [17] Zeitreihenanalyse mit R, Reinhold Kosfeld  
<http://www.ivwl.uni-kassel.de/kosfeld/lehre/zeitreihen/Zeitreihenanalyse%20mit%20R.pdf>,  
Datum: 20.12.2011
- [18] Statistics and Data Analysis for Financial Engineering, David Ruppert, Springer Verlag, 2011
- [19] Einführung in die Ökonometrie, Peter Hackl, Pearson Verlag, 2008
- [20] Zeitreihenanalyse der CDS-Spreads, Admir Mehinagic, Projekt TM, 2012
- [21] Zeitreihenanalyse, Ernst Stadlober, Vorlesungsskript, 2011