



Cedric Boujong, BSc

**Auswirkungen der Zeitdiskretisierung
auf die Schätzgenauigkeit von
Sliding Mode Beobachtern**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Telematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Horn

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden Sliding Mode Beobachter und deren zeitdiskrete Realisierung behandelt. Zuerst werden einige Sliding Mode Konzepte erster sowie höherer Ordnung, die zur Zustandsbeobachtung und zur Rekonstruktion von Störungen eingesetzt werden können, vorgestellt. Die theoretischen Betrachtungen werden jeweils durch Simulationen untermauert. Im Anschluss erfolgt die praktische Implementierung der vorgestellten Konzepte zur Zustandsschätzung und Rekonstruktion von Störungen am Hydraulikprüfstand des Instituts für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz.

Schlagwörter: Sliding Mode, Beobachter, Robustheit, Super Twisting, robuster exakter Differenzierer, Störschätzung, Zustandsschätzung, Hydraulik.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Inhalt und Ziel der Arbeit	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Beobachtbarkeit dynamischer Systeme	3
2.1	Begriff der Beobachtbarkeit	3
2.2	Beobachtbarkeit linearer, zeitinvarianter Systeme	3
2.3	Beobachtbarkeit nichtlinearer AI-Systeme	4
2.3.1	Brunovsky und Byrnes-Isidori Normalform	5
2.4	Beobachtbarkeit allgemeiner nichtlinearer Systeme	7
2.5	Zum Separationstheorem	7
3	Sliding Mode Beobachter erster Ordnung	9
3.1	Grundlagen Sliding Mode Konzepte erster Ordnung	9
3.2	Anwendung als Beobachter	12
3.3	Zeitdiskrete Realisierung	13
3.3.1	Wahl der Diskretisierungsmethode	13
3.3.2	Genauigkeit, Parameterwahl und Konvergenzzeit	14
3.4	Simulationsergebnisse	15
4	Sliding Mode Beobachter höherer Ordnung	20
4.1	Grundlagen Sliding Mode Konzepte höherer Ordnung	20
4.2	Super-Twisting Beobachter (STO)	21
4.2.1	Super-Twisting Algorithmus	21
4.2.2	Anwendung als Beobachter	22
4.3	Robuster exakter Differenzierer beliebiger Ordnung	23
4.4	Zeitdiskrete Realisierung und Einfluss von Rauschen	25
4.5	Simulationsergebnisse	28
5	Anwendung am Hydraulikprüfstand	35
5.1	Der Hydraulikprüfstand	35

INHALTSVERZEICHNIS

5.2	Mathematisches Modell	37
5.3	Vorhandene Regler	39
5.4	Beobachterentwurf (ohne Störung)	41
5.5	Störschätzung	45
5.6	Alternativer Ansatz zur Zustands- und Störschätzung	51
6	Zusammenfassung	56

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Inhalt und Ziel der Arbeit

Bei vielen regelungstechnischen Aufgaben ist es notwendig, die nicht messbaren Zustandsgrößen eines Systems aus den zur Verfügung stehenden Informationen mithilfe eines Beobachters zu schätzen. Zum Beobachterentwurf stehen eine Reihe von Ansätzen zur Verfügung. In dieser Arbeit wird der Entwurf und die Implementierung von Sliding Mode Beobachtern behandelt. Sliding Mode Konzepte gehören zur Gruppe strukturvariabler Systeme und können sowohl zur Regelung als auch zur Beobachtung eingesetzt werden. Die Hauptvorteile sind

- einfaches Design,
- Robustheit gegenüber Parameterschwankungen und externen Störungen,
- und in vielen Fällen Konvergenz in endlicher Zeit.

Die Eigenschaft der endlichen Konvergenz wird durch unstetige Anteile in der Beobachterdynamik erreicht. Nach erfolgter Konvergenz sorgt ein theoretisch unendlich schnelles Schalten zwischen zwei Werten dafür, dass dieser Zustand nicht mehr verlassen wird.

Durch eine zeitdiskrete Implementierung wird die Annahme eines unendlich schnellen Schaltens verletzt. Die resultierenden Effekte müssen genau analysiert werden.

Prinzipiell gibt es zwei mögliche Ansätze zum Beobachterentwurf: Basierend auf einem zeitdiskreten Modell eines realen, zeitkontinuierlichen Systems wird ein zeitdiskreter Sliding Mode Beobachter entworfen. Die zweite Möglichkeit ist der Entwurf im Zeitkontinuierlichen und eine zeitdiskrete Implementierung dieses kontinuierlich entworfenen Beobachters. Letzteres wird in dieser Arbeit behandelt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Als Einstieg in die Thematik wird in Kapitel 2 auf die Beobachtbarkeit dynamischer Systeme eingegangen. In Kapitel 3 werden die Grundlagen und Eigenschaften von Sliding Mode Konzepten erster Ordnung erklärt und deren Anwendung zur Beobachtung illustriert. In Kapitel 4 werden Verfahren höherer Ordnung und deren Vorteile gegenüber Konzepten erster Ordnung erläutert. In beiden Kapiteln wird außerdem detailliert auf die zeitdiskrete Realisierung und die hier auftretenden Effekte eingegangen. Durch Simulationen werden die theoretischen Betrachtungen untermauert. In Kapitel 5 folgt eine praktische Anwendung: Ein Sliding Mode Beobachter wird zur Beobachtung an einem Hydraulikprüfstand eingesetzt. Außerdem wird ein Verfahren zur Störgrößenschätzung implementiert. Abschließend wird die Arbeit in Kapitel 6 zusammengefasst.

Kapitel 2

Beobachtbarkeit dynamischer Systeme

2.1 Begriff der Beobachtbarkeit

Bevor man für ein System einen Beobachter entwirft, stellt sich immer zuerst die Frage nach der Beobachtbarkeit des Systems, d.h. ob aus den zur Verfügung stehenden Eingangs- und Ausgangsgrößen der Verlauf der Zustandsgrößen prinzipiell bestimmt werden kann. Formal kann der Begriff der Beobachtbarkeit folgendermaßen definiert werden [12]:

Definition 2.1.1. *Ein System ist beobachtbar wenn aus der Kenntnis der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ der Anfangszustand \mathbf{x}_0 eindeutig bestimmt werden kann.*

Zur praktischen Überprüfung der Beobachtbarkeit gibt es eine Reihe von Kriterien. Im Falle nichtlinearer Systeme gestaltet sich die Überprüfung der Beobachtbarkeit im Allgemeinen deutlich komplizierter als im Falle linearer, zeitinvarianter Systeme.

2.2 Beobachtbarkeit linearer, zeitinvarianter Systeme

Betrachtet wird das lineare, zeitinvariante Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit kann hier durch Überprüfung des Ranges der Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} durchgeführt werden.

Satz 2.2.1. *Das System (2.1) ist genau dann beobachtbar wenn der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} der Systemordnung n entspricht [15]:*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n. \quad (2.2)$$

Bemerkenswert ist, dass die Beobachtbarkeit, im Gegensatz zu nichtlinearen Systemen, unabhängig von der Eingangsgröße u ist.

2.3 Beobachtbarkeit nichtlinearer AI-Systeme

Bei nichtlinearen Systemen unterscheidet man zwischen der Beobachtbarkeit nach Definition 2.1.1 und der sogenannten schwachen Beobachtbarkeit [12]:

Definition 2.3.1. *Ein System ist schwach beobachtbar wenn aus der Kenntnis der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ der Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einer Umgebung $U = \{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_P\| < \rho\}$ um einen Punkt \mathbf{x}_P eindeutig bestimmt werden kann und dies für alle \mathbf{x}_P möglich ist.*

Im Folgenden wird die Beobachtbarkeit eingangsaffiner Systeme (kurz AI-Systeme¹) mit einem Eingang und einem Ausgang näher untersucht. AI-Systeme werden im Allgemeinen durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zur Untersuchung der Beobachtbarkeit berechnet man die $(n - 1)$ zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgröße y [12]:

$$\begin{aligned} y &= h(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u + L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u + L_{\mathbf{g}}^2h(\mathbf{x})u^2 + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\dot{u} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-2}h(\mathbf{x})u + \dots + L_{\mathbf{g}}^{n-1}h(\mathbf{x})u^{n-1} + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u^{(n-2)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

¹AI steht für „affine input“.

die Lie-Ableitung von h bezüglich \mathbf{f} . Die Lie-Ableitung ist rekursiv definiert mit

$$L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x})), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Kompakt angeschrieben ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) u \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}) + \dots + L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) u^{(n-2)} \end{pmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)}). \quad (2.7)$$

Basierend auf diesen Betrachtungen kann man ein hinreichendes Kriterium für die Beobachtbarkeit des nichtlinearen Systems (2.3) formulieren.

Satz 2.3.1. *Das System (2.3) ist beobachtbar wenn die Abbildung (2.7) eindeutig nach \mathbf{x} auflösbar ist.*

Ist diese Bedingung erfüllt so kann aus der Kenntnis von $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ der Zustand \mathbf{x} bestimmt werden. Oft gestaltet sich die Auflösung von \mathbf{q} nach \mathbf{x} jedoch als äußerst schwierig.

Zu beachten ist, dass im Gegensatz zum Fall linearer Systeme die Beobachtbarkeit von der Eingangsgröße u abhängt. Ist ein System unabhängig von der Eingangsgröße beobachtbar, so nennt man dieses System uniform beobachtbar.

Die Überprüfung der schwachen Beobachtbarkeit kann wie folgt durchgeführt werden [12]:

Satz 2.3.2. *Das System (2.3) ist schwach beobachtbar wenn der Rang der Jacobi-Matrix von \mathbf{q} der Systemordnung n entspricht:*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} \right) = n.$$

Dieser Satz ist hinreichend, jedoch nicht notwendig. Mithilfe der schwachen Beobachtbarkeit kann einfach eine lokale Aussage über die Beobachtbarkeit des nichtlinearen Systems getroffen werden. Aus der Regularität der Jacobi-Matrix von \mathbf{q} an einem Punkt folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Inversen von \mathbf{q} in diesem Punkt [12].

2.3.1 Brunovsky und Byrnes-Isidori Normalform

Bei eingangsaffinen Systemen die z.B. im Rahmen eines Reglerentwurfes mit der Methode der exakten Linearisierung in Brunovsky oder Byrnes-Isidori Normalform vorliegen, kann die Beobachtbarkeit besonders leicht beurteilt werden. Zuerst ist es nötig den Begriff des relativen Grades zu definieren.

Definition 2.3.2. *Der relative Grad δ eines eingangsaffinen Systems gibt an, wie oft man die Ausgangsgröße y ableiten muss, bis die Eingangsgröße u explizit aufscheint.*

Ist der relative Grad gleich der Systemordnung n , so kann das System (2.3) mithilfe einer Zustandstransformation $\mathbf{z} = t(\mathbf{x})$ in folgende Form überführt werden:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) u \\ y &= z_1 . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Es handelt sich bei dieser Zustandstransformation um einen Diffeomorphismus. Durch die Wahl des Einganges

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} (v - L_f^n h(\mathbf{x})) \tag{2.9}$$

erhält man die Brunovsky Normalform

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= v \\ y &= z_1 . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dieses System besteht aus einer Kette von n Integrierern. Die nichtlineare Rückführung (2.9) hängt allerdings im Allgemeinen von nicht messbaren Zuständen ab.

Das System (2.8) ist offensichtlich beobachtbar, da

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

eindeutig nach \mathbf{z} auflösbar ist. Der originale Zustand \mathbf{x} kann dann aus \mathbf{z} über die Beziehung $\mathbf{x} = t^{-1}(\mathbf{z})$ berechnet werden. Ein AI-System mit $\delta = n$ wird auch als flaches System bezeichnet.

Ist der relative Grad $\delta < n$, so kann das System mittels einer Zustandstransformation in die Byrnes-Isidori Normalform transformiert werden:

$$\begin{cases} \Sigma_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\delta = L_f^\delta h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + L_g L_f^{\delta-1} h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \end{array} \right. \\ \Sigma_2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = q_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-\delta} = q_{n-\delta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.12)$$

mit $y = \xi_1$. Das erste Teilsystems Σ_1 ist dabei die äußere Dynamik und besteht, nach erfolgter Linearisierung durch die Wahl der Eingangsgröße

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\delta-1} h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} (v - L_f^\delta h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) , \quad (2.13)$$

aus einer Kette von δ Integrierern, das zweite Teilsystem Σ_2 ist die innere Dynamik. Die äußere Dynamik ist durch die Wahl der Eingangsgröße (2.13) von den Zuständen der inneren Dynamik unabhängig. Die Zustände der inneren Dynamik haben insbesondere keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße y und sind somit nicht beobachtbar. Die äußere Dynamik hingegen ist beobachtbar.

Aus der Tatsache, dass der relative Grad δ kleiner als die Systemordnung ist, kann man allerdings nicht sofort schließen dass das System nicht beobachtbar ist. Dass der relative Grad gleich der Systemordnung ist, ist bei AI-Systemen eine hinreichende, jedoch nicht notwendige Bedingung für die Beobachtbarkeit. Durch die Linearisierung geht jedoch die Beobachtbarkeit für den Fall $\delta < n$ verloren.

2.4 Beobachtbarkeit allgemeiner nichtlinearer Systeme

Im Falle von allgemeinen, nichtlinearen Systemen kann man zur Überprüfung der Beobachtbarkeit prinzipiell gleich vorgehen wie in Kapitel 2.3: Bestimmung von \mathbf{q} durch $(n - 1)$ -fache Ableitung von y und Auflösung nach \mathbf{x} bzw. Überprüfung des Ranges der Jacobi-Matrix von \mathbf{q} .

2.5 Zum Separationstheorem

Betrachtet man ein Gesamtsystem bestehend aus Regelstrecke, Regler und Beobachter, so stellt sich die Frage nach der Stabilität dieses Gesamtsystems. Hat

man es ausschließlich mit linearen Systemen zu tun (lineare Strecke, linearer Regler und linearer Beobachter), so gilt das Separationstheorem: sind die Teilsysteme Regelkreis ohne Beobachter und Beobachterfehlerdynamik stabil, so folgt daraus die Stabilität des Gesamtsystems. Das bedeutet, dass Regler und Beobachter unabhängig voneinander entworfen werden können [15].

Hat man es mit nichtlinearen Systemen zu tun, gilt das Separationstheorem im Allgemeinen nicht [12]. Prinzipiell muss für jede Anwendung die Stabilität des Gesamtsystems nachgewiesen werden. Dies gestaltet sich allerdings oft schwierig. Die in dieser Arbeit besprochenen Sliding Mode Beobachter besitzen diesbezüglich den Vorteil, dass sie nicht asymptotisch, sondern in endlicher Zeit konvergieren. Dadurch kann der Beobachter unabhängig vom Regler entworfen werden. Man muss „lediglich“ darauf achten, dass während der endlichen Konvergenzzeit des Beobachters das System nicht instabil wird [8].

Kapitel 3

Sliding Mode Beobachter erster Ordnung

3.1 Grundlagen Sliding Mode Konzepte erster Ordnung

Obwohl es in dieser Arbeit um den Beobachterentwurf mittels Sliding Mode Techniken geht, werden im Folgenden die Grundlagen und -begriffe von Sliding Mode Konzepten, der Einfachheit halber, an Hand von Sliding Mode Regelungen erklärt. Der Übergang zur Anwendung der Konzepte zur Beobachtung ist dann problemlos möglich.

Bei der Sliding Mode Regelung (*Sliding Mode Control*, kurz SMC) handelt es sich um ein Regelungskonzept das zur Klasse der strukturvariablen Regelungen (*variable structure control*) gehört. Der Reglerentwurf gliedert sich hierbei prinzipiell in zwei Teile:

1. Festlegung einer skalaren Variablen $\sigma(\mathbf{x})$, abhängig vom Systemzustand \mathbf{x} , die ein gewünschtes dynamisches Verhalten spezifiziert. Ziel ist es, dass $\sigma = 0$ gilt, und zwar nach einer endlichen Zeit T_R und $\sigma = 0$ gilt für $t \geq T_R$. Somit besitzt das System $\forall t \geq T_R$ das spezifizierte, gewünschte dynamische Verhalten. Die Variable σ wird *sliding variable* genannt.
2. Spezifikation von $\dot{\sigma}$, so, dass die Konvergenz von σ in endlicher Zeit möglich ist. Im einfachsten Fall wird die Dynamik von σ spezifiziert als

$$\dot{\sigma} \stackrel{!}{=} -k \operatorname{sgn}(\sigma) ,$$

wobei k ein geeignet zu wählender Reglerparameter ist. Durch die Wahl einer unstetigen Dynamik wird die Konvergenz in endlicher Zeit ermöglicht.

Hier ist bereits eine erste Beschränkung bezüglich der Anwendbarkeit dieses Konzeptes erkennbar: Die Stellgröße u muss explizit in $\dot{\sigma}$ vorkommen um mittels der Stellgröße diese gewünschte Dynamik zu erzwingen. Der relative Grad von σ bezüglich u muss gleich 1 sein.

Die Phase bis $\sigma = 0$ gilt, nennt man *reaching phase*. Nachdem $\sigma = 0$ gilt, befindet sich das System in der *sliding phase* und verbleibt sodann für alle Zeiten $t \geq T_R$ auf $\sigma = 0$. Ein Vorteil der Sliding Mode Regelung ist die Robustheit gegenüber externen Störungen oder Schwankungen von Systemparametern in der *sliding phase*. Ein weiterer Vorteil ist die reduzierte Systemordnung in der *sliding phase*. Um die Dynamik von σ genauer zu untersuchen betrachtet man die Ljapunov Funktion

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 . \quad (3.1)$$

Die Ljapunov Funktion (3.1) ist positiv definit im \mathbb{R}^n und radial unbeschränkt. Für die Ableitung der Ljapunov Funktion ergibt sich:

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} . \quad (3.2)$$

Damit $\sigma = 0$ global asymptotisch stabil ist muss die Funktion (3.2) im \mathbb{R}^n negativ definit sein, das heißt die Bedingung

$$\sigma\dot{\sigma} < 0 \quad (3.3)$$

muss auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt sein. Diese Bedingung wird *sliding condition* genannt. In der Regel liefert diese Bedingung eine Aussage darüber, wie der Reglerparameter k gewählt werden muss, damit die *sliding phase* trotz Vorhandensein von eventuellen Störungen erreichbar ist. Um zusätzlich noch die Konvergenz in endlicher Zeit zu garantieren muss

$$\dot{V} \leq -\alpha\sqrt{V} , \alpha > 0 \quad (3.4)$$

erfüllt sein und die Konvergenzzeit kann mit

$$T_R \leq \frac{2\sqrt{V(0)}}{\alpha} \quad (3.5)$$

abgeschätzt werden [19].

Das weitere Verbleiben auf $\sigma = 0$ für alle $t \geq T_R$ wird durch das unstetige Regelgesetz sichergestellt . Sobald $\sigma = 0$ verlassen wird, wird der unstetige Anteil des Regler $\text{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen wechseln und das System wieder in Richtung $\sigma = 0$ treiben. Jene Stellgröße die nötig ist um nach Erreichen der sliding phase $\sigma = 0$ sicherzustellen, wird *equivalent control* genannt. Theoretisch passieren diese Schaltvorgänge mit einer unendlich hohen Schaltfrequenz. In der Praxis ergibt

sich durch die endliche Schaltgeschwindigkeit des Stellgliedes und durch die zeitdiskrete Realisierung des Regelgesetzes eine endliche Frequenz, das Phänomen des Ratterns (*chattering*) entsteht. Dabei schaltet der Regler mit einer hohen, aber endlichen Frequenz zwischen zwei Werten hin und her um $\sigma = 0$ zu erzwingen. Dieses Rattern stellt einen großen Nachteil der Sliding Mode Regelung dar. Das Rattern kann jedoch vermieden werden, indem man z.B. die Vorzeichenfunktion durch eine Sigmoidfunktion ersetzt oder einen Sliding Mode Regler höherer Ordnung verwendet.

Beispiel

Als Beispiel wird folgendes System zweiter Ordnung betrachtet:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \rho .\end{aligned}\tag{3.6}$$

Der Zustandsvektor $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^\top$ sei messbar und ρ sei eine unbekannte Störung, die beschränkt sei: $|\rho| \leq K$. Die Konstante K ist bekannt. Für den Reglerentwurf wird diese Störung zunächst ignoriert. Ziel ist eine Stabilisierung des Systems in der Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$. Als gewünschte Dynamik wählt man

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1\tag{3.7}$$

mit $\lambda > 0$. Die *sliding variable* σ wählt man daher als

$$\sigma = x_2 + \lambda x_1 ,\tag{3.8}$$

denn sobald $\sigma = 0$ gilt, gilt $x_2 = -\lambda x_1$ und somit $\dot{x}_1 = -\lambda x_1$. Aus der Dynamik von σ

$$\dot{\sigma} = u + \lambda x_2 \stackrel{!}{=} -k \operatorname{sgn}(\sigma)\tag{3.9}$$

errechnet sich die Stellgröße

$$u = -\lambda x_2 - k \operatorname{sgn}(\sigma) .\tag{3.10}$$

Der geschlossene Kreis ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 - k \operatorname{sgn}(\sigma) + \rho .\end{aligned}\tag{3.11}$$

k muss dabei so gewählt werden, dass die *sliding condition* $\sigma \dot{\sigma} < 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\sigma(\rho - k \operatorname{sgn}(\sigma)) &= \sigma \rho - k|\sigma| \stackrel{!}{<} 0 \\ \Rightarrow k &> K .\end{aligned}\tag{3.12}$$

Sobald die *sliding phase* erreicht ist, wird die Dynamik des Systems allein beschrieben durch die Gleichung $\dot{x}_1 = -\lambda x_2$. Die Systemordnung ist also reduziert und völlig unabhängig von der unbekanntem Störung ρ .

Mit Hilfe des Konzeptes des *equivalent control* kann die unbekanntem Störung sogar rekonstruiert werden. In der *sliding phase* gilt $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ und somit ergibt sich für u in der *sliding phase* aus (3.9) und unter Berücksichtigung der Störung ρ :

$$u_{eq} = -\lambda x_2 - \rho . \quad (3.13)$$

u_{eq} beschreibt den Mittelwert der mit hoher Frequenz schaltenden Stellgröße in der *sliding phase*. Durch Vergleich von (3.13) mit der tatsächlichen Stellgröße (3.10) ergibt sich:

$$\rho = k \operatorname{sgn}(\sigma) . \quad (3.14)$$

Durch Tiefpassfilterung des unstetigen Terms $k \operatorname{sgn}(\sigma)$ lässt sich so die unbekanntem Störung ρ schätzen.

3.2 Anwendung als Beobachter

Bei der Anwendung der im letzten Kapitel erklärten Konzepte als Beobachter wird die Beobachterdynamik $\dot{\hat{x}}$ so gewählt, dass die Dynamik des Beobachterfehlers $\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}$ so eine Form annimmt, dass e in endlicher Zeit zu Null wird. Der Beobachterfehler übernimmt also die Rolle der *sliding variable*.

Beispiel

Als durchgehendes Beispiel dient in diesem und dem folgenden Kapitel folgendes System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \rho \\ y &= x . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist ρ eine unbekanntem, aber beschränkte Störung. Trotz der Einfachheit dieses Beispiels ist es gut geeignet, um die Eigenschaften der in dieser Arbeit besprochenen Beobachterstrukturen aufzuzeigen.

Zur Beobachtung des Zustandes x bzw. zur Rekonstruktion der unbekanntem Störung ρ dient folgender Sliding Mode Beobachter erster Ordnung:

$$\dot{\hat{x}} = u - k \operatorname{sgn}(e) , \quad (3.16)$$

mit $e = \hat{x} - x$. Der Ausdruck $k \operatorname{sgn}(e)$ wird in diesem Zusammenhang als *injection term* bezeichnet. Die Fehlerdynamik ergibt sich zu

$$\dot{e} = -k \operatorname{sgn}(e) - \rho . \quad (3.17)$$

Mit der Wahl $k > |\rho|_{max}$ konvergiert der Beobachter in endlicher Zeit und die Störung ρ kann durch Tiefpassfilterung

$$\rho = -[k \operatorname{sgn}(e)]_{eq} \quad (3.18)$$

ermittelt werden. $[k \operatorname{sgn}(e)]_{eq}$ bezeichnet man in diesem Zusammenhang als *equivalent injection term* und stellt das Analogon zum *equivalent control* u_{eq} dar.

3.3 Zeitdiskrete Realisierung

3.3.1 Wahl der Diskretisierungsmethode

Um einen kontinuierlich entworfenen Sliding Mode Beobachter zeitdiskret zu realisieren, müssen die Differentialgleichungen, die die Dynamik des Beobachters beschreiben, mit einem geeignet zu wählenden numerischen Integrationsalgorithmus implementiert werden. Die Frage ist also, mit welcher Methode die Differentialgleichung

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, y) \quad (3.19)$$

möglichst effizient numerisch implementiert werden kann. Bei Sliding Mode Beobachtern wird in aller Regel das explizite Euler-Verfahren verwendet. Hierbei wird der Wert für \hat{x}_{k+1} zum Zeitpunkt $t = (k + 1)\tau$ folgendermaßen angenähert:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \tau f(\hat{x}_k, u_k, y_k), \quad (3.20)$$

wobei τ die Abtastzeit bezeichnet. In vielen Publikationen wird das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung von Sliding Mode Beobachtern, Reglern oder Differenzierern verwendet. Im Folgenden soll eine Motivation für diese spezielle Wahl gegeben werden.

Bei einer Echtzeit-Implementierung eines numerischen Integrationsalgorithmus ergeben sich folgende Rahmenbedingungen und Wünsche [17]:

1. Die Abtastzeit τ ist konstant. Eine Schrittweitensteuerung ist nicht möglich.
2. Der Rechenaufwand soll möglichst gering sein. Implizite Verfahren sind zu vermeiden, sowie Verfahren möglichst niedriger Ordnung zu bevorzugen.
3. Die Implementierung sollte möglichst einfach sein.
4. Es stehen zum Zeitpunkt $t = k\tau$ die Werte \hat{x}_k , u_k und y_k zur Verfügung sowie möglicherweise auch vergangene Werte. Es stehen jedoch sicher keine zukünftigen Werte u_{k+1} und y_{k+1} zur Verfügung.

5. In diesem speziellen Fall ist zu noch zu berücksichtigen, dass die Dynamik des Beobachters unstetige Anteile enthält.

Wunsch (5) hat zur Folge, dass numerische Integrationsalgorithmen höherer Ordnung nicht ohne Weiteres anwendbar sind, weil diesen Algorithmen die Annahme zugrunde liegt, dass f glatt ist und es eine eindeutige Lösung \hat{x} gibt. Es können hier unerwartete und falsche Ergebnisse auftreten. Auch Wunsch (3) (und möglicherweise auch Wunsch (4)) wird durch Verfahren höherer Ordnung verletzt weil zur Berechnung von \hat{x}_{k+1} nicht nur \hat{x}_k, u_k und y_k benötigt werden, sondern auch „Zwischenwerte“ wie z.B. $u_{k+1/2}$ (oder sogar zukünftige Werte wie z.B. u_{k+1}). Um ein solches Verfahren in Echtzeit zu implementieren müsste das Abtastintervall τ in mehrere Teilintervalle zerteilt werden um den Wert \hat{x}_{k+1} zu berechnen [16].

Aus diesen Gründen wird zur zeitdiskreten Implementierung von kontinuierlich entworfenen Sliding Mode Beobachtern das einfach zu implementierende Euler-Verfahren (3.20) verwendet.

3.3.2 Genauigkeit, Parameterwahl und Konvergenzzeit

Einfluss der Abtastzeit

In [3] wird gezeigt, dass bei einer zeitdiskreten Realisierung eines Sliding Mode Beobachters erster Ordnung, die *sliding variable* σ mit einer Genauigkeit von $O(\tau)$ auf 0 gehalten werden kann, d.h. der Fehler steigt linear mit der Abtastzeit: $|\sigma| \leq \mu\tau$. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *quasi sliding mode*. Die Konstante μ hängt von den Beobachterparametern ab.

Einfluss der Parameter auf Genauigkeit und Konvergenzzeit

Die Wahl der Beobachterparameter ist eng verbunden mit der Konvergenzzeit des Beobachters und dessen Genauigkeit. Bei Verwendung der sogenannten *constant reaching law*

$$\dot{\sigma} = -k \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (3.21)$$

ist die Konvergenzzeit gegeben durch

$$T_R = \frac{|\sigma_0|}{k}. \quad (3.22)$$

Zur Verbesserung der Konvergenzzeit muss der Parameter k erhöht werden. Dies geht allerdings auf Kosten der Genauigkeit weil die Amplitude des Ratterns in der *sliding phase* zunimmt.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen besteht darin, die *constant reaching law* (3.21) durch die sogenannte *constant plus proportional reaching law* [18]

zu ersetzen:

$$\dot{\sigma} = -k_1 \operatorname{sgn}(\sigma) - k_2 \sigma . \quad (3.23)$$

Der zusätzliche Term sorgt für eine schnellere Konvergenz für große σ . Das Rattern wird weiterhin durch k_1 bestimmt. Die Konvergenzzeit kann also verbessert werden ohne das Rattern und somit die Ungenauigkeit zu erhöhen. Die Konvergenzzeit ist hier gegeben durch

$$T_R = \frac{1}{k_2} \ln \left(\frac{k_2 |\sigma_0|}{k_1} \right) . \quad (3.24)$$

3.4 Simulationsergebnisse

Die theoretischen Betrachtungen werden nun an Hand des Beispiels (3.15) illustriert. Die Übertragungsfunktion des nominalen Systems (3.15) ($\rho = 0$) lautet:

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s} . \quad (3.25)$$

Für die Simulationen wurde das System um einen Standardregelkreis (siehe Abbildung 3.1) erweitert. Die Übertragungsfunktion des Reglers lautet

$$R(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = 1 . \quad (3.26)$$

Somit ergibt sich für die Führungsübertragungsfunktion ($\rho = 0$):

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{P(s)R(s)}{1 + P(s)R(s)} = \frac{1}{s + 1} . \quad (3.27)$$

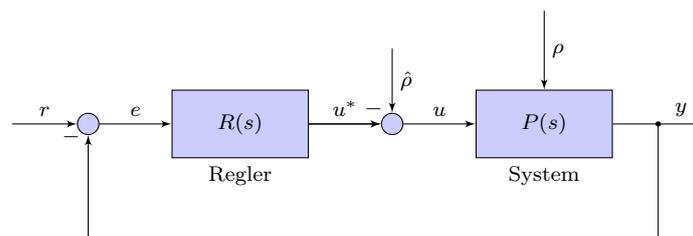


Abbildung 3.1: Standardregelkreis.

Die Störung ρ wurde exemplarisch gewählt als

$$\rho = 0.1 + \sin(5t) . \quad (3.28)$$

Die im Rahmen der Beobachtung geschätzte Störung $\hat{\rho}$ wird bei der Regelung verwendet um den Einfluss der echten Störung ρ zu eliminieren. Die Beobachterdynamik (3.16) wird mit dem expliziten Euler-Verfahren implementiert:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \tau u - \tau k \operatorname{sgn}(e) . \quad (3.29)$$

Der Anfangswert des Beobachters wird als $\hat{x}_0 = 0$ gewählt. Der tatsächliche Anfangswert des Systems liegt bei $x_0 = -0.4$. In Abbildung 3.3 ist die *reaching phase* und die *sliding phase* des Beobachters zu sehen. Der Beobachter konvergiert in endlicher Zeit. Der *injection term* $-k \operatorname{sgn}(e)$ wird mit einem einfachen Tiefpassfilter 1.Ordnung gefiltert um $\hat{\rho}$ zu erhalten:

$$F(s) = \frac{\hat{\rho}}{-k \operatorname{sgn}(e)} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_g} + 1} . \quad (3.30)$$

Die Grenzfrequenz ω_g des Tiefpasses muss dabei so gewählt werden, dass einerseits das hochfrequente Rattern ausreichend unterdrückt wird und andererseits keine signifikante Phasenverschiebung des rekonstruierten Signals auftritt. Je größer die Abtastzeit τ gewählt wird, desto schwieriger wird es, die Grenzfrequenz ω_g geeignet zu wählen.

In Abbildung 3.2 ist das hochfrequente Rattern und die durch Tiefpassfilterung rekonstruierte Störung zu sehen. Die Parameter wurden gewählt als $k = 2$, $\tau = 0.1$ ms, $\omega_g = 200$ rad/s. Obwohl die Störung augenscheinlich gut rekonstruiert werden kann, kann der Einfluss der Störung auf die Regelung nicht ganz eliminiert werden wie in Abbildung 3.4 zu erkennen ist. In Abbildung 3.5 ist der Fehler der *sliding variable* e für die Abtastzeiten $\tau = 0.1$ ms, $\tau = 1$ ms und $\tau = 10$ ms dargestellt. Man erkennt, dass das Verzehnfachen der Abtastzeit eine Verzehnfachung des Fehlers verursacht. Dies stimmt mit der Theorie überein ($e = O(\tau)$). Eine Erhöhung des Parameter k von $k = 2$ auf $k = 5$ erhöht den Fehler auf $6 \cdot 10^{-4}$ für $\tau = 0.1$ ms und $6 \cdot 10^{-3}$ für $\tau = 1$ ms.

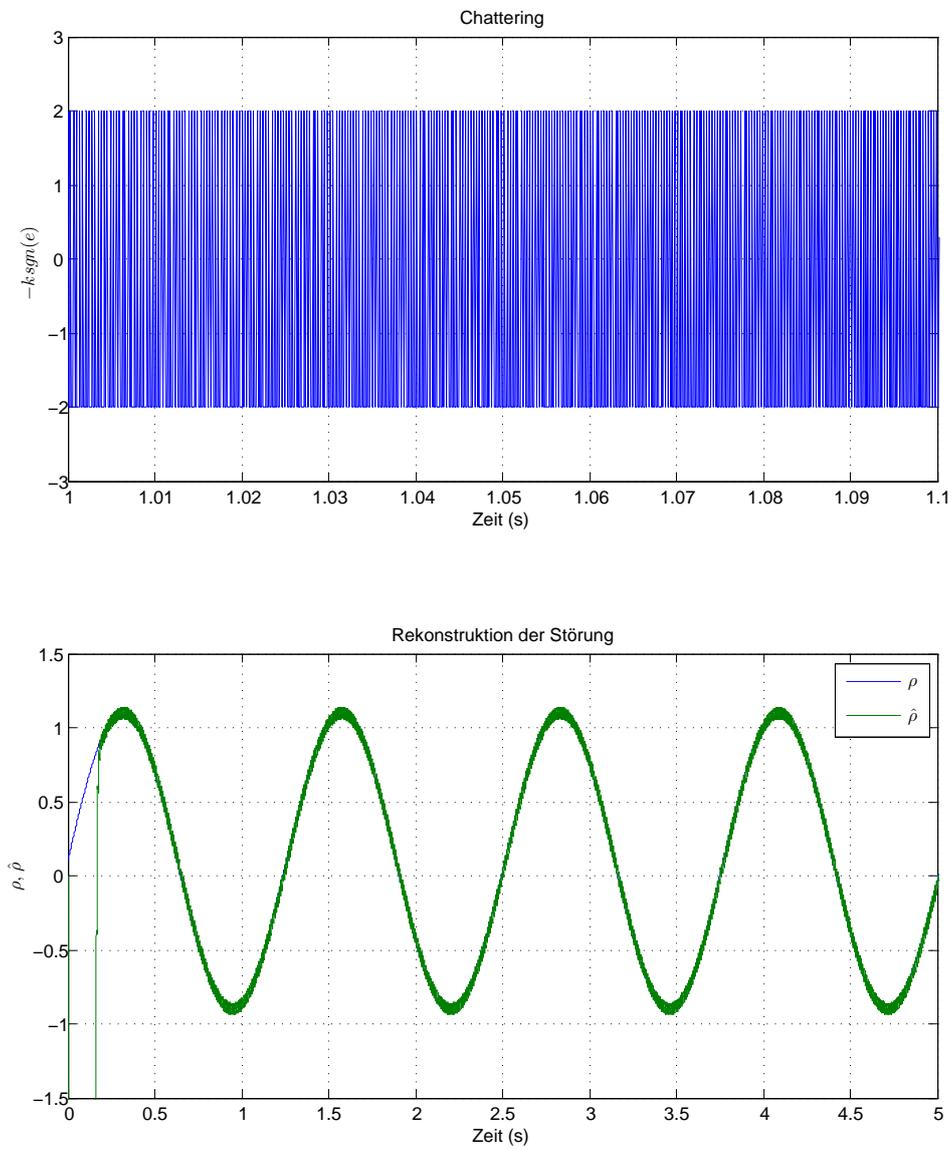


Abbildung 3.2: Hochfrequentes Rattern und rekonstruierte Störung ($\tau = 0.1$ ms, $\omega_g = 200$ rad/s, $k = 2$).

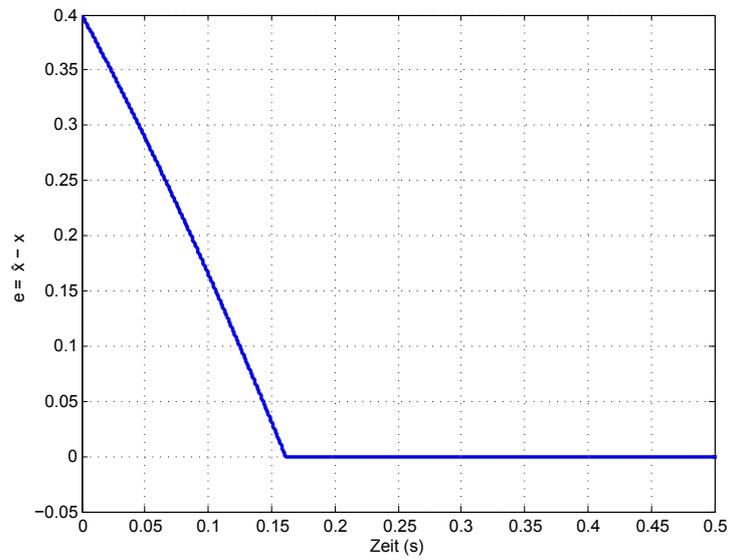


Abbildung 3.3: Reaching und sliding phase.

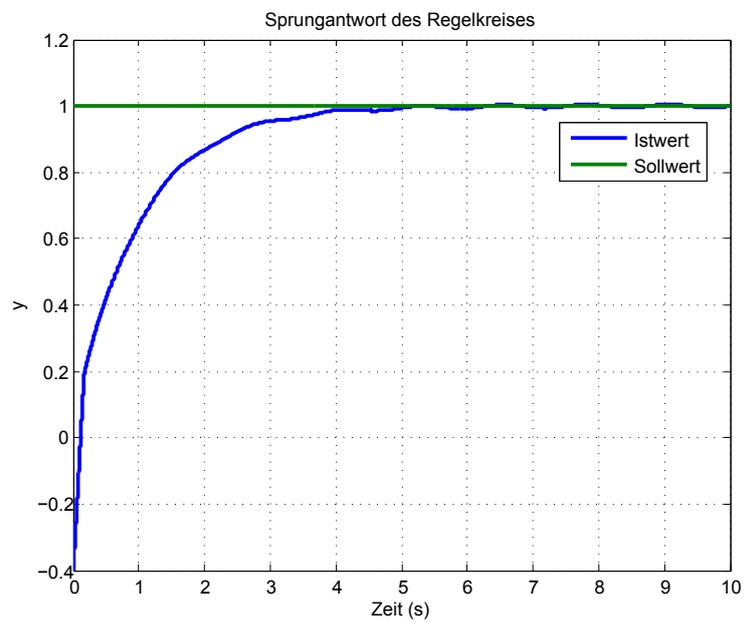


Abbildung 3.4: Regelung ($\tau = 0.1$ ms, $\omega_g = 200$ rad/s, $k = 2$), $r(t) = 1$.

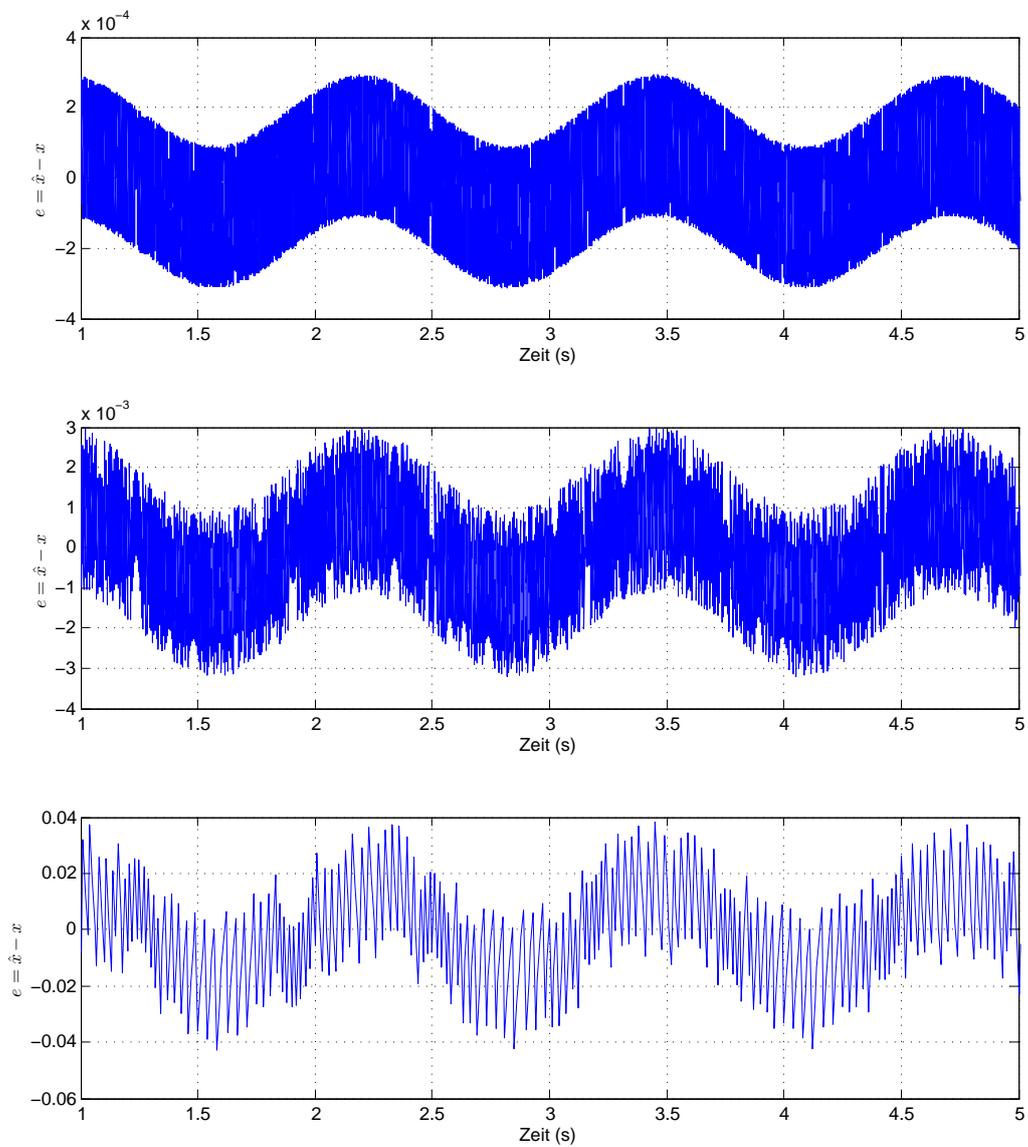


Abbildung 3.5: Beobachterfehler, $\tau = 0.1$ ms (oben), $\tau = 1$ ms (Mitte), $\tau = 10$ ms (unten).

Kapitel 4

Sliding Mode Beobachter höherer Ordnung

4.1 Grundlagen Sliding Mode Konzepte höherer Ordnung

Mit Sliding Mode Konzepten höherer Ordnung können einige Nachteile, die im letzten Kapitel aufgezeigt wurden behoben werden. Dazu zählen

- die Vermeidung von *chattering* und
- die Erhöhung der Genauigkeit bei einer zeitdiskreten Realisierung.

Das Grundprinzip von Sliding Modes höherer Ordnung liegt darin, die unstetigen Anteile in höhere Ableitungen der *sliding variable* σ zu verschieben. Man spricht von einem Sliding Mode r -ter Ordnung wenn die r -te Ableitung von σ unstetig ist (bei Sliding Modes erster Ordnung ist bereits $\dot{\sigma}$ unstetig). In der *sliding phase* ist die Bedingung

$$\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (4.1)$$

erfüllt. Das typische Rattern tritt erst in $\sigma^{(r)}$ auf und σ wird mit einer Genauigkeit von $O(\tau^r)$ auf 0 gehalten (Details zur Genauigkeit bei zeitdiskreter Realisierung folgen in Kapitel 4.4).

In diesem Kapitel werden einige Sliding Mode Konzepte höherer Ordnung vorgestellt sowie deren Einsatz als Beobachter besprochen.

4.2 Super-Twisting Beobachter (STO)

4.2.1 Super-Twisting Algorithmus

Der Super-Twisting Algorithmus (STA) ist ein Sliding Mode Algorithmus zweiter Ordnung der in allgemeiner Form durch folgende Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1\sqrt{|x_1|}\operatorname{sgn}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\operatorname{sgn}(x_1) .\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dabei sind k_1 und k_2 positive Parameter, die geeignet zu wählen sind. Der Algorithmus ist vielseitig einsetzbar zur Regelung, als Beobachter [11] oder als robuster, exakter Differenzierer [4]. Man kann mittels der einfachen quadratischen Ljapunov Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\zeta}^\top \mathbf{P} \boldsymbol{\zeta} ,\tag{4.3}$$

mit

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \sqrt{|x_1|}\operatorname{sgn}(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}\tag{4.4}$$

und

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0\tag{4.5}$$

zeigen, dass der Algorithmus (4.2) für jedes $k_1, k_2 > 0$ in endlicher Zeit gegen $(x_1, x_2) = (0, 0)$ konvergiert [9]. Des Weiteren kann man zeigen dass der STA trotz Vorhandensein von Störungen ρ_1 und ρ_2 in beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1\sqrt{|x_1|}\operatorname{sgn}(x_1) + x_2 + \rho_1 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\operatorname{sgn}(x_1) + \rho_2 ,\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit

$$|\rho_1| \leq \delta_1\sqrt{|x_1|}, \quad |\rho_2| \leq \delta_2, \quad \delta_1, \delta_2 > 0 ,\tag{4.7}$$

ebenfalls gegen $(x_1, x_2) = (0, 0)$ in endlicher Zeit konvergiert, falls die Parameter k_1 und k_2 groß genug gewählt werden [9]. Die Konvergenzzeit kann ebenfalls mit der Ljapunov Funktion (4.3) abgeschätzt werden und ist abhängig vom Anfangswert \mathbf{x}_0 ([9], [2]).

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie der STA zur Beobachtung von Systemen zweiter Ordnung eingesetzt werden kann und welche Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile sich ergeben.

4.2.2 Anwendung als Beobachter

Allgemein kann der STO (Super Twisting Observer) zur Beobachtung einer Klasse von Systemen zweiter Ordnung eingesetzt werden, die durch folgende Gleichungen beschrieben werden [10]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) + \rho(t, x_1, x_2) \\ y &= x_1 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei ist u ein bekannter Eingang, f_1 und f_2 sind bekannte Funktionen und ρ beschreibt eine unbekannte, aber beschränkte Unsicherheit: $|\rho(t, x_1, x_2)| < L^*$. Die Untersuchung der Beobachtbarkeit des Systems (4.8) kann wie in Kapitel 2.4 besprochen durchgeführt werden. Da die Abbildung

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1(x_1, u) + x_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

eindeutig nach \mathbf{x} aufgelöst werden kann, und zwar für jedes u , ist das System (4.8) uniform beobachtbar.

Die Beobachterdynamik wird folgendermaßen gewählt:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= f_1(y = x_1, u) + \hat{x}_2 - k_1 \Phi_1(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(y = x_1, \hat{x}_2, u) - k_2 \Phi_2(e_1) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dabei sind die sogenannten *injection terms* gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_1(e_1) &= \sqrt{|e_1|} \operatorname{sgn}(e_1) \\ \Phi_2(e_1) &= \operatorname{sgn}(e_1) , \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Für den Beobachterfehler ergibt sich aus (4.8), (4.10) und (4.11):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 \sqrt{|e_1|} \operatorname{sgn}(e_1) + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_2 \operatorname{sgn}(e_1) + f_2(x_1, \hat{x}_2, u) - f_2(x_1, x_2, u) - \rho(t, x_1, x_2) . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Setzt man

$$\tilde{\rho} = f_2(x_1, \hat{x}_2, u) - f_2(x_1, x_2, u) - \rho(t, x_1, x_2) \quad (4.13)$$

so hat die Fehlerdynamik (4.12) die Form (4.6). Somit ist klar, dass der Fehler \mathbf{e} in endlicher Zeit zu Null wird falls $\tilde{\rho}$ durch eine bekannte Konstante L beschränkt ist und die Parameter k_1 und k_2 geeignet gewählt werden.

Der STO besitzt also die Eigenschaft, dass der Beobachterfehler \mathbf{e} in endlicher Zeit gegen Null konvergiert trotz der Störung $\tilde{\rho}$. Diese Eigenschaft der Robustheit ergibt sich aufgrund des unstetigen *injection term* Φ_2 . Ein potentieller Nachteil liegt darin, dass die Konvergenzzeit stark mit dem Anfangswert des Beobachters steigt [10]. Ob diese Tatsache ein Problem darstellt, hängt von der konkreten Anwendung ab.

Wahl der Parameter beim STO

Herleitungen bezüglich der Parameterwahl resultieren oft in sehr konservativen Schätzungen, z.B. [4]:

$$\begin{aligned} k_2 &> L \text{ und} \\ k_1 &> 4L \frac{k_2 + L}{k_2 - L} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

In der Praxis ist eine populäre Wahl für die Parameter:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.5\sqrt{L} , \text{ und} \\ k_2 &= 1.1L . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Diese Wahl ist ausreichend obwohl die Bedingungen (4.14) nicht erfüllt sind.

Rekonstruktion der Störung

Nach erfolgter Konvergenz des Beobachters ($\hat{x}_1 = x_1$ und $\hat{x}_2 = x_2$) kann die unbekannte Störung ρ rekonstruiert werden. Es ergibt sich aus (4.12):

$$\rho(t, x_1, x_2) = -[k_2 \operatorname{sgn}(e_1)]_{eq} . \quad (4.16)$$

4.3 Robuster exakter Differenzierer beliebiger Ordnung

In einigen Bereichen der Regelungstechnik z.B. bei PID-Reglern oder bei einer Trajektorienfolgeregelung ist es nötig, gemessene Signale (mehrfach) zu differenzieren. Der ideale Differenzierer, dessen Übertragungsfunktion $G(s) = s$ beträgt, ist jedoch bekanntermaßen nicht realisierbar. Mit Hilfe von Sliding Mode Konzepten höherer Ordnung ist es möglich, einen robusten, exakten Differenzierer beliebiger Ordnung zu implementieren, der auch im Rahmen eines Beobachterentwurfes eingesetzt werden kann. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung des im vorherigen Kapitel besprochenen STA. Dieses Konzept wurde zum ersten Mal in [5] vorgestellt. Das einzige benötigte Wissen um eine Funktion f n -fach zu differenzieren ist eine bekannte Grenze L für die $(n + 1)$ -te Ableitung der Funktion, d.h. $|f^{(n+1)}| < L$. Die rekursive Variante des Differenzierers n -ter Ordnung ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\tilde{\lambda}_n L^{\frac{1}{n+1}} |z_0 - f|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sgn}(z_0 - f) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\tilde{\lambda}_{n-1} L^{\frac{1}{n}} |z_1 - \dot{z}_0|^{\frac{n-1}{n}} \operatorname{sgn}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2 \\ &\dots \\ \dot{z}_n &= -\tilde{\lambda}_0 L \operatorname{sgn}(z_n - \dot{z}_{n-1}) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Durch sukzessives Einsetzen von \dot{z}_i in die Gleichung für \dot{z}_{i+1} erhält man eine nicht-rekursive Variante des Differenzierers:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= -\lambda_n L^{\frac{1}{n+1}} |z_0 - f|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sgn}(z_0 - f) + z_1 = \varphi_0(z_0 - f) + z_1 \\
 \dot{z}_1 &= -\lambda_{n-1} L^{\frac{2}{n+1}} |z_0 - f|^{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{sgn}(z_0 - f) + z_2 = \varphi_1(z_0 - f) + z_2 \\
 &\dots \\
 \dot{z}_n &= -\lambda_0 L \operatorname{sgn}(z_0 - f) = \varphi_n(z_0 - f) .
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Es handelt sich hierbei um einen Sliding Mode Algorithmus der Ordnung $n + 1$. Bei geeigneter Wahl der Parameter $\tilde{\lambda}_0$ bis $\tilde{\lambda}_n$ konvergiert der Differenzierer in endlicher Zeit, d.h. $z_i = f^{(i)}$ nach endlicher Zeit für $i = 0 \dots n$. Die Konvergenzzeit ist wiederum abhängig von den Anfangswerten. Für $n = 1$ ergibt sich der bereits besprochene Super-Twisting Algorithmus. Im Gegensatz zum STA stehen ab $n = 2$ keine Ljapunov Funktionen zur Stabilitätsuntersuchung mehr zur Verfügung, die Untersuchungen basieren auf Homogenitätsbetrachtungen. Man nennt den Differenzierer (4.17) auch homogener Differenzierer:

Definition 4.3.1. *Ein System $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist homogen mit Grad λ bezüglich der Dilation*

$$d_k^{\mathbf{r}} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (k^{r_1} x_1, k^{r_2} x_2, \dots, k^{r_n} x_n) \quad \forall k, r_i > 0 \tag{4.19}$$

falls jede Komponente f_i homogen mit Grad $\lambda + r_i$ ist, das heißt die Gleichungen

$$f_i(k^{r_1} x_1, k^{r_2} x_2, \dots, k^{r_n} x_n) = k^{\lambda + r_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall k > 0 \tag{4.20}$$

erfüllt sind [19].

Der Differenzierer (4.18) ist homogen mit $\lambda = -1$ und

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) = (n + 1, n, \dots, 1) . \tag{4.21}$$

Aus dem negativen Homogenitätsgrad ergibt sich die Konvergenz in endlicher Zeit. Für nähere Informationen bezüglich Homogenität und Stabilität von Sliding Mode Konzepten höherer Ordnung sei auf [19] verwiesen.

Man beachte, dass die n -fache Differentiation einer Funktion f äquivalent zum Beobachterentwurf für folgendes System ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n+1} &= f^{(n+1)} \\
 y &= x_1 = f .
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Beobachterdynamik ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= -\lambda_n L^{\frac{1}{n+1}} |e_1|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sgn}(e_1) + \hat{x}_2 = \varphi_0(e_1) + \hat{x}_2 \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= -\lambda_{n-1} L^{\frac{2}{n+1}} |e_1|^{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{sgn}(e_1) + \hat{x}_3 = \varphi_1(e_1) + \hat{x}_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{x}}_{n+1} &= -\lambda_0 L \operatorname{sgn}(e_1) = \varphi_n(e_1) ,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

mit $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$. Die Dynamik des Beobachterfehlers $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ergibt sich daraus zu:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= -\lambda_n L^{\frac{1}{n+1}} |e_1|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sgn}(e_1) + e_2 = \varphi_0(e_1) + e_2 \\
 \dot{e}_2 &= -\lambda_{n-1} L^{\frac{2}{n+1}} |e_1|^{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{sgn}(e_1) + e_3 = \varphi_1(e_1) + e_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n+1} &= -\lambda_0 L \operatorname{sgn}(e_1) - f^{(n+1)} = \varphi_n(e_1) - f^{(n+1)} .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$f^{(n+1)}$ tritt hier in der letzten Gleichung als Störung auf.

Wahl der Parameter

Für die Parameter $\tilde{\lambda}_0$ bis $\tilde{\lambda}_n$ der rekursiven Variante (4.17) gibt es Parametersequenzen die rekursiv aufgebaut werden und sich in der Praxis bewährt haben. Eine mögliche Wahl für $n \leq 5$ ist: $\tilde{\lambda}_0 = 1.1, \tilde{\lambda}_1 = 1.5, \tilde{\lambda}_2 = 2, \tilde{\lambda}_3 = 3, \tilde{\lambda}_4 = 5, \tilde{\lambda}_5 = 8$ [6].

Die Parameter für die nichtrekursive Variante (4.18) lassen sich einfach aus den Parametern der rekursiven Variante berechnen:

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0, \lambda_n = \tilde{\lambda}_n, \lambda_j = \tilde{\lambda}_j \lambda_{j+1}^{j/(j+1)}, \quad j = n-1, \dots, 1 . \tag{4.25}$$

Sind die Parameter $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ fixiert, ist L der einzig zu wählende Parameter, der größer als $|f^{(n+1)}|$ zu wählen ist, damit die Störung dominiert wird.

4.4 Zeitdiskrete Realisierung und Einfluss von Rauschen

Durch eine zeitdiskrete Realisierung des Differenzierers (4.18) wird sich nach erfolgter Konvergenz ein von der Abtastzeit abhängiger Fehler ergeben. Zusätzlich tritt noch ein Fehler durch eventuell vorhandenes Messrauschen auf. In [6] werden die Effekte, die sich hierbei ergeben, detailliert behandelt. Im Folgenden werden diese Erkenntnisse zusammengefasst.

Allgemein liegt der Fehler bezüglich der *sliding variable* σ eines **kontinuierlich** implementierten Sliding Mode Algorithmus r -ter Ordnung bei **zeitdiskreten** Messungen in der Größenordnung

$$|\sigma^{(i)}| = O(\tau^{r-i}), \quad i = 0 \dots r - 1. \quad (4.26)$$

Im Speziellen bedeutet das für den **kontinuierlich** implementierten Differenzierer (4.18) der Ordnung n , dass sich bei **zeitdiskreten** Messungen mit der Abtastzeit τ ein Fehler in der Größenordnung

$$|z_i - f^{(i)}| = O(\tau^{n+1-i}), \quad i = 0 \dots n \quad (4.27)$$

ergibt, d.h.

$$|z_i - f^{(i)}| \leq \mu_i \tau^{n+1-i}, \quad i = 0 \dots n. \quad (4.28)$$

Die Gewichte \mathbf{r} von (4.21) treten hier als Potenzen auf. Für die praktische Realisierung ist jedoch eine **zeitdiskrete** Implementierung nötig. Als erster Ansatz wird der Differenzierer (4.18) durch das einfache Euler-Verfahren diskretisiert:

$$\begin{aligned} z_{i,k+1} &= z_{i,k} + \tau \varphi_i(z_{0,k} - f_k) + \tau z_{i+1,k}, & i = 0 \dots n - 1 \\ z_{n,k+1} &= z_{n,k} + \tau \varphi_n(z_{0,k} - f_k). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Man kann nun zeigen, dass durch diese Methode der Diskretisierung die oben angegebenen Größenordnungen für den Fehler aufgrund der Abtastung für den Fall $n \geq 2$ zerstört werden. Genauer gesagt, geht die Eigenschaft der Homogenität verloren. Durch folgende Erweiterung kann dieses Problem vermieden werden und der zeitdiskrete Differenzierer hat die gleichen Eigenschaften wie der kontinuierliche Differenzierer bei zeitdiskreten Messungen:

$$\begin{aligned} z_{i,k+1} &= z_{i,k} + \tau \varphi_i(z_{0,k} - f_k) + \sum_{j=1}^{n-i} \frac{\tau^j}{j!} z_{j+i,k}, & i = 0 \dots n - 1 \\ z_{n,k+1} &= z_{n,k} + \tau \varphi_n(z_{0,k} - f_k). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Diese Erweiterung wird nur wirksam für den Fall $n \geq 2$. Für $n = 1$ ergibt sich (4.29). Der Fehler durch vorhandenes Messrauschen $\eta(t)$, $|\eta(t)| < \epsilon$, liegt in der Größenordnung

$$|z_i - f^{(i)}| = O(\epsilon^{1-\frac{i}{n+1}}), \quad i = 0 \dots n. \quad (4.31)$$

Einfluss der Parameter auf Genauigkeit und Konvergenzzeit

Die Wahl der Parameter $\lambda_0, \dots, \lambda_n, L$ hat auch hier, wie bei Sliding Mode Beobachtern erster Ordnung, einen Einfluss auf die Genauigkeit und die Konvergenzzeit. Es gilt

$$|z_i - f^{(i)}| \leq \mu_i \tau^{n+1-i}, \quad i = 0 \dots n. \quad (4.32)$$

Die Konstanten μ_i sind abhängig von den Parametern $\lambda_0, \dots, \lambda_n, L$. Es existieren hier jedoch keine genauen analytischen Zusammenhänge. Allgemein kann man sagen, dass es bei der Wahl des Parameters L wiederum zu einem Trade-off zwischen Konvergenzzeit und Genauigkeit im eingeschwungenen Zustand kommt: je höher der Parameter L , desto kürzer die Konvergenzzeit des Beobachters. Allerdings steigt mit größer werdendem L auch der Fehler des Beobachters.

Die Konvergenzzeit ist abhängig von den Anfangswerten des Beobachters. Im Allgemeinen ist nicht bekannt wie stark die Anfangswerte des Beobachters von den tatsächlichen Anfangswerten der Zustände abweichen. Bei einigen Systemen kann es nötig sein, dass der Beobachter garantiert in einer vorgegebenen Zeit konvergieren muss. Für diese Problemstellung gibt es sowohl für den STO als auch für den robusten, exakten Differenzierer beliebiger Ordnung Erweiterungen, bei denen die Konvergenzzeit unabhängig von den Anfangswerten nach oben beschränkt ist. Man nennt diese Beobachter uniform konvergent. Besonders für den Fall, dass die Möglichkeit besteht, dass die Anfangswerte des Beobachters mehrere Zehnerpotenzen von den tatsächlichen Werten abweichen, können sich Probleme bezüglich der Konvergenzzeit ergeben.

Für den STO gibt es eine Erweiterung die zum uniform konvergenten generalized Super-Twisting Observer (GSTO, [10], [7]) führt. Die nichtlinearen *injection terms* (4.11) haben nun die Form

$$\begin{aligned} \Phi_1(e_1) &= \mu_1 \sqrt{|e_1|} \operatorname{sgn}(e_1) + \mu_2 |e_2|^{3/2} \operatorname{sgn}(e_1) \\ \Phi_2(e_1) &= 0.5 \mu_1^2 \operatorname{sgn}(e_1) + 2 \mu_1 \mu_2 e_1 + 1.5 \mu_2^2 |e_1|^2 \operatorname{sgn}(e_1). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dabei gilt $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

Zuerst sei angemerkt, dass sich für die spezielle Wahl $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 0$ der herkömmliche STO ergibt. Die *injection terms* können folgendermaßen interpretiert werden: Die Terme niedrigen Grades, die auch beim Standard STO vorhanden sind, sind stärker als die Terme höherer Ordnung für kleine Fehler e und sind verantwortlich für die Konvergenz in endlicher Zeit. Für große e sind die Terme höherer Ordnung stärker als die Terme niedrigerer Ordnung und sorgen so für eine schnellere Konvergenz. Man kann nun zeigen, dass die Konvergenzzeit unabhängig von den Anfangswerten \hat{x}_0 des Beobachters ist, der GSTO ist uniform konvergent. Die Konvergenzzeit ist für alle \hat{x}_0 durch einen konstanten Wert beschränkt [7]. Diese Eigenschaften können wiederum durch Ljapunov Funktionen bewiesen werden.

Auch für den robusten, exakten Differenzierer (4.18) beliebiger Ordnung gibt es Ansätze die für uniforme Konvergenz sorgen. In [13] wird der robuste, exakte Differenzierer in Kombination mit einem praktisch uniform konvergenten Differenzierer (d.h. einem Differenzierer der uniforme Konvergenz zu einem Bereich um den Ursprung garantiert) verwendet, um uniforme Konvergenz zu erreichen.

Verbesserung der Genauigkeit des Beobachters

Aus den Betrachtungen in den vorherigen Abschnitten ergeben sich zwei Möglichkeiten die Genauigkeit des zeitdiskret implementierten Beobachters/Differenzierers zu verbessern:

1. Reduktion der Abtastzeit oder
2. Erhöhung der Ordnung des Beobachters (*extended order approach*, siehe Kapitel 4.5).

Die Erhöhung der Ordnung des Beobachters erhöht die Genauigkeit der Schätzungen jeweils um eine Ordnung. Es ist eine gewisse Analogie zu numerischen Integrationsalgorithmen wie z.B. den Runge-Kutta Verfahren zu erkennen. Auch dort resultiert die Erhöhung der Ordnung des Verfahrens in einer Erhöhung der Genauigkeit der Lösung um jeweils eine Ordnung.

Zusätzlich reduziert sich der Einfluss von Messrauschen durch die Erhöhung der Beobachterordnung. Aus (4.31) ist ersichtlich, dass der Fehler für f zwar immer in der Größenordnung von $O(\epsilon)$ liegt, für die weiteren Schätzungen sinkt der Fehler jedoch. Für $n = 1$ liegt bspw. der Fehler für \dot{f} in der Größenordnung $O(\sqrt{\epsilon})$, durch Erhöhung der Ordnung auf $n = 2$ reduziert sich der Fehler auf $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$.

4.5 Simulationsergebnisse

Das System (3.15) kann auch als System zweiter Ordnung betrachtet und somit in der Form (4.8) angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{\rho} \\ y &= x_1 . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Systembeschreibung (4.34) kann interpretiert werden als eine künstliche Erhöhung der Systemordnung bzw. eine künstliche Erhöhung des relativen Grades der Ausgangsgröße y bezüglich der Störung ρ um 1. In [8] wird diese Vorgehensweise als

extended order approach bezeichnet. Als Beobachter kann nun der STO mit folgender Beobachterdynamik eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= u + \hat{x}_2 - \lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|e_1|} \operatorname{sgn}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\lambda_0 L \operatorname{sgn}(e_1) .\end{aligned}\tag{4.35}$$

Nach erfolgter Konvergenz des Beobachters gilt $\hat{x}_1 = x_1$ und $\hat{x}_2 = x_2 = \rho$. Die Verwendung eines Sliding Mode Beobachters zweiter Ordnung statt eines Sliding Mode Beobachters erster Ordnung hat folgende Auswirkungen:

- Die Störung ρ kann ohne Tiefpassfilterung rekonstruiert werden. Das Rattern tritt erst in \ddot{e}_1 auf.
- Die Genauigkeit der Beobachtung bei zeitdiskreter Realisierung des Beobachters steigt gegenüber dem Beobachter erster Ordnung. Die *sliding variable* $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ wird mit einer Genauigkeit von $O(\tau^2)$ auf Null gehalten, $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$ mit einer Genauigkeit von $O(\tau)$.

In Abbildung 4.1 ist der Verlauf der Beobachterfehler e_1 und e_2 zu erkennen. Die Anfangswerte $(\hat{x}_{1,0}, \hat{x}_{2,0})$ wurden mit $(y_0, 0) = (0, 0)$ initialisiert. Die Parameter des Beobachters wurden mit $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$ und $L = 5$ gewählt. Die Störung beträgt nach wie vor

$$\rho = 0.1 + \sin(5t) .\tag{4.36}$$

Die Abtastzeit beträgt $\tau = 0.1$ ms. Die Beobachterdynamik (4.35) ist mit dem expliziten Euler-Verfahren (4.29) implementiert. Die Schätzung der Störung ρ ist nun um ein Vielfaches genauer als bei Verwendung eines Beobachters 1. Ordnung. Dies kann man auch an der Sprungantwort des geschlossenen Kreises erkennen, siehe Abbildung 4.1. Es ist keinerlei Beeinträchtigung der Störung auf die Qualität der Regelung mehr zu erkennen.

Die Systemordnung und somit die Beobachterordnung kann immer weiter erhöht werden um die Genauigkeit der Schätzungen zu verbessern. Eine weitere Erhöhung der Systemordnung führt zu folgender Systembeschreibung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{\rho} \\ y &= x_1 .\end{aligned}\tag{4.37}$$

Die Beobachterdynamik wird nun folgendermaßen gewählt:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= u - \lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |e_1|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(e_1) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\lambda_1 L^{\frac{2}{3}} |e_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn}(e_1) + \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\lambda_0 L \operatorname{sgn}(e_1) .\end{aligned}\tag{4.38}$$

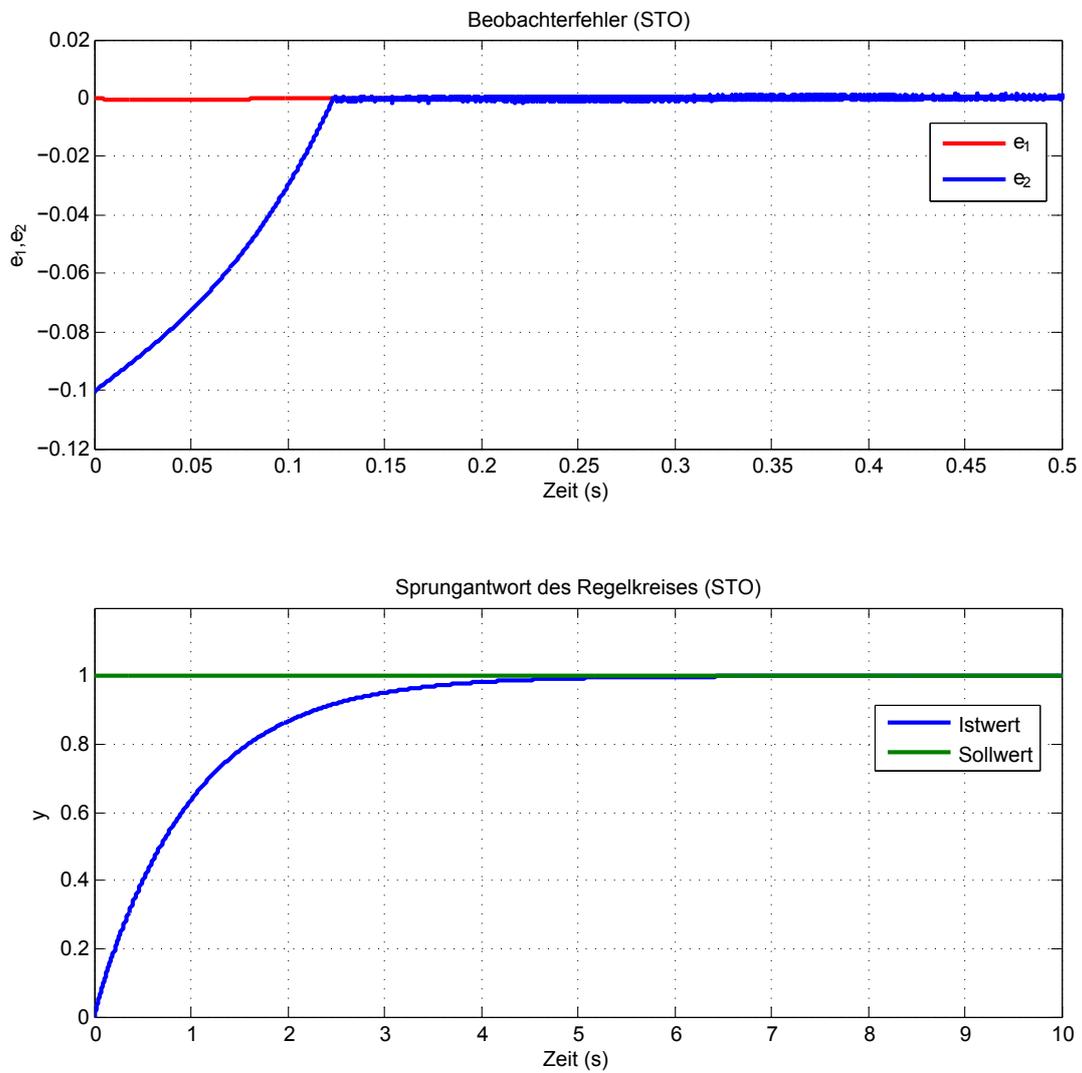


Abbildung 4.1: Beobachterfehler (oben) und Regelung (unten) bei Verwendung des STO zur Beobachtung.

Zusätzlich zur Störung ρ wird nun auch die Ableitung der Störung $\dot{\rho}$ geschätzt. Als Störung tritt in der Fehlerdynamik $\ddot{\rho}$ auf. Dieser Beobachter wird mit dem erweiterten Euler-Verfahren (4.30) implementiert. Die Parameter werden folgendermaßen gewählt:

$$\lambda_0 = 1.1, \lambda_1 = 2.12, \lambda_2 = 2, L = 25 . \quad (4.39)$$

In Abbildung 4.2 ist der Verlauf der Fehler e_1 und e_2 in Abhängigkeit der Abtastzeit im Intervall $\tau \in [0.0001 \quad 0.01]$ s dargestellt. Die Fehler e_1 und e_2 sind dabei die maximalen Fehler des Beobachters, die nach erfolgter Konvergenz auftreten. Man erkennt den quadratischen bzw. linearen Verlauf des Fehler e_1 bzw. e_2 beim STO und den kubischen bzw. quadratischen Verlauf beim Differenzierer 2.Ordnung. Die interpolierten Kurven lauten für den STO

$$\begin{aligned} e_1 &= 15.5207\tau^2 - 0.0225\tau \\ e_2 &= 12.7130\tau + 0.0032 \end{aligned} \quad (4.40)$$

und für den Differenzierer zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} e_1 &= 386.9933\tau^3 - 2.7030\tau^2 + 0.0081\tau \\ e_2 &= 172.6353\tau^2 - 0.1897\tau + 0.0002 . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Eine weitere Möglichkeit der Darstellung ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Hier ist sowohl der Fehler als auch die Abtastzeit logarithmisch dargestellt. Es ergeben sich lineare Verläufe. Die Steigung dieser Geraden entspricht der Fehlerordnung [6]. Für die interpolierten Geraden ergeben sich für den STO Steigungen von 1.91 und 0.978 und für den Differenzierer 2.Ordnung Steigungen von 2.93 und 1.95. Diese Werte stimmen recht gut mit den theoretischen Werten überein (Fehlerordnung $O(\tau^2)$ und $O(\tau)$ bzw. $O(\tau^3)$ und $O(\tau^2)$).

Die Vorgehensweise des *extended order approach* kann prinzipiell beliebig fortgesetzt werden. Praktisch kann sich diese Vorgehensweise aus einem der folgenden Gründe als schwierig erweisen:

- Die Terme, die in der Fehlerdynamik als Störung auftreten, können nicht mehr sinnvoll abgeschätzt werden.
- Die vorhandene Störung ρ ist keine glatte Funktion der Zeit.
- Die begrenzte Rechengenauigkeit sorgt dafür, dass ab einer bestimmten Abtastzeit keine signifikante Verbesserung bei der Genauigkeit mehr zu erkennen ist. Die Simulationen in dieser Arbeit wurden mit MATLAB/Simulink durchgeführt, das verwendete Zahlenformat ist double (64 Bit). Auch eine Erhöhung der Ordnung bringt nicht mehr unbedingt eine Verbesserung wenn

τ (s)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
10^{-2}	$ e_1 \leq 1.40 \cdot 10^{-3}$	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$3.66 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$2.61 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-7}$	$1.77 \cdot 10^{-9}$	$3.87 \cdot 10^{-11}$
10^{-4}	$2.71 \cdot 10^{-7}$	$2.41 \cdot 10^{-10}$	$1.94 \cdot 10^{-13}$	$8.88 \cdot 10^{-16}$
10^{-5}	$3.10 \cdot 10^{-9}$	$2.42 \cdot 10^{-13}$	$7.77 \cdot 10^{-16}$	$1.22 \cdot 10^{-15}$
10^{-6}	$3.08 \cdot 10^{-11}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$8.55 \cdot 10^{-15}$	$1.25 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 4.1: Fehler e_1 für verschiedene τ und Beobachterordnungen.

τ (s)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
10^{-2}	$ e_2 \leq 0.136$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$9.76 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$7.06 \cdot 10^{-5}$	$6.76 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$8.16 \cdot 10^{-6}$	$7.04 \cdot 10^{-6}$	$6.80 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$1.85 \cdot 10^{-4}$	$6.90 \cdot 10^{-7}$	$7.04 \cdot 10^{-7}$	$6.81 \cdot 10^{-7}$
10^{-6}	$1.85 \cdot 10^{-5}$	$6.80 \cdot 10^{-8}$	$7.05 \cdot 10^{-8}$	$6.81 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 4.2: Fehler e_2 für verschiedene τ und Beobachterordnungen.

die Abtastzeit eine gewisse Grenze unterschreitet. Diese Tatsache ist in den Tabellen 4.1 und 4.2 zu erkennen, in denen die Beobachterfehler e_1 und e_2 für Abtastzeiten von 10^{-2} s bis 10^{-6} s für unterschiedliche Beobachterordnungen enthalten sind. Beispielsweise erkennt man, dass der Fehler e_2 für $n = 4$ linear von der Abtastzeit abhängt anstatt biquadratisch und für $\tau \leq 10^{-3}$ s keine Verbesserung gegenüber dem Fall $n = 3$ zu erkennen ist. Für $n = 4$ ist außerdem beim Fehler e_1 für $\tau \leq 10^{-4}$ s keine Verbesserung mehr zu sehen. Allgemein können die asymptotischen Fehlerordnungen (4.27) für kleinere Abtastzeiten nicht mehr erreicht werden. Je höher die Beobachterordnung, desto eher ist der Punkt erreicht an dem die Fehlerordnungen nicht mehr erreicht werden.

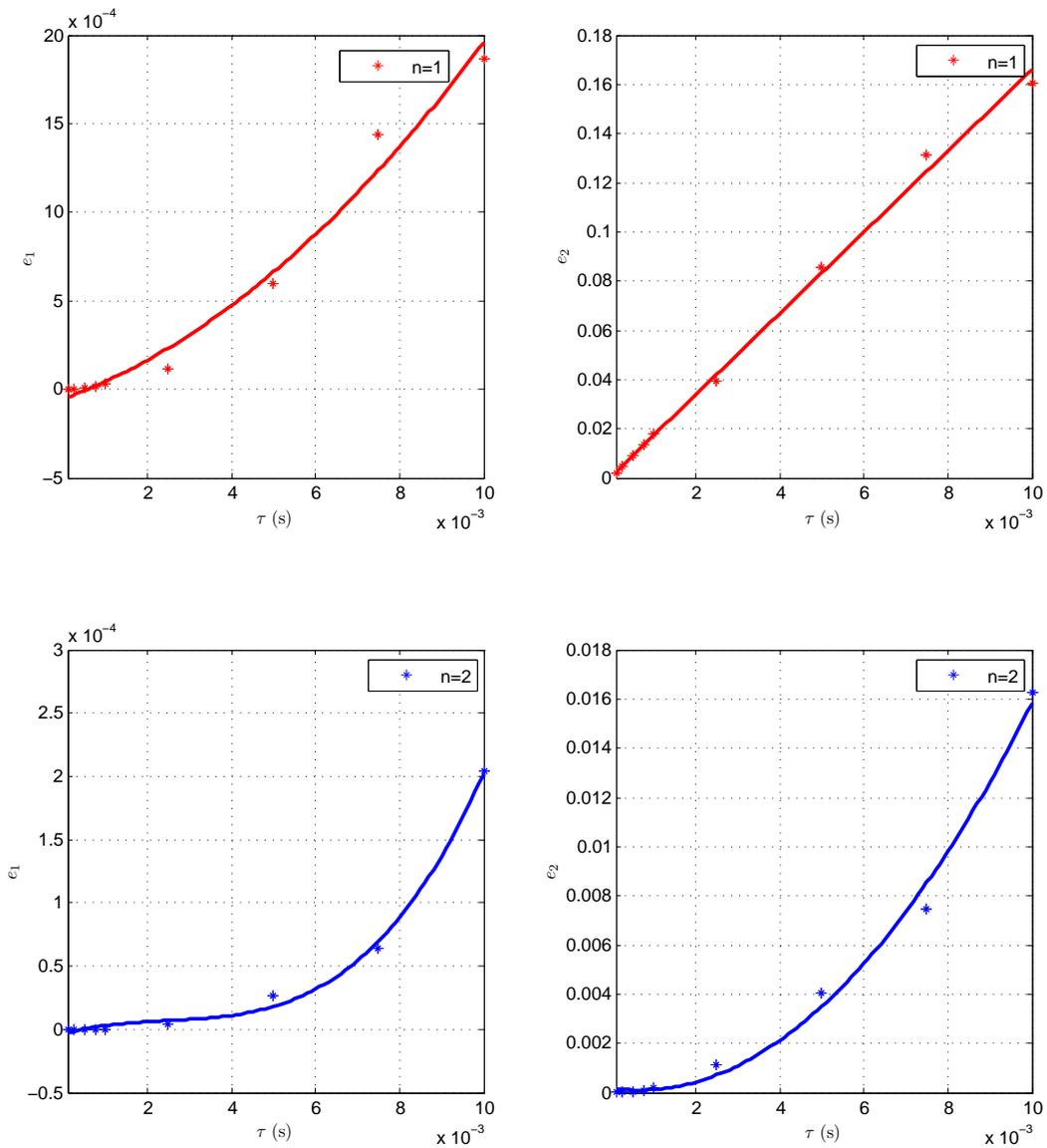


Abbildung 4.2: Beobachterfehler e_1 und e_2 in Abhängigkeit der Abtastzeit für den STO ($n = 1$) und den Differenzierer zweiter Ordnung ($n = 2$).

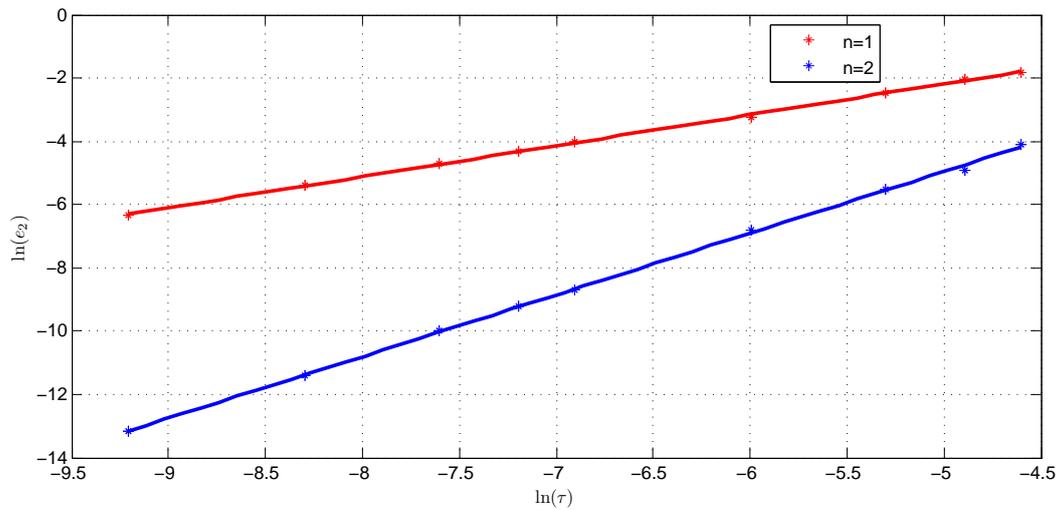
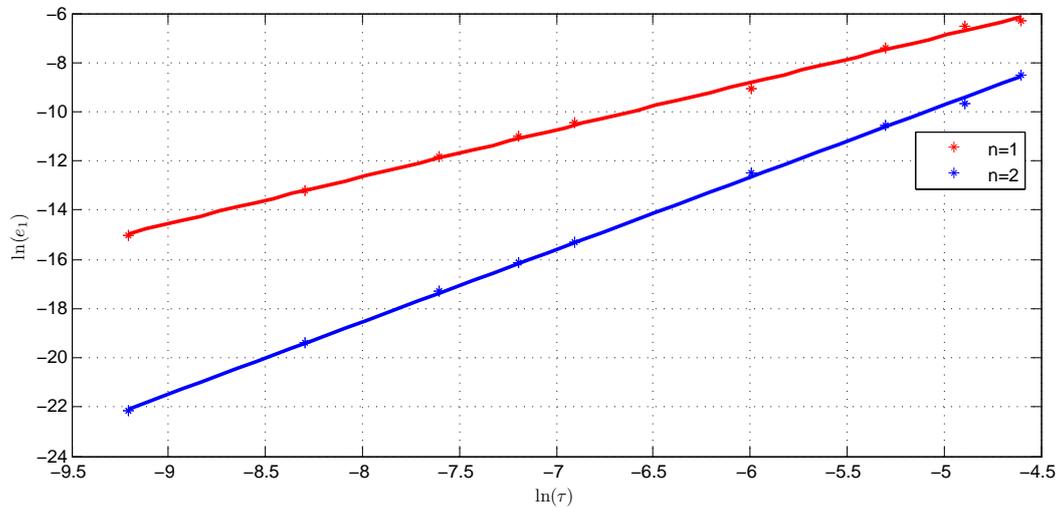


Abbildung 4.3: Beobachterfehler e_1 und e_2 in Abhängigkeit der Abtastzeit für den STO ($n = 1$) und den Differenzierer zweiter Ordnung ($n = 2$), logarithmische Darstellung.

Kapitel 5

Anwendung am Hydraulikprüfstand

5.1 Der Hydraulikprüfstand

Die im vorherigen Kapitel vorgestellten Methoden wurden am Hydraulikprüfstand des Instituts für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz implementiert. Der Aufbau, die Modellbildung und der Reglerentwurf wurden bereits in [14] durchgeführt. Im Folgenden wird der Prüfstand und die zur Verfügung stehenden Regler insoweit erklärt, wie es an dieser Stelle zum Verständnis nötig ist, für weitere Details sei auf [14] verwiesen.

Prinzipiell besteht der Hydraulikprüfstand aus folgenden Komponenten: einem Hydraulikaggregat bestehend aus Öltank, einem Elektromotor und zwei Pumpen, einem 4/3 Regelventil, einem doppelwirkenden Differentialzylinder und einem Linearantrieb mit Wegmesssystem (siehe Abbildung 5.1). Hydrauliköl wird über den Öltank und durch das Regelventil in den Zylinder gepumpt. Dies sorgt für eine Bewegung des Zylinders. Ziel der Regelung ist eine Positionsregelung des Hydraulikzylinders. Die Stellgröße ist bei diesem System die Position des Steuerschiebers des Regelventils. Das Regelventil ist für die Steuerung des Volumenstromes der Hydraulikflüssigkeit zuständig. Intern ist in dem Regelventil ein Lageregelkreis implementiert, der die gewünschte Position des Steuerschiebers einstellt. Es handelt sich um ein 4/3 Regelventil, d.h. das Ventil hat 4 Anschlüsse und 3 Schaltstellungen. Das Regelventil ist schematisch in Abbildung 5.2 zu sehen. Im Hydraulikzylinder wird die hydraulische Energie in mechanische Energie umgewandelt. Bei diesem Prüfstand wird ein sogenannter doppelwirkender Differentialzylinder verwendet (siehe Abbildung 5.3). Doppelwirkende Zylinder können Arbeit in beide Richtungen verrichten. Bei einem Differentialzylinder sind darüber hinaus die Wirkflächen der beiden Kolbenseiten unterschiedlich. Bei gleichen Drücken in beiden Kam-

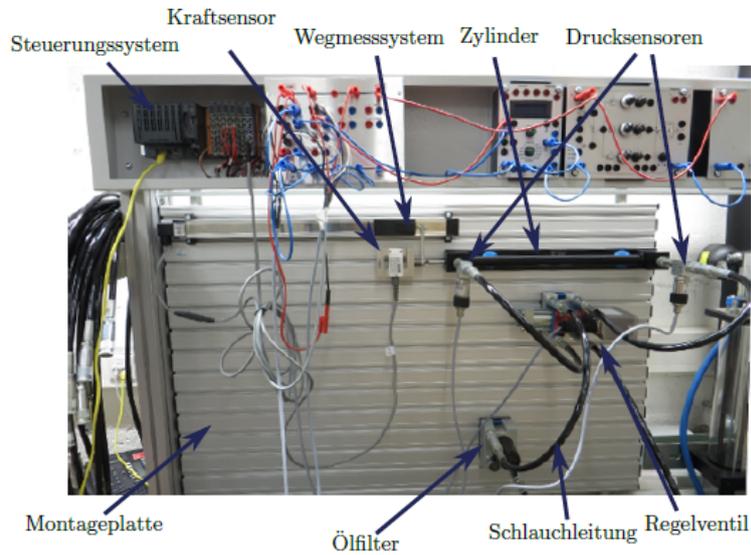


Abbildung 5.1: Aufbau des Hydraulikprüfstands, [14].

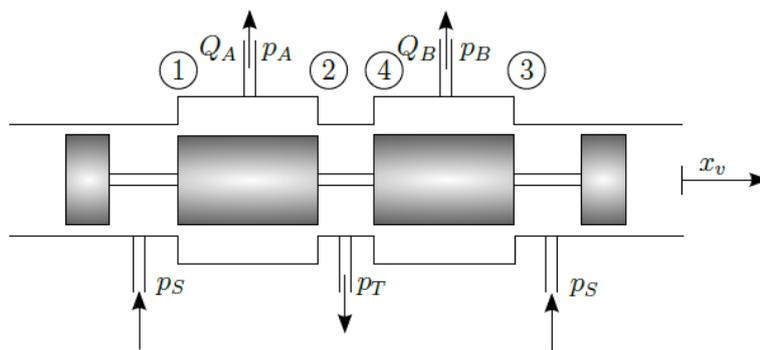


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des Steuerschiebers, [14].

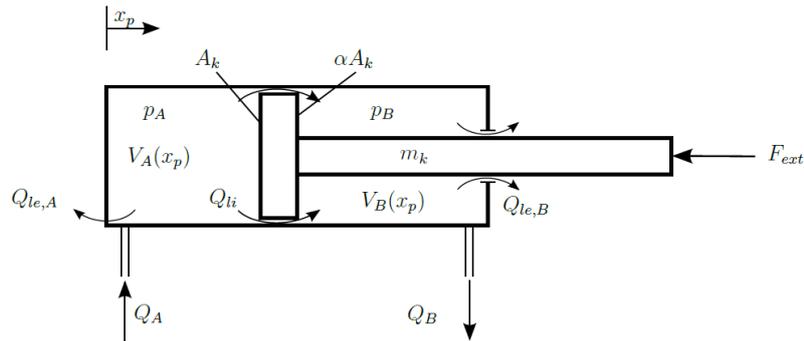


Abbildung 5.3: Differentialzylinder, [14].

mern sind deswegen die daraus resultierenden Kräfte auf die beiden Kolbenseiten unterschiedlich. Die mechanische Bewegung des Kolbens wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$m_t \ddot{x}_P = (p_A - \alpha p_B) A_k - F_r(\dot{x}_P) - F_{ext} . \quad (5.1)$$

Dabei ist x_P die Kolbenposition, p_A der Druck in Kammer A, p_B der Druck in Kammer B, A_k die Kolbenfläche, α das Verhältnis von Ringfläche zu Kolbenfläche, $m_t = m_k + m_{fl,A} + m_{fl,B}$ die Summe aus Kolbenmasse und Masse der beiden Druckflüssigkeiten (die in weiterer Folge vernachlässigt werden), F_r die Reibkraft und F_{ext} eine externe Störkraft. Der Term $F_L = (p_A - \alpha p_B) A_k$ beschreibt die hydraulische Kraft die auf den Kolben wirkt.

Für die Regelung stehen folgende Messwerte zur Verfügung: die zu regelnde Position des Kolbens x_P , die Drücke in den Kammern A und B (p_A, p_B) sowie die eventuell vorhandene Störkraft F_{ext} . Die hydraulische Kraft kann durch Messung der Drücke, wie oben angegeben, errechnet werden.

5.2 Mathematisches Modell

Eine physikalische Modellbildung und eine experimentelle Parameteridentifikation führen auf ein nichtlineares Modell 6.Ordnung. Durch Vernachlässigung der Ventildynamik und der Reibung ergibt sich ein AI-System 4.Ordnung das als Basis für

den Regler- und Beobachterentwurf dient:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{A_k}{m_k}(x_3 - \alpha x_4) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{E'}{V_A(x_1)} [-A_k x_2 - K_{li}(x_3 - x_4)] + \frac{E'}{V_A(x_1)} c_v \sqrt{\xi_3(x_3, u)} u \\
 &= f_3(\mathbf{x}) + g_3(\mathbf{x})u \\
 \dot{x}_4 &= \frac{E'}{V_B(x_1)} [\alpha A_k x_2 + K_{li}(x_3 - x_4)] - \frac{E'}{V_B(x_1)} c_v \sqrt{\xi_4(x_4, u)} u \\
 &= f_4(\mathbf{x}) + g_4(\mathbf{x})u \\
 y &= x_1,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

mit

$$\xi_3(x, u) = \begin{cases} p_s - x & \text{für } u \geq 0 \\ x - p_t & \text{für } u < 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

und

$$\xi_4(x, u) = \begin{cases} x - p_t & \text{für } u \geq 0 \\ p_s - x & \text{für } u < 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Die Zustände dieses Systems sind die Position ($x_1 = x_p$) und die Geschwindigkeit ($x_2 = \dot{x}_p$) des Kolbens sowie der Druck in Kammer A ($x_3 = p_A$) und der Druck in Kammer B ($x_4 = p_B$). Die in der Systembeschreibung (5.2) auftretenden Parameter/Symbole sind in der Tabelle 5.1 beschrieben.

Parameter	Beschreibung
A_k	Kolbenfläche
m_k	Masse des Kolbens
α	Kolbenflächenverhältnis
E'	mittlerer effektiver Kompressionsmodul
K_{li}	Leckagekoeffizient
c_v	mittlerer Durchflussbeiwert
p_s	Druck (Versorgung)
p_t	Druck (Tank, Rücklauf)
$V_A(x_1)$	Volumen in Kammer A
$V_B(x_1)$	Volumen in Kammer B

Tabelle 5.1: Parameter des mathematischen Modells.

5.3 Vorhandene Regler

Zur Positionsregelung stehen zwei Regelungskonzepte basierend auf der Methode der exakten Linearisierung zur Verfügung.

Regler 1 (exakte Linearisierung)

Das System (5.2) ist Eingangs-Ausgangs-linearisierbar, d.h. es kann mittels der Zustandstransformation

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{A_k}{m_k}(x_3 - \alpha x_4) \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

in die Byrnes-Isidori Normalform gebracht werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \alpha(\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{z})u \\ h(\mathbf{z}, u) \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$y = x_1 .$$

Die neuen Zustände \mathbf{z} sind hierbei die Position ($z_1 = x_1$), die Geschwindigkeit ($z_2 = x_2$) und die Beschleunigung ($z_3 = \dot{x}_2$) des Kolbens sowie der Druck in Kammer B ($z_4 = x_4$). Da die interne Dynamik \dot{z}_4 stabil ist, kann ein einfaches Regelgesetz in der Form

$$u = \frac{1}{\beta(\mathbf{z})}(v - \alpha(\mathbf{z})) \quad (5.7)$$

entworfen werden. v ist dabei ein neuer Eingang. Die Übertragungsfunktion von v nach y beträgt somit

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^3} . \quad (5.8)$$

Der neue Eingang wird gewählt als:

$$v = \ddot{r} - k_0(r - y) - k_1(\dot{r} - \dot{y}) - k_2(\ddot{r} - \ddot{y}) . \quad (5.9)$$

Es handelt sich hierbei um einen Zustandsregler. $r(t)$ ist dabei der gewünschte Sollverlauf der Kolbenposition und k_0, k_1 und k_2 sind die Reglerparameter. Für dieses Regelgesetz wird also nicht nur die messbare Position sondern auch die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kolbens benötigt. Bisher wurde hierzu ein Ableitungsfiler (Differenzierer mit Tiefpassverhalten) verwendet. Nun soll dieses Filter durch einen Sliding Mode Beobachter ersetzt werden.

Regler 2 (Kaskadenregelkreis)

Als zweiter Regler steht ein kaskadierter Regelkreis mit innerer Kraftregelung und äußerer Positionsregelung zur Verfügung. Als Basis dient das Teilsystem 2. Ordnung, das den Druckaufbau beschreibt (\dot{x}_3 und \dot{x}_4). Der Ausgang des Systems ist die hydraulische Kraft, die auf den Kolben wirkt:

$$y = A_k(x_3 - \alpha x_4) = F_L . \quad (5.10)$$

Die Stellgröße u kommt in \dot{y} vor:

$$\dot{y} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})u . \quad (5.11)$$

Man kann also wiederum ein Regelgesetz in der Form

$$u = \frac{1}{\beta(\mathbf{x})}(v - \alpha(\mathbf{x})) \quad (5.12)$$

verwenden. Der neue Eingang v wird dabei folgendermaßen gewählt:

$$v = k_0(F_{L,d} - F_L) . \quad (5.13)$$

Die Dynamik des inneren Regelkreis lautet also

$$\dot{F}_L = k_0(F_{L,d} - F_L) . \quad (5.14)$$

$F_{L,d}$ ist dabei die gewünschte Kolbenkraft die wie folgt gewählt wird:

$$F_{L,d} = m_k \ddot{r} - k_v(\dot{x}_p - \dot{r}) - k_p(x_p - r) + F_{ext} + F_r . \quad (5.15)$$

Die Reglerparameter sind k_0 , k_v und k_p . Durch Einsetzen von (5.15) in (5.1) ergibt sich für die Bewegungsgleichung des Kolbens

$$m_k(\ddot{x}_p - \ddot{r}) + k_v(\dot{x}_p - \dot{r}) + k_p(x_p - r) = F_L - F_{L,d} . \quad (5.16)$$

Der Vorteil dieses Konzeptes ist, dass das Regelgesetz keine Informationen über die Beschleunigung des Kolbens benötigt. Auch hier soll das bisherige Ableitungsfilter durch einen Sliding Mode Beobachter ersetzt werden. Desweiteren ist es nötig, die externe Störkraft F_{ext} sowie die Reibkraft F_r zu schätzen, falls kein Kraftsensor zur Verfügung steht. Dies kann ebenfalls im Rahmen des Beobachterentwurfes durchgeführt werden.

5.4 Beobachterentwurf (ohne Störung)

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Anwendung von Sliding Mode Beobachtern am Hydraulikprüfstand ohne externe Störung präsentiert und interpretiert.

Im ersten Regelansatz (exakte Linearisierung) wird die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kolbens benötigt. Zuerst sei angemerkt, dass die Zustände Geschwindigkeit und Beschleunigung nach den Betrachtungen in Kapitel 2.3 beobachtbar sind. Um die nicht messbaren Zustände zu schätzen bietet sich der robuste, exakte Differenzierer aus Kapitel 4.3 an. Um eine Tiefpass-Filterung zu vermeiden, kommt ein zeitdiskret realisierter Differenzierer 2.Ordnung zum Einsatz:

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_{0,k+1} &= \hat{z}_{0,k} - \tau_{smo} 2L^{1/3} |\hat{z}_{0,k} - y_k|^{2/3} \operatorname{sgn}(\hat{z}_{0,k} - y_k) + \tau_{smo} \hat{z}_{1,k} + \frac{\tau_{smo}^2}{2} \hat{z}_{2,k} \\
 \hat{z}_{1,k+1} &= \hat{z}_{1,k} - \tau_{smo} 2.12L^{2/3} |\hat{z}_{0,k} - y_k|^{1/3} \operatorname{sgn}(\hat{z}_{0,k} - y_k) + \tau_{smo} \hat{z}_{2,k} \\
 \hat{z}_{2,k+1} &= \hat{z}_{2,k} - \tau_{smo} 1.1L \operatorname{sgn}(\hat{z}_{0,k} - y_k) .
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

τ_{smo} bezeichnet hierbei die Abtastzeit des Beobachters. Die Abtastzeit des verwendeten Steuerungssystems beträgt $\tau_s = 1$ ms. Nachdem der Beobachter konvergiert hat, gilt $\hat{z}_0 = y = x_p$, $\hat{z}_1 = \dot{y} = \dot{x}_p$ und $\hat{z}_2 = \ddot{y} = \ddot{x}_p$.

Beim Kaskadenregelkreis wird die Beschleunigung im Regelgesetz nicht benötigt. Es reicht also hier ein Differenzierer 1.Ordnung (STO) aus:

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_{0,k+1} &= \hat{z}_{0,k} - \tau_{smo} 1.5L^{1/2} |\hat{z}_{0,k} - y_k|^{1/2} \operatorname{sgn}(\hat{z}_{0,k} - y_k) + \tau_{smo} \hat{z}_{1,k} \\
 \hat{z}_{1,k+1} &= \hat{z}_{1,k} - \tau_{smo} 1.1L \operatorname{sgn}(\hat{z}_{0,k} - y_k) .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Wie in Kapitel 4.3 erklärt, tritt beim Differenzierer immer die nächsthöhere Ableitung als Störung in der Fehlerdynamik auf, in diesem Fall also die zweite Ableitung bzw. die dritte Ableitung der Position.

Anfangswerte

Die Anfangswerte werden als $\hat{z}_{0,0} = y_0$, $\hat{z}_{1,0} = 0$ (und $\hat{z}_{2,0} = 0$) gewählt. Befindet sich das System zu Beginn in Ruhe, so stimmen die Anfangswerte des Beobachters mit den tatsächlichen Anfangswerten überein.

Wahl des Parameters L

Bei der Wahl des Parameters L bzw. bei der Abschätzung der Störung in der Fehlerdynamik kann man wie folgt vorgehen: Unter der Annahme, dass die Regelung funktioniert wird sich die Position des Kolbens annähernd so verhalten

wie gewünscht. Das bedeutet, dass sich auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung annähernd so verhalten wie gewünscht. Diese Annahme rechtfertigt die Abschätzung der Störung mit $|r(t)^{(2)}|_{max}$ bzw. $|r(t)^{(3)}|_{max}$ und L kann z.B. gewählt werden als $L = 1.5|r(t)^{(2)}|_{max}$ bzw. $L = 1.5|r(t)^{(3)}|_{max}$ (es werden hier glatte Führungssignale $r(t)$ vorausgesetzt).

Vergleich mit dem Ableitungsfilter

Um den Qualitätsunterschied zwischen der Zustandsschätzung mittels Sliding Mode Beobachter und dem bisher verwendeten linearen Ableitungsfilter zu verdeutlichen, ist in Abbildung 5.4 die geschätzte Geschwindigkeit und Beschleunigung für beide Varianten dargestellt. Als Führungssignal wurde das glatte Signal

$$r(t) = \frac{0.075}{\pi} \sin [2\pi(t - t_0) - \pi] + 0.15(t - t_0) + 0.03 \quad (5.19)$$

vorgegeben. Dieses Führungssignal entspricht einem Positionswechsel von 30 mm auf 180 mm innerhalb einer Sekunde. Die Abtastzeit des Beobachters entspricht jener der Regelung, d.h. $\tau_{smo} = \tau_s = 1$ ms. Neben dem Vorteil, dass der Sliding Mode Beobachter frequenzunabhängig ist, besitzt die Zustandsschätzung mittels Ableitungsfilter auch den Nachteil, dass der Vorgang in zwei Schritten erfolgt: Das bereits gefilterte und fehlerbehaftete Geschwindigkeitssignal wird ein weiteres Mal gefiltert um die Beschleunigung zu ermitteln. Durch dieses schrittweise Vorgehen wird der Fehler mit jedem Schritt größer.

Regelqualität

In Abbildung 5.5 ist das Regelergebnis bei beiden Regelkonzepten für die Trajektorie (5.19) als Führungssignal dargestellt. Der maximale Regelfehler beträgt bei der exakten Linearisierung 1.15 mm und beim Kaskadenregelkreis 1.68 mm. Unter Verwendung der bisherigen numerischen Ableitungsbildung zur Zustandsschätzung beliefen sich die maximalen Regelfehler auf 2.69 mm bzw. 3.42 mm [14]. In Abbildung 5.6 sind die geschätzten Zustände und die Regelqualität bei einem sinusförmigem Führungssignal mit einer Amplitude von 10 mm und einer Frequenz von 0.5 Hz zu sehen (exakte Linearisierung).

Erhöhung der Abtastzeit

Bezüglich der Qualität der Zustandsschätzungen kann der Positionsfehler $e_1 = \hat{x}_p - x_p$ analysiert werden. Zur Untersuchung der Abhängigkeit des Fehlers e_1 von der Abtastzeit wird die Abtastzeit des Beobachters τ_{smo} ausgehend von $\tau_{smo} = \tau_s = 1$ ms erhöht bis auf $\tau_{smo} = 30$ ms. Die Regelung erhält also alle τ_{smo} Sekunden einen neuen Wert für die geschätzte Geschwindigkeit und Beschleunigung. Als

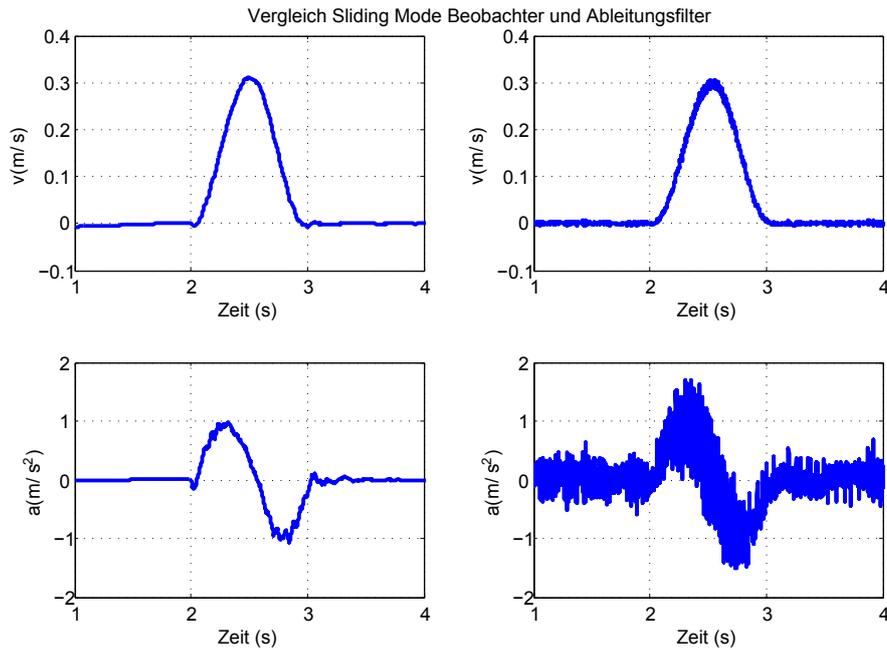


Abbildung 5.4: Vergleich Sliding Mode Beobachter (links) und numerische Ableitung (rechts).

Führungssignal wurde wiederum die Trajektorie (5.19) verwendet. Die Versuche wurden für den Kaskadenregelkreis und für die zwei Beobachter (5.17) und (5.18) durchgeführt. Laut Theorie sollte der Fehler e_1 beim Beobachter (5.18) in der Größenordnung $O(\tau^2)$ liegen und beim Beobachter (5.17) in der Größenordnung $O(\tau^3)$. In Abbildung 5.7 ist allerdings zu erkennen, dass diese theoretischen Verläufe in der Praxis nicht auftreten. Diese Tatsache hat mehrere Ursachen:

1. in der Praxis tritt ein Messrauschen auf und
2. die Auflösung des zur Positionsmessung eingesetzten Sensors ist zu gering. In Kapitel 4.5 wurde bereits bei den Simulationen festgestellt, dass selbst bei Verwendung des Zahlenformats `double` und ohne Messrauschen die theoretischen Verläufe nur in einem bestimmten Intervall für die Abtastzeit erreicht werden.

Auch bezüglich der Regelgüte ist kein Unterschied zwischen der Verwendung des Beobachters (5.18) und des Beobachters (5.17) beim Kaskadenregelkreis zu erkennen. Die Qualität der Regelung nimmt bei beiden Regelgesetzen erst dann signifikant ab, wenn die Abtastzeit des Beobachters τ_{smo} 50 ms oder mehr beträgt.

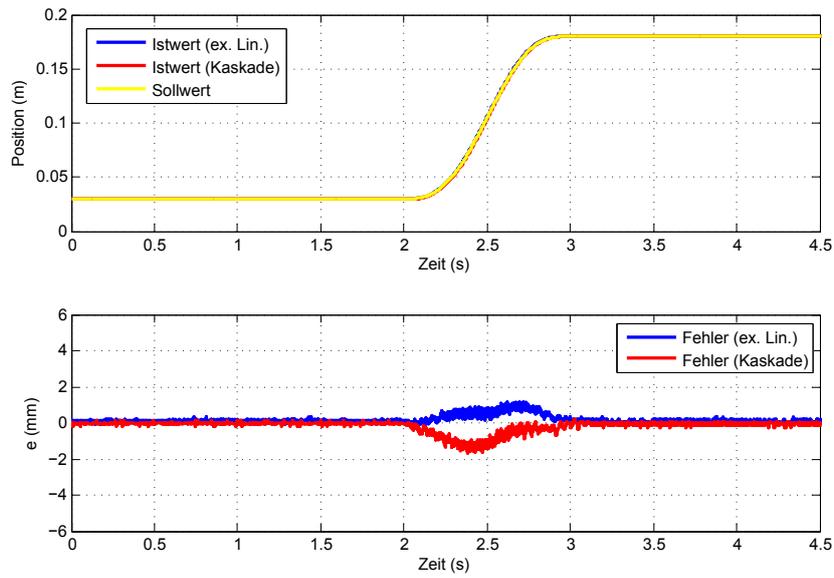


Abbildung 5.5: Trajektorienfolgeregelung.

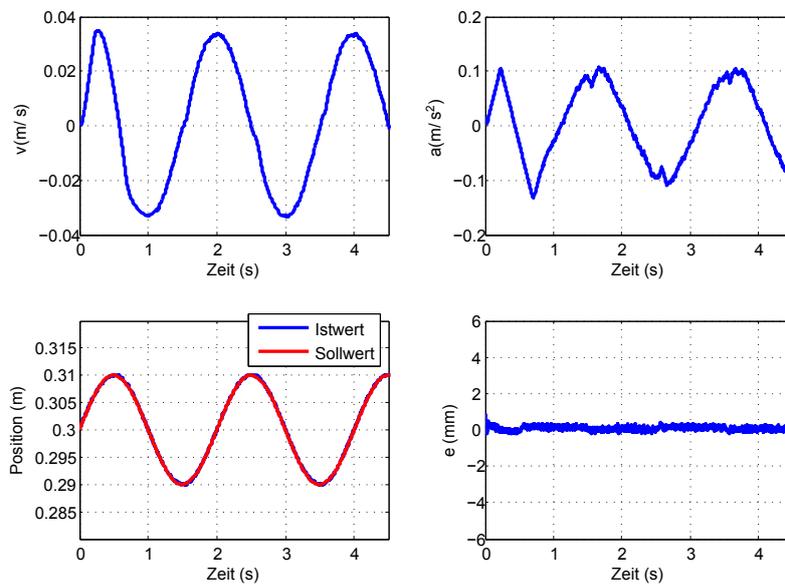


Abbildung 5.6: Zustandsschätzungen und Regelqualität bei sinusförmigem Führungssignal.

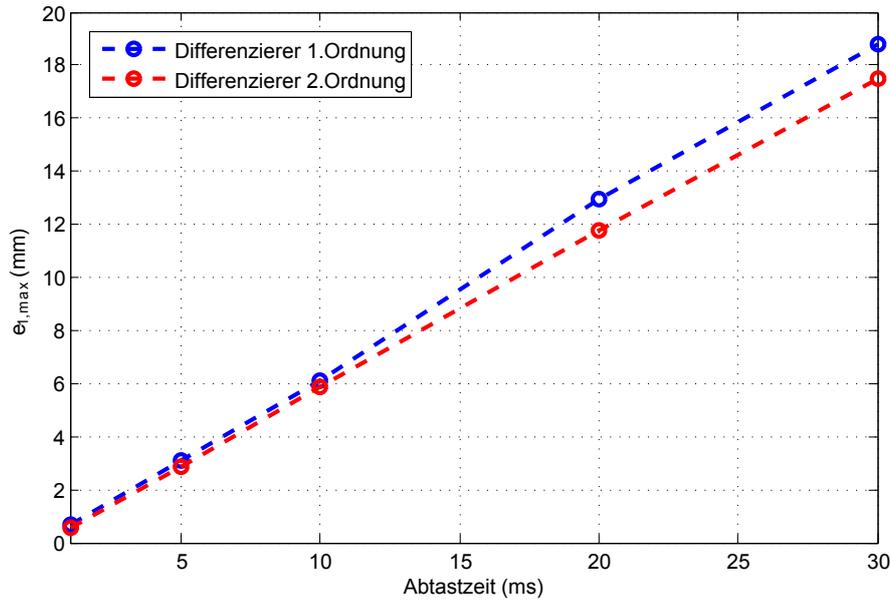


Abbildung 5.7: Fehler $|e_1|_{max}$ für verschiedene Abtastzeiten und Beobachterordnungen.

5.5 Störschätzung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Anwendung von Sliding Mode Beobachtern am Hydraulikprüfstand mit einer externen Störung präsentiert. Die Störung wird durch einen weiteren Hydraulikzylinder erzeugt, der über die Kraftmesszelle mit dem Arbeitszylinder verbunden ist. Die Versuche wurden mit der Kaskadenregelkreisstruktur durchgeführt.

Schätzung der Stör- und Reibkraft

Die Bewegungsgleichung des Kolbens lautet

$$m_k \ddot{x}_P = (p_A - \alpha p_B) A_k - F_r - F_{ext} . \quad (5.20)$$

Bisher wurde F_{ext} mit einem Kraftsensor gemessen. Steht kein Kraftsensor zur Verfügung kann die Summe aus Störkraft und Reibkraft mit einem Sliding Mode Beobachter geschätzt werden. Als Basis für den Beobachterentwurf dienen folgende

Differentialgleichungen, die das mechanische Teilsystem beschreiben:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_k} (F_L - F_r - F_{ext}) ,\end{aligned}\tag{5.21}$$

mit $F_L = (p_A - \alpha p_B)A_k$. Als Beobachter dient nun der STO mit folgender Beobachterdynamik:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -1.5\sqrt{L}\sqrt{|e_1|}\operatorname{sgn}(e_1) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -1.1L\operatorname{sgn}(e_1) + \frac{1}{m_k}F_L ,\end{aligned}\tag{5.22}$$

mit $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$. Daraus ergibt sich die Fehlerdynamik

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -1.5\sqrt{L}\sqrt{|e_1|}\operatorname{sgn}(e_1) + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -1.1L\operatorname{sgn}(e_1) + \frac{1}{m_k} (F_{ext} + F_r) .\end{aligned}\tag{5.23}$$

Wählt man nun $L > |\frac{1}{m_k}(F_{ext} + F_r)|$ so konvergiert der Beobachter in endlicher Zeit und die Störkraft und Reibung kann durch Tiefpassfilterung rekonstruiert werden:

$$\hat{F}_{ext} + \hat{F}_r = 1.1Lm_k[\operatorname{sgn}(e_1)]_{eq} .\tag{5.24}$$

Die maximale Störkraft liegt unter 1000 N, daher wurde $L = 1800$ gewählt. Der Beobachter (5.22) wird, wie gewohnt, zeitdiskret mit dem expliziten Euler-Verfahren implementiert. Zur Filterung kommt ein Tiefpassfilter zweiter Ordnung zum Einsatz. Die Übertragungsfunktion eines zeitkontinuierlichen Tiefpasses zweiter Ordnung lautet

$$F(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_g} + 1)^2} .\tag{5.25}$$

Für eine zeitdiskrete Implementierung kann die Identität $z = e^{s\tau}$ angenähert werden mit

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{\tau}\tag{5.26}$$

und es ergibt sich für das zeitdiskrete Filter folgende Übertragungsfunktion:

$$F(z) = \frac{\tau^2}{(\tau + \frac{1}{\omega_g})^2 - 2\frac{1}{\omega_g}(\tau + \frac{1}{\omega_g})z^{-1} + (\frac{1}{\omega_g})^2 z^{-2}} .\tag{5.27}$$

Die Grenzfrequenz ω_g muss dabei so gewählt werden, dass einerseits das hochfrequente Rattern möglichst gut unterdrückt wird, andererseits das eigentliche Signal nicht zu stark gedämpft wird und sich die Phasenverschiebung in Grenzen hält.

Anmerkung: Theoretisch wäre es möglich durch Anwendung des *extended order approach* eine Tiefpassfilterung zu vermeiden, d.h. die Störkraft ohne Tiefpassfilterung zu schätzen. In der Beobachterdynamik träte dann der Term $\dot{F}_r + \dot{F}_{ext}$ als Störung auf und der Parameter L müsste groß genug gewählt werden um diese Störung zu dominieren. Da sich der Term $\dot{F}_r + \dot{F}_{ext}$ jedoch nur schwer abschätzen lässt und auch sprunghafte Störungen erlaubt sein sollen kommt die Idee des *extended order approach* hier nicht zum Einsatz.

Schätzung der Geschwindigkeit

Durch den hohen Wert des Parameters L beim Beobachter (5.22) ist die Schätzung \hat{x}_2 für die Geschwindigkeit relativ ungenau (siehe auch Kapitel 4.4). Daher ist es sinnvoll, die Geschwindigkeit separat mit dem Beobachter (5.17) zu schätzen.

Ergebnisse

In der Abbildung 5.9 ist das Ergebnis der Störschätzung zu sehen. Die Abtastzeit des Beobachters beträgt $\tau_{smo} = \tau_s = 1$ ms. Als Störung wurde ein rechteckförmiges Signal vorgegeben. Oben ist das hochfrequente Rattern $1.1Lm_k \operatorname{sgn}(e_1)$ zu sehen, unten das tiefpassgefilterte Rattern und zum Vergleich das gemessene Störsignal. In Abbildung 5.10 ist das Ergebnis der Störschätzung für ein sinusförmiges, bzw. trapezförmiges Störsignal zu sehen. Die Qualität der Störschätzung ist gut genug, dass für die Regelung der Messwert der Störkraft durch die Schätzung ersetzt werden kann. In Abbildung 5.8 ist das Regelergebnis bei sich sprunghaft ändernder Störung zu sehen ($r(t) = 0.1$ m). Eine Erhöhung der Abtastzeit hat zur Folge,

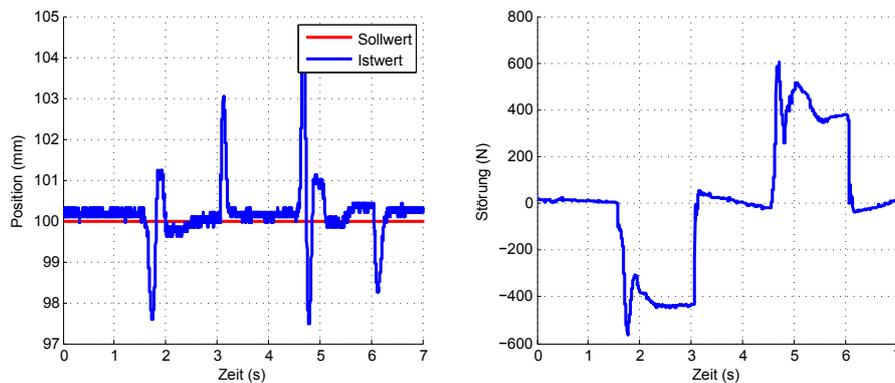


Abbildung 5.8: Regelung bei Verwendung der geschätzten Störkraft im Regelgesetz.

dass es zunehmend schwieriger wird, die Grenzfrequenz des Tiefpasses geeignet zu

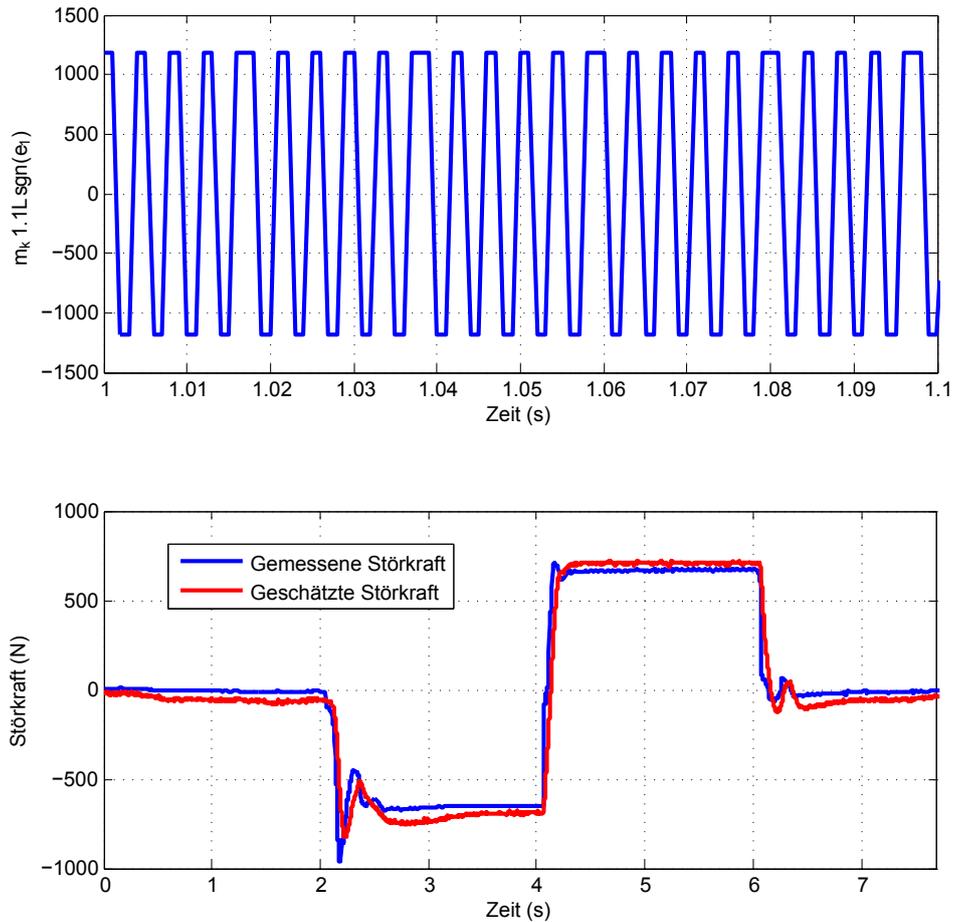


Abbildung 5.9: Hochfrequentes Rattern (oben) und Störschätzung (unten).

wählen, da sich die Frequenz des Ratterns dem interessierenden Frequenzbereich immer weiter nähert. Prinzipiell kommt es dann bei der Wahl von ω_g zu einem Trade-off zwischen Unterdrückung des Ratterns und Phasenverschiebung des rekonstruierten Signals (siehe Abbildung 5.11). Durch Entwurf eines komplexeren Tiefpassfilters könnten eventuell bessere Ergebnisse erzielt werden, es ist jedoch in diesem Fall einfacher die Abtastzeit klein genug zu wählen und ein einfaches Tiefpassfilter zu verwenden.

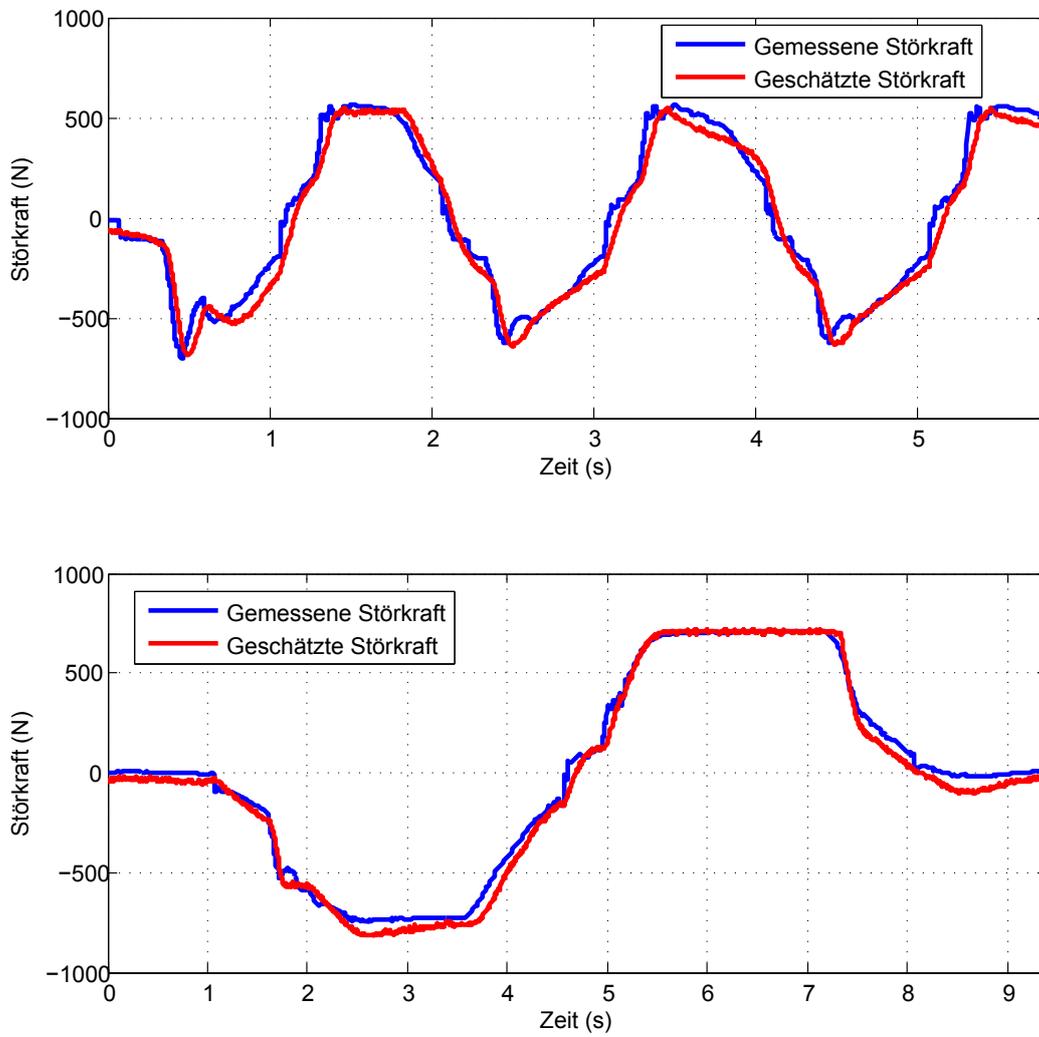


Abbildung 5.10: Schätzung der Störkraft.

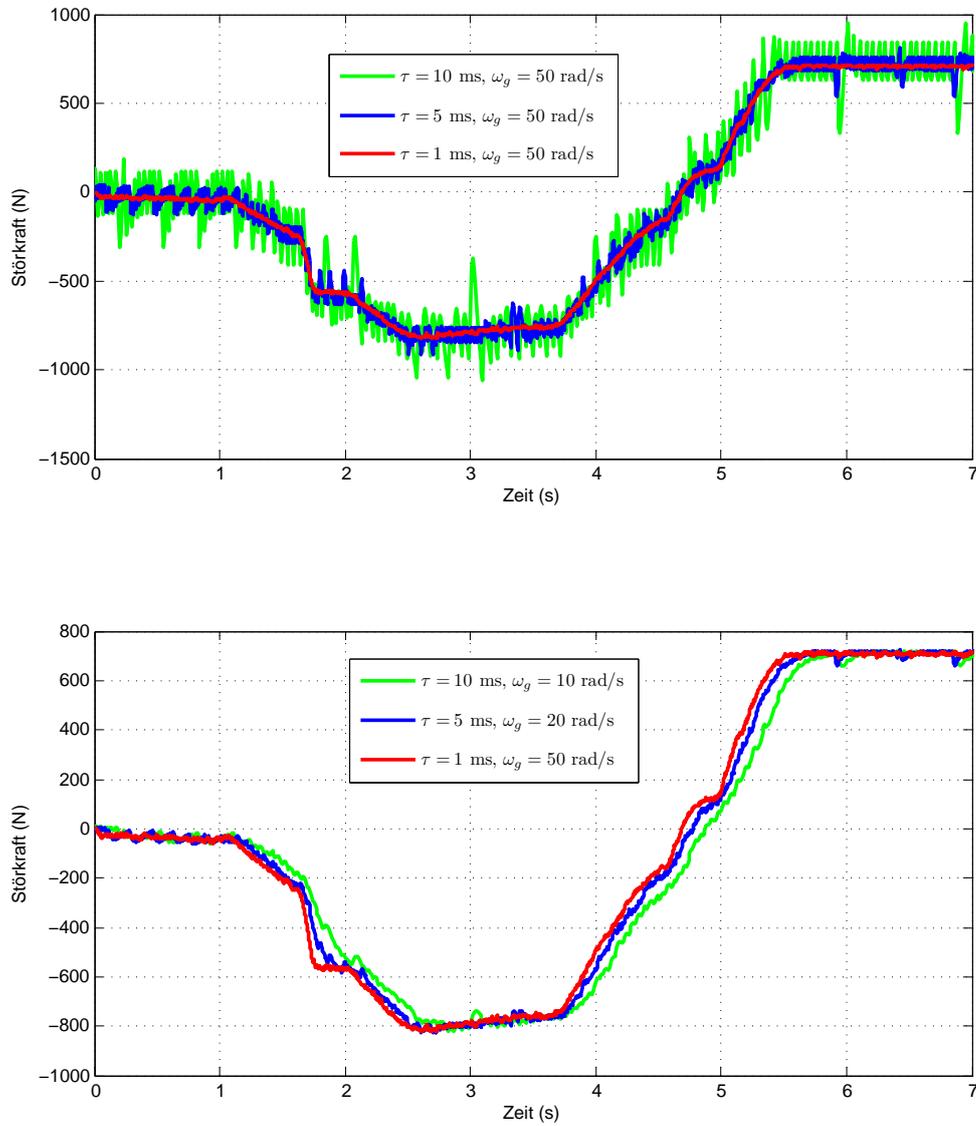


Abbildung 5.11: Störschätzung für verschiedene Abtastzeiten.

5.6 Alternativer Ansatz zur Zustands- und Störschätzung

Zum Vergleich der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Vorgehensweise kommt in diesem Abschnitt ein alternativer Ansatz zur Zustandsschätzung und Störrekonstruktion zum Einsatz, der in [19] und [1] besprochen wird. Als Basis dient wiederum folgende Systembeschreibung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_k} (F_L - F_r - F_{ext}) \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (5.28)$$

Mit den Abkürzungen $u = F_L$ und $w = -F_{ext} - F_r$ ergibt sich folgende Systembeschreibung in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_k} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_k} \end{pmatrix} w \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}^\top} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Voraussetzung für den folgenden Beobachterentwurf ist, dass das betrachtete System *stark beobachtbar* ist. Das bedeutet, dass das System beobachtbar ist und der relative Grad der Ausgangsgröße bezüglich der Störung der Systemordnung entspricht. Der Beobachterentwurf gliedert sich nun in zwei Teile:

1. Zuerst kommt ein Luenberger Beobachter zum Einsatz der den Zweck hat den Beobachterfehler \mathbf{e} zu beschränken. Ein Luenberger Beobachter besteht aus einer Kopie des Systems (5.29) und einem Korrekturterm:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{b}}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^\top \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Daraus ergibt sich folgende Fehlerdynamik $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{b}}\mathbf{c}^\top)\mathbf{e} + \mathbf{b}w. \quad (5.31)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{b}}$ wird dabei so gewählt dass die Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{b}}\mathbf{c}^\top$ eine Hurwitzmatrix ist. Es ist somit sichergestellt dass der Fehler \mathbf{e} beschränkt ist, d.h.

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq e^+ \quad \forall t > T_e. \quad (5.32)$$

Der einfache Luenberger Beobachter kann den Beobachterfehler allerdings nicht zu Null machen! Durch Berechnung der Übertragungsfunktion von w nach e_1 bzw. von w nach e_2 können die im eingeschwungenen Zustand verbleibenden Fehler abgeschätzt werden.

2. Anschließend wird der verbleibende Beobachterfehler e_1 mit einem robusten, exakten Differenzierer so oft wie nötig differenziert um aus e_1 und den Ableitungen von e_1 den kompletten Fehlervektor zu rekonstruieren. Daraus kann dann der Zustand \mathbf{x} geschätzt und die unbekannte Störung w rekonstruiert werden. Dazu wird das System (5.31), das den Fehler beschreibt, zunächst mittels der Zustandstransformation

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{e}_0 \quad (5.33)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix}^{-1} \quad (5.34)$$

in eine kanonische Form gebracht:

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_0 + \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{b} w, \quad (5.35)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} w \quad (5.36)$$

Die Transformationsmatrix $\tilde{\mathbf{P}}$ entspricht der Inversen der Beobachtbarkeitsmatrix und man sagt, dass das System (5.36) in Beobachtbarkeitsnormalform vorliegt. Um den Fehlervektor \mathbf{e}_0 zu schätzen ist ein Differenzierer 1. Ordnung nötig. Aus dem Fehlervektor \mathbf{e}_0 kann mittels der Beziehung (5.33) der originale Fehlervektor \mathbf{e} berechnet werden. Daraus lässt sich dann der Systemzustand exakt berechnen:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}. \quad (5.37)$$

Um zusätzlich die Störung w zu schätzen, ist ein Differenzierer 2. Ordnung nötig. Aus der Kenntnis von $e_{0,1}$, $\dot{e}_{0,1} = e_{0,2}$ und $\ddot{e}_{0,1} = \dot{e}_{0,2}$ kann aus der letzten Zeile von (5.36) die Störung w berechnet werden:

$$w = f(\mathbf{e}_0, \dot{\mathbf{e}}_0) = \frac{1}{k} (\ddot{e}_{0,1} + \alpha_1 \dot{e}_{0,1} + \alpha_0 e_{0,1}). \quad (5.38)$$

Die in der Fehlerdynamik des Differenzierers auftretende Störung beträgt hierbei

$$e_1^{(3)} = -\alpha_0 \dot{e}_{0,1} - \alpha_1 \dot{e}_{0,2} + k \dot{w}, \quad (5.39)$$

und der Parameter L muss groß genug gewählt werden um diese Störung zu dominieren. Eine weitere Voraussetzung für dieses Verfahren ist also, dass die Störung w glatt ist.

Der Koppelplan dieses Beobachters ist in Abbildung 5.12 dargestellt.

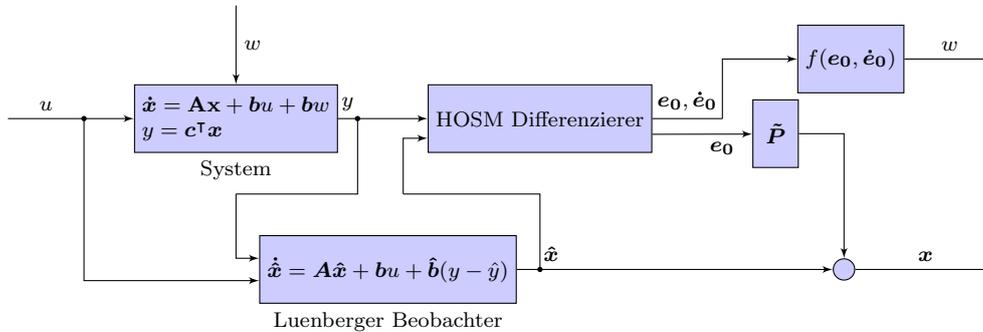


Abbildung 5.12: Zustandsschätzung und Rekonstruktion unbekannter Eingänge für stark beobachtbare LZI-Systeme.

Theoretisch ergibt sich bei diesem Verfahren eine Genauigkeit von $O(\tau^2)$ für die Zustandsschätzung und eine Genauigkeit von $O(\tau)$ für die Störschätzung.

Der Luenberger Beobachter muss für eine praktische Implementierung zeitdiskret entworfen werden. Dazu wird das System (5.29) zuerst in den z -Bereich transformiert. Dann wird ein zeitdiskreter Luenberger Beobachter für das zeitdiskrete System entworfen. Der Vektor $\hat{\mathbf{b}}$ muss dabei so gewählt werden, dass die Eigenwerte der Systemmatrix der zeitdiskreten Fehlerdynamik im Inneren des Einheitskreises liegen. Der Differenzierer wird wie gewohnt zeitdiskret realisiert.

Die Funktionsweise des Beobachters kann am Besten anhand einer sinusförmigen Störung illustriert werden. Als Störung wird ein Sinus mit einer Amplitude von 600 N und einer Frequenz von 0.5 Hz vorgegeben. Die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen Luenberger Beobachters werden mit $\lambda_{1,2} = -10$ gewählt. Demzufolge liegen die Eigenwerte des zeitdiskreten Luenberger Beobachters bei $z_{1,2} = e^{\lambda_{1,2}\tau} = 0.99$ für $\tau = 1$ ms. In Abbildung 5.14 oben ist der Restfehler e_1 nach dem Luenberger Beobachter dargestellt. Darunter ist das Ergebnis des Sliding Mode Differenzierers zu sehen. Der verbleibende Fehler kann einfach analytisch nachvollzogen werden. Die Übertragungsfunktion $w \rightarrow e_1$ des Systems (5.31) lautet in diesem Fall

$$G(s) = \frac{e_1(s)}{w(s)} = \frac{1.667}{s^2 + 20s + 100}. \quad (5.40)$$

Für e_1 ergibt sich im eingeschwungenen Zustand ein sinusförmiger Verlauf mit gleicher Frequenz wie w und einer Amplitude von

$$600 \cdot |G(j \cdot 2\pi \cdot 0.5)| = 600 \cdot 0.0152 = 9.1035.$$

Da die Störung allerdings kein glatter Sinus ist, treten in e_1 auch Anteile höherer Frequenz auf. Dies hat zur Folge dass die Wahl des Parameters L des nachfolgenden Differenzierers schwierig ist. Bei einem glatten Sinus könnte man L einfach mit $L = 9.1035 \cdot (2\pi \cdot 0.5)^3 \approx 282$ abschätzen. Durch die höherfrequenten Anteile in e_1 muss der Wert für L allerdings deutlich höher gewählt werden. Bei diesem Beispiel wurde $L = 4000$ gewählt.

In Abbildung 5.13 ist die Position und die geschätzte Position des Zylinders zu sehen. In Abbildung 5.14 unten ist die tatsächliche und geschätzte Störkraft dargestellt. Die Qualität der Störschätzung ist vergleichbar mit dem im vorherigen Abschnitt besprochenen Super-Twisting Beobachter. Der Vorteil ist, dass bei diesem Ansatz keine Tiefpassfilterung nötig ist. Nachteilig ist, dass der Parameter L schwierig zu wählen ist und für jede Störkraft neu abgeschätzt werden muss.

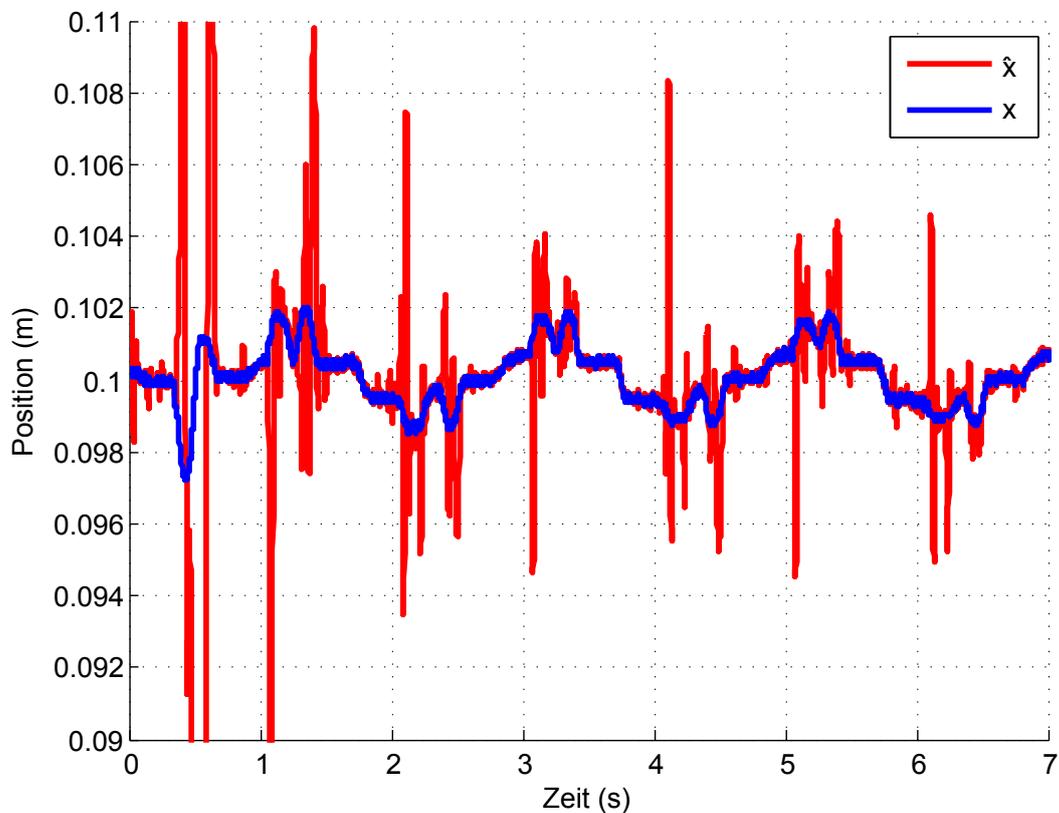


Abbildung 5.13: Schätzung der Position.

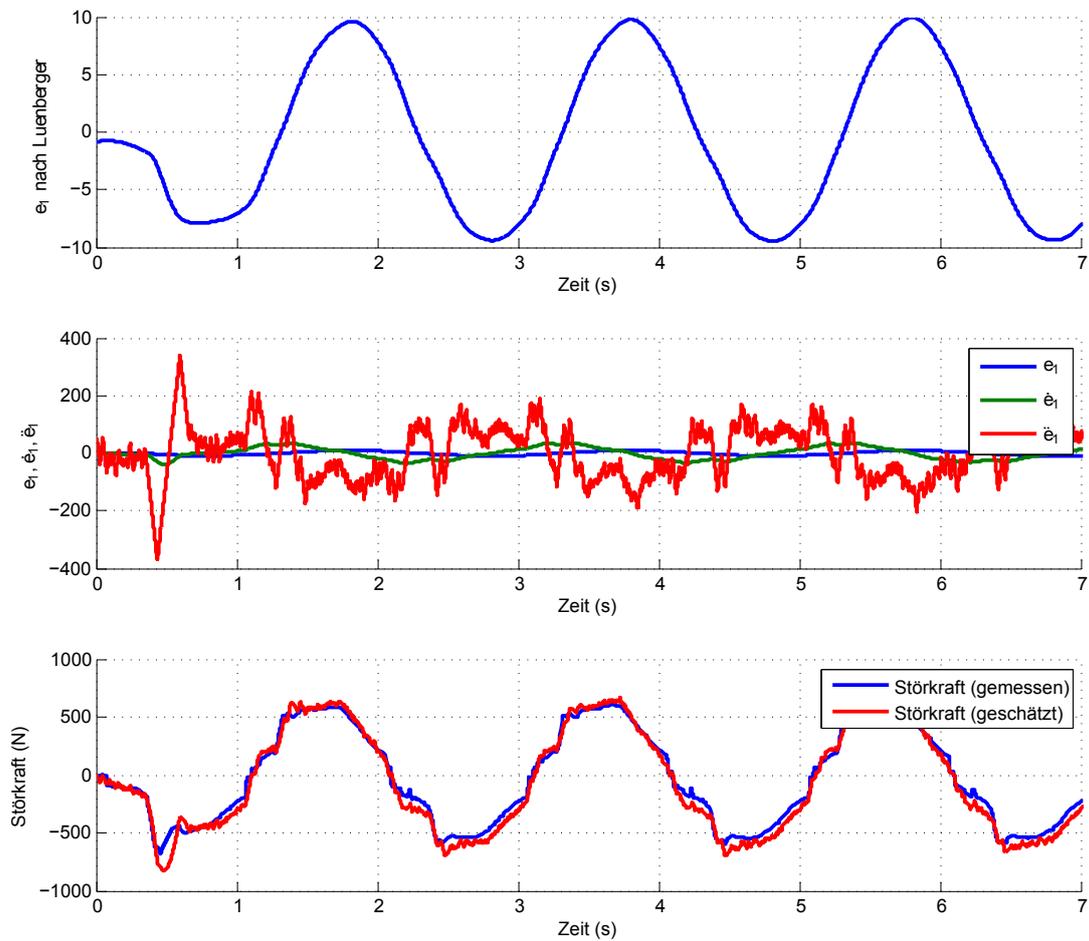


Abbildung 5.14: Oben: Restfehler e_1 nach dem Luenberger Beobachter. Mitte: Ergebnis des Differenzierers. Unten: Störschätzung.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Sliding Mode Beobachter und deren zeitdiskrete Realisierung besprochen. Nach der theoretischen Vorstellung der Konzepte, wurden verschiedene Sliding Mode Beobachter in der Praxis an einem Hydraulikprüfstand eingesetzt um die bestehende Methode zur Zustandsschätzung zu verbessern und um das Gesamtsystem um eine Schätzung einer Störkraft zu erweitern. Für das störfreie System wurden die Zustände mit dem robusten, exakten Differenzierer geschätzt. Bei vorhandener Störung wurden zwei Konzepte eingesetzt: einerseits der Super-Twisting Beobachter, andererseits eine Kombination aus klassischem Luenberger Beobachter und robustem, exaktem Differenzierer. Dabei hat sich gezeigt, dass die Verfahren prinzipiell zwar gut funktionieren und eine Verbesserung darstellen, die theoretischen Abhängigkeiten der Zustandsschätzungen von der Abtastzeit in der Praxis aber nicht nachweisbar sind. Diese lassen sich nur unter idealen Bedingungen (Simulationen) zeigen. Zusätzlich wurde festgestellt, dass sich die Wahl der Beobachterparameter in der Praxis durchaus als schwierig erweisen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] ALEJANDRA FERREIRA, FRANCISCO JAVIER BEJARANO UND LEONID FRIDMAN: *Robust Control with exact uncertainties compensation: with or without chattering?* In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 19, No. 5, Seiten 969–975, August 2010.
- [2] ALEJANDRO DAVILAY, JAIME A. MORENO UND LEONID FRIDMAN: *Optimal Lyapunov function selection for reaching time estimation of supertwisting Algorithm.* In: *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Seiten 8405–8410, Shanghai, China, Dezember 2009.
- [3] ARIE LEVANT: *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control.* In: *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, Seiten 1247–1263, 1993.
- [4] ARIE LEVANT: *Robust exact differentiation via sliding mode technique.* In: *Automatica*, Vol. 34, No. 3, Seiten 379–384, 1998.
- [5] ARIE LEVANT: *Higher order Sliding Modes and arbitrary-order exact robust Differentiation.* In: *Proceedings of the European Conference*, 2001.
- [6] ARIE LEVANT UND MIKI LIVNE: *Proper discretization of homogeneous differentiators.* In: *Automatica*, Vol. 50, No. 8, Seiten 2007–2014, August 2014.
- [7] EMMANUEL CRUZ-ZAVALA, JAIME A. MORENO UND LEONID FRIDMAN: *Uniform Second-Order Sliding Mode Observer for Mechanical Systems.* In: *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, Seiten 14–19, 26.-28. Juni 2010.
- [8] HOCINE IMINE, LEONID FRIDMAN, HASSAN SHRAIM UND MOHAMED DJEMAI: *Sliding Mode Based Analysis and Identification of Vehicle Dynamics.* Springer, 2011.
- [9] JAIME A. MORENO: *A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers.* In: *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2856–2861, Cancun, Mexico, Dezember 2008.

- [10] JAIME A. MORENO: *On Discontinuous Observers for Second Order Systems: Properties, Analysis and Design*. In: *Advances in Sliding Mode Control - Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2013.
- [11] JORGE DAVILA, LEONID FRIDMAN, UND ARIE LEVANT: *Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, Seiten 1785–1789, November 2005.
- [12] JÜRGEN ADAMY: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Springer, 2. Auflage, 2014.
- [13] MARCO TULLIO ANGULO, JAIME A. MORENO UND LEONID FRIDMAN: *An Exact and Uniformly Convergent Arbitrary Order Differentiator*. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Seiten 7629–7634, 12.-15. Dezember 2011.
- [14] MARKUS TRANNINGER: *Modellbildung, Simulation und Regelung eines hydraulischen Antriebes*. Masterarbeit, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz, Dezember 2014.
- [15] MARTIN HORN UND NICOLAOS DOURDOUMAS: *Regelungstechnik*. Pearson Studium, 2004.
- [16] TOM T. HARTLEY, GUY O. BEALE UND GERALD COOK: *Multirate Input Sampling for Real-Time Runge-Kutta Simulation*. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 34, No. 3, Seiten 387–390, August 1987.
- [17] ULRICH SAILER: *Nutzfahrzeug-Echtzeitsimulation auf Parallelrechnern mit Hardware-in-the-Loop*. expert Verlag, 1997.
- [18] WEIBING GAO UND JAMES C. HUNG: *Variable structure control of nonlinear systems: a new approach*. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, Seiten 45–55, Februar 1993.
- [19] YURI SHTESSEL, CHRISTOPHER EDWARDS, LEONID FRIDMAN UND ARIE LEVANT: *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, 2013.