

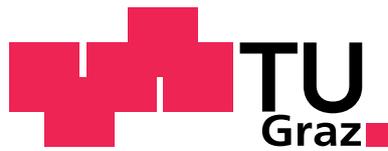
Matthias August Franz GSELL

Direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieur

Masterstudium Technomathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Olaf STEINBACH

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im März 2013

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....

(Unterschrift)

Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit zum Thema "Direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen" wurde im Rahmen meines Studiums der Technischen Mathematik an der Technischen Universität Graz verfasst.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Steinbach und bei Herrn Dr. Maier von Gridlab für die Bereitstellung dieses interessanten Themas bedanken. Weiters bedanke ich mich dafür, dass Herr Steinbach immer Zeit für mich gefunden hat, trotz seines ausgelasteten Terminkalenders.

Ein weiterer Dank gilt Herrn Martin Neumüller, dessen Sourcecode ich für die numerische Umsetzung der Simulation verwenden durfte. Bedanken möchte ich mich aber auch dafür, dass Herr Neumüller mir bei jeglichen Fragen zur Implementierung zur Seite gestanden hat.

Besonders bedanken möchte ich mich aber bei meiner Familie und bei meinen Freunden, auf deren Unterstützung ich während meiner gesamten Studienzeit zählen konnte.

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist die direkte Berechnung von turbulenten Strömungen inkompressibler Fluide mit der Methode der Finiten Elemente. Nach einer Einführung in die Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen werden kurz diverse Funktionenräume sowie die zugehörigen Normen und einige Eigenschaften wiederholt. Danach wird die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems der stationären sowie der instationären Navier-Stokes-Gleichungen diskutiert. Im Anschluss werden Strategien zur Diskretisierung und Linearisierung des Variationsproblems behandelt. Schlussendlich werden noch Beispiele von Rechnungen in zwei und drei Raumdimensionen angegeben.

The aim of this work is to compute the turbulent flow of incompressible fluids by using finite element methods. After an introduction to the derivation of the Navier-Stokes equations, some function spaces, their norms and some properties are recalled. After that, the unique solvability of the variational problem belonging to the stationary and to the non-stationary Navier-Stokes equations is discussed. In the next section, some discretization and linearization strategies are given. Finally, some numerical examples in two and three space dimensions are presented.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	11
1 Modellierung	13
1.1 Grundlagen	13
1.2 Erhaltungssätze	15
1.2.1 Massenerhaltung	15
1.2.2 Impulserhaltung	16
1.2.3 Energieerhaltung	18
1.3 Navier–Stokes–Gleichungen	20
1.3.1 Wärmeleitende ideale Gase	21
1.3.2 Inkompressible viskose Fluide	22
2 Analysis	25
2.1 Grundlagen	25
2.2 Funktionen–Räume und Normen	26
2.2.1 C^k –Räume	26
2.2.2 Lebesgue–Räume	28
2.2.3 Sobolev–Räume	30
2.3 Das gemischte Variationsproblem	38
2.4 Stationäre Navier–Stokes–Gleichungen	41
2.4.1 Variationsformulierung	42
2.4.2 inf–sup–Bedingung	45
2.4.3 Lösbarkeit und Eindeutigkeit des Variationsproblems	47
2.5 Instationäre Navier–Stokes–Gleichungen	50
2.5.1 Variationsformulierung	51
2.5.2 Lösbarkeit und Eindeutigkeit des Variationsproblems	52
3 Diskretisierung	59
3.1 Zeitdiskretisierung	59
3.2 Linearisierung	61
3.2.1 Allgemeines Newton–Verfahren	61
3.2.2 Newton–Verfahren für die Navier–Stokes–Gleichungen	62
3.3 Finite–Elemente–Methode	64
3.4 Assemblierung	68
3.4.1 Das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$	69

Inhaltsverzeichnis

3.4.2	Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$	72
3.4.3	Die Bilinearform $c(\cdot, \hat{\mathbf{u}}_h, \cdot)$	75
3.4.4	Die Bilinearform $c(\hat{\mathbf{u}}_h, \cdot, \cdot)$	79
3.4.5	Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$	82
3.4.6	Die rechte Seite	84
3.4.7	Das äquivalente lineare Gleichungssystem	86
3.5	Lösungsalgorithmus	87
4	Partikel-Tracing	91
5	Numerische Beispiele	95
5.1	Beispiel in zwei Raumdimensionen	97
5.1.1	Beispiel 1	97
5.1.2	Beispiel 2	102
5.1.2.1	Partikel-Tracing	106
5.2	Beispiel in drei Raumdimensionen	109

Einleitung

In dieser Arbeit werden turbulente Strömungen von inkompressiblen Fluiden betrachtet. Als Grundlage dafür dienen die Navier–Stokes–Gleichungen. Die Berechnung von turbulenten Strömungen ist jedoch sehr aufwendig, da für die Erfassung aller Turbulenzen eine sehr feine Diskretisierung des Rechengebietes gewählt werden muss.

Um diese sehr feine Diskretisierung zu umgehen, behilft man sich mit sogenannten Turbulenzmodellen. Beispiele für solche Turbulenzmodelle sind das k – ε –Modell, das k – ω –Modell oder zum Beispiel das k – ζ – f –Modell. Dies ist jedoch nur eine Auswahl von Modellen. Mehr über Turbulenzmodelle findet man zum Beispiel in [31].

Die Standardverfahren zur Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen für turbulente Strömungen basieren auf der Finite–Volumen–Methode. Ziel dieser Arbeit ist es, die Navier–Stokes–Gleichungen direkt zu rechnen. Das heißt es wird kein zusätzliches Modell zur Behandlung der Turbulenzen betrachtet. Weiters wird in dieser Ausarbeitung nicht die Finite–Volumen–Methode zur Berechnung einer Lösung verwendet, sondern die Finite–Elemente–Methode.

Die Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt, deren Inhalt kurz beschrieben wird.

Kapitel 1) Im ersten Kapitel werden die Navier–Stokes–Gleichungen aus physikalischen Gesetzen hergeleitet. Als Grundlage hierfür dienen die Erhaltungsgleichungen, wie die Erhaltung der Masse, die Erhaltung des Impulses und die Erhaltung der Energie. Da aber das System unterbestimmt ist, werden spezielle Fluide betrachtet, aus deren Eigenschaften zusätzliche Gleichungen gewonnen werden können. Dazu werden ideale wärmeleitende Gase betrachtet, sowie inkompressible Fluide unter Vernachlässigung der Energieerhaltung. Dieser zweite Spezialfall dient als Grundlage der weiteren Ausarbeitung.

Kapitel 2) Ziel des zweiten Kapitels ist zu zeigen, dass das zu den Navier–Stokes–Gleichungen gehörige Variationsproblem für inkompressible Fluide mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen und homogenen Neumann–Randbedingungen eine eindeutige Lösung besitzt. Dafür werden zuerst diverse Funktionenräume mit den zugehörigen Normen eingeführt. Im nächsten Abschnitt wird ein allgemeines gemischtes Variationsproblem auf Lösbarkeit untersucht. Diese Lösbarkeitsbedingungen werden dann auf die Navier–Stokes–Gleichungen übertragen. Dazu werden zunächst die stationären und anschließend die instationären Navier–Stokes–Gleichungen betrachtet.

- Kapitel 3)** In Kapitel drei werden diverse Strategien zur Diskretisierung der Navier–Stokes–Gleichungen betrachtet. Zunächst wird eine Methode zur Zeitdiskretisierung vorgestellt. Da die Navier–Stokes–Gleichungen eine Nichtlinearität beinhalten, wird ein Verfahren zur Linearisierung betrachtet. Anschließend wird die Finite–Elemente–Methode auf das zeitdiskretisierte und linearisierte Variationsproblem angewandt. Zuletzt wird noch ein Algorithmus angegeben, der das Lösungsverfahren in dieser Arbeit beschreibt.
- Kapitel 4)** Für manche Anwendungen ist neben der Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes auch die Kenntnis der Bahnkurven von Partikeln notwendig. Die Bahnkurven sind als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung gegeben. In Kapitel vier wird ein Algorithmus angegeben, mit dem sich Partikel in einem Strömungsfeld verfolgen lassen, und so die Bahnkurve ermittelt werden kann.
- Kapitel 5)** Im fünften Kapitel werden Beispiele präsentiert, die mit Hilfe der in Kapitel drei beschriebenen Diskretisierungsstrategien berechnet wurden. Zuerst werden zwei Beispiele im Zweidimensionalen betrachtet, wobei für das zweite Beispiel die Bahnkurven einiger Partikel berechnet wurden. Anschließend wird auch noch ein Beispiel mit einer dreidimensionalen Geometrie angegeben.

1 Modellierung

In diesem Kapitel werden die Navier–Stokes–Gleichungen aus fundamentalen physikalischen Gesetzen hergeleitet, als Grundlage hierfür dienen die Erhaltungsgleichungen. Als Referenz für dieses Kapitel sei auf [11, 13] verwiesen.

1.1 Grundlagen

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet, die sogenannte Referenzkonfiguration. Jedes $\mathbf{X} \in \Omega$ repräsentiert einen Massenpunkt, diese Massenpunkte können auf Grund äusserer Einwirkungen zeitlich in ihrer Position variieren. Es sei nun

$$t \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$$

die Abbildung, die den zeitlichen Verlauf des Massenpunktes $\mathbf{X} \in \Omega$ beschreibt (siehe Abbildung 1.1). Mit Hilfe dieser Abbildung kann die Menge der Massenpunkte zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ beschrieben werden als

$$\Omega(t) = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \Omega\}.$$

Weiters sind für die Abbildung $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ folgende Annahmen sinnvoll:

- (A1) Für alle $\mathbf{X} \in \Omega$ gilt $\mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}$.
- (A2) Die Abbildung $(t, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ ist stetig differenzierbar.
- (A3) Für alle $t \geq 0$ ist $\Omega \ni \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \in \Omega(t)$ invertierbar.
- (A4) Die Jacobi–Determinante $J(t, \mathbf{X}) = \det(\nabla \mathbf{x}(t, \mathbf{X}))$ ist für alle $t \geq 0$ positiv.

Auf Grund der Invertierbarkeit von $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ für alle $t \geq 0$ können den Massenpunkten zugeordnete physikalische Größen auf zwei verschiedene Arten geschrieben werden. Einerseits können diese Größen als $\varphi(t, \mathbf{x})$ in Abhängigkeit von \mathbf{x} geschrieben werden, auf der anderen Seite als $\Phi(t, \mathbf{X})$ in Abhängigkeit von \mathbf{X} . Insbesondere gilt die Beziehung

$$\varphi(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) = \Phi(t, \mathbf{X}).$$

Hinter diesen Schreibweisen verbergen sich zwei verschiedene Typen von Koordinaten.

- Bei den materiellen oder Lagrangeschen Koordinaten \mathbf{X} wird ein bestimmter Massenpunkt betrachtet und dessen Bewegung verfolgt.

1 Modellierung

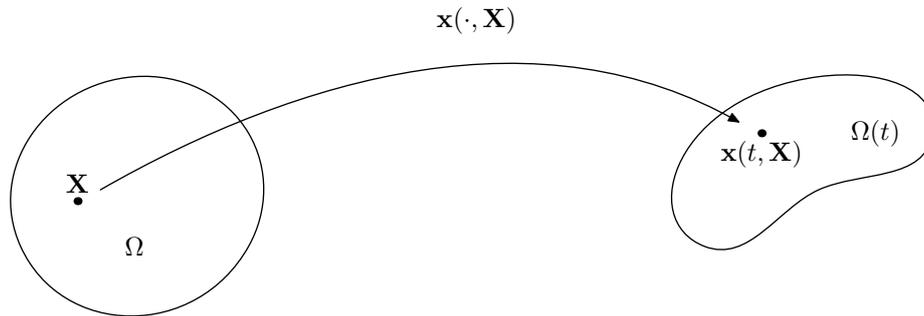


Abbildung 1.1: Verlauf eines Massenpunktes \mathbf{X} .

- Bei den Eulerschen Koordinaten \mathbf{x} wird ein fester Raumpunkt betrachtet, an diesem Raumpunkt befinden sich zu verschiedenen Zeitpunkten in der Regel verschiedene Massenpunkte.

Um ein Fluid beschreiben zu können, benötigt man diverse physikalische Größen, die den Massenpunkten zugeschrieben werden. Diese Größen sind der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, die Dichte $\rho(t, \mathbf{x})$, der Druck $p(t, \mathbf{x})$ und die Temperatur $\theta(t, \mathbf{x})$. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ ist gegeben durch

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \mathbf{X}).$$

Für die Herleitung der Navier–Stokes–Gleichungen benötigt man noch Hilfsmittel. Ein wichtiges Hilfsmittel sind Integralsätze, mit denen sich Volumenintegrale in Oberflächenintegrale umschreiben lassen.

Satz 1.1 (Integralsatz von Green, [27]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ zwei Funktionen, stetig differenzierbar in Ω und stetig in $\bar{\Omega}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})n_i \, ds_x - \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, dx, \quad i = 1, \dots, d$$

mit der i -ten Komponente des nach außen gerichteten Normalenvektors \mathbf{n} .

Satz 1.2 (Integralsatz von Gauss). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld mit stetig differenzierbaren Komponenten in Ω und stetig in $\bar{\Omega}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, ds_x$$

mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor \mathbf{n} .

Beweis. Der Integralsatz von Gauss kann mit Hilfe des Integralsatzes von Green gezeigt werden. Schreibt man das Volumenintegral um auf

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, dx,$$

so kann auf Grund der Linearität des Integrals auf jeden Term der rechten Seite der Satz von Green (Satz 1.1) mit $v(\mathbf{x}) = 1$ angewandt werden. Nun lässt sich das Volumenintegral schreiben als

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d f_i(\mathbf{x}) n_i \, ds_x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, ds_x,$$

und somit folgt die Aussage des Satzes von Gauss. \square

Ein nächstes Hilfsmittel ist das Transporttheorem von Reynolds.

Satz 1.3 (Reynoldssches Transporttheorem). *Sei $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ eine Abbildung, die die Bedingungen (A1) – (A4) erfüllt und weiters sei $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ stetig differenzierbar. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\phi(t, \mathbf{x})$ gilt dann*

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \phi(t, \mathbf{x}) \, dx = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\phi(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right) dx,$$

mit $\omega(t) \subset \Omega(t)$.

Für den Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems sei auf [11] verwiesen.

1.2 Erhaltungssätze

1.2.1 Massenerhaltung

Die Massenerhaltung besagt, dass weder Masse erzeugt noch vernichtet werden kann. In anderen Worten heißt das, dass die zeitliche Änderung der Masse gleich Null ist, beziehungsweise

$$\frac{dm}{dt}(t) = 0.$$

In der Kontinuumsmechanik ist die Masse eines Volumens gegeben durch

$$m(t) = \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \, dx$$

mit der Dichtefunktion $\varrho(t, \mathbf{x})$.

1 Modellierung

Daraus folgt

$$\frac{dm}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) dx = 0,$$

und mit Satz 1.3 gilt

$$\int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \right) dx = 0.$$

Da diese Beziehung für jedes geeignete Volumen $\Omega(t)$ gültig ist, und somit auch für jedes Teilvolumen $\omega(t)$, folgt für einen stetigen Integranden die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) = 0, \quad (1.2.1)$$

die sogenannte Kontinuitätsgleichung.

1.2.2 Impulserhaltung

Die Impulserhaltung besagt, dass die auf die Masse wirkende Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses ist. In der klassischen Mechanik ist der Impuls gegeben als das Produkt der Masse und der Geschwindigkeit. In der Kontinuumsmechanik lässt sich der Impuls darstellen als

$$\mathbf{p}(t) = \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx.$$

Die Kraft, die auf die Masse wirkt, kann unterteilt werden in eine Volumenkraft und eine Oberflächenkraft, somit lässt sich die Impulserhaltung schreiben als

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx = \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dx + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) ds_x.$$

Der Term der linken Seite entspricht der zeitlichen Änderung des Impulses. Der erste Term der rechten Seite beschreibt die auf $\omega(t)$ wirkende Volumenkraft und der zweite Term die auf $\partial\omega(t)$ wirkende Oberflächenkraft. Mit Hilfe des Satzes von Cauchy kann die Oberflächenkraft $\mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ geschrieben werden als

$$\mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n},$$

mit dem symmetrischen Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})$ und dem nach außen gerichteten Normalenvektor \mathbf{n} . Für nähere Informationen über den Satz von Cauchy sei auf [11] verwiesen.

Das Oberflächenintegral kann mit Satz 1.2 geschrieben werden als

$$\int_{\partial\omega(t)} \mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \, ds_x = \int_{\partial\omega(t)} \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} \, ds_x = \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

Für die Impulserhaltung gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, dx = \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \, dx + \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \, dx$$

und mit Satz 1.3 folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \right) dx &= \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \, dx \\ &+ \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

Da diese Beziehung wieder für alle geeigneten Volumina $\Omega(t)$ und für jedes Teilvolumen $\omega(t)$ gelten soll, folgt für einen stetigen Integranden die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) = \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}).$$

Der Term der linken Seite kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.2.1) vereinfacht werden. Differenziert man die Terme der linken Seite partiell, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \\ &+ \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Fasst man die Terme der rechten Seite der obigen Gleichung geeignet zusammen, so lässt sich diese schreiben als

$$\varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \right).$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (1.2.1) verschwindet der zweite Term und die Impulserhaltung lässt sich schreiben als

$$\varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) = \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}). \quad (1.2.2)$$

1 Modellierung

Um den noch unbekanntem Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})$ zu beschreiben, benötigt man rheologische Gleichungen. Das sind Gleichungen, die das Fließverhalten von Fluiden beschreiben. Die einfachste Beziehung ist

$$\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) = -p(t, \mathbf{x})\mathbb{I},$$

welche bei nichtviskosen Fluiden zum Einsatz kommt. Bei viskosen Fluiden gilt für den Spannungstensor die Darstellung

$$\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) = \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) - p(t, \mathbf{x})\mathbb{I} \quad (1.2.3)$$

mit

$$\underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\mathbb{I} + 2\mu \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\mathbf{v})(t, \mathbf{x})$$

und dem Deformationstensor

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\mathbf{v})(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x})^\top \right).$$

Näheres über den Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})$ findet man in [11, 13]. Die Größen λ und μ beschreiben die Volumenviskosität beziehungsweise die Scherviskosität. Setzt man den Spannungstensor (1.2.3) in die allgemeine Impulserhaltungsgleichung (1.2.2) ein, so erhält man die differentielle Darstellung der Impulserhaltung für viskose Fluide

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) - \nabla p(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

1.2.3 Energieerhaltung

Die Energieerhaltung beschreibt die zeitliche Änderung der gesamten Energie

$$E(t, \mathbf{x}) = E_{kin}(t, \mathbf{x}) + E_{int}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2 + E_{int}(t, \mathbf{x}),$$

die als Summe der kinetischen Energie und der inneren Energie dargestellt werden kann. Sie besagt, dass die zeitliche Änderung der Energie gleich der am System geleisteten Arbeit plus der durch Wärmefluss verlorenen Wärmeenergie und der Zufuhr von Wärmeenergie durch äußere Quellen entspricht. Die Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) E(t, \mathbf{x}) dx &= \int_{\omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx + \int_{\partial\omega(t)} \underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) ds_x \\ &- \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} ds_x + \int_{\omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}) dx. \end{aligned}$$

Der Term der linken Seite beschreibt die zeitliche Änderung der totalen Energie. Die ersten beiden Terme der rechten Seite beschreiben die am System geleistete Arbeit durch die Volumenkräfte und durch die Oberflächenkräfte. Der dritte Term der rechten Seite beschreibt den Verlust von Wärmeenergie durch den Wärmefluss über die Oberfläche. Der letzte Term der rechten Seite entspricht der zugeführten Wärmeenergie durch äußere Wärmequellen.

Der Wärmefluss $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$ über die Oberfläche kann mit dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung und der Wärmeleitfähigkeit $k(t, \mathbf{x})$ als

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = -k(t, \mathbf{x})\nabla\theta(t, \mathbf{x})$$

geschrieben werden. Für zusätzliche Informationen über das Fouriersche Gesetz sei auf [11, 13] verwiesen.

Mit Satz 1.2 lassen sich die Oberflächenintegrale auf Volumenintegrale umschreiben und mit Satz 1.3 folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \right) dx &= \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x})\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx \\ + \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) dx &+ \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \left(k(t, \mathbf{x})\nabla\theta(t, \mathbf{x}) \right) dx + \int_{\omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x})g(t, \mathbf{x}) dx. \end{aligned}$$

Da auch diese Gleichung für alle geeigneten $\Omega(t)$ und auch für jedes Teilvolumen gelten soll, folgt die differentielle Form der Energieerhaltung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x})\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \\ &+ \nabla \cdot \left(k(t, \mathbf{x})\nabla\theta(t, \mathbf{x}) \right) \\ &+ \varrho(t, \mathbf{x})g(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Der Term auf der linken Seite kann mit partieller Differentiation und der Kontinuitätsgleichung (1.2.1) vereinfacht werden auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\varrho(t, \mathbf{x})E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) = \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial E}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \left(E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \right).$$

1 Modellierung

Die allgemeine Darstellung der Energieerhaltungsgleichung hat somit die Form

$$\begin{aligned} \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial E}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x})\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\ &+ \nabla \cdot (k(t, \mathbf{x})\nabla\theta(t, \mathbf{x})) \\ &+ \varrho(t, \mathbf{x})g(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Wie bei der Impulserhaltung kommt auch bei der Energieerhaltung der unbekannte Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}(t, \mathbf{x})$ vor. Bei viskosen Fluiden gilt für den Spannungstensor die Darstellung (1.2.3). Dadurch lässt sich die Energieerhaltungsgleichung für viskose Fluide schreiben als

$$\begin{aligned} \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial E}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (E(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x})\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\ &- \nabla \cdot (p(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\ &+ \nabla \cdot (k(t, \mathbf{x})\nabla\theta(t, \mathbf{x})) \\ &+ \varrho(t, \mathbf{x})g(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

1.3 Navier–Stokes–Gleichungen

Zur Beschreibung eines viskosen Fluides erhält man nun folgendes System.

Gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, der Druck $p(t, \mathbf{x})$, die Dichte $\varrho(t, \mathbf{x})$ und die Temperatur $\theta(t, \mathbf{x})$ als Lösung des folgenden Systems.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) &= 0 \\
\varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\
&\quad + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) - \nabla p(t, \mathbf{x}) \\
\varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial E}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (E(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\
&\quad + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\
&\quad - \nabla \cdot (p(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\
&\quad + \nabla \cdot (k(t, \mathbf{x}) \nabla \theta(t, \mathbf{x})) \\
&\quad + \varrho(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Dieses System ist jedoch unterbestimmt, das heißt man benötigt noch zusätzliche Gleichungen, um das System zu vervollständigen. In den nächsten beiden Abschnitten werden zwei spezielle Fluide betrachtet, um auf zusätzliche Gleichungen zu kommen. Der erste Spezialfall betrachtet wärmeleitende ideale Gase und der zweite Spezialfall beschränkt sich auf inkompressible Fluide unter Vernachlässigung der Energieerhaltungsgleichung.

1.3.1 Wärmeleitende ideale Gase

Beschränkt man sich auf wärmeleitende ideale Gase, erhält man zusätzliche Gleichungen, um das System (1.3.1) zu vervollständigen. Für nähere Informationen über ideale Gase sei auf [13] verwiesen.

Für ideale Gase gilt die Zustandsgleichung

$$p(t, \mathbf{x}) = \varrho(t, \mathbf{x}) \theta(t, \mathbf{x}) R$$

mit der Gaskonstanten $R = c_p - c_v$. Die beiden Konstanten c_p und c_v beschreiben die spezifische Temperatur bei konstantem Druck beziehungsweise bei konstantem Volumen.

Zusätzlich besitzt die innere Energie bei idealen Gasen die Darstellung

$$E_{int}(t, \mathbf{x}) = c_v \theta(t, \mathbf{x}).$$

1 Modellierung

Zur Beschreibung eines wärmeleitenden idealen Gases erhält man nun folgendes System. Gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, der Druck $p(t, \mathbf{x})$, die Dichte $\varrho(t, \mathbf{x})$ und die Temperatur $\theta(t, \mathbf{x})$, sodass

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) &= 0 \\
 \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) - \nabla p(t, \mathbf{x}) \\
 \varrho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial E}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (E(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \\
 &\quad + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\
 &\quad - \nabla \cdot (p(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \\
 &\quad + \nabla \cdot (k(t, \mathbf{x}) \nabla \theta(t, \mathbf{x})) \\
 &\quad + \varrho(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}) \\
 p(t, \mathbf{x}) &= \varrho(t, \mathbf{x}) \theta(t, \mathbf{x}) R \\
 E(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2 + c_v \theta(t, \mathbf{x})
 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

1.3.2 Inkompressible viskose Fluide

Beschränkt man sich auf inkompressible Fluide, so ist die Dichte $\varrho(t, \mathbf{x})$ eine konstante Stoffeigenschaft. Dadurch vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (1.2.1) auf

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) = \varrho \nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Kürzt man ϱ aus der obigen Gleichung, so lässt sich die Kontinuitätsgleichung schreiben als

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Der Term $\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x})$ aus der Impulserhaltungsgleichung (1.2.4) kann vereinfacht werden

auf

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}(t, \mathbf{x}) &= \nabla \cdot \left(\lambda \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x})}_{=0} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) + \nabla \cdot \left(2\mu \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\mathbf{v})(t, \mathbf{x}) \right) \\
 &= \nabla \cdot \left(2\mu \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x})^\top \right) \right) \\
 &= \mu \left(\Delta \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \nabla \left(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x})}_{=0} \right) \right) \\
 &= \mu \Delta \mathbf{v}(t, \mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Zusätzlich wird die Energieerhaltungsgleichung vernachlässigt. Das resultierende System zur Beschreibung eines viskosen und inkompressiblen Fluids lautet wie folgt.

Gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ und der Druck $p(t, \mathbf{x})$, sodass

$$\begin{aligned}
 \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) &= \varrho \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mu \Delta \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \nabla p(t, \mathbf{x}) \\
 \nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= 0
 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dividiert man durch die konstante Dichte, so erhält man das folgende System.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \nu \Delta \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \nabla \tilde{p}(t, \mathbf{x}) \\
 \nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Die in der Impulserhaltungsgleichung vorkommenden Größe ν ist die kinematische Viskosität und ist gegeben als

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Wobei μ die dynamischen Viskosität bezeichnet. Die Funktion $\tilde{p}(t, \mathbf{x})$ ist gegeben als

$$\tilde{p} = \frac{1}{\varrho} p.$$

Im nachfolgenden Kapitel wird das Problem (1.3.2) auf Lösbarkeit untersucht. Dazu wird das Problem im Raum–Zeit–Zylinder $(0, T) \times \Omega$ betrachtet. Weiters muss das gesuchte Geschwindigkeitsfeld eine Anfangsbedingung $\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ sowie gewisse Randbedingungen erfüllen. Dabei wird zuerst das stationäre Problem betrachtet und anschließend das instationäre Problem.

2 Analysis

In diesem Kapitel werden zunächst grundlegende Aussagen über Banachräume behandelt. Im nächsten Abschnitt werden Funktionenräume eingeführt, welche die Grundlage für die Lösungstheorie bilden. Dazu gehören die Räume der differenzierbaren Funktionen, die Lebesgue-Räume sowie die Sobolev-Räume. Im darauffolgenden Abschnitt wird gezeigt, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit ein gemischtes Variationsproblem gelöst werden kann. In den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels wird dann die Lösbarkeit der stationären und der instationären Navier–Stokes–Gleichungen diskutiert.

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden Produkträume von Banachräumen, sowie die Bochner-Räume eingeführt.

Lemma 2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und X_i ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_{X_i}$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$. Der Produktraum ist definiert als $\mathbf{X} := \prod_{i=1}^n X_i$ mit Elementen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$. Für $1 \leq p < \infty$ ist durch

$$\|\mathbf{x}\|_{(\mathbf{X}, p)} := \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

beziehungsweise für $p = \infty$

$$\|\mathbf{x}\|_{(\mathbf{X}, \infty)} := \max_{i=1, \dots, n} \|x_i\|_{X_i}$$

eine Norm auf \mathbf{X} gegeben. Mit diesen Normen wird der Produktraum \mathbf{X} wieder zu einem Banachraum. Der Dualraum von \mathbf{X} ist das Produkt der Dualräume von X_i , das heißt

$$\mathbf{X}' = \prod_{i=1}^n X'_i.$$

Für weitere Eigenschaften von Produkträumen und für den Beweis von Lemma 2.1 sei auf [1, 32] verwiesen.

Notation 2.2. Für $p = 2$ gelte die folgende Notation.

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} := \|\mathbf{x}\|_{(\mathbf{X}, 2)}$$

2 Analysis

Lemma 2.3. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathbb{R}$ mit $0 < T$. Für $1 \leq p < \infty$ und eine Abbildung $v : (0, T) \rightarrow X$ sei

$$\|v\|_{L_p(0, T; X)} := \left\{ \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

beziehungsweise für $p = \infty$

$$\|v\|_{L_\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|v(t)\|_X.$$

Dann ist durch

$$L_p(0, T; X) := \{v : (0, T) \rightarrow X \mid \|v\|_{L_p(0, T; X)} < \infty\}$$

ein Banachraum definiert. Für $1 < p < \infty$ ist der Dualraum gegeben als

$$L_p(0, T; X)' = L_q(0, T; X')$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Für den Beweis sei auf [33, 34] verwiesen.

2.2 Funktionen–Räume und Normen

In diesem Abschnitt werden wichtige Definitionen und Eigenschaften diverser Funktionenräume wiederholt. Zuerst werden die stetigen und differenzierbaren Funktionen betrachtet sowie die zugehörigen Funktionenräume. Danach werden die integrierbaren Funktionen und die Lebesgue–Räume eingeführt. Zuletzt werden die Sobolev–Räume betrachtet, sowie einige Eigenschaften und Aussagen der Sobolev–Räume wiederholt.

2.2.1 C^k –Räume

Für die folgende Definitionen und Bemerkungen sei auf [27] verwiesen.

Definition 2.4 (Multiindex). Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichnet das d -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ einen Multiindex mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Der Betrag eines Multiindex α ist definiert als

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Weiters lässt sich die Faktorielle $\alpha!$ eines Multiindex definieren als

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_d!$$

Mit Hilfe eines Multiindex und einer genügend glatten Funktion $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, lässt sich die partielle Differentiation schreiben als

$$D^\alpha u(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d} u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} u(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Definition 2.5 (C^k –Räume). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $C^k(\Omega)$ den Raum der beschränkten und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen in Ω .

Definition 2.6 (C^k –Norm). Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, wird durch das Funktional

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha u(\mathbf{x})|$$

eine Norm auf $C^k(\Omega)$ definiert.

Definition 2.7 (C^∞ –Raum). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Dann bezeichnet $C^\infty(\Omega)$ den Raum der beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen in Ω .

Mit der punktweisen Addition beziehungsweise Multiplikation werden die C^k –Räume zu Vektorräumen und mit der C^k –Norm zu Banachräumen. Für den Beweis der Vollständigkeit sei auf [2] verwiesen.

Definition 2.8 (Träger einer Funktion). Für eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Träger definiert als

$$\text{supp } u := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega \mid u(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Der Träger ist somit der Abschluss jener Punkte in Ω , für die u nicht verschwindet.

Definition 2.9 (C_0^k –Räume). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet, dann bezeichnet die Menge

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp } u \subset\subset \Omega\}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

den Raum aller C^k –Funktionen in Ω mit kompaktem Träger.

Definition 2.10 ($C^k(\overline{\Omega})$ –Räume). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann beschreibt $C^k(\overline{\Omega})$ den Raum der beschränkten und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen in Ω , deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortgesetzt werden können:

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha u \text{ stetig fortsetzbar auf } \partial\Omega \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Definition 2.11 (C_0^∞ –Raum). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet, dann bezeichnet die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum der beschränkten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen in Ω mit kompaktem Träger.

2 Analysis

Die Räume der stetigen und differenzierbaren Funktionen stellen jedoch eine zu starke Einschränkung für die Lösungstheorie von partiellen Differentialgleichungen dar. Als Beispiel betrachte man das Poisson-Problem

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega = (0, 1)^d.$$

Für dieses Problem kann für unstetige rechte Seiten f keine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ gefunden werden. Da aber Unstetigkeiten in physikalischen Modellen häufig auftreten, ist es sinnvoll, schwächere Regularitätsanforderungen an die Lösung u zu stellen. Als Grundlage hierfür dienen die integrierbaren Funktionen.

2.2.2 Lebesgue-Räume

Um die Lebesgue-Räume einzuführen, benötigt man den Begriff der Äquivalenz zweier messbarer Funktionen. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$\mathcal{L}(\Omega) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ messbar} \}$$

die Menge aller in Ω erklärten Funktionen. Somit lässt sich die Äquivalenz zweier Funktionen $u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$ definieren als

$$u \sim v :\Leftrightarrow \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid u(\mathbf{x}) \neq v(\mathbf{x}) \} \subset \Omega \text{ ist eine Menge vom Maß Null.}$$

Definition 2.12 (L_p -Räume). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Für $1 \leq p < \infty$ sind die Lebesgue-Räume $L_p(\Omega)$ definiert als die Menge der Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen, deren Betrag zur p -ten Potenz integrierbar ist. Für $p = \infty$ ist der Lebesgue-Raum $L_\infty(\Omega)$ definiert als die Menge der in Ω fast überall beschränkten und messbaren Funktionen.

Definition 2.13 (L_p -Norm). Sei $1 \leq p < \infty$. Für $u \in L_p(\Omega)$ wird durch das Funktional

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf $L_p(\Omega)$ definiert. Für $p = \infty$ definiert

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| = \inf_{\substack{K \subset \Omega \\ \mu(K)=0}} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus K} |u(\mathbf{x})|$$

eine Norm auf $L_\infty(\Omega)$.

Lemma 2.14 (Höldersche-Ungleichung). Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für zwei Funktionen $u \in L_p(\Omega)$ und $v \in L_q(\Omega)$ ist dann $uv \in L_1(\Omega)$ und es gilt

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| \, dx = \|uv\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}. \quad (2.2.1)$$

Lemma 2.15 (Minkowski–Ungleichung). Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $u, v \in L_p(\Omega)$, dann gilt

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Für den Beweis der Hölder–Ungleichung beziehungsweise der Minkowski–Ungleichung sei auf [2] verwiesen.

Lemma 2.16 (Lyapunov–Ungleichung, [30]). Sei $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ und $0 \leq \theta \leq 1$. Dann gilt mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ und für alle $f \in L_{p_0}(\Omega) \cap L_{p_1}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{\theta}. \quad (2.2.2)$$

Weiters ist $L_{p_0}(\Omega) \cap L_{p_1}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Beweis. Sei $0 \leq \theta \leq 1$ und $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Definiert man \tilde{p} und \tilde{q} als

$$\tilde{p} := \frac{p_0}{(1-\theta)p} \quad \text{und} \quad \tilde{q} := \frac{p_1}{\theta p},$$

dann gilt

$$\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{(1-\theta)p}{p_0} + \frac{\theta p}{p_1} = \left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \right) p = \frac{p}{p} = 1.$$

Mit $f \in L_{p_0}(\Omega) \cap L_{p_1}(\Omega)$ und der Hölder–Ungleichung (2.2.1) gilt

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}^p = \|f^p\|_{L_1(\Omega)} = \|f^{(1-\theta)p} f^{\theta p}\|_{L_1(\Omega)} \leq \underbrace{\|f^{(1-\theta)p}\|_{L_{\tilde{p}}(\Omega)}}_{=:(A_1)} \underbrace{\|f^{\theta p}\|_{L_{\tilde{q}}(\Omega)}}_{=:(A_2)}.$$

Der Ausdruck (A_1) kann umgeschrieben werden in

$$\|f^{(1-\theta)p}\|_{L_{\tilde{p}}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^{(1-\theta)p\tilde{p}} \, dx \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} = \left(\int_{\Omega} |f|^{p_0} \, dx \right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} = \|f\|_{L_{p_0}(\Omega)}^{(1-\theta)p}$$

und der Ausdruck (A_2) in

$$\|f^{\theta p}\|_{L_{\tilde{q}}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^{\theta p\tilde{q}} \, dx \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} = \left(\int_{\Omega} |f|^{p_1} \, dx \right)^{\frac{\theta p}{p_1}} = \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{\theta p}.$$

Somit gilt die Abschätzung

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}^p \leq \|f\|_{L_{p_0}(\Omega)}^{(1-\theta)p} \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{\theta p},$$

aus welcher direkt die Ungleichung (2.2.2) folgt. \square

2 Analysis

Die L_p -Räume sind mit den zugehörigen Normen vollständig und somit Banachräume, dazu sei auf [1, 2] verwiesen.

Mit dem Dualitäts-Produkt

$$\langle u, v \rangle_\Omega := \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, dx$$

folgt

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{0 \neq v \in L_q(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle_\Omega|}{\|v\|_{L_q(\Omega)}}$$

für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bemerkung 2.17. Der Banachraum $L_p(\Omega)$ ist der Dualraum von $L_q(\Omega)$ wobei die Beziehung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Weiters ist für $L_\infty(\Omega)$ der Dualraum durch $L_1(\Omega)$ gegeben, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Für den Beweis der Dualität sei auf [30] verwiesen.

Bemerkung 2.18. Für $p = 2$ ist durch

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf $L_2(\Omega)$ definiert und es gilt

$$(u, u)_{L_2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in L_2(\Omega)$. Somit ist der $L_2(\Omega)$ nicht nur ein Banachraum, sondern auch ein Hilbertraum.

Da aber bei den Lebesgue-Räumen keine Information über die Ableitung einer Funktion bekannt sind, sind diese Räume noch nicht ausreichend für eine Lösungstheorie von partiellen Differentialgleichungen. Sie dienen jedoch als Basis für die Herleitung solcher Räume, den sogenannten Sobolev-Räumen.

2.2.3 Sobolev-Räume

Zur Herleitung der Sobolev-Räume ist der Begriff der verallgemeinerten Ableitung ausschlaggebend. Um diesen Begriff sinnvoll einzuführen, benötigt man den Raum der lokal integrierbaren Funktionen. Dieser ist definiert als

$$L_1^{loc}(\Omega) := \{v \mid v \in L_1(K) \quad \forall K \subset \Omega \text{ kompakt} \}.$$

Damit kann die verallgemeinerte Ableitung wie folgt definiert werden.

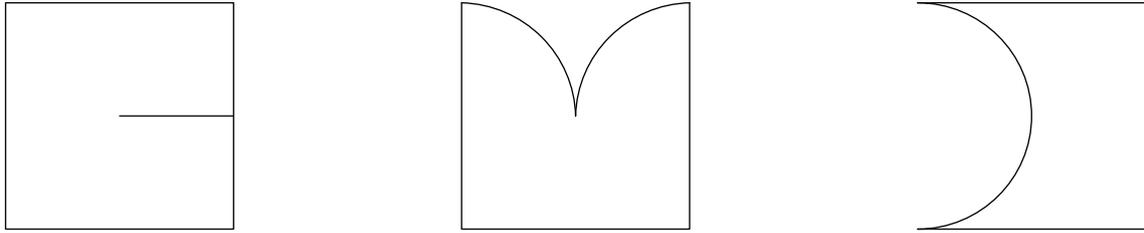


Abbildung 2.1: Beispiele für Nicht–Lipschitzgebiete.

Definition 2.19 (Verallgemeinerte partielle Ableitung). Sei $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, dann heißt $v \in L_1^{loc}(\Omega)$ verallgemeinerte Ableitung der Ordnung α von u , falls

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})D^{\alpha}\varphi(\mathbf{x}) \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ erfüllt ist. Man schreibt $v = D^{\alpha}u$.

Existiert die klassische Ableitung $D^{\alpha}u$ einer Funktion u , so stimmen die klassische Ableitung und die verallgemeinerte Ableitung überein.

Definition 2.20 (Lipschitzhypograph, [16]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$. Die Menge Ω heißt Lipschitzhypograph, falls eine Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_d \leq f(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Definition 2.21 (Lipschitzgebiet, [27]). Sei $d \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit kompaktem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Die Menge Ω heißt Lipschitzgebiet, wenn endliche Familien $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ und $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ existieren, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt werden.

- (L1) Die Familie $\{\Gamma_i\}$ ist eine offene Überdeckung des Randes Γ , das heißt $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^d$ ist offen und $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$.
- (L2) Jedes Ω_i kann durch Translation und Rotation in einen Lipschitz–Hypographen transformiert werden.
- (L3) Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $\Gamma_i \cap \Omega = \Gamma_i \cap \Omega_i$.

In Abbildung 2.1 sind Beispiele für Gebiete angegeben, die keine Lipschitzgebiete sind.

In den nachfolgenden Definitionen und Kapiteln sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitzgebiet.

2 Analysis

Definition 2.22 (W_p^k -Norm). Sei $k \in \mathbb{N}_0$, dann wird für $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

beziehungsweise für $p = \infty$ durch

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

eine Norm definiert.

Definition 2.23 (Sobolev Räume mit natürlicher Ordnung). Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist der Sobolev-Raum $W_p^k(\Omega)$ definiert als die Vervollständigung des $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der W_p^k -Norm, dass heißt

$$W_p^k(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}}.$$

Analog kann der Sobolev-Raum $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ als Abschluss des $C_0^\infty(\Omega)$ definiert werden,

$$\mathring{W}_p^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}}.$$

Bemerkung 2.24. Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Sobolev-Raum $W_p^{-k}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, definiert als der Dualraum von $\mathring{W}_q^k(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{W_p^{-k}(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in \mathring{W}_q^k(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle_\Omega|}{\|v\|_{W_q^k(\Omega)}}.$$

Umgekehrt ist der $\mathring{W}_p^{-k}(\Omega)$ der Dualraum von $W_q^k(\Omega)$.

Die $W_p^k(\Omega)$ -Räume sind für $1 \leq p \leq \infty$ und den zugehörigen Normen vollständig und somit Banachräume, dazu sei auf [1] verwiesen.

Bemerkung 2.25. Für $p = 2$ ist durch

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt auf $W_2^k(\Omega)$ definiert. Weiters gilt

$$(u, u)_{W_2^k(\Omega)} = \|u\|_{W_2^k(\Omega)}^2$$

für alle $u \in W_2^k(\Omega)$. Somit ist $W_2^k(\Omega)$ auch ein Hilbertraum.

Definition 2.26 (Sobolev Räume mit reeller Ordnung). Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und es gelte $s = k + \kappa$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$. Dann definiert

$$\|v\|_{W_p^s(\Omega)} := \left\{ \|v\|_{W_p^k(\Omega)}^p + |v|_{W_p^s(\Omega)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

die Sobolev–Slobodeckii–Norm, mit der zugehörigen Halbnorm

$$|v|_{W_p^s(\Omega)}^p := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(\mathbf{x}) - D^{\alpha}u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+p\kappa}} \, dx \, dy.$$

Die zugehörigen Sobolev–Räume sind wieder als Abschluss des $C^{\infty}(\Omega)$ beziehungsweise als Abschluss des $C_0^{\infty}(\Omega)$ definiert.

Bemerkung 2.27. Für $p = 2$ ist durch

$$(u, v)_{W_2^s(\Omega)} := (u, v)_{W_2^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^{\alpha}u(\mathbf{x}) - D^{\alpha}u(\mathbf{y}))(D^{\alpha}v(\mathbf{x}) - D^{\alpha}v(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2\kappa}} \, dx \, dy$$

ein Skalarprodukt auf $W_2^s(\Omega)$ definiert. Somit ist $W_2^s(\Omega)$ ein Hilbertraum.

Bemerkung 2.28. Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und es gelte $s = k + \kappa$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$. Der Sobolev–Raum $W_p^{-s}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, ist definiert als der Dualraum von $\mathring{W}_q^s(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{W_p^{-s}(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in \mathring{W}_q^s(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle_{\Omega}|}{\|v\|_{W_q^s(\Omega)}}.$$

Umgekehrt ist der $\mathring{W}_p^{-s}(\Omega)$ der Dualraum von $W_q^s(\Omega)$.

Die Sobolev–Räume können auch über Fourier–Transformationen und Distributionen eingeführt werden. Diese Räume werden mit $H^s(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet. Mehr über die Einführung dieser Räume findet man zum Beispiel in [27, 34]. Es gibt jedoch einen starken Zusammenhang zwischen den Sobolev–Räumen H^s und W_2^s . Dieser Zusammenhang wird in den folgenden Sätzen angegeben.

Satz 2.29. Für $s \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$H^s(\mathbb{R}^d) = W_2^s(\mathbb{R}^d).$$

Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist der Sobolev–Raum $H^s(\Omega)$ definiert als

$$H^s(\Omega) := \{v|_{\Omega} \mid v \in H^s(\mathbb{R}^d)\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{\substack{\tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^d) \\ \tilde{v}|_{\Omega} = v}} \|\tilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

2 Analysis

Satz 2.30. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, dann gilt für alle $s > 0$

$$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega).$$

Notation 2.31. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitzgebiet. Für den Spezialfall $p = 2$ sind die folgenden Schreibweisen gebräuchlich.

Seien $u, v \in L_2(\Omega)$, man schreibt

$$\begin{aligned}(u, v)_0 &:= (u, v)_{L_2(\Omega)}, \\ \|u\|_0 &:= \|u\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Für den Sobolev-Raum $W_2^s(\Omega)$ ist die folgende Notation üblich.

$$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega), \quad H_0^s(\Omega) = \mathring{W}_2^s(\Omega).$$

Weiters schreibt man für $u, v \in H^s(\Omega)$

$$\begin{aligned}(u, v)_s &:= (u, v)_{H^s(\Omega)}, \\ |u|_s &:= |u|_{H^s(\Omega)}, \\ \|u\|_s &:= \|u\|_{H^s(\Omega)}.\end{aligned}$$

Analoge Notationen gelten auch für den Produktraum $\prod_{i=1}^d H^s(\Omega)$.

$$\mathbf{H}^s(\Omega) := \prod_{i=1}^d H^s(\Omega), \quad \mathbf{H}_0^s(\Omega) := \prod_{i=1}^d H_0^s(\Omega).$$

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ sei

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}, \mathbf{v})_s &:= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^s(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^d (u_i, v_i)_s \right\}, \\
 |\mathbf{u}|_s &:= |\mathbf{u}|_{(\mathbf{H}^s(\Omega), 2)} = \left\{ \sum_{i=1}^d |u_i|_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
 \|\mathbf{u}\|_s &:= \|\mathbf{u}\|_{(\mathbf{H}^s(\Omega), 2)} = \left\{ \sum_{i=1}^d \|u_i\|_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Satz 2.32 (Sobolev’scher Einbettungssatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq l$.

- Wenn $k - \frac{d}{p} \geq l - \frac{d}{q}$ mit $p, q \in [1, \infty)$, dann kann der Sobolev–Raum $W_p^k(\Omega)$ stetig in den Raum $W_q^l(\Omega)$ eingebettet werden. Das heißt, $W_p^k(\Omega) \subset W_q^l(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $c_E > 0$, sodass

$$\|u\|_{W_q^l(\Omega)} \leq c_E \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

für alle $u \in W_p^k(\Omega)$ gilt.

- Wenn $k - \frac{d}{p} > l - \frac{d}{q}$ mit $p, q \in [1, \infty)$, dann ist die Einbettung kompakt, man schreibt $W_p^k(\Omega) \subset\subset W_q^l(\Omega)$.

Für die spätere Analysis werden Abschätzungen der Art

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|u\|_1$$

gebraucht. Mit Satz 2.32 können solche Abschätzungen angegeben werden, dazu sei auf die folgende Bemerkung verwiesen.

Bemerkung 2.33. Für ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ gilt

$$k - \frac{2}{2} \geq 0 > -\frac{2}{q} \quad \text{für alle } q \in [1, \infty)$$

und somit $H^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$. Weiters existiert eine Konstante $c_E > 0$, sodass

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c_E \|u\|_k$$

für alle $q \in [1, \infty)$ und für alle $u \in H^k(\Omega)$.

2 Analysis

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ gilt

$$k - \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{2} \geq -\frac{3}{q} \quad \text{für alle } q \in [1, 6]$$

und somit $H^k(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ für alle $q \in [1, 6]$ beziehungsweise $H^k(\Omega) \subset\subset L_q(\Omega)$ für alle $q \in [1, 6)$. Weiters existiert eine Konstante $c_E > 0$, sodass

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c_E \|u\|_k$$

für alle $q \in [1, 6]$ und für alle $u \in H^k(\Omega)$.

Definition 2.34 (Sobolev–Räume auf dem Rand). Sei $\Gamma = \partial\Omega$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Für $s \in (0, 1)$ ist die Sobolev–Slobodeckii–Norm auf Γ definiert als

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left\{ \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-1+2s}} \, ds_x \, ds_y \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Definition 2.35 (Sobolev–Räume auf Teilrändern). Sei $\Gamma_0 \subset \Gamma$ eine offene Teilmenge des Randes von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Für $s \geq 0$ sei

$$H^s(\Gamma_0) := \{v|_{\Gamma_0} \mid v \in H^s(\Gamma)\}.$$

Die zugehörige Norm ist gegeben als

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)} := \inf_{\substack{\tilde{v} \in H^s(\Gamma) \\ \tilde{v}|_{\Gamma_0} = v}} \|\tilde{v}\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Definition 2.36 (Innere Spur). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiters sei der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ hinreichend glatt. Dann ist für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die innere Spur gegeben als

$$\gamma_0^{\text{int}} f(\mathbf{x}) := \lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Satz 2.37 (Spur–Satz, [27]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein $C^{k-1,1}$ –Gebiet. Für $\frac{1}{2} < s \leq k$ ist der innere Spuroperator

$$\gamma_0^{\text{int}} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

durch

$$\|\gamma_0^{\text{int}} v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_T \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^s(\Omega)$$

beschränkt.

Bemerkung 2.38. Für ein Lipschitz–Gebiet Ω kann Satz 2.37 mit $k = 1$ angewandt werden. Somit gilt die Beschränktheit des Spuroperators für alle $v \in H^s(\Omega)$ mit $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Die Beschränktheit kann sogar für $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ gezeigt werden.

Satz 2.39 (Inverser Spur–Satz, [27]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein $C^{k-1,1}$ –Gebiet. Für $\frac{1}{2} < s \leq k$ besitzt der innere Spuroperator $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eine stetige Rechtsinverse

$$\mathcal{E} : H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega)$$

mit $\gamma_0^{int} \mathcal{E}v = v$ für alle $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Weiters gilt die Beschränktheit

$$\|\mathcal{E}v\|_{H^s(\Omega)} \leq c_{IT} \|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Für nähere Informationen über die Spursätze sei auf [27, 32] verwiesen.

Definition 2.40. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ein $C^{k-1,1}$ –Gebiet und $\frac{1}{2} < s \leq k$. Für $g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sei

$$H_g^s(\Omega) := \{u \in H^s(\Omega) \mid \gamma_0^{int} u = g\}$$

die Menge aller Funktionen in $H^s(\Omega)$, deren Spur der Funktion g auf Γ entspricht. Analog ist für Teilränder $\Gamma_A \subset \Gamma$ und für $g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$ die Menge

$$H_{g,A}^s(\Omega) := \{u \in H^s(\Omega) \mid \gamma_0^{int} u|_{\Gamma_A} = g\}$$

definiert.

Somit sind diverse Sobolev–Räume zur Behandlung der räumlichen Ableitungen eingeführt. Doch da die Navier–Stokes–Gleichungen instationär sind und somit auch zeitliche Ableitungen vorkommen, werden Sobolev–Räume benötigt, die auch die Zeitableitung behandeln.

Definition 2.41 (Verallgemeinerte Zeitableitung). Sei $v \in L_2(0, T; X)$, dann heißt $w \in L_2(0, T; X')$ verallgemeinerte Zeitableitung, falls

$$\int_0^T v(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) dt = - \int_0^T w(t) \varphi(t) dt$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty((0, T))$ gilt. Man schreibt $w(t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t)$.

Definition 2.42 (Gelfandscher Dreier). Sei V ein reeller, separabler und reflexiver Banachraum und H ein reeller, separabler Hilbertraum. Das Triple

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

definiert einen Gelfandschen Dreier, falls V dicht in H eingebettet ist und eine Konstante $c > 0$ existiert sodass $\|v\|_H \leq c \|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt.

Mehr über Gelfandsche Dreier findet man in [34].

2 Analysis

Beispiel 2.43. Sei $V = H_0^1(\Omega)$ und $H = L_2(\Omega)$. Dann ist durch

$$H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)'$$

ein Gelfandscher Dreier gegeben.

Lemma 2.44. Sei durch V und H ein Gelfandscher Dreier definiert. Dann ist der Raum

$$H^1(0, T; V, H) := \left\{ v \in L_2(0, T; V) \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(0, T; V') \right\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{H^1(0, T; V, H)} = \left\{ \|v\|_{L_2(0, T; V)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; V')}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ein Banachraum.

Lemma 2.45. Sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfandscher Dreier. Dann gilt

$$H^1(0, T; V, H) \subset C([0, T], H)$$

und es existiert ein $c > 0$ sodass

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_H \leq c \|v\|_{H^1(0, T; V, H)}$$

für alle $v \in H^1(0, T; V, H)$ gilt.

Für den Beweis von Lemma 2.44 und von Lemma 2.45 sei auf [34] verwiesen.

Es sind somit alle nötigen Hilfsmittel für die Lösungstheorie der Navier–Stokes–Gleichungen eingeführt. Bevor jedoch die Navier–Stokes–Gleichungen direkt betrachtet werden, werden einige Aussagen über abstrakte gemischte Variationsprobleme gezeigt, die dann auf die Navier–Stokes–Gleichungen angewandt werden.

2.3 Das gemischte Variationsproblem

In diesem Abschnitt wird ein gemischtes Variationsproblem betrachtet und gezeigt, welche Voraussetzungen gelten müssen, damit dieses Problem lösbar ist. Dabei stößt man auf den Begriff der inf–sup–Bedingung, welche detailliert in [7] behandelt wird.

Es seien V und Q zwei reelle Hilberträume mit den zugehörigen Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_Q$. Weiters sei

$$a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und linear im zweiten Argument,

$$b(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

2.3 Das gemischte Variationsproblem

sei stetig und bilinear.

Als Ausgangsproblem wird das folgende Variationsproblem betrachtet.

Sei $f \in V'$, gesucht sind $u \in V$ und $p \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= f(v) \\ b(u, q) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

für alle $v \in V, q \in Q$.

Dieses Variationsproblem ist äquivalent zur folgenden Operatorgleichung.

Sei $f \in V'$, gesucht sind $u \in V$ und $p \in Q$, sodass

$$\begin{aligned} Au + B'p &= f \\ Bu &= 0 \end{aligned}$$

in V' beziehungsweise in Q' erfüllt ist.

Die obigen Operatoren A und B sind definiert als

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V' & \text{mit } \langle Au, v \rangle_{V' \times V} &:= a(u, v) \quad \forall v \in V, \\ B : V &\rightarrow Q' & \text{mit } \langle Bu, q \rangle_{Q' \times V} &:= b(u, q) \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

und der adjungierte Operator B' , der definiert ist als

$$B' : Q \rightarrow V' \quad \text{mit } \langle v, B'p \rangle_{V \times V'} := b(v, p) \quad \forall v \in V.$$

Für die weitere Untersuchung der Lösbarkeit von (2.3.1) sei die Menge V_0 definiert als der Kern des Operators B

$$V_0 := \text{Ker}(B) = \{v \in V \mid Bv = 0\}.$$

Beschränkt man den Ansatzraum und den Testraum in Problem (2.3.1) auf $V_0 \subset V$, so lautet das resultierende Variationsproblem wie folgt.

Sei $f \in V'$, gesucht ist $u \in V_0$ als Lösung von

$$a(u, v) = f(v) \tag{2.3.2}$$

für alle $v \in V_0$.

2 Analysis

Sei $u \in V$ und $p \in Q$ eine Lösung des Variationsproblems (2.3.1). Dann gilt $u \in V_0$ und u löst das Problem (2.3.2). Die Frage ist nun, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, damit zu einer gegebenen Lösung $u \in V_0$ von Problem (2.3.2) ein eindeutiges $p \in Q$ gefunden werden kann, sodass u und p das Problem (2.3.1) lösen. Eine erste wichtige Aussage liefert das folgende Lemma.

Lemma 2.46. Sei $b(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit dem zugehörigen Operator $B : V \rightarrow Q'$. Weiters sei die Menge \mathring{V} definiert als

$$\mathring{V} := \{f \in V' \mid \langle f, v \rangle_{V' \times V} = 0 \quad \forall v \in V_0\}.$$

Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

1) Es existiert eine Konstante $\beta > 0$, sodass

$$\inf_{0 \neq q \in Q} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, q)}{\|q\|_Q \|v\|_V} \geq \beta. \quad (2.3.3)$$

Diese Bedingung wird auch als **inf-sup-Bedingung** bezeichnet.

2) Der Operator B' ist ein Isomorphismus von Q nach \mathring{V} und es gilt

$$\|B'q\|_{Q'} \geq \beta \|q\|_Q \quad \text{für alle } q \in Q.$$

3) Der Operator B ist ein Isomorphismus von V_0^\perp nach Q' und es gilt

$$\|Bv\|_{V'} \geq \beta \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V_0^\perp,$$

mit

$$V_0^\perp = \{v \in V \mid (v, w)_V = 0 \quad \forall w \in V_0\}.$$

Für den Beweis von Lemma 2.46 sei auf [7, 14] verwiesen.

Bemerkung 2.47. Die inf-sup-Bedingung (2.3.3) ist äquivalent zu

$$\beta \|q\|_Q \leq \sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \quad \text{für alle } q \in Q.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.46 kann der folgende Satz über die Lösbarkeit des Variationsproblems (2.3.1) gezeigt werden.

Satz 2.48. Es existiert eine eindeutige Lösung $u \in V$ und $p \in Q$ des Problems (2.3.1), wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind.

(V1) Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die inf-sup-Bedingung (2.3.3).

(V2) Das Problem (2.3.2) besitzt eine eindeutige Lösung $u \in V_0$.

Beweis. Nach Voraussetzung (V2) besitzt das Variationsproblem (2.3.2) eine eindeutige Lösung $u \in V_0$, sodass

$$a(u, v) = f(v)$$

für alle $v \in V_0$ erfüllt ist. Somit erfüllt u die Operatorgleichung $Au = f$ in V'_0 .

Weiters gilt $f - Au \in \mathring{V}$, da

$$\langle f - Au, v \rangle = f(v) - a(u, v) = 0$$

für alle $v \in V_0$ gilt.

Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt nach Voraussetzung (V1) die inf–sup–Bedingung (2.3.3), und nach Lemma 2.46 ist der Operator B' ein Isomorphismus von Q nach \mathring{V} . Es existiert also für alle $v \in \mathring{V}$ ein eindeutiges $q \in Q$, sodass $B'p = v$ in V' gilt. Aus $f - Au \in \mathring{V}$ folgt die Existenz von $p \in Q$, sodass

$$B'p = f - Au$$

in V' .

Da $u \in V_0$, ist auch

$$Bu = 0$$

in Q' erfüllt.

Somit folgt die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems (2.3.1). □

Mit Hilfe von Satz 2.48 und einer Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$, die die inf–sup–Bedingung (2.3.3) erfüllt, sind somit Problem (2.3.1) und Problem (2.3.2) äquivalent. Im nächsten Abschnitt werden diese Aussagen über abstrakte gemischte Variationsprobleme auf die Navier–Stokes–Gleichungen angewandt.

2.4 Stationäre Navier–Stokes–Gleichungen

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Lipschitzgebiet mit polygonalem Rand ($d = 2$) beziehungsweise polyhedralem Rand ($d = 3$).

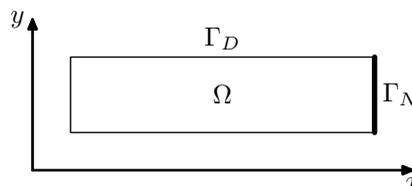


Abbildung 2.2: Beispiel für ein zweidimensionales Gebiet mit polygonalem Rand.

Weiters gelte die folgende Notation.

$$\mathbf{V} := \mathbf{H}_{0,D}^1(\Omega) = \prod_{i=1}^d H_{0,D}^1(\Omega), \quad Q := L_2(\Omega), \quad \mathbf{Q} := \mathbf{L}_2(\Omega) = \prod_{i=1}^d L_2(\Omega).$$

2.4.1 Variationsformulierung

Die klassische Formulierung der stationären Navier–Stokes–Gleichungen lautet wie folgt.

Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ und $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, sodass

$$-\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (2.4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad (2.4.3)$$

$$-\nu \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{n} + p(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad (2.4.4)$$

erfüllt ist.

Seien nun $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ und $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung des obigen Problems. Multipliziert man die Impulserhaltungsgleichung (2.4.1) mit einer beliebigen Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und integriert über das Gebiet Ω , so gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx &= \int_{\Omega} \left(-\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\nabla p(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

Integriert man im nächsten Schritt den ersten und dritten Term der rechten Seite partiell, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx &= \nu \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx - \nu \int_{\Gamma} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, ds_x \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx + \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{x}) \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, ds_x. \end{aligned}$$

Das Einbinden der Randbedingungen (2.4.3) und (2.4.4) liefert die endgültige Darstellung

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx = \nu \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx + \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx.$$

Nach Multiplikation einer beliebigen Testfunktion $q \in Q$ und Integration über Ω lautet die Kontinuitätsgleichung (2.4.2)

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) q(\mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Das Variationsproblem der stationären Navier–Stokes–Gleichungen lautet also wie folgt.

Sei $f \in \mathbf{V}'$, gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ und $p \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \\ -b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$.

Die Bilinearformen sind gegeben als

$$a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx, \tag{2.4.6}$$

$$b(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx, \tag{2.4.7}$$

sowie die Trilinearform

$$c(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx. \tag{2.4.8}$$

Lemma 2.49. *Seien $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, dann gilt für die Trilinearform (2.4.8) die Abschätzung*

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1.$$

Beweis. Die Trilinearform (2.4.8) kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} w_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) \, dx. \end{aligned}$$

2 Analysis

Nach Bemerkung 2.33 ist für $d = 2, 3$ und $q \in [1, 6]$ der Raum $H^1(\Omega)$ stetig in $L_q(\Omega)$ eingebettet und nach Satz 2.32 existiert eine Konstante $c_E > 0$, sodass

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c_E \|u\|_1 \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega)$$

gilt.

Wendet man zweimal die Hölder-Ungleichung (2.2.1) an, zuerst mit $p = q = 2$ und dann mit $p = 3, q = \frac{3}{2}$, so folgt für die Summanden die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| w_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) \right| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |w_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |w_i(\mathbf{x})|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_{\Omega} |v_j(\mathbf{x})|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|w_i\|_{L_6(\Omega)} \|v_j\|_{L_3(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit folgt für die Trilinearform die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} w_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \left| w_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|w_i\|_{L_6(\Omega)} \|v_j\|_{L_3(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wendet man nun zweimal die Hölder-Ungleichung auf die Summen mit jeweils $p = q = 2$

an, so folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
 |c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \sum_{i=1}^d \|w_i\|_{L_6(\Omega)} \left(\left(\sum_{j=1}^d \|v_j\|_{L_3(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= c_E \|\mathbf{v}\|_1 \sum_{i=1}^d \|w_i\|_{L_6(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c_E^2 \|\mathbf{v}\|_1 \sum_{i=1}^d \|w_i\|_1 \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c_E^2 \|\mathbf{v}\|_1 \left(\sum_{i=1}^d \|w_i\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c_E^2 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1.
 \end{aligned}$$

□

2.4.2 inf–sup–Bedingung

Ziel ist es, die Aussagen über abstrakte gemischte Variationsprobleme auf die Variationsformulierung (2.4.5) anzuwenden. Nach Satz 2.48 ist das Problem (2.4.5) lösbar, wenn die Bilinearform (2.4.7) die inf–sup–Bedingung erfüllt und das Problem (2.4.9) eine Lösung in $\mathbf{V}_0 := \text{Ker}(B)$ besitzt.

Sei $f \in \mathbf{V}'$, gesucht ist $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ als Lösung von

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad (2.4.9)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$.

Ein wichtiges Hilfsmittel für den Nachweis der inf–sup–Bedingung ist das Lemma 2.50.

Lemma 2.50. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt für alle $q \in L_2(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\|q\|_0 \leq c_1 \left(\|\nabla q\|_{-1} + \|q\|_{-1} \right)$$

mit $c_1 > 0$.

Weiters gilt für Funktionen $q \in L_2^0(\Omega) := \left\{ p \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, dx = 0 \right\}$ die Abschätzung

$$\|q\|_0 \leq c_2 \|\nabla q\|_{-1}$$

mit $c_2 > 0$.

2 Analysis

Für den Beweis sei auf [10, 18] verwiesen.

Bei Randwertproblemen mit reinen Dirichlet-Randbedingungen wird für den Druck nicht der $L_2(\Omega)$ als Ansatzraum gewählt, sondern der $L_2^0(\Omega)$, um die Eindeutigkeit zu gewährleisten. Mit Lemma 2.50 lässt sich folgende Aussage zeigen.

Lemma 2.51. Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot) : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_2^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$b(\mathbf{v}, q) := - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) \, dx$$

erfüllt die inf-sup-Bedingung.

Beweis. Nach Bemerkung 2.47 ist die inf-sup-Bedingung äquivalent zu

$$\beta \|q\|_0 \leq \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1} \quad \text{für alle } q \in L_2^0(\Omega)$$

mit $\beta > 0$.

Sei $q \in L_2^0(\Omega)$, dann gilt nach Lemma 2.50 die Ungleichung

$$\|q\|_0 \leq c_2 \|\nabla q\|_{-1}.$$

Diese Ungleichung kann wie folgt umgeformt werden.

$$\|q\|_0 \leq c_2 \|\nabla q\|_{-1} = c_2 \left(\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{(\nabla q, \mathbf{v})_0}{\|\mathbf{v}\|_1} \right).$$

Mittels partieller Integration und der Eigenschaft, dass $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet, gilt

$$\|q\|_0 \leq c_2 \|\nabla q\|_{-1} = c_2 \left(\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{-(q, \nabla \cdot \mathbf{v})_0}{\|\mathbf{v}\|_1} \right).$$

Daraus folgt

$$\beta \|q\|_0 \leq \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{-(q, \nabla \cdot \mathbf{v})_0}{\|\mathbf{v}\|_1} = \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1}$$

und somit die inf-sup-Bedingung. □

Für gemischte Randbedingungen kann das folgende Lemma angegeben werden.

Lemma 2.52. *Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$b(\mathbf{v}, q) := - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) dx$$

erfüllt die inf–sup–Bedingung.

Hierfür sei auf [15] verwiesen.

Mit Hilfe von Lemma 2.52 und Satz 2.48 folgt die Lösbarkeit des Variationsproblems (2.4.5) aus der Lösbarkeit des Variationsproblems (2.4.9), die noch zu zeigen bleibt.

2.4.3 Lösbarkeit und Eindeutigkeit des Variationsproblems

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die inf–sup–Bedingung für die Bilinearform (2.4.7) erfüllt ist. Somit ist noch die Lösbarkeit von Problem (2.4.9) zu zeigen, sowie die Eindeutigkeit der Lösung. Für den Nachweis der Lösbarkeit und der Eindeutigkeit von Problem (2.4.9) benötigt man den folgenden Satz. Als Referenz für diesen Abschnitt sei auf [3] verwiesen.

Satz 2.53 (Satz über lokale Diffeomorphismen). *Seien X und Y zwei Banachräume und L eine Abbildung von X nach Y . Weiters gelte für $x_0 \in X$ und für eine Umgebung $V \subset X$ von x_0 , dass $L \in C^1(V, Y)$. Falls die Fréchet–Ableitung $DL(x_0) : X \rightarrow Y$ bijektiv ist, dann existiert eine Umgebung $U \subset V$ von x_0 und eine Umgebung $W \subset Y$ von $L(x_0)$, sodass $L : U \rightarrow W$ bijektiv ist.*

Für den Beweis sei auf [8] verwiesen.

Ziel ist es, Satz 2.53 über lokale Diffeomorphismen auf das Problem (2.4.9) anzuwenden. Dazu benötigt man eine passende Abbildung sowie deren Fréchet–Ableitung. Dies motiviert die folgenden Definitionen.

Sei nun $A : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ definiert als

$$\langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

und $C : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ als

$$\langle C(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} := c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0.$$

Weiters sei $N : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ definiert als die Summe der beiden Operatoren

$$N(\mathbf{u}) := A(\mathbf{u}) + C(\mathbf{u}). \tag{2.4.10}$$

Das Problem (2.4.9) ist äquivalent zur folgenden Operatorgleichung.

2 Analysis

Sei $f \in \mathbf{V}'$, gesucht ist $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$, sodass

$$N(\mathbf{u}) = f \quad (2.4.11)$$

in \mathbf{V}' erfüllt ist.

Da auch die Fréchet–Ableitung von N benötigt wird, müssen weitere Operatoren definiert werden.

Sei $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$, dann ist $C_{\mathbf{w}} : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ definiert als

$$\langle C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} := c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

und sei $G_{\mathbf{w}} : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ als

$$G_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) := A(\mathbf{u}) + C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) \quad (2.4.12)$$

definiert. Damit kann der folgende Satz formuliert werden.

Satz 2.54. *Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$, dann ist der in (2.4.12) gegebene Operator $G_{\mathbf{u}}$ die Fréchet–Ableitung des durch (2.4.10) gegebenen Operators N im Punkt \mathbf{u} und $G_{\mathbf{u}} \in C^1(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}')$.*

Beweis. Für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \langle N(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= \\ &= \langle A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + C(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - A(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u}) - A(\mathbf{w}) - C_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \\ &= \langle C(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - C(\mathbf{u}) - C_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \\ &= c(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Betrag des Dualitätsproduktes mit Hilfe von Lemma 2.49 abschätzen als

$$|\langle N(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}| = |c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{w}\|_1^2 \|\mathbf{v}\|_1.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung gilt für die Norm

$$\|N(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{|\langle N(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}|}{\|\mathbf{v}\|_1} \leq c \|\mathbf{w}\|_1^2$$

und somit folgt aus

$$\lim_{\|\mathbf{w}\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|N(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\|_{\mathbf{V}'}}{\|\mathbf{w}\|_1} \leq \lim_{\|\mathbf{w}\|_1 \rightarrow 0} c \|\mathbf{w}\|_1 = 0,$$

dass $G_{\mathbf{u}}$ die Fréchet–Ableitung von N im Punkt \mathbf{u} ist.

Für den Nachweis der Stetigkeit seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{V}_0$ beliebig. Somit gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} & \langle G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_1) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_2), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \\ &= \langle A(\mathbf{w}_1) + C_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_1) - A(\mathbf{w}_2) + C_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_2), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \\ &= a(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{w}_2, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) - c(\mathbf{w}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Der Betrag lässt sich wieder mit Lemma 2.49 abschätzen als

$$|\langle G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_1) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_2), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}| \leq (2c\|\mathbf{u}\|_1 + \nu)\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_1\|\mathbf{v}\|_1,$$

und somit folgt die Stetigkeit aus

$$\|G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_1) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_2)\|_{V'} = \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{|\langle G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_1) - G_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_2), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}|}{\|\mathbf{v}\|_1} \leq (2c\|\mathbf{u}\|_1 + \nu)\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_1.$$

□

Bemerkung 2.55. Um Satz 2.53 auf den Operator N anwenden zu können, benötigt man die Bijektion der Fréchet–Ableitung. Dazu betrachte man $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Dann gilt für die Fréchet–Ableitung

$$DN(\mathbf{u})|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}} = G_{\tilde{\mathbf{u}}} = G_{\mathbf{0}} = A.$$

Nach dem Satz von Lax–Milgram (siehe [19]) besitzt A für alle rechten Seiten eine eindeutige Lösung, woraus die Bijektion folgt.

Satz 2.56. Sei $f \in \mathbf{V}'$ mit $\|f\|_{\mathbf{V}'}$ hinreichend klein, dann hat das Problem (2.4.5) eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ und $p \in Q$.

Beweis. Nach Lemma 2.52 erfüllt die Bilinearform (2.4.7) die inf–sup–Bedingung. Satz 2.48 besagt, dass somit die eindeutige Lösbarkeit von Problem (2.4.5) aus der eindeutigen Lösbarkeit von Problem (2.4.9) folgt. Das Problem (2.4.9) ist äquivalent zur Operatorgleichung (2.4.11)

$$N(\mathbf{u}) = f.$$

Für $\tilde{f} = 0$ erfüllt $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ die Operatorgleichung

$$N(\tilde{\mathbf{u}}) = 0.$$

Nach Satz 2.54 ist die Fréchet–Ableitung von N im Punkt $\tilde{\mathbf{u}}$ gegeben als $G_{\mathbf{0}} = A$, die nach Bemerkung 2.55 eine Bijektion ist. Nach Satz 2.53 existiert eine Umgebung $W \subset \mathbf{V}'$ von \tilde{f} und eine Umgebung $U \subset \mathbf{V}_0$ von $\tilde{\mathbf{u}}$, sodass $N : U \rightarrow V$ eine Bijektion ist. Somit folgt für ein $f \in V'$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{\mathbf{V}'} = \|f\|_{\mathbf{V}'}$ hinreichend klein, die Existenz eines eindeutigen $\mathbf{u} \in U$, sodass $N(\mathbf{u}) = f$ erfüllt ist. Daraus folgt die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems (2.4.5). □

Eine allgemeinere Aussage liefert der folgende Satz.

Satz 2.57. Sei $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}$ eine Lösung der Operatorgleichung

$$N(\mathbf{u}_1) = f_1$$

mit $f_1 \in \mathbf{V}'$. Weiters sei die Fréchet–Ableitung von N im Punkt \mathbf{u}_1 injektiv, dann existiert für $f \in \mathbf{V}'$, mit $\|f_1 - f\|_{\mathbf{V}'}$ hinreichend klein, ein eindeutiges $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, sodass

$$N(\mathbf{u}) = f.$$

Beweis. Um hier den Satz über lokale Diffeomorphismen anzuwenden, sind dessen Voraussetzungen zu überprüfen. Nach Satz 2.54) ist der Operator $G_{\mathbf{u}_1}$ die Fréchet–Ableitung von N im Punkt \mathbf{u}_1 und es gilt $G_{\mathbf{u}_1} \in C^1(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}')$. Nach (2.4.12) lässt sich $G_{\mathbf{u}_1}$ schreiben als

$$G_{\mathbf{u}_1} = A + C_{\mathbf{u}_1}.$$

In [3] wird gezeigt, dass der Operator $C_{\mathbf{u}_1} : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'$ kompakt ist. Somit ist $G_{\mathbf{u}_1}$ gegeben als die Summe eines bijektiven Operators und eines kompakten Operators. Aus der Injektivität von $G_{\mathbf{u}_1}$ folgt die Surjektivität (siehe [29]) und somit ist $G_{\mathbf{u}_1}$ bijektiv. Es sind also alle Voraussetzungen für Satz 2.54 erfüllt. \square

Damit wurde gezeigt, dass das zu den stationären Navier–Stokes–Gleichungen gehörige Variationsproblem (2.4.5) eine eindeutige Lösung für genügend kleine rechte Seiten besitzt. Im nächsten Abschnitt werden die instationären Navier–Stokes–Gleichungen betrachtet und auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung untersucht.

2.5 Instationäre Navier–Stokes–Gleichungen

Wie im vorherigen Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Lipschitzgebiet mit polygonalem Rand ($d = 2$) beziehungsweise polyhedralem Rand ($d = 3$).

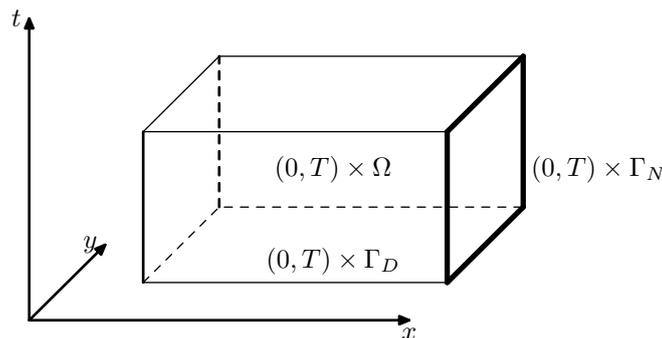


Abbildung 2.3: Beispiel für einen zweidimensionalen Raum–Zeit–Zylinder.

In diesem Kapitel werden Aussagen über die Lösbarkeit der instationären Navier–Stokes–Gleichungen gegeben. Dazu wird zuerst aus der klassischen Formulierung der instationären Navier–Stokes–Gleichungen die zugehörige Variationsformulierung hergeleitet. Als Referenz für diesen Abschnitt sei auf [4, 5] verwiesen.

2.5.1 Variationsformulierung

Die klassische Formulierung der instationären Navier–Stokes–Gleichungen lautet wie folgt.

Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1([0, T]) \times \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ und $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, sodass

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \nu \Delta \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \left(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \nabla p(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (2.5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (2.5.2)$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } (0, T) \times \Gamma_D \quad (2.5.3)$$

$$-\nu \left(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \mathbf{n} + p(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } (0, T) \times \Gamma_N \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (2.5.5)$$

erfüllt ist.

Die Herleitung der Variationsformulierung verläuft analog zur stationären Navier–Stokes–Gleichung. Angenommen $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1([0, T]) \times \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ und $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ lösen das obige Problem. Für ein fixes $t \in (0, T)$ kann die Impulserhaltungsgleichung (2.5.1) mit einer beliebigen Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ multipliziert und anschließend über Ω integriert werden. Nach partieller Integration und Einarbeitung der Randbedingungen (2.5.3) und (2.5.4) folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx + \nu \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx + \nu \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\left(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) \left(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right) \, dx. \end{aligned}$$

Für die Kontinuitätsgleichung (2.5.2) folgt analog zum stationären Fall die Darstellung

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) q(\mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Das Variationsproblem der instationären Navier–Stokes–Gleichungen lautet zu einem Zeitpunkt t wie folgt.

Sei $f(t) \in \mathbf{V}'$, gesucht sind $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{V}$ und $p(t) \in Q$, sodass

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) &= f(t)(\mathbf{v}) \\ -b(\mathbf{u}(t), q) &= 0 \\ \mathbf{u}(0) &= \dot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$ und für fast alle $t \in (0, T)$ erfüllt ist.

Um auch die Zeitableitung sinnvoll behandeln zu können, wird \mathbf{u} in $H^1(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{Q})$ gesucht, wobei \mathbf{V} und \mathbf{Q} einen Gelfandschen Dreier (siehe Definition 2.42) bilden. Nach Lemma 2.45 ist $\mathbf{u} \in C([0, T], \mathbf{Q})$ und somit ist auch die Formulierung der Anfangsbedingung $\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{Q}$ sinnvoll definiert. Näheres über die Herleitung von Variationsproblemen für parabolischen Differentialgleichungen findet man in [34].

Sei $f \in L_2(0, T; \mathbf{V}')$ und $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{Q}$. Gesucht ist $\mathbf{u} \in H^1(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{Q})$, sodass

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) &= f(t)(\mathbf{v}) \\ -b(\mathbf{u}(t), q) &= 0 \\ \mathbf{u}(0) &= \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$ und für fast alle $t \in (0, T)$ erfüllt ist.

Wie im stationären Fall kann auch für den instationären Fall das reduzierte Problem betrachtet werden. Das heißt, die Bedingung $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{V})$ wird durch $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{V}_0)$ ersetzt. Somit lautet das resultierende Variationsproblem wie folgt.

Sei $f \in L_2(0, T; \mathbf{V}')$, gesucht ist $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{V}_0)$ mit $\mathbf{u}_t \in L_2(0, T; \mathbf{V}')$, sodass

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= f(t)(\mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(0) &= \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ und für fast alle $t \in (0, T)$ erfüllt ist.

Im nächsten Abschnitt wird das Variationsproblem (2.5.7) auf Lösbarkeit untersucht. Es wird gezeigt, dass eine Lösung \mathbf{u} unter gewissen Voraussetzungen an die Daten existiert. Anschließend wird gezeigt, dass diese Lösung \mathbf{u} eindeutig ist.

2.5.2 Lösbarkeit und Eindeutigkeit des Variationsproblems

Um Aussagen über die Existenz von Lösungen zu erhalten, betrachtet man den Raum

$$\mathbf{D} := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \mid \exists \mathbf{w} \in \mathbf{Q}_0 : (\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = (\mathbf{w}, \mathbf{v})_0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \} \subset \mathbf{V}_0$$

mit

$$\mathbf{Q}_0 := \{u \in \mathbf{Q} \mid b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}.$$

Die Menge \mathbf{D} definiert einen Hilbertraum mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{\mathbf{D}} := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)_0,$$

für $\mathbf{u}_i \in \mathbf{D}$ und $\mathbf{w}_i \in \mathbf{Q}_0$ sodass die Bedingung in der Definition der Menge \mathbf{D} erfüllt ist.

Satz 2.58 (Lösbarkeit). *Sei $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{D}$ und $\mathbf{f} \in L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)$. Dann existiert ein $T^* \leq T$ und ein $\mathbf{u} \in L_2(0, T^*; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T^*; \mathbf{V}_0)$ mit $\mathbf{u}_t \in L_2(0, T^*; \mathbf{Q}_0)$, sodass \mathbf{u} das Variationsproblem (2.5.7) für fast alle $t \in (0, T^*)$ löst.*

Beweis. Idee dieses Beweises ist es, den Fixpunktsatz von Brouwer (siehe [12]) auf das Variationsproblem (2.5.6) anzuwenden. Dazu betrachtet man den Ansatz

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{u}}$$

mit $\mathbf{w} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$ und $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$.

Aus $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{D} \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{Q}_0$ folgt, dass

$$\|\dot{\mathbf{u}}\|_{L_2(0, T; \mathbf{D})} = \left\{ \int_0^T \|\dot{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{D}}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}} \|\dot{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{D}}$$

sowie

$$\|\dot{\mathbf{u}}\|_{L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\dot{\mathbf{u}}\|_1 = \|\dot{\mathbf{u}}\|_1.$$

Somit gilt $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$.

Mit diesem Ansatz gilt $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$, die Anfangsbedingung $\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{u}_t = \mathbf{w}_t$.

Setzt man diesen Ansatz in das Problem (2.5.6) ein, so lautet die Variationsformulierung wie folgt.

Gesucht ist ein $\mathbf{w} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_0 \\ \mathbf{w}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ und für fast alle $t \in (0, T)$.

Im nächsten Schritt definiert man die reflexiven Banachräume

$$\mathbf{Y}_T := \{\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \mid \mathbf{u}_t \in L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)\}$$

2 Analysis

mit der zugehörigen Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}_T} := \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathbf{D})} + \|\mathbf{u}_t\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)},$$

sowie (für $d = 3$)

$$\mathbf{X}_T = L_4(0, T; \mathbf{W}_2^{\frac{11}{8}}(\Omega)) \cap L_8(0, T; \mathbf{W}_{\frac{24}{11}}^1(\Omega))$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_T} = \|\mathbf{u}\|_{L_4(0,T;\mathbf{W}_2^{\frac{11}{8}}(\Omega))} + \|\mathbf{u}\|_{L_8(0,T;\mathbf{W}_{\frac{24}{11}}^1(\Omega))}.$$

Die genaue Definition des Raumes \mathbf{X}_T und der zugehörigen Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{X}_T}$ findet man in [5] ($d = 2$) und in [4] ($d = 3$). Weiters wird in den Referenzen auch die kompakte Einbettung $\mathbf{Y}_T \subset \mathbf{X}_T$ gezeigt, sowie die Eigenschaften des folgenden Operators.

Sei nun F ein Operator von \mathbf{X}_T nach $L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)$ definiert durch

$$\begin{aligned} (F(\tilde{\mathbf{w}})(t), \mathbf{v})_0 &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_0 - a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - c(\tilde{\mathbf{w}}(t), \tilde{\mathbf{w}}(t), \mathbf{v}) \\ &\quad - c(\tilde{\mathbf{w}}(t), \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - c(\dot{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}(t), \mathbf{v}) - c(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dieser Operator ist stetig von \mathbf{X}_T nach $L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|F(\tilde{\mathbf{w}})\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)} \leq c_1(T) + c_2(T)\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{X}_T} + c_3(T)\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{X}_T}^2 \quad (2.5.8)$$

mit $c_1(T) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$.

In [5] wurde folgende Aussage über die Lösbarkeit des Stokes–Problems gezeigt.

Für alle $\mathbf{f} \in L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)$ und $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}_0$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$ mit $\mathbf{u}_t \in L_2(0, T; \mathbf{Q}_0)$, sodass

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_0 \\ \mathbf{u}(0) &= \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ und für fast alle $t \in (0, T)$ erfüllt ist. Weiters gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;\mathbf{D})} + \|\mathbf{u}\|_{L_\infty(0,T;\mathbf{V}_0)} + \|\mathbf{u}_t\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)} \leq \tilde{c} \left(\|\mathbf{f}\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)} + \|\dot{\mathbf{u}}\|_1 \right). \quad (2.5.10)$$

Im nächsten Schritt sei S ein Operator von \mathbf{X}_T nach \mathbf{Y}_T definiert durch

$$S(\tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}$$

mit \mathbf{w} löst das Problem (2.5.9) mit der rechten Seite $F(\tilde{\mathbf{w}})$, das heißt

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) &= (F(\tilde{\mathbf{w}})(t), \mathbf{v})_0 \\ \mathbf{w}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ und für fast alle $t \in (0, T)$.

Mit (2.5.10) gilt die Abschätzung

$$\|S(\tilde{\mathbf{w}})\|_{\mathbf{Y}_T} = \|S(\tilde{\mathbf{w}})\|_{L_2(0,T;\mathbf{D})} + \|S(\tilde{\mathbf{w}})_t\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)} \leq \tilde{c}\|F(\tilde{\mathbf{w}})\|_{L_2(0,T;\mathbf{Q}_0)}$$

und aus (2.5.8) folgt die Stetigkeit des Operators S .

Mit der kompakten Einbettung $\mathbf{Y}_T \subset\subset \mathbf{X}_T$ folgt $S : \mathbf{X}_T \rightarrow \mathbf{Y}_T \subset\subset \mathbf{X}_T$ und für ein genügend kleines $T^* \leq T$ und ein genügend großes R gilt

$$S : B_R(T^*) \rightarrow B_R(T^*)$$

mit $B_R(T^*) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{Y}_{T^*} \mid \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Y}_{T^*}} \leq R\}$.

Somit ist der Operator S eine stetige Selbstabbildung auf einem reflexiven Banachraum und es kann der Fixpunktsatz von Brouwer angewandt werden. \square

Es wurde somit gezeigt, dass für das Problem (2.5.7) eine Lösung \mathbf{u} existiert. Jedoch folgt aus dem Fixpunktsatz von Brouwer nur die Existenz einer Lösung, die Eindeutigkeit dieser Lösung ist noch zu zeigen. Doch für den Nachweis der Eindeutigkeit benötigt man einen Spezialfall der Youngschen Ungleichung.

Lemma 2.59 (Young'sche–Ungleichung). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ nichtnegativ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $\delta > 0$*

$$ab \leq \delta \frac{a^p}{p} + \delta^{1-q} \frac{b^q}{q}. \quad (2.5.11)$$

Beweis. Der Beweis beruht auf der Konkavität der Logarithmusfunktion.

$$\ln(ab) = \ln\left(ab \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \ln(a\varepsilon) + \ln\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) = \frac{\ln(a^p \varepsilon^p)}{p} + \frac{\ln\left(\frac{b^q}{\varepsilon^q}\right)}{q} \leq \ln\left(\frac{a^p \varepsilon^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}\right)$$

Mit der Exponentialfunktion und $\varepsilon = \delta^{\frac{1}{p}}$ folgt nun

$$ab \leq \delta \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{\delta^{\frac{q}{p}} q}.$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt $\frac{q}{p} = q - 1$ und somit gilt

$$ab \leq \delta \frac{a^p}{p} + \delta^{1-q} \frac{b^q}{q}.$$

\square

Somit kann folgender Satz über die Eindeutigkeit formuliert und bewiesen werden.

2 Analysis

Satz 2.60 (Eindeutigkeit). Sei $\mathbf{u} \in L_2(0, T^*; \mathbf{D}) \cap L_\infty(0, T^*; \mathbf{V}_0)$ die nach Satz 2.58 existierende Lösung des Variationsproblems (2.5.7). Dann ist diese Lösung eindeutig.

Beweis. Seien \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 zwei Lösungen. Dann gilt für $\mathbf{z} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$

$$(\mathbf{z}_t(t), \mathbf{v})_0 + a(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{v}) = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ und für fast alle $t \in (0, T^*)$.

Mit $\mathbf{v} = \mathbf{z}(t)$ folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 + \frac{c_N}{\nu} \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 \leq |c(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t)) + c(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{z}(t))|.$$

Wie in Lemma 2.49 kann für die Trilinearform $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ die Abschätzung

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}$$

gezeigt werden.

Somit folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 + \frac{c_N}{\nu} \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 \leq c \left(\underbrace{\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \|\mathbf{z}(t)\|_1 \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}}_{=:(A_1)} + \underbrace{\|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2\|_1}_{=:(A_2)} \right).$$

Mit $p_0 = 6$, $p_1 = 2$, $\theta = \frac{1}{4}$ und Lemma 2.16 folgt

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 \right\} \leq \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_6(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|z_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Wendet man nun die Hölder-Ungleichung für Summen mit $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$ an, so folgt

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_6(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|z_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right\} &\leq \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_6(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{3}{4}} \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_6(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^d \|z_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_6(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_6(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{z}(t)\|_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \leq \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_6(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{z}(t)\|_0^{\frac{1}{4}} \leq c_E \|\mathbf{z}(t)\|_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{z}(t)\|_0^{\frac{1}{4}}. \quad (2.5.12)$$

Wendet man die Abschätzung (2.5.12) und die Youngsche–Ungleichung (2.5.11) mit $p = \frac{8}{7}$ und $q = 8$ auf den Ausdruck (A_1) an, so kann dieser abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \|\mathbf{z}(t)\|_1 \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} &\leq c_E \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \|\mathbf{z}(t)\|_1^{\frac{7}{4}} \|\mathbf{z}(t)\|_0^{\frac{1}{4}} \\ &\leq c_E \left(\frac{7}{8} \delta \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 + \frac{1}{8\delta^7} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^8 \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 \right). \end{aligned}$$

Mit $p = \frac{4}{3}$ und $q = 4$ folgt für den Ausdruck (A_2) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2\|_1 &\leq c_E \|\mathbf{u}_2(t)\|_1 \|\mathbf{z}(t)\|_1^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{z}(t)\|_0^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_E \left(\frac{3}{4} \delta \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 + \frac{1}{4\delta^3} \|\mathbf{u}_2(t)\|_1^4 \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 \right). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $\delta > 0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 + \frac{c_N}{\nu} \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 \leq \hat{c}_1 \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4} \right) \delta \|\mathbf{z}(t)\|_1^2 + \hat{c}_2(\delta) \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 \left(\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^8 + \|\mathbf{u}_2(t)\|_1^4 \right).$$

Wählt man $\delta > 0$ so, dass

$$\hat{c}_1 \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4} \right) \delta = \frac{c_N}{\nu}$$

gilt, dann folgt

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 \leq 2\hat{c} \|\mathbf{z}(t)\|_0^2 \left(\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^8 + \|\mathbf{u}_2(t)\|_1^4 \right).$$

Alle Voraussetzungen für das Gronwall Lemma (siehe [12]) sind erfüllt und es kann mit

$$y(s) := \|\mathbf{z}(s)\|_0^2$$

und

$$\beta(s) := 2\hat{c} \left(\|\mathbf{u}_1(s)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^8 + \|\mathbf{u}_2(s)\|_1^4 \right)$$

angewandt werden.

Somit gilt

$$y(s) \leq y(0) \exp \left(\int_0^s \beta(t) dt \right)$$

beziehungsweise

$$\|\mathbf{z}(s)\|_0^2 \leq \|\mathbf{z}(0)\|_0^2 \exp \left(2\hat{c} \int_0^s \left(\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}^8 + \|\mathbf{u}_2(t)\|_1^4 \right) dt \right).$$

für alle $s \in (0, T^*)$.

2 Analysis

Aus $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ folgt

$$\|\mathbf{z}(s)\|_0^2 = \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_0^2 = 0$$

und somit die Eindeutigkeit. □

Somit wurde gezeigt, dass das Variationsproblem (2.5.7) eine eindeutige Lösung besitzt. Wie im stationären Fall ist auch im instationären Fall die inf-sup-Bedingung erfüllt und somit folgt mit Satz 2.48 die Lösbarkeit von Problem (2.5.6). Im nächsten Kapitel werden diverse Diskretisierungsstrategien betrachtet, mit deren Hilfe die instationären Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden können.

3 Diskretisierung

In diesem Kapitel wird zunächst eine Möglichkeit vorgestellt, wie die Zeitableitung in den instationären Navier–Stokes–Gleichungen diskretisiert werden kann. Da aber der nichtlineare Term in den Gleichungen das Lösen erschwert, wird im zweiten Abschnitt eine mögliche Linearisierungsstrategie für die Navier–Stokes–Gleichungen behandelt. Im darauffolgenden Abschnitt wird die Finite–Elemente–Methode für das zeitdiskretisierte und linearisierte Problem betrachtet. Es wird auch gezeigt, wie das äquivalente lineare Gleichungssystem, für den zweidimensionalen Fall hergeleitet, aufgestellt wird. Zuletzt wird noch kurz ein Algorithmus angegeben, der beschreibt, wie die Lösung berechnet werden kann.

3.1 Zeitdiskretisierung

Für die Diskretisierung der Zeit gibt es viele Methoden, wie zum Beispiel Runge–Kutta–Methoden. Diese Ausarbeitung beschränkt sich jedoch auf die θ –Methode, dazu sei auf [22, 23] verwiesen.

Sei $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, man betrachte nun das folgende Anfangswertproblem.

Gesucht ist eine Funktion $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung von

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } 0 < t < T,$$

und $y(0) = \dot{y}$.

Um dieses Anfangswertproblem zu diskretisieren, wird das Intervall $(0, T)$ in N gleich große Teilintervalle zerlegt, sodass

$$[0, T] = \bigcup_{i=1}^N \overline{(t_{i-1}, t_i)},$$

mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. Die Intervalllänge ist gegeben als $t_i - t_{i-1} = \tau = \frac{T}{N}$ für alle $i = 1, \dots, N$. Natürlich ist auch die Zerlegung in verschieden große Teilintervalle möglich, der Einfachheit halber wird in dieser Ausarbeitung eine äquidistante Zerlegung betrachtet, siehe Definition 3.1.

3 Diskretisierung

Sei $0 \leq \theta \leq 1$, somit kann für $i = 0, \dots, N - 1$ der Wert $y^{i+1} := y(t_{i+1})$ bestimmt werden aus

$$\frac{y^{i+1} - y^i}{\tau} = \theta f(t_{i+1}, y^{i+1}) + (1 - \theta) f(t_i, y^i).$$

Für verschiedene θ ergeben sich verschiedene Methoden.

- Für $\theta = 0$ erhält man die explizite Euler Methode,

$$y^{i+1} = \tau f(t_i, y^i) + y^i.$$

- Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man die Crank–Nicolson–Methode,

$$y^{i+1} - \frac{\tau}{2} f(t_{i+1}, y^{i+1}) = \frac{\tau}{2} f(t_i, y^i) + y^i.$$

- Für $\theta = 1$ erhält man die implizite Euler Methode,

$$y^{i+1} - \tau f(t_{i+1}, y^{i+1}) = y^i.$$

In dieser Ausarbeitung wird lediglich der Fall $\theta = 1$ betrachtet. Für andere Werte können aber die folgenden Methoden analog übernommen werden.

Um weitere Beschreibungen zu vereinfachen gelte die folgende Definition.

Definition 3.1 (äquidistante Zerlegung \mathcal{Z}_N). Die Menge $\mathcal{Z}_N = \{t_i \mid i = 0, \dots, N\}$ heißt äquidistante Zerlegung des Intervalls $(0, T)$, falls

$$(Z1) \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T,$$

$$(Z2) \quad [0, T] = \bigcup_{i=1}^N \overline{(t_{i-1}, t_i)},$$

$$(Z3) \quad t_i - t_{i-1} = \frac{T}{N} =: \tau \text{ für } i = 1, \dots, N$$

gilt.

Ziel ist es nun, die θ -Methode mit $\theta = 1$ auf das Variationproblem (2.5.6) anzuwenden. Dazu betrachtet man eine äquidistante Zerlegung \mathcal{Z}_N . Weiters sei $\mathbf{u}^0 = \mathring{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$, dann muss für alle $i = 0, \dots, N - 1$ das folgende Variationproblem gelöst werden.

Sei $f^{i+1} = f(t_{i+1}) \in \mathbf{V}'$, gesucht sind $\mathbf{u}^{i+1} \in \mathbf{V}$ und $p^{i+1} \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v})_0 + \tau a(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v}) + \tau b(\mathbf{v}, p^{i+1}) &= \tau f^{i+1}(\mathbf{v}) + (\mathbf{u}^i, \mathbf{v})_0 \\ -b(\mathbf{u}^{i+1}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$.

Dabei bezeichnet \mathbf{u}^i die Funktion \mathbf{u} zum Zeitpunkt t_i , das heißt $\mathbf{u}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t_i, \mathbf{x})$. Somit muss für jeden Zeitpunkt t_i , $i = 1, \dots, N$, das Problem (3.1.1) gelöst werden. Jedoch handelt es sich dabei noch immer um ein nichtlineares Problem. Im nächsten Abschnitt wird daher eine Methode vorgestellt, mit der die Lösung eines nichtlinearen Problems durch Lösungen eines linearen Problems approximiert werden kann.

3.2 Linearisierung

Für die Linearisierung des Variationsproblems (3.1.1) gibt es mehrere Möglichkeiten, wie zum Beispiel die Stokes-Linearisierung, die Oseen-Linearisierung oder das Newton-Verfahren. Diese Ausarbeitung beschränkt sich auf das Newton-Verfahren. Als Referenz für diesen Abschnitt sei auf [22, 23] verwiesen.

3.2.1 Allgemeines Newton-Verfahren

Um die Funktionsweise des Newton-Verfahrens zu erläutern, sei $A : X \rightarrow Y$ ein nichtlinearer Operator. Man betrachte die folgende allgemeine Problemstellung.

Gesucht ist $x \in X$ als Lösung von

$$A(x) = b$$

mit einer rechten Seite $b \in Y$.

Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ist wie folgt gegeben.

Wähle ein $x_0 \in X$ als Startwert.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bestimme das Update $w_k \in X$ als Lösung von

$$DA(x_k)w_k = b - A(x_k)$$

und setze $x_{k+1} = x_k + w_k$.

In jedem Schritt des Newton-Verfahrens wird also die Richtung w_k gesucht, wobei $DA(x_k)w_k$ gegeben ist als Richtungsableitung von A im Punkt x_k in Richtung w_k . Für die Richtungsableitung gilt

$$DA(x_k)w_k = \left. \frac{d}{ds} A(x_k + sw_k) \right|_{s=0}.$$

Die Richtungsableitung kann in unendlichdimensionalen Räumen als durch das Gâteaux-Differential berechnet werden. Das Gâteaux-Differential ist nicht zu verwechseln mit dem Fréchet-Differential in Abschnitt 2.4.3.

Im folgenden Abschnitt wird die Methode des Newton-Verfahrens auf die zeitdiskretisierte Variationsformulierung (3.1.1) angewandt.

3.2.2 Newton–Verfahren für die Navier–Stokes–Gleichungen

Um das Newton–Verfahren für die zeitdiskretisierte Variationsformulierung (3.1.1) herzuleiten, betrachte man das folgende Variationsproblem mit einer Konstanten $\tau > 0$.

Sei $f \in \mathbf{V}'$ und $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$. Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ und $p \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 + \tau a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tau b(\mathbf{v}, p) &= \tau f(\mathbf{v}) + (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_0 \\ -b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$.

Setzt man in das Variationsproblem (3.2.1) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{i+1}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^i$ und $f = f^i$, dann entspricht dieses Problem dem Variationsproblem (3.1.1).

Um die Newton–Methode zu beschreiben, benötigt man einen Operator, auf den dieses Verfahren angewandt werden kann. Dazu betrachte man zunächst die Bilinearformen (2.4.6), (2.4.7), die Trilinearform (2.4.8) und die zugehörigen Operatoren

$$\begin{aligned} A : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}' & \text{mit} & & \langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_\Omega &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ B : \mathbf{V} &\rightarrow Q' & \text{mit} & & \langle B(\mathbf{u}), q \rangle_\Omega &:= b(\mathbf{u}, q) & \forall q \in Q, \\ B' : Q &\rightarrow \mathbf{V}' & \text{mit} & & \langle B'(p), \mathbf{v} \rangle_\Omega &:= b(\mathbf{v}, p) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ C : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}' & \text{mit} & & \langle C(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_\Omega &:= c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ M : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}' & \text{mit} & & \langle M(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_\Omega &:= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ C_{\mathbf{w}} : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}' & \text{mit} & & \langle C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_\Omega &:= c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

mit $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, sowie $f \in V'$.

Damit kann der Operator $\mathbf{N} : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbf{V}' \times Q'$ definiert werden als

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}) := \begin{pmatrix} M(\mathbf{u}) + \tau A(\mathbf{u}) + \tau C(\mathbf{u}) + \tau B'(p) \\ -B(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$.

Mit der rechten Seite

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \tau f + M(\tilde{\mathbf{u}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist die folgende Gleichung die zum Variationsproblem (3.2.1) äquivalente Operatorgleichung.

Gesucht ist $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$, sodass

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}$$

in $\mathbf{V}' \times Q'$ erfüllt ist.

Wie bei dem Newton-Verfahren für allgemeine Operatoren wird auch hier die Richtungsableitung des Operators \mathbf{N} in einem Punkt \mathbf{U} in Richtung \mathbf{W} benötigt.

Dazu sei $\mathbf{W} = (\mathbf{w}, r) \in \mathbf{V} \times Q$, damit lässt sich $\mathbf{N}(\mathbf{U} + s\mathbf{W})$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{U} + s\mathbf{W}) &= \begin{pmatrix} M(\mathbf{u} + s\mathbf{w}) + \tau A(\mathbf{u} + s\mathbf{w}) + \tau C(\mathbf{u} + s\mathbf{w}) + \tau B'(p + sr) \\ -B(\mathbf{u} + s\mathbf{w}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M(\mathbf{u}) + \tau A(\mathbf{u}) + \tau C(\mathbf{u}) + \tau B'(p) \\ -B(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} sM(\mathbf{w}) + s\tau A(\mathbf{w}) + s\tau C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) + s^2\tau C(\mathbf{w}) + s\tau B'(r) \\ -sB(\mathbf{w}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathbf{N}(\mathbf{U} + s\mathbf{W})|_{s=0} &= \begin{pmatrix} M(\mathbf{w}) + \tau A(\mathbf{w}) + \tau C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) + 2s\tau C(\mathbf{w}) + \tau B'(r) \\ -B(\mathbf{w}) \end{pmatrix} \Big|_{s=0} \\ &= \begin{pmatrix} M(\mathbf{w}) + \tau A(\mathbf{w}) + \tau C_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) + \tau B'(r) \\ -B(\mathbf{w}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Iterationsvorschrift wie folgt.

Wähle $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{V} \times Q$ als Startwert.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bestimme das Update $\mathbf{W}_k = (\mathbf{w}_k, r_k)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M(\mathbf{w}_k) + \tau A(\mathbf{w}_k) + \tau C_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{u}_k) + \tau B'(r_k) \\ -B(\mathbf{w}_k) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \tau f + M(\tilde{\mathbf{u}}) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M(\mathbf{u}_k) + \tau A(\mathbf{u}_k) + \tau C(\mathbf{u}_k) + \tau B'(p_k) \\ -B(\mathbf{u}_k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und setze $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \mathbf{W}_k$.

Schreibt man die obige Operatorgleichung um in das äquivalente Variationsproblem, so gilt für die Iterationsvorschrift und für Startwerte $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $p_0 \in Q$ die folgende Beschreibung.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bestimme die Updates $\mathbf{w}_k \in \mathbf{V}$ und $p_k \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_k, \mathbf{v})_0 + \tau a(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}) + \tau b(\mathbf{v}, r_k) &= \\ = \tau f(\mathbf{v}) + (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_0 - (\mathbf{u}_k, \mathbf{v})_0 - \tau a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - \tau c(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - \tau b(\mathbf{v}, p_k) & \\ -b(\mathbf{w}_k, q) = b(\mathbf{u}_k, q) & \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$.

Setze $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$ und $p_{k+1} = p_k + r_k$.

Fasst man die Terme geeignet zusammen, so lautet das Newton-Verfahren für das Variationsproblem (3.2.1) wie folgt.

3 Diskretisierung

Wähle ein $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ als Startwert.

Für $f \in \mathbf{V}'$ und $k = 0, 1, 2, \dots$ bestimme $\mathbf{u}_{k+1} \in \mathbf{V}$ und $p_{k+1} \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v})_0 + \tau a(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}) + \tau b(\mathbf{v}, p_{k+1}) = \\ = \tau f(\mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_0 \\ - b(\mathbf{u}_{k+1}, q) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $q \in Q$.

Mit Hilfe der Newton–Methode kann somit eine Lösung des nichtlinearen Variationsproblems (3.2.1) durch Lösungen des linearisierten Variationsproblems (3.2.2) approximiert werden. Jedoch kann das linearisierte Variationsproblem (3.2.2) in dieser Form noch nicht gelöst werden.

3.3 Finite–Elemente–Methode

Ausgangspunkt der Finite–Elemente–Methode ist die Zerlegung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in endliche Teilgebiete. Der Einfachheit halber sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonal berandetes Lipschitzgebiet, beziehungsweise für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein polyhedral berandetes und beschränktes Lipschitzgebiet. Im Folgenden sei auf [6, 27] verwiesen.

Definition 3.2 (Triangulierung, [6]). Eine endliche Zerlegung $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_{M_T}\}$ von Ω in offene disjunkte Dreiecke ($d = 2$), beziehungsweise Tetraeder ($d = 3$), heißt zulässige affine Triangulierung, falls

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M_T} \bar{T}_i$,
- Für je zwei Elemente $T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\bar{T}_i \cap \bar{T}_j = \begin{cases} \emptyset, & \text{für } d = 2, 3, \\ \text{genau ein Punkt,} & \text{für } d = 2, 3, \\ \text{genau eine Kante,} & \text{für } d = 2, 3, \\ \text{genau eine Fläche,} & \text{für } d = 3, \end{cases}$$

für $i \neq j$.

- Jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ ist darstellbar als affine bijektive Abbildung eines Referenzelements \hat{T} durch

$$\Phi_T : \hat{T} \rightarrow T$$

mit

$$\Phi_T(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{B}}_T \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_T.$$

Dabei seien $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^d$ und $\underline{\underline{B}}_T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär, siehe Abbildung 3.1.

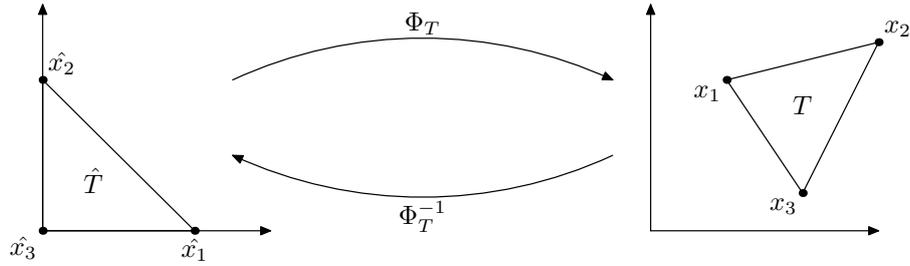


Abbildung 3.1: Transformation im zweidimensionalen Fall

Für eine Triangulierung \mathcal{T}_h mit Elementen T , Kanten E und Flächen F seien folgende Mengen gegeben als

\mathcal{N} bezeichne die Menge aller Knoten in \mathcal{T}_h ($d = 2, 3$),
 \mathcal{E} bezeichne die Menge aller Kanten in \mathcal{T}_h ($d = 2, 3$),
 \mathcal{F} bezeichne die Menge aller Flächen in \mathcal{T}_h ($d = 3$).

Weiters bezeichne M_N die Anzahl der Knoten, M_E die Anzahl der Kanten, M_F die Anzahl der Flächen und M_T die Anzahl der Elemente.

Definition 3.3. Sei \mathcal{T}_h eine zulässige Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Elementen T . Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert

$$P^n(T) := \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq n}} a_{\alpha_1 \dots \alpha_d} \mathbf{x}^\alpha \mid a_{\alpha_1 \dots \alpha_d} \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller Polynome auf T mit Grad $\leq n$.

Bemerkung 3.4. Für $d = 2$ gilt

$$P^n(T) := \left\{ \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N}_0 \\ i+j \leq n}} a_{i,j} x_1^i x_2^j \mid a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

3 Diskretisierung

beziehungsweise für $d = 3$

$$P^n(T) := \left\{ \sum_{\substack{i,j,k \in \mathbb{N}_0 \\ i+j+k \leq n}} a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k \mid a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mit Hilfe der Menge $P^n(T)$ können nun folgende Räume definiert werden.

$$\begin{aligned} S^{n,-1}(\mathcal{T}_h) &:= \{u \in L_2(\Omega) \mid u|_T \in P^n(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ S^n(\mathcal{T}_h) &:= S^{n,-1}(\mathcal{T}_h) \cap H^1(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u|_T \in P^n(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega) \\ S_0^n(\mathcal{T}_h) &:= S^n(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \\ S_{0,D}^n(\mathcal{T}_h) &:= S^n(\mathcal{T}_h) \cap H_{0,D}^1(\Omega) \subset H_{0,D}^1(\Omega) \end{aligned}$$

Für $d \in \mathbb{N}$ und $d \geq 2$ gelte

$$\mathbf{S}^n(\mathcal{T}_h) = \prod_{i=1}^d S^n(\mathcal{T}_h), \quad \mathbf{S}_0^n(\mathcal{T}_h) = \prod_{i=1}^d S_0^n(\mathcal{T}_h), \quad \mathbf{S}_{0,D}^n(\mathcal{T}_h) = \prod_{i=1}^d S_{0,D}^n(\mathcal{T}_h).$$

Definition 3.5 (Taylor–Hood–Paar). Für $k \geq 2$ bezeichnet $P_k - P_{k-1}$ das Taylor–Hood–Paar $\mathbf{V}_h \times Q_h \subset \mathbf{V} \times Q$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \mathbf{S}_{0,D}^k(\mathcal{T}_h) \subset \mathbf{V}, \\ Q_h &= S^{k-1}(\mathcal{T}_h) \subset Q. \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Taylor–Hood–Elemente liefert der folgende Satz.

Satz 3.6 (diskrete inf–sup–Bedingung). Das Taylor–Hood–Paar $P_k - P_{k-1}$ erfüllt die diskrete inf–sup–Bedingung. Das heißt, es existiert eine Konstante $\beta > 0$, sodass

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|q_h\|_0 \|\mathbf{v}_h\|_1} \geq \beta.$$

Für den Nachweis der diskreten inf–sup–Bedingung sei auf [7] verwiesen.

Als Ansatzräume wird nun das Taylor–Hood–Paar $P_2 - P_1$ gewählt,

$$\mathbf{V}_h := \mathbf{S}_{0,D}^2(\mathcal{T}_h) \subset \mathbf{V} \quad \text{und} \quad Q_h := S^1(\mathcal{T}_h) \subset Q.$$

Als Basis für die diskreten Ansatzräume dienen die stückweisen linearen Basisfunktionen

$$\varphi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, M_N,$$

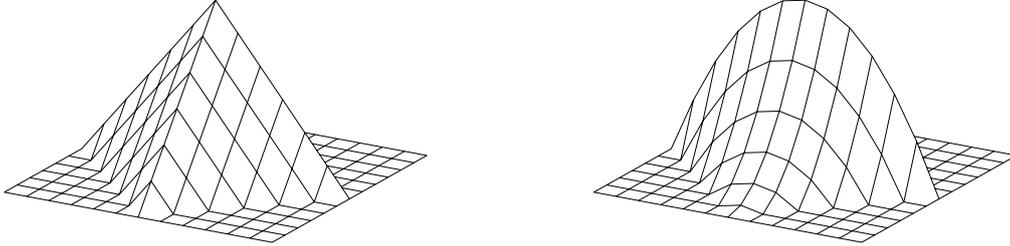


Abbildung 3.2: stückweise lineare Basisfunktion und Kantenfunktion für $d = 2$.

die quadratischen Kantenfunktionen

$$\psi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, M_E.$$

Dadurch kann jede Komponente $(\mathbf{v}_h)_i$ von $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ dargestellt werden als

$$(\mathbf{v}_h)_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M_N} a_{ij}^N \varphi_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{M_E} a_{ij}^E \psi_j(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Für den Druck $p_h \in Q_h$ gilt die Darstellung

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Im kommenden Abschnitt wird genau auf die Assemblierung des Gleichungssystems eingegangen. Als Ausgangspunkt dafür dient das folgende Variationsproblem.

Sei $f \in \mathbf{V}'$ und $\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$. Gesucht sind $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ und $p \in Q$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 + \tau a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tau c(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tau b(\mathbf{v}, p) \\ = \tau f(\mathbf{v}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_0 \quad (3.3.1) \\ -b(\mathbf{u}, q) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in Q$.

Dieses Variationsproblem ist eine allgemeine Darstellung des Problems (3.2.2). Für $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k+1}^{i+1}$, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_k^{i+1}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^i$ und $f = f^{i+1}$ entspricht das Variationsproblem (3.3.1) der k -ten Newtoniteration zum Zeitpunkt t_{i+1} .

3 Diskretisierung

Beschränkt man sich auf die endlich-dimensionalen Ansatzräume \mathbf{V}_h und Q_h , dann lautet das Problem wie folgt.

Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{Q}$ und $\tilde{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$. Gesucht sind $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ und $p_h \in Q_h$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_0 + \tau a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tau c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tau b(\mathbf{v}_h, p_h) = \\ = \tau f(\mathbf{v}_h) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)_0 \quad (3.3.2) \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, q_h \in Q_h$.

Im folgenden Kapitel wird detailliert beschrieben, wie die äquivalente Matrixdarstellung des Variationsproblems (3.3.2) assembliert werden kann. Dabei wird lediglich der zweidimensionale Fall betrachtet. Die Assemblierung für $d = 3$ erfolgt jedoch analog.

3.4 Assemblierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonal berandetes und beschränktes Lipschitzgebiet. Mit \mathcal{T}_h sei die zulässige und affine Triangulierung von Ω gegeben.

Im zweidimensionalen Fall wird der Ansatzraum \mathbf{V}_h aufgespannt von

$$\mathbf{B}_\mathbf{v} := \left\{ \left(\begin{array}{c} \varphi_i \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \varphi_i \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \psi_j \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \psi_j \end{array} \right) \mid i = 1, \dots, M_N, j = 1, \dots, M_E \right\}$$

und der Raum Q_h von

$$B_Q := \{ \varphi_i \mid i = 1, \dots, M_N \}.$$

Mit φ_i und ψ_j werden die stückweisen linearen Basisfunktionen beziehungsweise die quadratischen Kantenfunktionen bezeichnet, siehe Abbildung 3.2.

Somit muss die Variationsformulierung (3.3.2) nicht für jede beliebige Testfunktion $v_h \in \mathbf{V}_h$ und $q_h \in Q_h$ gelten, sondern es reicht die Gültigkeit für alle Basisfunktionen. Demnach lautet die Variationsformulierung wie folgt.

Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{V}'$ und $\tilde{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$. Gesucht sind $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ und $p_h \in Q_h$ als Lösung von

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_0 + \tau a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tau c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tau b(\mathbf{v}_h, p_h) = \\ = \tau \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)_0 \quad (3.4.1) \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{B}_\mathbf{v}, q \in B_Q$.

Der Einfachheit halber gelte die Schreibweise

$$\mathbf{e}_{1i} = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{3j} = \begin{pmatrix} \psi_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{4j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_j \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \dots, M_N$ und $j = 1, \dots, M_E$, sowie

$$e_i = \varphi_i$$

für $i = 1, \dots, M_N$.

Die Ansatzfunktion $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ kann somit dargestellt werden als

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N \mathbf{e}_{1i}(\mathbf{x}) + a_{i2}^N \mathbf{e}_{2i}(\mathbf{x}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E \mathbf{e}_{3j}(\mathbf{x}) + a_{j2}^E \mathbf{e}_{4j}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.4.2)$$

und der Druck $p_h \in Q_h$ als

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N e_i(\mathbf{x}). \quad (3.4.3)$$

Die Koeffizienten der Ansatzfunktion \mathbf{u}_h in (3.4.2) und p_h in (3.4.3) können zu folgenden Koeffizientenvektoren zusammengefasst werden

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^N &= (a_{11}^N, a_{21}^N, \dots, a_{M_N 1}^N)^\top \in \mathbb{R}^{M_N}, & \mathbf{a}_2^N &= (a_{12}^N, a_{22}^N, \dots, a_{M_N 2}^N)^\top \in \mathbb{R}^{M_N}, \\ \mathbf{a}_1^E &= (a_{11}^E, a_{21}^E, \dots, a_{M_E 1}^E)^\top \in \mathbb{R}^{M_E}, & \mathbf{a}_2^E &= (a_{12}^E, a_{22}^E, \dots, a_{M_E 2}^E)^\top \in \mathbb{R}^{M_E}, \\ \mathbf{b}^N &= (b_1^N, b_2^N, \dots, b_{M_N}^N)^\top \in \mathbb{R}^{M_N}. \end{aligned}$$

Weiters seien die Funktionen $\tilde{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ gegeben als

$$\tilde{\mathbf{u}}_h = \begin{pmatrix} \tilde{u}_h^1 \\ \tilde{u}_h^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_h = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^1 \\ \hat{u}_h^2 \end{pmatrix}.$$

In den nächsten Abschnitten werden das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$, sowie die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \hat{\mathbf{u}}_h, \cdot)$, $c(\hat{\mathbf{u}}_h, \cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ mit den Ansatzfunktionen (3.4.2) und (3.4.3) gesondert betrachtet. Das heißt, jede dieser Bilinearformen wird mit den Basisfunktionen aus \mathbf{B}_V beziehungsweise B_Q getestet.

3.4.1 Das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$

Betrachtet man das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_0$ mit \mathbf{u}_h wie in (3.4.2) definiert, dann folgt

$$(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_0 = \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{v}_h)_0 + a_{i2}^N (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{v}_h)_0 \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E (\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{v}_h)_0 + a_{j2}^E (\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{v}_h)_0 \right).$$

3 Diskretisierung

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{1k})_0 &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k})_0 + a_{i2}^N (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k})_0 \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E (\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{1k})_0 + a_{j2}^E (\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{1k})_0 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(M_{ki}^{11} a_{i1}^N + M_{ki}^{12} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(M_{kj}^{13} a_{j1}^E + M_{kj}^{14} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{M}}^{11} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{12} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{13} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{M}}^{14} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{ki}^{11} &:= (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k})_0 = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{M}}_{ik}^{11}, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{12} &:= (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k})_0 = 0, \end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{ki}^{13} &:= (\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{1k})_0 = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{14} &:= (\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{1k})_0 = 0, \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{2k})_0 &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k})_0 + a_{i2}^N (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k})_0 \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E (\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{2k})_0 + a_{j2}^E (\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{2k})_0 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(M_{ki}^{21} a_{i1}^N + M_{ki}^{22} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(M_{kj}^{23} a_{j1}^E + M_{kj}^{24} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{M}}^{21} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{22} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{23} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{M}}^{24} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_{ki}^{21} &:= (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k})_0 = 0, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{22} &:= (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k})_0 = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{M}}_{ik}^{22},\end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_{ki}^{23} &:= (\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{2k})_0 = 0, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{24} &:= (\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{2k})_0 = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx,\end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{3k})_0 &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k})_0 + a_{i2}^N (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k})_0 \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E (\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{3k})_0 + a_{j2}^E (\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{3k})_0 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} (M_{ki}^{31} a_{i1}^N + M_{ki}^{32} a_{i2}^N) + \sum_{j=1}^{M_E} (M_{kj}^{33} a_{j1}^E + M_{kj}^{34} a_{j2}^E)\end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{M}}^{31} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{32} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{33} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{M}}^{34} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_{ki}^{31} &:= (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k})_0 = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{M}}_{ik}^{13}, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{32} &:= (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k})_0 = 0,\end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}_{ki}^{33} &:= (\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{3k})_0 = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \underline{\underline{M}}_{ik}^{33}, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{34} &:= (\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{3k})_0 = 0,\end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

3 Diskretisierung

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{4k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{4k})_0 &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k})_0 + a_{i2}^N (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k})_0 \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E (\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{4k})_0 + a_{j2}^E (\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{4k})_0 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(M_{ki}^{41} a_{i1}^N + M_{ki}^{42} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(M_{kj}^{43} a_{j1}^E + M_{kj}^{44} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{M}}^{41} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{42} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{M}}^{43} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{M}}^{44} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{ki}^{41} &:= (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k})_0 = 0, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{42} &:= (\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k})_0 = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{M}}_{ik}^{24}, \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{ki}^{43} &:= (\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{4k})_0 = 0, \\ \underline{\underline{M}}_{ki}^{44} &:= (\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{4k})_0 = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \underline{\underline{M}}_{ik}^{44}, \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

Die äquivalente Matrixdarstellung lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}^{11} & & \underline{\underline{M}}^{13} & \\ & \underline{\underline{M}}^{22} & & \underline{\underline{M}}^{24} \\ \underline{\underline{M}}^{31} & & \underline{\underline{M}}^{33} & \\ & \underline{\underline{M}}^{42} & & \underline{\underline{M}}^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^N \\ \mathbf{a}_2^N \\ \mathbf{a}_1^E \\ \mathbf{a}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.2 Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$

Betrachtet man die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ mit \mathbf{u}_h wie in (3.4.2) definiert, dann folgt

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{v}_h) + a_{i2}^N a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{v}_h) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E a(\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{v}_h) + a_{j2}^E a(\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{v}_h) \right).$$

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{1k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k}) + a_{i2}^N a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E a(\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{1k}) + a_{j2}^E a(\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{1k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(A_{ki}^{11} a_{i1}^N + A_{ki}^{12} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(A_{kj}^{13} a_{j1}^E + A_{kj}^{14} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{A}}^{11} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{12} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{13} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{A}}^{14} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{ki}^{11} &:= a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{11}, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{12} &:= a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k}) = 0 \end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{ki}^{13} &:= a(\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{1k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{14} &:= a(\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{1k}) = 0, \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{2k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k}) + a_{i2}^N a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E a(\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{2k}) + a_{j2}^E a(\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{2k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(A_{ki}^{21} a_{i1}^N + A_{ki}^{22} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(A_{kj}^{23} a_{j1}^E + A_{kj}^{24} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{A}}^{21} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{22} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{23} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{A}}^{24} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

3 Diskretisierung

mit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}_{ki}^{21} &:= a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k}) = 0, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{22} &:= a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{22},\end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}_{ki}^{23} &:= a(\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{2k}) = 0, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{24} &:= a(\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{2k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx,\end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\begin{aligned}a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{3k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k}) + a_{i2}^N a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E a(\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{3k}) + a_{j2}^E a(\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{3k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(A_{ki}^{31} a_{i1}^N + A_{ki}^{32} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(A_{kj}^{33} a_{j1}^E + A_{kj}^{34} a_{j2}^E \right)\end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{A}}^{31} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{32} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{33} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{A}}^{34} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}_{ki}^{31} &:= a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{13}, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{32} &:= a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k}) = 0,\end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}_{ki}^{33} &:= a(\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{3k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{33}, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{34} &:= a(\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{3k}) = 0,\end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{4k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{4k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k}) + a_{i2}^N a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E a(\mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{4k}) + a_{j2}^E a(\mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{4k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(A_{ki}^{41} a_{i1}^N + A_{ki}^{42} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(A_{kj}^{43} a_{j1}^E + A_{kj}^{44} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{A}}^{41} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{42} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{A}}^{43} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{A}}^{44} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{ki}^{41} &:= a(\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k}) = 0, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{42} &:= a(\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{24}, \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{ki}^{43} &:= a(\mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{4k}) = 0, \\ \underline{\underline{A}}_{ki}^{44} &:= a(\mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{4k}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{A}}_{ik}^{44} \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

Die äquivalente Matrixdarstellung der Bilinearform lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{11} & & \underline{\underline{A}}^{13} & \\ & \underline{\underline{A}}^{22} & & \underline{\underline{A}}^{24} \\ \underline{\underline{A}}^{31} & & \underline{\underline{A}}^{33} & \\ & \underline{\underline{A}}^{42} & & \underline{\underline{A}}^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^N \\ \mathbf{a}_2^N \\ \mathbf{a}_1^E \\ \mathbf{a}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Die Bilinearform $c(\cdot, \hat{\mathbf{u}}_h, \cdot)$

Setzt man in die Bilinearform $c(\cdot, \hat{\mathbf{u}}_h, \cdot)$ den Ansatz \mathbf{u}_h ein, so folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + a_{i2}^N c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\mathbf{e}_{3j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + a_{j2}^E c(\mathbf{e}_{4j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \right). \end{aligned}$$

3 Diskretisierung

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) + a_{i2}^N c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\mathbf{e}_{3j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) + a_{j2}^E c(\mathbf{e}_{4j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(C_{ki}^{11} a_{i1}^N + C_{ki}^{12} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(C_{kj}^{13} a_{j1}^E + C_{kj}^{14} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{C}}^{11} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{12} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{13} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{C}}^{14} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{11} &:= c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{11}, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{12} &:= c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{13} &:= c(\mathbf{e}_{3i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{14} &:= c(\mathbf{e}_{4i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) + a_{i2}^N c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\mathbf{e}_{3j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) + a_{j2}^E c(\mathbf{e}_{4j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(C_{ki}^{21} a_{i1}^N + C_{ki}^{22} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(C_{kj}^{23} a_{j1}^E + C_{kj}^{24} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{C}}^{21} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{22} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{23} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{C}}^{24} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{21} &:= c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{22} &:= c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{22}, \end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{23} &:= c(\mathbf{e}_{3i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{24} &:= c(\mathbf{e}_{4i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$, $i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) + a_{i2}^N c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\mathbf{e}_{3j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) + a_{j2}^E c(\mathbf{e}_{4j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(C_{ki}^{31} a_{i1}^N + C_{ki}^{32} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(C_{kj}^{33} a_{j1}^E + C_{kj}^{34} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{C}}^{31} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{32} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{33} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{C}}^{34} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{31} &:= c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{13}, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{32} &:= c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx, \end{aligned}$$

3 Diskretisierung

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{33} &:= c(\mathbf{e}_{3i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{33}, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{34} &:= c(\mathbf{e}_{4i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx, \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{4k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) + a_{i2}^N c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\mathbf{e}_{3j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) + a_{j2}^E c(\mathbf{e}_{4j}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(C_{ki}^{41} a_{i1}^N + C_{ki}^{42} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(C_{kj}^{43} a_{j1}^E + C_{kj}^{44} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die einzelnen Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{C}}^{41} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{42} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{C}}^{43} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{C}}^{44} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{41} &:= c(\mathbf{e}_{1i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{42} &:= c(\mathbf{e}_{2i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{24}, \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$, $i = 1, \dots, M_N$, und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{ki}^{43} &:= c(\mathbf{e}_{3i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{44} &:= c(\mathbf{e}_{4i}, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \underline{\underline{C}}_{ik}^{44}, \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

Die äquivalente Matrixdarstellung der Bilinearform lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{11} & \underline{\underline{C}}^{12} & \underline{\underline{C}}^{13} & \underline{\underline{C}}^{14} \\ \underline{\underline{C}}^{21} & \underline{\underline{C}}^{22} & \underline{\underline{C}}^{23} & \underline{\underline{C}}^{24} \\ \underline{\underline{C}}^{31} & \underline{\underline{C}}^{32} & \underline{\underline{C}}^{33} & \underline{\underline{C}}^{34} \\ \underline{\underline{C}}^{41} & \underline{\underline{C}}^{42} & \underline{\underline{C}}^{43} & \underline{\underline{C}}^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^N \\ \mathbf{a}_2^N \\ \mathbf{a}_1^E \\ \mathbf{a}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.4 Die Bilinearform $c(\hat{\mathbf{u}}_h, \cdot, \cdot)$

Setzt man in die Bilinearform $c(\hat{\mathbf{u}}_h, \cdot, \cdot)$ den Ansatz \mathbf{u}_h ein, so folgt

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{v}_h) + a_{i2}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{v}_h) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3j}, \mathbf{v}_h) + a_{j2}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4j}, \mathbf{v}_h) \right). \end{aligned}$$

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{1k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k}) + a_{i2}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{1k}) + a_{j2}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{1k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(D_{ki}^{11} a_{i1}^N + D_{ki}^{12} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(D_{kj}^{13} a_{j1}^E + D_{kj}^{14} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{D}}^{11} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{12} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{13} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{D}}^{14} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\underline{\underline{D}}_{ki}^{11} := c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx$$

$$\underline{\underline{D}}_{ki}^{12} := c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1k}) = 0$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$,

$$\underline{\underline{D}}_{ki}^{13} := c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{1k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx$$

$$\underline{\underline{D}}_{ki}^{14} := c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{1k}) = 0$$

3 Diskretisierung

mit $k = 1, \dots, M_N$ und $i = 1, \dots, M_E$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{2k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k}) + a_{i2}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{2k}) + a_{j2}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{2k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(D_{ki}^{21} a_{i1}^N + D_{ki}^{22} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(D_{kj}^{23} a_{j1}^E + D_{kj}^{24} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{D}}^{21} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{22} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{23} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}, \quad \underline{\underline{D}}^{24} \in \mathbb{R}^{M_N \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{21} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{2k}) = 0 \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{22} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx \end{aligned}$$

für $k, i = 1, \dots, M_N$,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{23} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{2k}) = 0 \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{24} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{2k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$ und $i = 1, \dots, M_E$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{3k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k}) + a_{i2}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{3k}) + a_{j2}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{3k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(D_{ki}^{31} a_{i1}^N + D_{ki}^{32} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(D_{kj}^{33} a_{j1}^E + D_{kj}^{34} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{D}}^{31} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{32} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{33} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{D}}^{34} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{31} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{32} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{3k}) = 0 \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, M_E$ und $i = 1, \dots, M_N$,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{33} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{3k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{34} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{3k}) = 0 \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\begin{aligned} c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{e}_{4k}) &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(a_{i1}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k}) + a_{i2}^N c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k}) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_E} \left(a_{j1}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3j}, \mathbf{e}_{4k}) + a_{j2}^E c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4j}, \mathbf{e}_{4k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M_N} \left(D_{ki}^{41} a_{i1}^N + D_{ki}^{42} a_{i2}^N \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(D_{kj}^{43} a_{j1}^E + D_{kj}^{44} a_{j2}^E \right) \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrizen gilt

$$\underline{\underline{D}}^{41} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{42} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}, \quad \underline{\underline{D}}^{43} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}, \quad \underline{\underline{D}}^{44} \in \mathbb{R}^{M_E \times M_E}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{41} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{4k}) = 0 \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{42} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \end{aligned}$$

3 Diskretisierung

für $k = 1, \dots, M_E$ und $i = 1, \dots, M_N$,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{ki}^{43} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3i}, \mathbf{e}_{4k}) = 0 \\ \underline{\underline{D}}_{ki}^{44} &:= c(\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4i}, \mathbf{e}_{4k}) = \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx \end{aligned}$$

mit $k, i = 1, \dots, M_E$.

Die äquivalente Matrixdarstellung der Bilinearform lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}^{11} & & \underline{\underline{D}}^{13} & \\ & \underline{\underline{D}}^{22} & & \underline{\underline{D}}^{24} \\ \underline{\underline{D}}^{31} & & \underline{\underline{D}}^{33} & \\ & \underline{\underline{D}}^{42} & & \underline{\underline{D}}^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^N \\ \mathbf{a}_2^N \\ \mathbf{a}_1^E \\ \mathbf{a}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.5 Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$

Setzt man in die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ den Ansatz p_h ein, dann gilt

$$b(\mathbf{v}_h, p_h) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N b(\mathbf{v}_h, e_i).$$

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$b(\mathbf{e}_{1k}, p_h) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N b(\mathbf{e}_{1k}, e_i) = \sum_{i=1}^{M_N} B_{ki}^1 b_i^N$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrix $\underline{\underline{B}}^1$ gilt

$$\underline{\underline{B}}^1 \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}$$

mit

$$B_{ki}^1 = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dx$$

mit $k, i = 1, \dots, M_N$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$b(\mathbf{e}_{2k}, p_h) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N b(\mathbf{e}_{2k}, e_i) = \sum_{i=1}^{M_N} B_{ki}^2 b_i^N$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für die Blockmatrix $\underline{\underline{B}}^2$ gilt

$$\underline{\underline{B}}^2 \in \mathbb{R}^{M_N \times M_N}$$

mit

$$B_{ki}^2 = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dx$$

mit $k, i = 1, \dots, M_N$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$b(\mathbf{e}_{3k}, p_h) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N b(\mathbf{e}_{3k}, e_i) = \sum_{i=1}^{M_N} B_{ki}^3 b_i^N$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrix $\underline{\underline{B}}^3$ gilt

$$\underline{\underline{B}}^3 \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}$$

mit

$$B_{ki}^3 = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dx$$

mit $k = 1, \dots, M_E$ und $i = 1, \dots, M_N$.

•) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{4k}$, dann folgt

$$b(\mathbf{e}_{4k}, p_h) = \sum_{i=1}^{M_N} b_i^N b(\mathbf{e}_{4k}, e_i) = \sum_{i=1}^{M_N} B_{ki}^4 b_i^N$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für die Blockmatrix $\underline{\underline{B}}^4$ gilt

$$\underline{\underline{B}}^4 \in \mathbb{R}^{M_E \times M_N}$$

mit

$$B_{ki}^4 = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dx$$

mit $k = 1, \dots, M_E$ und $i = 1, \dots, M_N$.

Die äquivalente Matrixdarstellung der Bilinearform lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}^1 \\ \underline{\underline{B}}^2 \\ \underline{\underline{B}}^3 \\ \underline{\underline{B}}^4 \end{pmatrix} \mathbf{b}^N.$$

3 Diskretisierung

Analog folgt für die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ und den Ansatz \mathbf{u}_h , getestet mit $e_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, M_N$ die äquivalente Matrixdarstellung

$$\left(\begin{array}{cccc} \underline{\underline{B}}^{1\top} & \underline{\underline{B}}^{2\top} & \underline{\underline{B}}^{3\top} & \underline{\underline{B}}^{4\top} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^N \\ \mathbf{a}_2^N \\ \mathbf{a}_1^E \\ \mathbf{a}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.6 Die rechte Seite

Seien $\tilde{\mathbf{a}}_1^N, \tilde{\mathbf{a}}_2^N, \tilde{\mathbf{a}}_1^E, \tilde{\mathbf{a}}_2^E$ die zu $\tilde{\mathbf{u}}_h$ gehörigen Koeffizientenvektoren, dass heißt

$$\tilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_N} \left(\tilde{a}_{i1}^N \mathbf{e}_{1i}(\mathbf{x}) + \tilde{a}_{i2}^N \mathbf{e}_{2i}(\mathbf{x}) \right) + \sum_{j=1}^{M_E} \left(\tilde{a}_{j1}^E \mathbf{e}_{3j}(\mathbf{x}) + \tilde{a}_{j2}^E \mathbf{e}_{4j}(\mathbf{x}) \right),$$

dann kann die rechte Seite wie folgt assembliert werden.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{1k}$, dann folgt

$$\tau f(\mathbf{e}_{1k}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k}) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{1k})_0 = \tau f_k^1 + g_k^1 = b_k^1$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für den Vektor \mathbf{b}^1 gilt

$$\mathbf{b}^1 \in \mathbb{R}^{M_N}$$

mit

$$\begin{aligned} f_k^1 &= \tau f \left(\begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx, \\ g_k^1 &= \int_{\Omega} \tilde{u}_h^1(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \sum_{i=1}^{M_N} \tilde{a}_{i1}^N \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \sum_{i=1}^{M_E} \tilde{a}_{i1}^E \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx \\ &= \underline{\underline{M}}^{11} \tilde{\mathbf{a}}_1^N + \underline{\underline{M}}^{13} \tilde{\mathbf{a}}_1^E \end{aligned}$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

-) Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{2k}$, dann folgt

$$\tau f(\mathbf{e}_{2k}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k}) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{2k})_0 = \tau f_k^2 + g_k^2 = b_k^2$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

Für den Vektor \mathbf{b}^2 gilt

$$\mathbf{b}^2 \in \mathbb{R}^{M_N}$$

mit

$$f_k^2 = \tau f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix} \right) + \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx,$$

$$g_k^2 = \int_{\Omega} \tilde{u}_h^2(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \sum_{i=1}^{M_N} \tilde{a}_{i2}^N \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \sum_{i=1}^{M_E} \tilde{a}_{i2}^E \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx$$

$$= \underline{\underline{M}}^{22} \tilde{\mathbf{a}}_2^N + \underline{\underline{M}}^{24} \tilde{\mathbf{a}}_2^E$$

mit $k = 1, \dots, M_N$.

- Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{3k}$, dann folgt

$$\tau f(\mathbf{e}_{3k}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k}) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{3k})_0 = \tau f_k^3 + g_k^3 = b_k^3$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für den Vektor \mathbf{b}^3 gilt

$$\mathbf{b}^3 \in \mathbb{R}^{M_E}$$

mit

$$f_k^3 = \tau f \left(\begin{pmatrix} \psi_k \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx,$$

$$g_k^4 = \int_{\Omega} \tilde{u}_h^1(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx = \sum_{i=1}^{M_N} \tilde{a}_{i1}^N \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \sum_{i=1}^{M_E} \tilde{a}_{i1}^E \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx$$

$$= \underline{\underline{M}}^{31} \tilde{\mathbf{a}}_1^N + \underline{\underline{M}}^{33} \tilde{\mathbf{a}}_1^E$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

- Testet man mit $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_{4k}$, dann folgt

$$\tau f(\mathbf{e}_{4k}) + \tau c(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k}) + (\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{e}_{4k})_0 = \tau f_k^4 + g_k^4 = b_k^4$$

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Für den Vektor \mathbf{b}^4 gilt

$$\mathbf{b}^4 \in \mathbb{R}^{M_E}$$

mit

$$f_k^4 = \tau f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_k \end{pmatrix} \right) + \int_{\Omega} \hat{u}_h^1(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Omega} \hat{u}_h^2(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_h^2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) \, dx,$$

$$g_k^4 = \int_{\Omega} \tilde{u}_h^2(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx = \sum_{i=1}^{M_N} \tilde{a}_{i2}^N \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx + \sum_{i=1}^{M_E} \tilde{a}_{i2}^E \int_{\Omega} \psi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dx$$

$$= \underline{\underline{M}}^{42} \tilde{\mathbf{a}}_2^N + \underline{\underline{M}}^{44} \tilde{\mathbf{a}}_2^E$$

3 Diskretisierung

mit $k = 1, \dots, M_E$.

Die äquivalente Vektordarstellung der rechten Seite lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}^{11} & & \underline{\underline{M}}^{13} & \\ & \underline{\underline{M}}^{22} & & \underline{\underline{M}}^{24} \\ \underline{\underline{M}}^{31} & & \underline{\underline{M}}^{33} & \\ & \underline{\underline{M}}^{42} & & \underline{\underline{M}}^{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^N \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^N \\ \tilde{\mathbf{a}}_1^E \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^E \end{pmatrix}.$$

3.4.7 Das äquivalente lineare Gleichungssystem

Sei nun $\mathbf{u}_c \in \mathbb{R}^{(2M_N+2M_E)}$ der Koeffizientenvektor von \mathbf{u}_h mit

$$\mathbf{u}_c = (\mathbf{a}_1^N \ \mathbf{a}_2^N \ \mathbf{a}_1^E \ \mathbf{a}_2^E)^\top$$

und $\mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^{M_N}$ der Koeffizientenvektor von p_h mit

$$\mathbf{p}_c = \mathbf{b}^N.$$

Weiters sei $\tilde{\mathbf{u}}_c \in \mathbb{R}^{(2M_N+2M_E)}$ der Koeffizientenvektor von $\tilde{\mathbf{u}}_h$ mit

$$\tilde{\mathbf{u}}_c = (\tilde{\mathbf{a}}_1^N \ \tilde{\mathbf{a}}_2^N \ \tilde{\mathbf{a}}_1^E \ \tilde{\mathbf{a}}_2^E)^\top.$$

Somit lautet das zu Problem (3.4.1) äquivalente Gleichungssystem

$$\left(\left(\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{Q}} \\ -\underline{\underline{Q}}^\top & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \mathbf{f} + \underline{\underline{M}} \tilde{\mathbf{u}}_c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die Blockmatrizen $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{Q}}$ gegeben sind als

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{11} + \underline{\underline{C}}^{11} + \underline{\underline{D}}^{11} & \underline{\underline{C}}^{12} & \underline{\underline{A}}^{13} + \underline{\underline{C}}^{13} + \underline{\underline{D}}^{13} & \underline{\underline{C}}^{14} \\ \underline{\underline{C}}^{21} & \underline{\underline{A}}^{22} + \underline{\underline{C}}^{22} + \underline{\underline{D}}^{22} & \underline{\underline{C}}^{23} & \underline{\underline{A}}^{24} + \underline{\underline{C}}^{24} + \underline{\underline{D}}^{24} \\ \underline{\underline{A}}^{31} + \underline{\underline{C}}^{31} + \underline{\underline{D}}^{31} & \underline{\underline{C}}^{32} & \underline{\underline{A}}^{33} + \underline{\underline{C}}^{33} + \underline{\underline{D}}^{33} & \underline{\underline{C}}^{34} \\ \underline{\underline{C}}^{41} & \underline{\underline{A}}^{42} + \underline{\underline{C}}^{42} + \underline{\underline{D}}^{42} & \underline{\underline{C}}^{43} & \underline{\underline{A}}^{44} + \underline{\underline{C}}^{44} + \underline{\underline{D}}^{44} \end{pmatrix},$$

mit $\underline{\underline{P}} \in \mathbb{R}^{(2M_N+2M_E) \times (2M_N+2M_E)}$,

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}^{11} & & \underline{\underline{M}}^{13} & \\ & \underline{\underline{M}}^{22} & & \underline{\underline{M}}^{24} \\ \underline{\underline{M}}^{31} & & \underline{\underline{M}}^{33} & \\ & \underline{\underline{M}}^{42} & & \underline{\underline{M}}^{44} \end{pmatrix},$$

mit $\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{(2M_N+2M_E) \times (2M_N+2M_E)}$, und

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}^1 \\ \underline{\underline{B}}^2 \\ \underline{\underline{B}}^3 \\ \underline{\underline{B}}^4 \end{pmatrix},$$

mit $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{(2M_N+2M_E) \times M_N}$.

Man beachte, dass die Matrizen \underline{C} und \underline{D} von $\hat{\mathbf{u}}_h$ abhängen.

3.5 Lösungsalgorithmus

Man hat bis jetzt gesehen, wie man durch diverse Diskretisierungsstrategien auf ein lineares Gleichungssystem kommt. Ziel ist es nun, einen Algorithmus anzugeben, der das vollkommen diskrete Variationsproblem der instationären Navier–Stokes–Gleichungen löst. Dazu sei \mathcal{Z}_N eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $(0, T)$. Weiters sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Lipschitzgebiet und \mathcal{T}_h eine zulässige affine Triangulierung von Ω . Wie in Abschnitt 3.3 gesehen, können die Ansätze \mathbf{u}_h und p_h allgemein geschrieben werden als

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{DF_V} u_i \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{DF_P} p_i e_i(\mathbf{x})$$

mit den zugehörigen Koeffizientenvektoren $\mathbf{u}_c \in \mathbb{R}^{DF_V}$ und $\mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^{DF_P}$. Die Funktionen \mathbf{e}_i und e_i bezeichnen die Basisfunktionen in \mathbf{V}_h beziehungsweise Q_h . Die Größen DF_V und DF_P bezeichnen die Anzahl der Freiheitsgrade von \mathbf{V}_h beziehungsweise Q_h .

Es sei nun $\hat{\mathbf{u}}_c \in \mathbb{R}^{DF_V}$ der zu $\hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ gehörige Koeffizientenvektor. Weiters sei im folgenden Algorithmus \mathbf{u}_c^{PN} der Koeffizientenvektor der vorherigen Newton–Iteration. Analog dazu bezeichnet \mathbf{u}_c^{PT} den Koeffizientenvektor des vorherigen Zeitschrittes. Somit kann der folgende Algorithmus angegeben werden.

- (S1) Im ersten Schritt werden die Vektoren initialisiert als $\mathbf{u}_c^{PN} = \mathbf{u}_c^{PT} = \hat{\mathbf{u}}_c$ und $i = 1$ gesetzt.
- (S2) Ist $i > N$, dann wurde die Lösung in allen Zeitschritten berechnet und der Algorithmus wird beendet. Ansonsten setze $k = 1$ und wähle als Startwert für das Newton–Verfahren die Lösung des vorherigen Zeitschrittes, das heißt $\mathbf{u}_c^{PN} = \mathbf{u}_c^{PT}$. Als allererster Startwert für das Newton–Verfahren im ersten Zeitschritt kann auch die Lösung der Stokes–Gleichungen gewählt werden.
- (S3) In diesem Schritt werden alle nötigen Matrizen sowie die rechte Seite assembliert.

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \text{assembleMatrixM}(\) \\ \underline{Q} &= \text{assembleMatrixQ}(\) \\ \underline{P} &= \text{assembleMatrixP}(\mathbf{u}_c^{PN}) \\ \mathbf{f} &= \text{assembleVectorF}(t_i) \\ \mathbf{b} &= \tau \mathbf{f} + \underline{M} \mathbf{u}_c^{PT} \end{aligned}$$

3 Diskretisierung

Anschließend wird das folgende System gelöst

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix} = \text{solve} \left(\left(\begin{pmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{Q} \\ -\underline{Q}^\top & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right).$$

(S4) Nun wird der Fehler zur vorherigen Newtoniteration berechnet als

$$\text{error} = \|\mathbf{u}_c^{PN} - \mathbf{u}_c\|_0.$$

Gilt ($k = 1$), dann setze $\text{error}_0 = \text{error}$.

Weiters wird die vorherige Newtoniteration mit der gerade errechneten Newtoniteration überschrieben, $\mathbf{u}_c^{PN} = \mathbf{u}_c$.

(S5) Nun wird überprüft, ob der relative Newton-Fehler kleiner ist als eine vorgegebene Toleranz, das heißt ($\frac{\text{error}}{\text{error}_0} < \text{TOL}_{\text{Newt}}$). Ist dies der Fall, dann setze $\mathbf{p}_c^i = \mathbf{p}_c$ und $\mathbf{u}_c^i = \mathbf{u}_c^{PT} = \mathbf{u}_c$. Das heißt, der Koeffizientenvektor des vorherigen Zeitschrittes wird mit dem gerade berechneten Koeffizientenvektor überschrieben. Nun kann der nächste Zeitschritt berechnet werden, das heißt man setzt $i = i + 1$ und geht zu Schritt (S2).

(S6) Ist die vorgegebene Toleranz in Schritt (S5) nicht erreicht, dann wird eine weitere Newton-Iteration durchgeführt. Setze $k = k + 1$ und gehe zu (S3).

Läuft der Algorithmus korrekt, dann erhält man eine Folge von Koeffizientenvektoren $\{\mathbf{u}_c^i\}_{i=1}^N$ und $\{\mathbf{p}_c^i\}_{i=1}^N$ und somit die Funktionen

$$\mathbf{u}_h^i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{DF_V} u_j^i \mathbf{e}_j(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad p_h^i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{DF_P} p_j^i e_j(\mathbf{x})$$

zu den Zeitpunkten $t_j \in \mathcal{Z}_N$.

Das Lösen des linearen Gleichungssystems erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe des Schurkomplements. Betrachtet man das System

$$\begin{pmatrix} \underline{M} + \tau \underline{P} & \tau \underline{Q} \\ -\tau \underline{Q}^\top & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

so kann die erste Gleichung nach \mathbf{u}_c aufgelöst werden und es folgt die Darstellung

$$\mathbf{u}_c = \left(\underline{M} + \tau \underline{P} \right)^{-1} \left(\mathbf{b} - \tau \underline{Q} \mathbf{p}_c \right).$$

Setzt man nun \mathbf{u}_c in die zweite Gleichung ein, so gilt

$$\underline{S} \mathbf{p}_c = \left(\tau \underline{Q}^\top \right) \left(\underline{M} + \tau \underline{P} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

mit dem Schurkomplement

$$\underline{\underline{S}} := (\tau \underline{\underline{Q}}^\top) (\underline{\underline{M}} + \tau \underline{\underline{P}})^{-1} (\tau \underline{\underline{Q}}).$$

Es wurde somit demonstriert, wie man mit Hilfe verschiedenster Diskretisierungsstrategien ein lineares Gleichungssystem aufstellen kann, und somit eine approximative Lösung der Geschwindigkeitsfeldes in Ω erhält. Die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes ist aber nicht immer hinreichend. In manchen Fällen ist es nötig, die Bahnkurven $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ mehrerer Massenpunkte zu ermitteln.

4 Partikel–Tracing

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Algorithmus zu beschreiben, der es ermöglicht, ein Partikel in einem Strömungsfeld zu verfolgen. Als Referenz für dieses Kapitel sei auf [28, 21] und [9] verwiesen.

Die Bahn eines Partikels wird in einem Strömungsfeld durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$$

beschrieben. Zur Berechnung der Bahnkurve wird das Zeitintervall $(0, T)$ wieder in N Teilintervalle zerlegt. Dazu betrachtet man wieder eine äquidistante Zerlegung \mathcal{Z}_N von $(0, T)$. Die Werte $\mathbf{x}^{i+1} := \mathbf{x}(t_{i+1})$ können mit der θ -Methode und $\theta = 0$ berechnet werden aus

$$\frac{\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i}{\tau} = \mathbf{u}(t_i, \mathbf{x}^i)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \tau \mathbf{u}(t_i, \mathbf{x}^i)$$

mit gegebener Startposition \mathbf{x}^0 .

Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} ist jedoch nicht bekannt, anstelle des Geschwindigkeitsfeldes sind nur die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{u}_k^i an Stellen $\mathbf{x}_k \in \bar{\Omega}$ und zu Zeitpunkten $t_i \in [0, T]$ gegeben. Um nun einen Algorithmus zur Verfolgung eines Partikels in einem Strömungsfeld anzugeben, seien folgende Daten bekannt.

Sei \mathcal{T}_h eine zulässige und affine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Wie in Abschnitt 3.3 bezeichne M_N die Anzahl der Knoten in \mathcal{T}_h . Weiters seien die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{u}_k^i \in \mathbb{R}^d$ für alle Knoten $\mathbf{x}_k \in \mathcal{N}$ und für die Zeitschritte $t_i \in \mathcal{Z}_N$ bekannt.

Für ein Element $T \in \mathcal{T}_h$ bezeichnet ω_T die Menge jener Nachbarelemente von T , die sich im Zweidimensionalen eine Kante mit T teilen, beziehungsweise im Dreidimensionalen eine Fläche. Siehe Abbildung 4.1.

Für jeden Zeitschritt t_i , $i = 0, \dots, N$, sei

$$\mathbf{u}_h^i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_N} \mathbf{u}_k^i \varphi_k(\mathbf{x})$$

4 Partikel-Tracing

die lineare Interpolation des Geschwindigkeitsfeldes zum Zeitpunkt t_i .

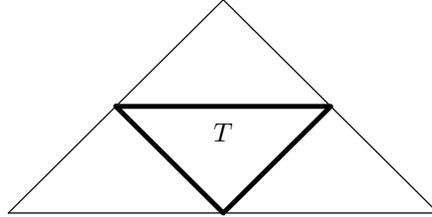
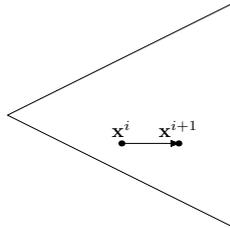


Abbildung 4.1: Die Nachbarelemente in ω_T für den zweidimensionalen Fall.

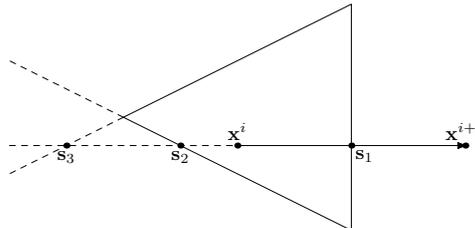
Der Algorithmus kann nun wie folgt beschrieben werden.

- (S1) Im ersten Schritt wird ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ gewählt sowie $i = 0$ und $\tau = \frac{T}{N}$ gesetzt.
- (S2) Im nächsten Schritt wird jenes Element $T \in \mathcal{T}_h$ bestimmt, sodass $\mathbf{x}^i \in \overline{T}$. Existiert kein solches Element, dann liegt der Punkt \mathbf{x}^i außerhalb von $\overline{\Omega}$ und der Algorithmus wird beendet. Setze $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^i$.
- (S3) Nun wird der Geschwindigkeitvektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h^i(\tilde{\mathbf{x}})$ im Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ zum Zeitpunkt t_i bestimmt. Mit diesem Geschwindigkeitsvektor kann der Punkt \mathbf{x}^{i+1} berechnet werden als $\mathbf{x}^{i+1} = \tilde{\mathbf{x}} + \tau \mathbf{u}$.
- (S4) Nun werden die folgenden Fälle unterschieden.
 - (C1) Der Punkt \mathbf{x}^{i+1} bleibt im Element T , das heißt $\mathbf{x}^{i+1} \in \overline{T}$.

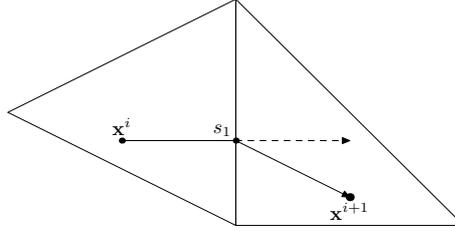


Setze $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{i+1}$, $\tau = \frac{T}{N}$ und $i = i + 1$. Gehe zu (S3).

- (C2) Der Punkt \mathbf{x}^{i+1} bleibt nicht im Element T , das heißt $\mathbf{x}^{i+1} \notin \overline{T}$.



Dann wird der Schnittpunkt \mathbf{s} mit jener Kante beziehungsweise Fläche bestimmt, über die das Partikel das Element T verlässt. Nun wird die Zeit bestimmt, die das Partikel benötigt, um vom Punkt \mathbf{x}^i zum Punkt \mathbf{s} zu kommen. Diese Zeit entspricht $\delta = \frac{|\mathbf{x}^i - \mathbf{s}|}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1}|} \tau$. Im nächsten Schritt wird jenes Nachbarelement $T_N \in \omega_T$ bestimmt, mit $\mathbf{s} \in \overline{T_N}$. Existiert kein solches Nachbarelement, dann wird der Algorithmus beendet.



Ansonsten setze $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{s}$, $\tau = \tau - \delta$ und $T = T_N$. Gehe zu (S3).

Dieser Algorithmus geht davon aus, dass bei der θ -Methode zur Berechnung der Bahnkurve die selbe Zerlegung \mathcal{Z}_N verwendet wird, wie bei der θ -Methode zur Berechnung der Geschwindigkeitsvektoren. Ist dies nicht der Fall, so muss das Geschwindigkeitsfeld auch in der Zeit interpoliert werden. Dazu können die stückweisen linearen Basisfunktionen herangezogen werden. Sei nun $\mathcal{Z}_{\tilde{N}}$ eine Zerlegung des Intervalls $(0, T)$ mit $N \neq \tilde{N}$. Dann kann für alle $\tilde{t}_i \in \mathcal{Z}_{\tilde{N}}$ die Funktion Φ_i definiert werden als

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t = \tilde{t}_i \\ 0, & \text{für } t = \tilde{t}_j, j \neq i, \\ \text{linear,} & \text{sonst} \end{cases}$$

siehe Abbildung 4.2.

Somit kann durch

$$\mathbf{u}_h(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\tilde{N}} \sum_{k=1}^{M_N} \mathbf{u}_k^i \varphi_k(\mathbf{x}) \Phi_i(t)$$

ein kontinuierliches Geschwindigkeitsfeld in $[0, T] \times \overline{\Omega}$ definiert werden. Im Schritt (S3) erfolgt dann die Berechnung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} mit Hilfe der Funktion \mathbf{u}_h .

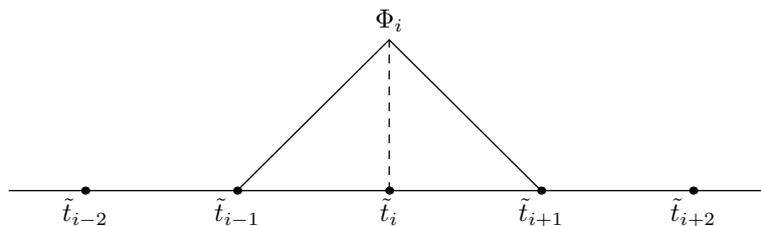


Abbildung 4.2: stückweise lineare Basisfunktion für die Stützstelle \tilde{t}_i .

5 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden numerische Beispiele der instationären Navier–Stokes–Gleichung für zweidimensionale und dreidimensionale Geometrien betrachtet. Bei den betrachteten Strömungen handelt es sich um Rohrströmungen. Bei Rohrströmungen lässt sich die dimensionslose Reynoldszahl errechnen als

$$\text{Re} = \frac{U_m d \varrho}{\eta} = \frac{U_m d}{\nu},$$

mit der mittleren Geschwindigkeit U_m , dem Rohrdurchmesser d , der dynamischen Viskosität η und der Dichte ϱ . Da die dynamische Viskosität als das Produkt der kinematischen Viskosität ν und der Dichte geschrieben werden kann, folgt die zweite Darstellung der Reynoldszahl. Für Rohrströmungen liegt die kritische Reynoldszahl bei

$$\text{Re}_{krit} = 2300,$$

das heißt aber nicht, dass bei Reynoldszahlen ≥ 2300 die Strömung mit Sicherheit turbulent ist. Mehr über Rohrströmungen findet man in [24].

Des Weiteren werden in den numerischen Beispielen inkompressible Fluide mit einer kinematischen Viskosität

$$\nu = 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

betrachtet.

In den Beispielen wird auch die äußere Kraft \mathbf{f} vernachlässigt und $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ gewählt.

Wie in Abschnitt 3.5 beschrieben ist in jeder Newton–Iteration das folgende Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} + \tau \underline{\underline{P}} & \tau \underline{\underline{Q}} \\ -\tau \underline{\underline{Q}}^\top & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Doch Anstelle des obigen Gleichungssystems wird das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} + \tau (\underline{\underline{P}} + \lambda \underline{\underline{G}}) & \tau \underline{\underline{Q}} \\ -\tau \underline{\underline{Q}}^\top & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

mit der Matrix $\underline{\underline{G}}$ und $\lambda > 0$ gelöst. Die Matrix $\underline{\underline{G}}$ erhält man aus der sogenannten Grad–Div–Stabilisierung, mehr dazu findet man in [20].

5 Numerische Beispiele

Das Lösen erfolgt mit Hilfe des Schurkomplements

$$\underline{\underline{S}} := (\tau \underline{\underline{Q}}^\top) \left(\underline{\underline{M}} + \tau (\underline{\underline{P}} + \lambda \underline{\underline{G}}) \right)^{-1} (\tau \underline{\underline{Q}}),$$

dabei wird die Invertierung der Matrix $\left(\underline{\underline{M}} + \tau (\underline{\underline{P}} + \lambda \underline{\underline{G}}) \right)$ mit dem parallelen Direktlöser PARDISO [25, 26] verwirklicht. Das Lösen des Systems

$$\underline{\underline{S}} \mathbf{p}_c = (\tau \underline{\underline{Q}}^\top) \left(\underline{\underline{M}} + \tau (\underline{\underline{P}} + \lambda \underline{\underline{G}}) \right)^{-1} \mathbf{b}$$

erfolgt mit Hilfe eines vorkonditionierten GMRES-Verfahrens mit einer Genauigkeit von 10^{-8} . Als Vorkonditionierer wird hier die Massematrix verwendet.

Als Abbruchkriterium für das Newton-Verfahren wurde eine Genauigkeit von 10^{-6} gewählt, beziehungsweise eine maximale Iterationszahl von 10.

Der Stabilisierungsparameter λ wurde mit $\lambda = 0.125$ gewählt.

In der Masterarbeit [17] findet man Beispiele mit den selben Geometrien und den selben Parametern. Jedoch wurden die Beispiele mit dem $k - \varepsilon$ -Turbulenzmodell und mit der Methode der Finiten-Volumen gelöst.

Bei der Berechnung kamen zwei Rechner zum Einsatz, hier eine kurze Angabe der Hardware.

Rechner 1)

Chipsatz	:	Intel [®] Core [™] 2 Duo Processor E6700 , 2.66 GHz
Sockel	:	1
Kerne pro Sockel	:	2
Threads pro Kern	:	1
Arbeitsspeicher	:	3995208 kB (3.81 GB)

Rechner 2)

Chipsatz	:	Intel [®] Xeon [®] Processor E5-2650, 2.00 GHz
Sockel	:	2
Kerne pro Sockel	:	8
Threads pro Kern	:	2
Arbeitsspeicher	:	132282156 kB (126.15 GB)

5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen

5.1.1 Beispiel 1

Im ersten Beispiel wird folgende zweidimensionale Geometrie betrachtet.

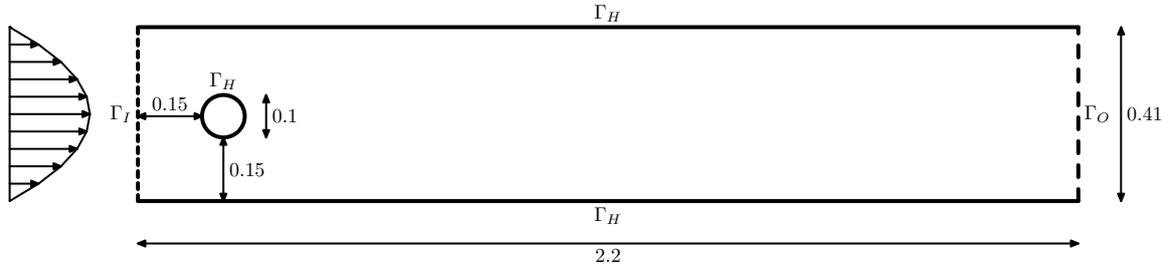


Abbildung 5.1: Geometrie (Abmessungen in Meter).

Dabei wird auf Γ_I das Einströmen des Fluids simuliert, auf Γ_O wird das ungehinderte Austreten des Fluids simuliert und auf Γ_H gelte die Haftbedingung.

Der Geschwindigkeitsvektor der Einströmung auf Γ_I ist in diesem Beispiel gegeben durch

$$\mathbf{u}_I(t, x, y) = \begin{pmatrix} y(0.41 - y) 36 h(4t) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}.$$

Die Funktion h ist gegeben als

$$h(t) = \begin{cases} 3t^2 - 2t^3 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

und simuliert ein allmähliches Einströmen (siehe Abbildung 5.3).

Das Profil der Einströmung hat somit zu verschiedenen Zeitpunkten die Formen in Abbildung 5.2, wobei sich das Profil für Zeitpunkte $t \geq 0.25$ nicht mehr ändert.

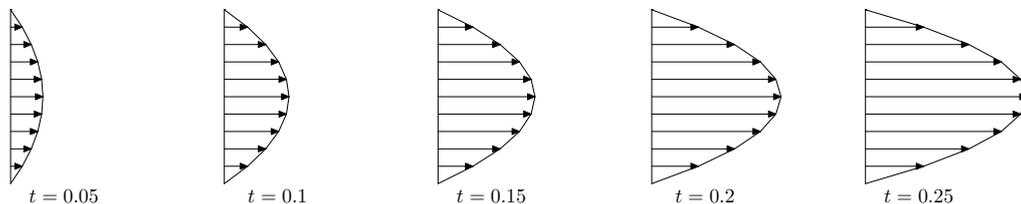


Abbildung 5.2: Profil der Einströmung zu verschiedenen Zeitpunkten.

Auf Γ_O wird das ungehinderte Austreten mit homogenen Neumann-Randbedingungen simuliert und auf Γ_H werden homogene Dirichlet-Randbedingungen zur Simulation der Haftbedingung verwendet.

5 Numerische Beispiele

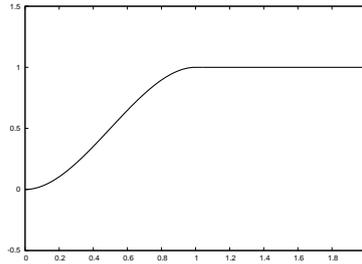


Abbildung 5.3: Verlauf der Funktion h .

Mit der mittleren Einströmgeschwindigkeit

$$u_m(t) = \frac{1}{0.41} \int_0^{0.41} y (0.41 - y) 36 h(4t) dy = 1.0086 h(4t) \frac{m}{s}$$

liegt der Wert der Reynoldszahl bei

$$\text{Re} = \frac{u_m(t) d}{\nu} = h(4t) \frac{1.0086 \cdot 0.41}{\nu} = h(4t) 4135.26.$$

Der Wert der Reynoldszahl liegt bei Zeitpunkten $t \geq 0.25$ bei 4135.26 und somit über der kritischen Reynoldszahl für Rohrströmungen.

Für die numerische Simulation wurden die folgenden Parameter gewählt. Das Zeitintervall wurde mit $(0, 3)$ gewählt und in $N = 1200$ Teilintervalle zerlegt. Das ergibt eine Zeitschrittweite von $\tau = 0.0025$.

Die Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω , siehe Abbildung 5.4, wurde mit NETGEN erzeugt und enthält 5024 Dreiecke, 7684 Kanten und 2660 Knoten.

Für den quadratischen Ansatz \mathbf{u}_h ergeben sich 19582 Freiheitsgrade und für den linearen Ansatz p_h ergeben sich 2660 Freiheitsgrade. Auf Rechner 1 lag die Laufzeit bei 27483.2 Sekunden, das entspricht 7 Stunden, 38 Minuten und 3.2 Sekunden.

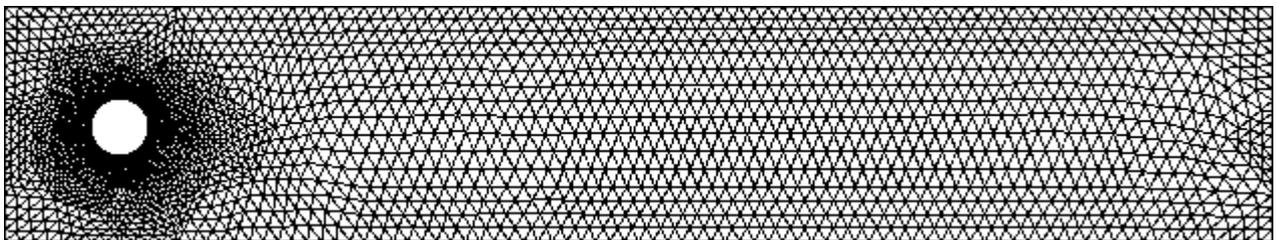
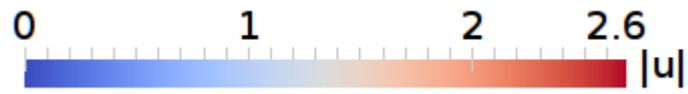


Abbildung 5.4: Triangulierung des Gebietes.

Die folgenden Abbildungen beschreiben den Betrag des Geschwindigkeitsvektors zu verschiedenen Zeitpunkten.

5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen



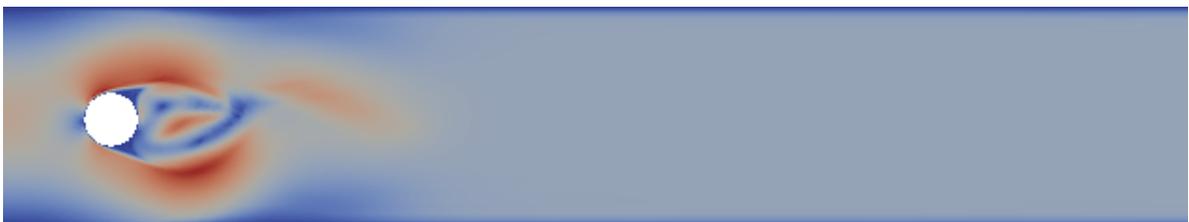
Betrag der Geschwindigkeit.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.5$.

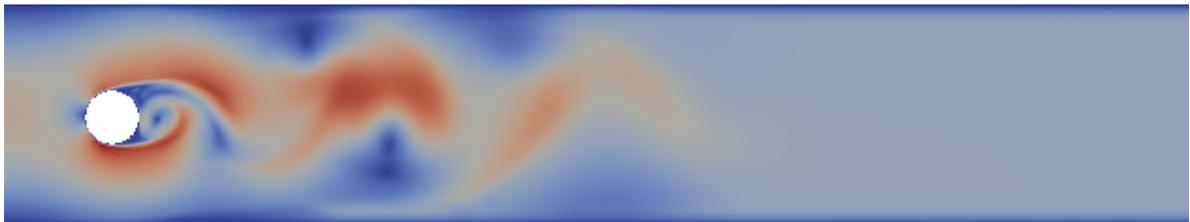
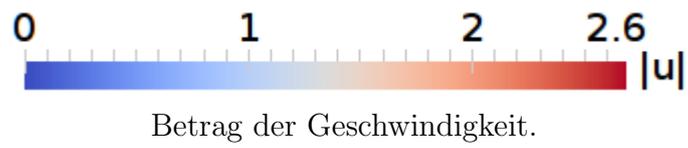


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.75$.

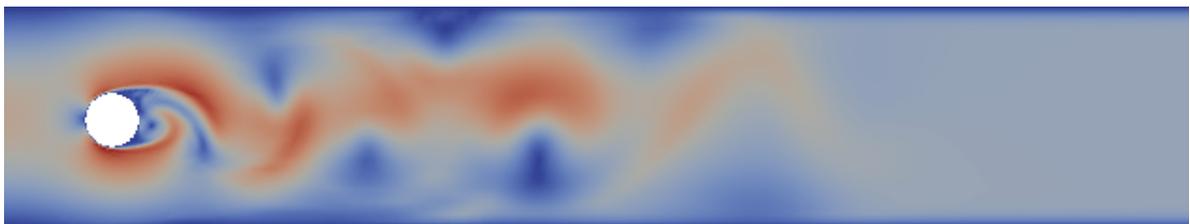


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

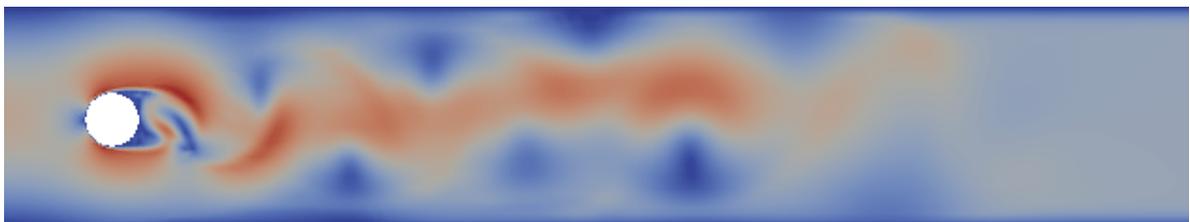
5 Numerische Beispiele



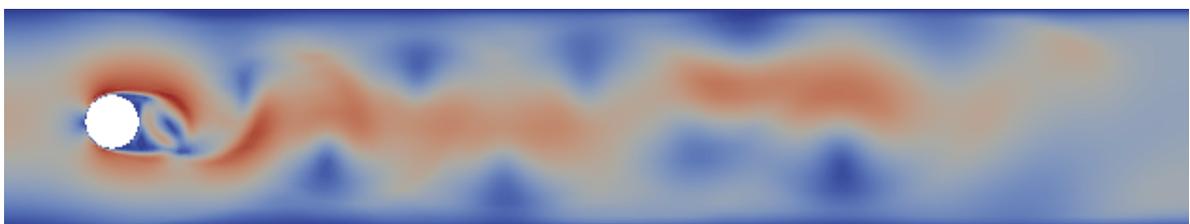
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.5$.

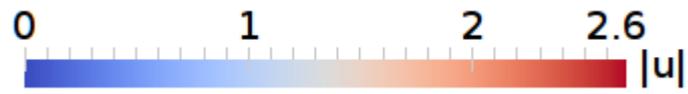


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.75$.

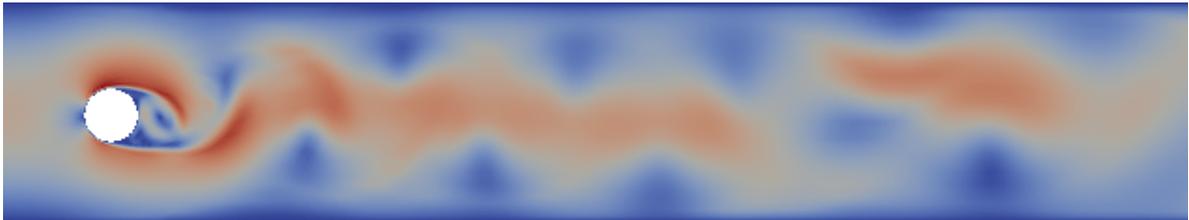


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.0$.

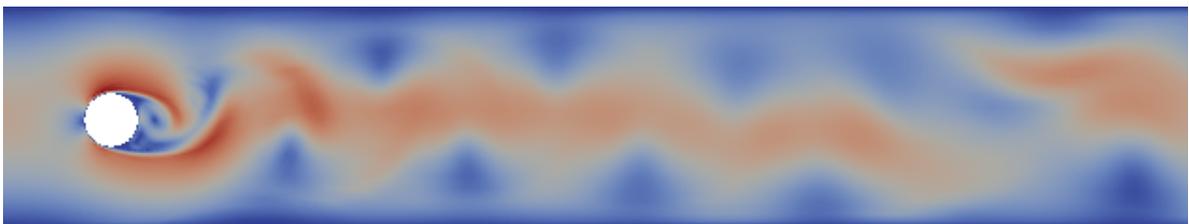
5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen



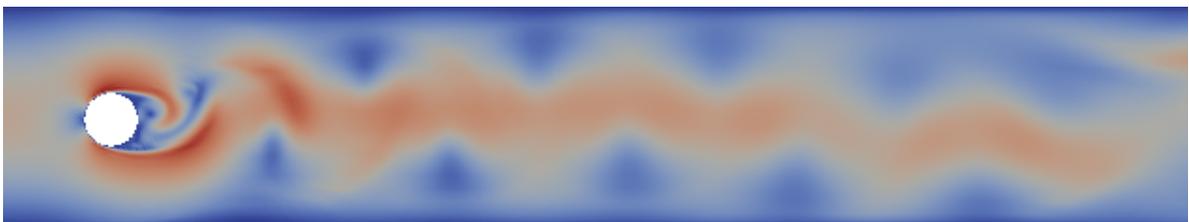
Betrag der Geschwindigkeit.



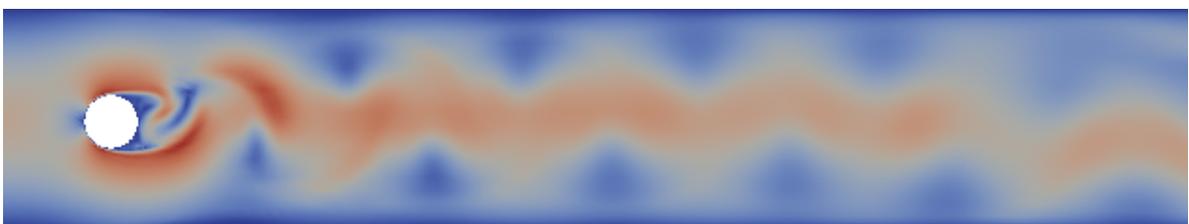
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.5$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.75$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3.0$.

5 Numerische Beispiele

Man kann in den Grafiken sehr gut sehen, dass sich zu Beginn der Strömung Wirbel hinter dem Hindernis bilden. Jedoch entsteht durch die nicht zentrale Lage des Hindernisses ein Ungleichgewicht, wodurch es zu einer turbulenten Strömung kommt. Weiters kann man in den Grafiken ein annähernd periodisches Strömungsbild erkennen.

5.1.2 Beispiel 2

Im zweiten Beispiel wird folgende zweidimensionale Geometrie betrachtet.

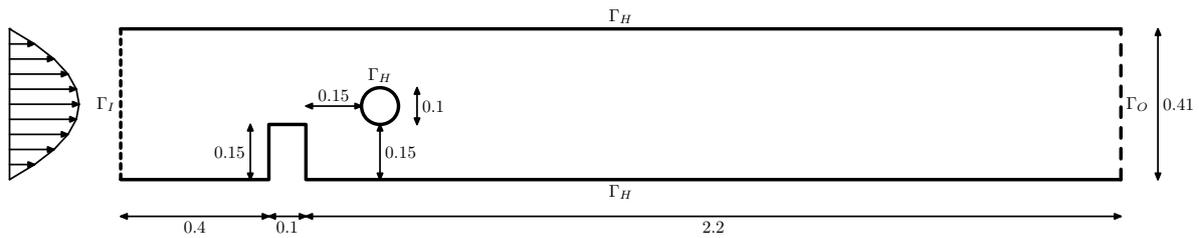


Abbildung 5.5: Geometrie (Abmessungen in Meter).

Die Randbedingungen in diesem Beispiel entsprechen den Randbedingungen aus dem ersten Beispiel. Auch hier liegt der Wert der Reynoldszahl bei

$$Re = h(4 t) 4135.26,$$

und somit für $t \geq 0.25$ über der kritischen Reynoldszahl für Rohrströmungen.

Für die numerische Simulation wurde auch hier das Zeitintervall mit $(0, 3)$ gewählt und in $N = 1200$ Teile zerlegt. Das ergibt wieder eine Zeitschrittweite von $\tau = 0.0025$.

Die Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω , siehe Abbildung 5.6, wurde mit NETGEN erzeugt und enthält 6688 Dreiecke, 10220 Kanten und 3532 Knoten.

Für den quadratischen Ansatz \mathbf{u}_h ergeben sich 26078 Freiheitsgrade und für den linearen Ansatz p_h ergeben sich 3532 Freiheitsgrade. Auf Rechner 2 lag die Laufzeit bei 26532 Sekunden, das entspricht 7 Stunden, 22 Minuten und 12 Sekunden.

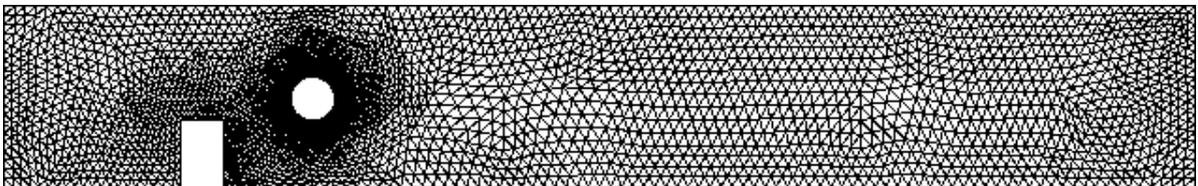
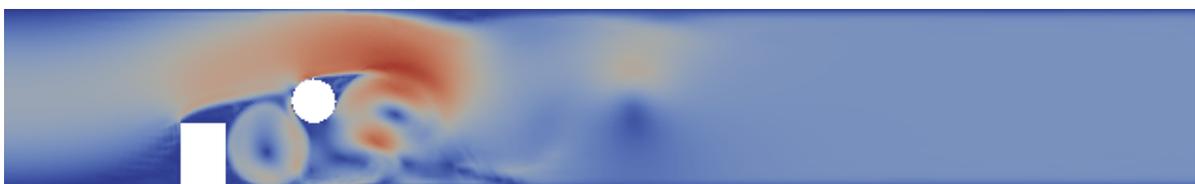
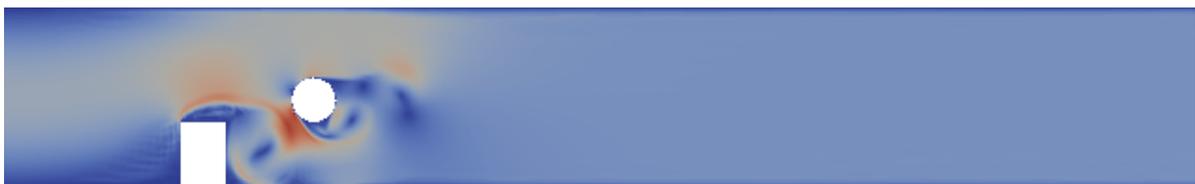
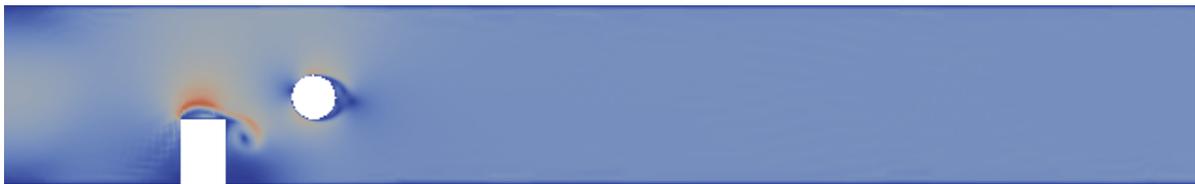
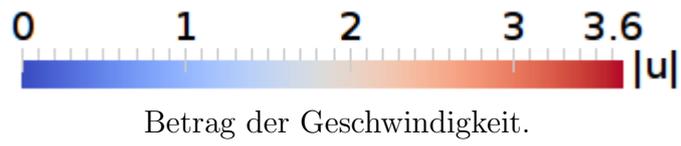


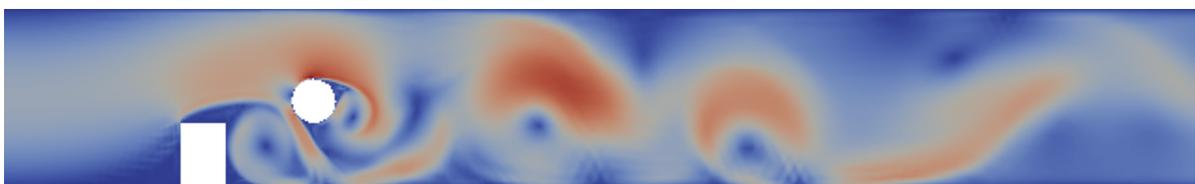
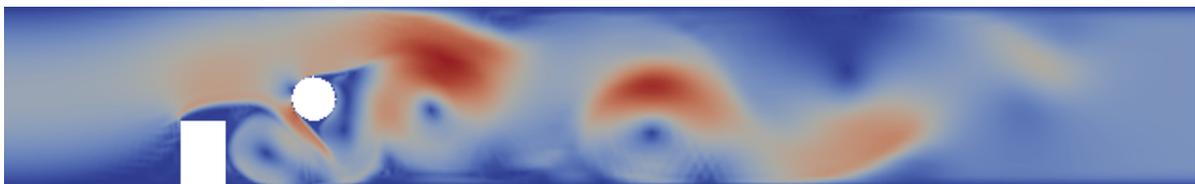
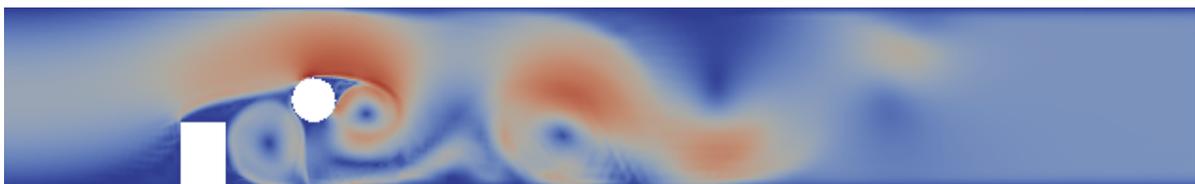
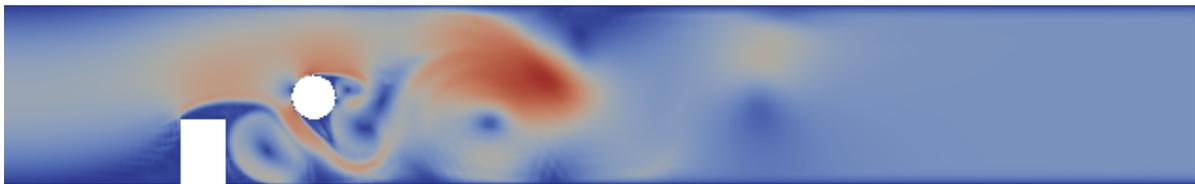
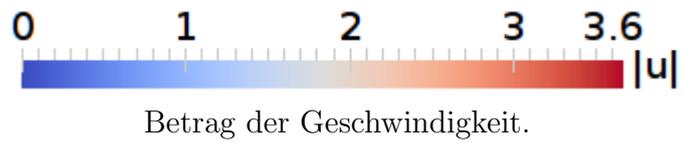
Abbildung 5.6: Triangulierung des Gebietes.

Wie im ersten Beispiel geben die folgenden Abbildungen den Betrag des Geschwindigkeitsvektors zu verschiedenen Zeitpunkten wieder.

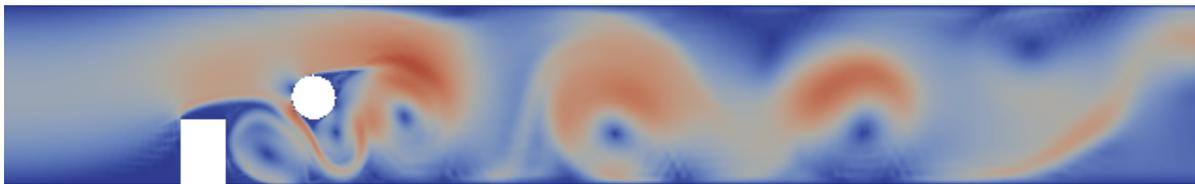
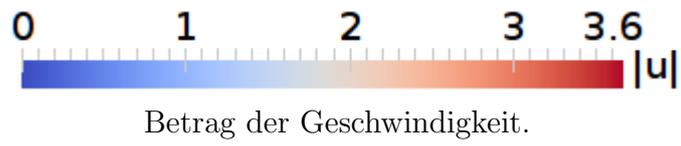
5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen



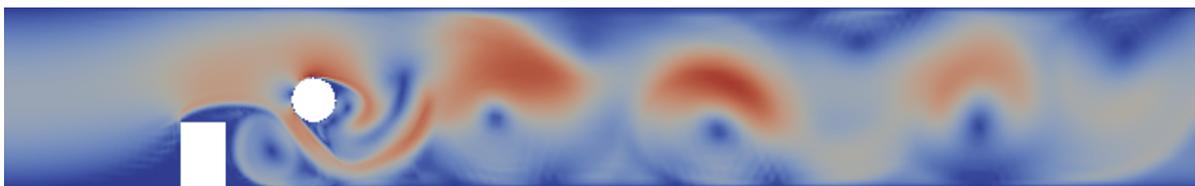
5 Numerische Beispiele



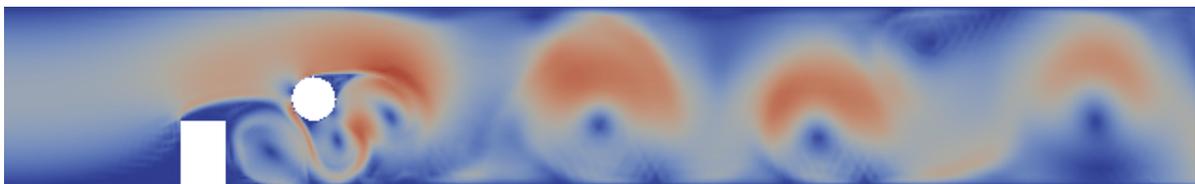
5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen



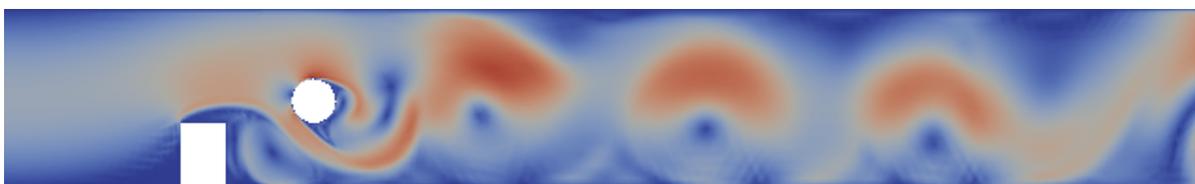
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.5$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.75$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3.0$.

5 Numerische Beispiele

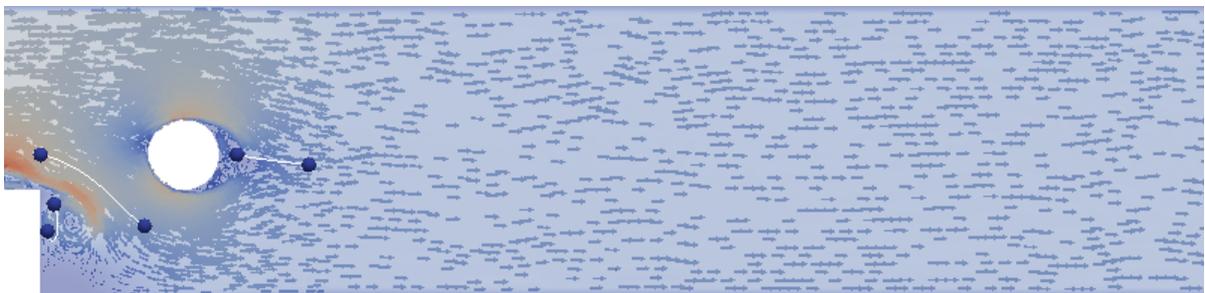
Wie im ersten Beispiel, kann auch hier ein Ablösen der Grenzschicht hinter den Hindernissen beobachtet werden. Des Weiteren sieht man auch in diesem Beispiel, wie sich hinter den Hindernissen Wirbel bilden.

5.1.2.1 Partikel-Tracing

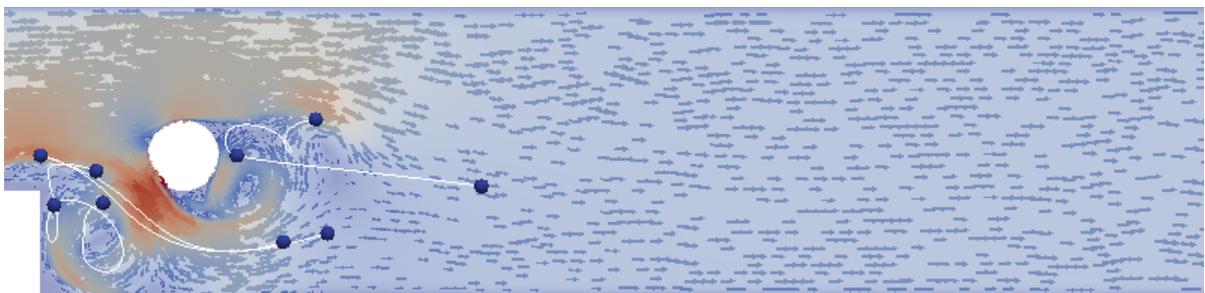
Für diese Geometrie und für dieses Strömungsfeld wurde auch der Partikel-Tracing-Algorithmus getestet. In der ersten Abbildung sieht man drei blaue Markierungen, diese Markierungen stellen die Startpositionen der Partikel dar. Es werden jeweils zu den Zeitpunkten $t = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.25, 2.5, 2.75$ Partikel von diesen Positionen aus im Strömungsfeld verfolgt.



Partikel zum Zeitpunkt $t = 0.0$.

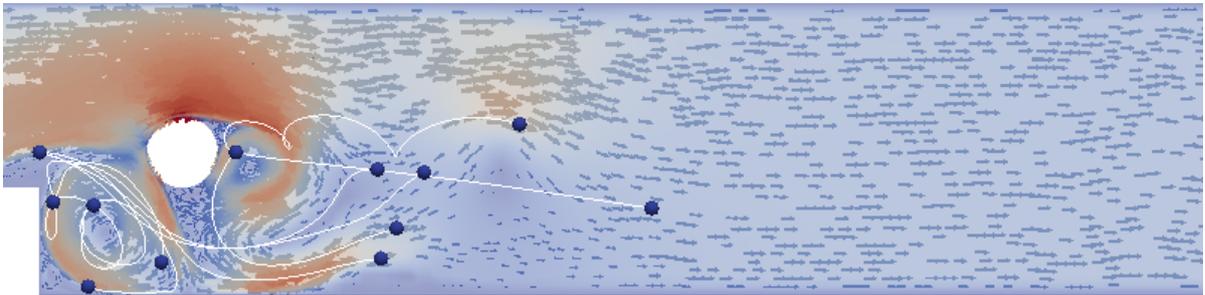


Partikel zum Zeitpunkt $t = 0.25$.

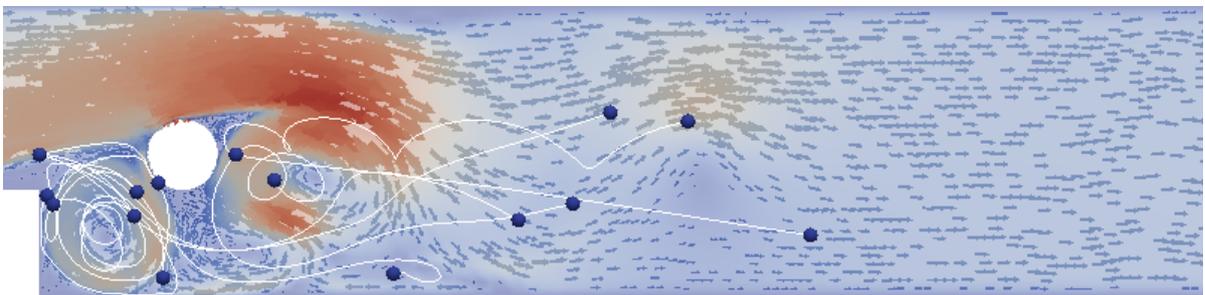


Partikel zum Zeitpunkt $t = 0.5$.

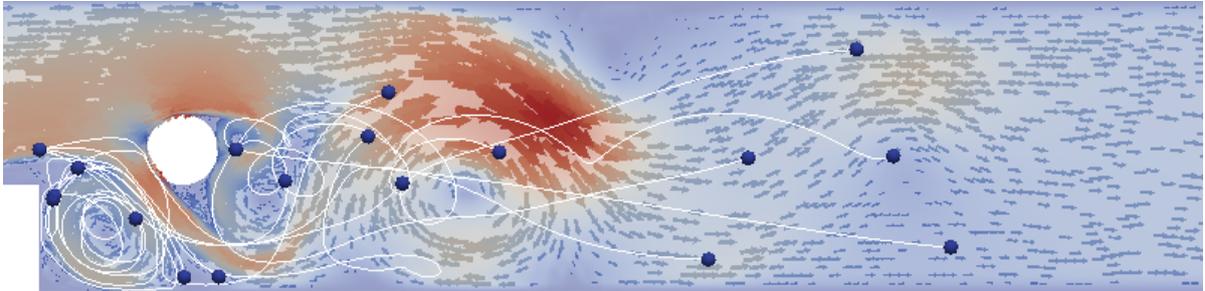
5.1 Beispiel in zwei Raumdimensionen



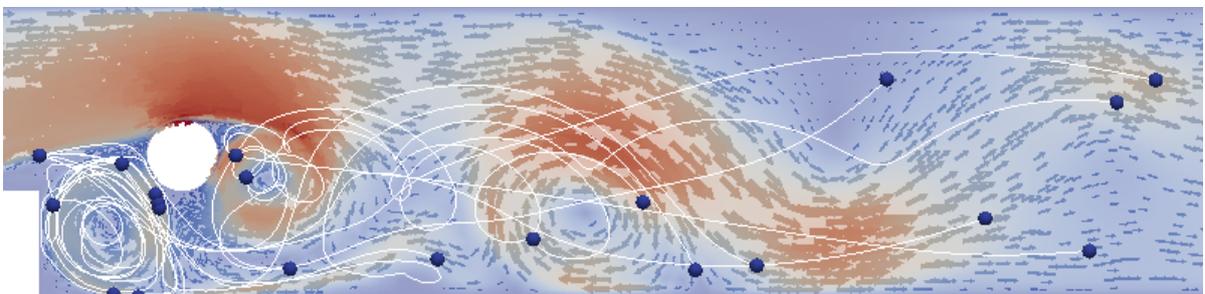
Partikel zum Zeitpunkt $t = 0.75$.



Partikel zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

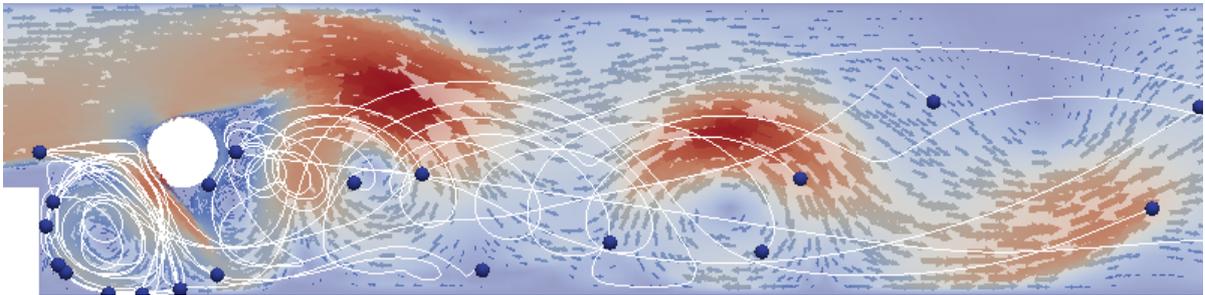


Partikel zum Zeitpunkt $t = 1.25$.

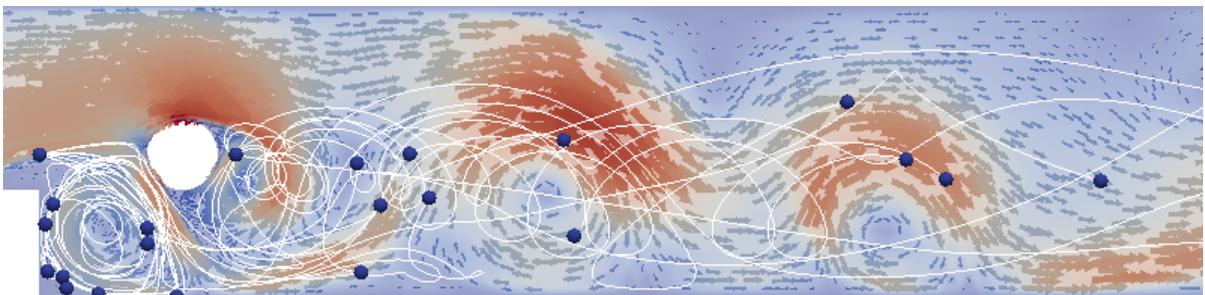


Partikel zum Zeitpunkt $t = 1.5$.

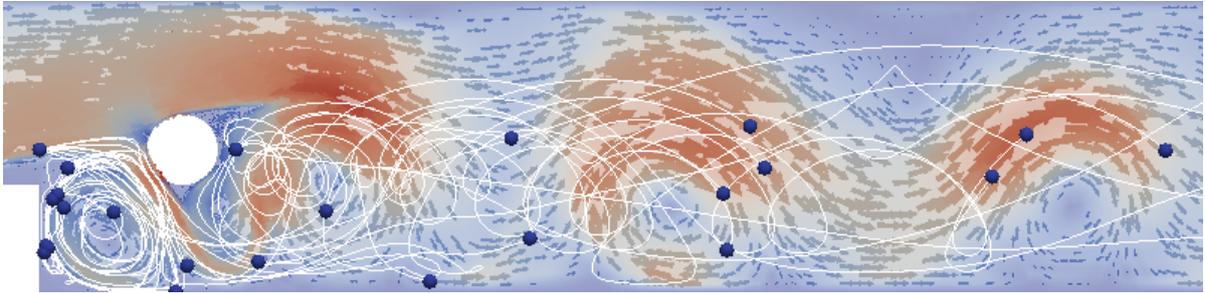
5 Numerische Beispiele



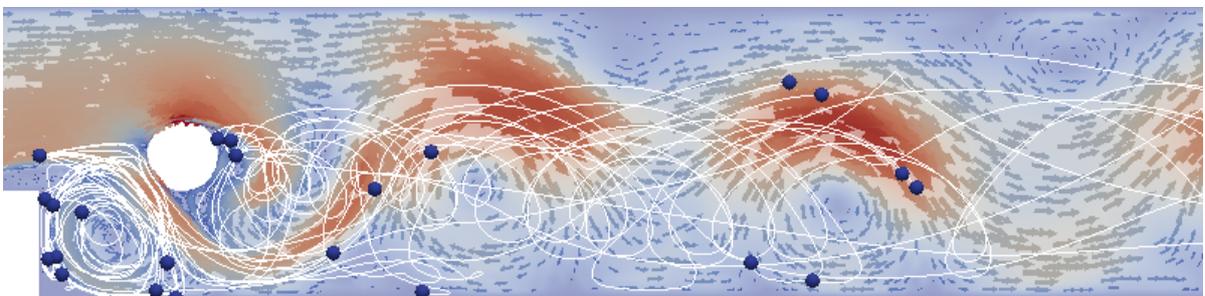
Partikel zum Zeitpunkt $t = 1.75$.



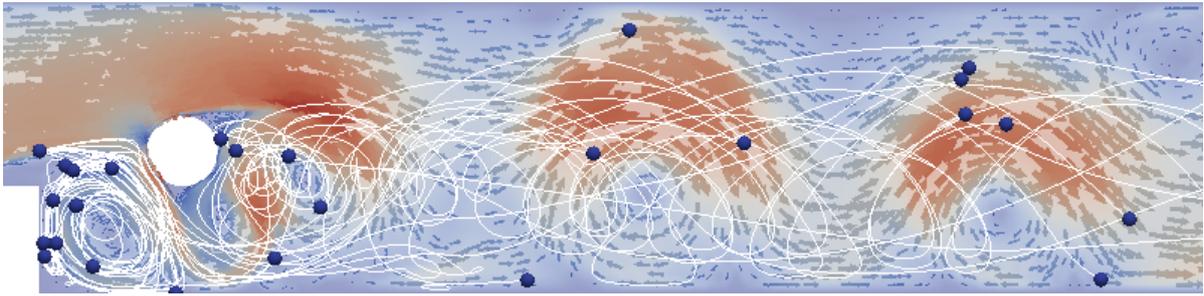
Partikel zum Zeitpunkt $t = 2.0$.



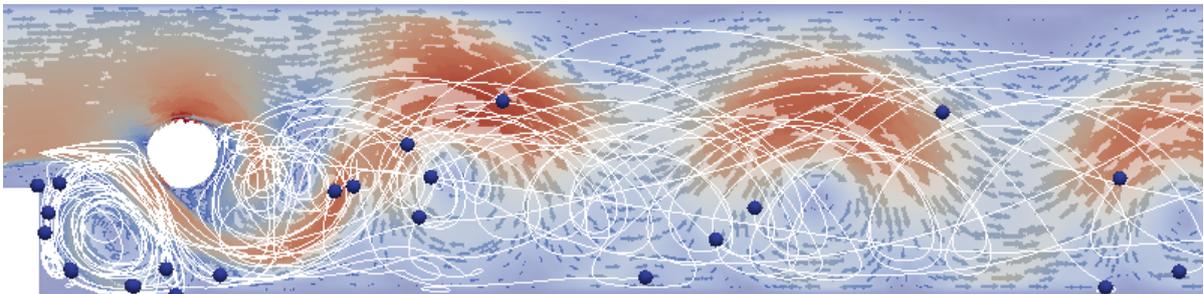
Partikel zum Zeitpunkt $t = 2.25$.



Partikel zum Zeitpunkt $t = 2.5$.



Partikel zum Zeitpunkt $t = 2.75$.



Partikel zum Zeitpunkt $t = 3.0$.

5.2 Beispiel in drei Raumdimensionen

In diesem Beispiel wird folgende dreidimensionale Geometrie betrachtet.

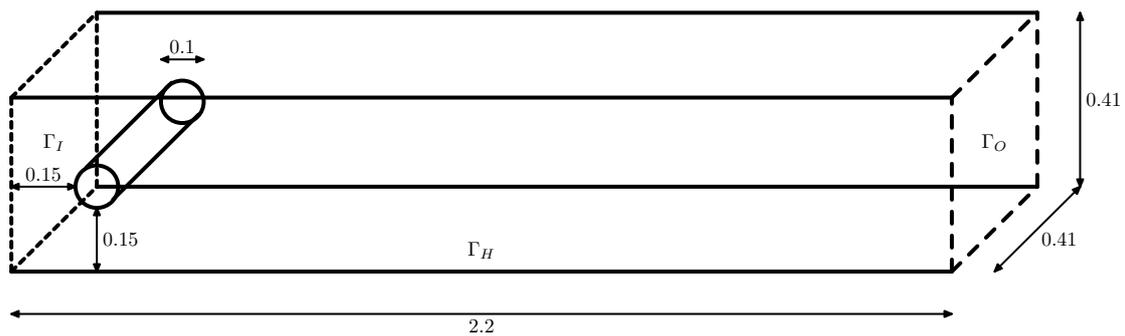


Abbildung 5.7: Geometrie (Abmessungen in Meter).

Dabei wird auf Γ_I das Einströmen eines Fluid simuliert, auf Γ_O wird das ungehinderte Austreten des Fluids simuliert und auf Γ_H gelte die Haftbedingung.

5 Numerische Beispiele

Der Geschwindigkeitsvektor der Einströmung auf Γ_I ist in diesem Beispiel gegeben durch

$$\mathbf{u}_I(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} y(0.41 - y)z(0.41 - z)1274h(4t) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}.$$

Wie in den zweidimensionalen Beispielen wird auf Γ_O das ungehinderte Austreten mit homogenen Neumann-Randbedingungen simuliert und auf Γ_H werden homogene Dirichlet-Randbedingungen zur Simulation der Haftbedingung verwendet.

Mit der mittleren Einströmgeschwindigkeit

$$u_m(t) = \frac{1}{(0.41)^2} \int_0^{0.41} \int_0^{0.41} y(0.41 - y)z(0.41 - z)1274h(4t) dy dz = 1.000005 h(4t) \frac{m}{s}$$

liegt der Wert der Reynoldszahl bei

$$\text{Re} = \frac{u_m(t) d}{\nu} = h(4t) \frac{1.000005 \cdot 0.41}{\nu} = h(4t) 4100.022.$$

Der Wert der Reynoldszahl liegt bei Zeitpunkten $t \geq 0.25$ bei 4100.022 und somit über der kritischen Reynoldszahl für Rohrströmungen.

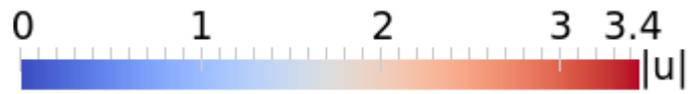
Für die numerische Simulation wurden die folgenden Parameter gewählt. Das Zeitintervall wurde mit $(0, 3)$ gewählt und in $N = 600$ Teilintervalle zerlegt. Das ergibt eine Zeitschrittweite von $\tau = 0.005$.

Die Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω wurde mit NETGEN erzeugt und enthält 46488 Tetraeder, 95988 Flächen, 58832 Kanten und 9332 Knoten.

Für die quadratische Ansatzfunktion \mathbf{u}_h ergeben sich 169023 Freiheitsgrade und für die lineare Ansatzfunktion p_h ergeben sich 9332 Freiheitsgrade. Auf Rechner 2 lag die Laufzeit bei 716797 Sekunden, das entspricht 8 Tagen, 7 Stunden, 6 Minuten und 37 Sekunden.

Die nachfolgenden Abbildungen geben den Betrag des Geschwindigkeitsvektors auf der mittleren Schnittfläche in z -Richtung wieder. Anschließend werden Abbildungen angegeben, die die Stromlinien des Strömungsfeldes wiedergeben.

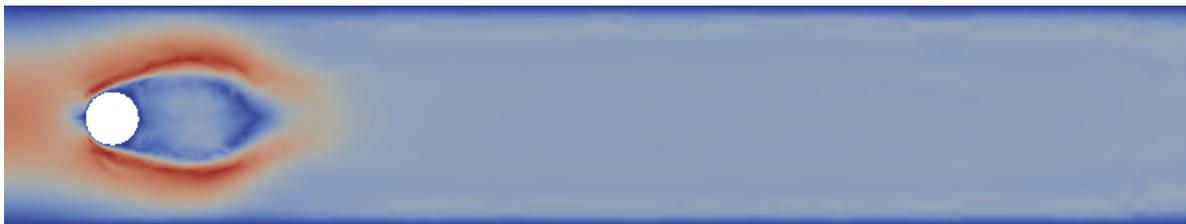
5.2 Beispiel in drei Raumdimensionen



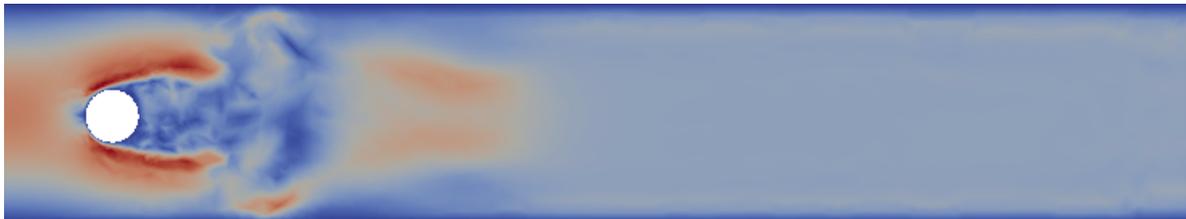
Betrag der Geschwindigkeit.



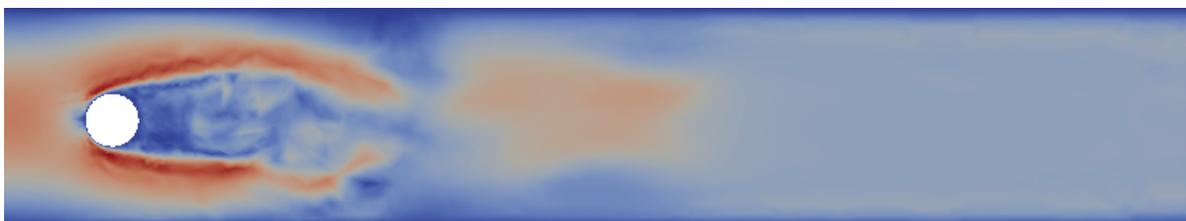
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.5$.

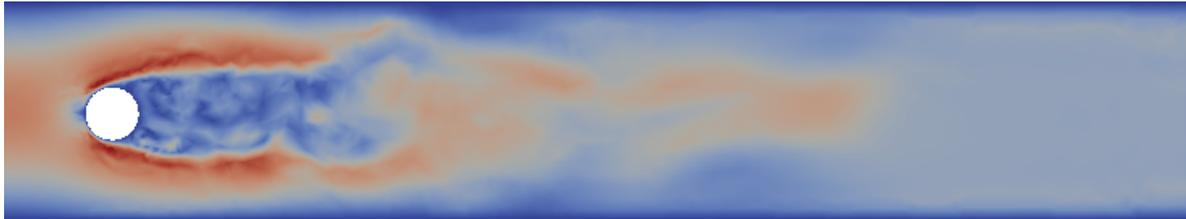
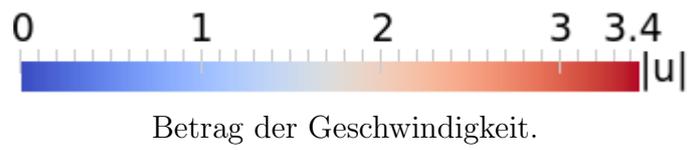


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0.75$.

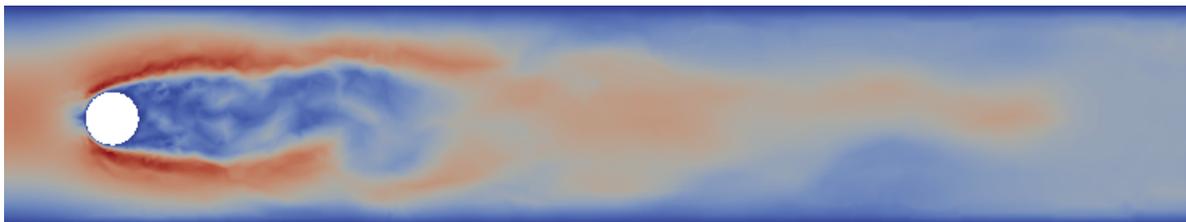


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.0$.

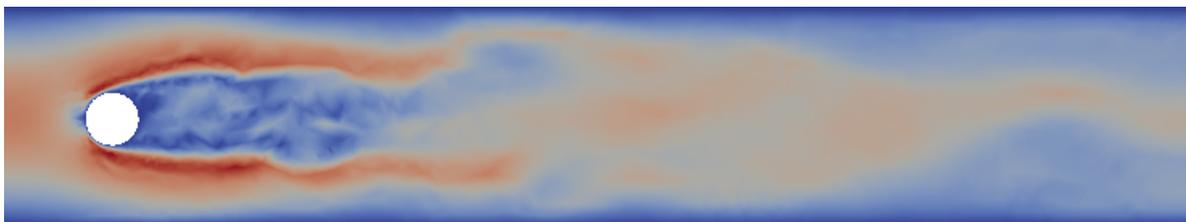
5 Numerische Beispiele



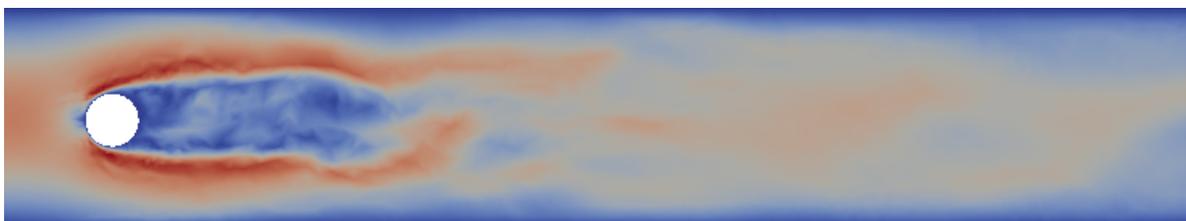
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.5$.

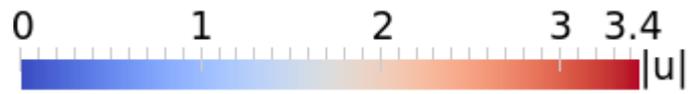


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1.75$.

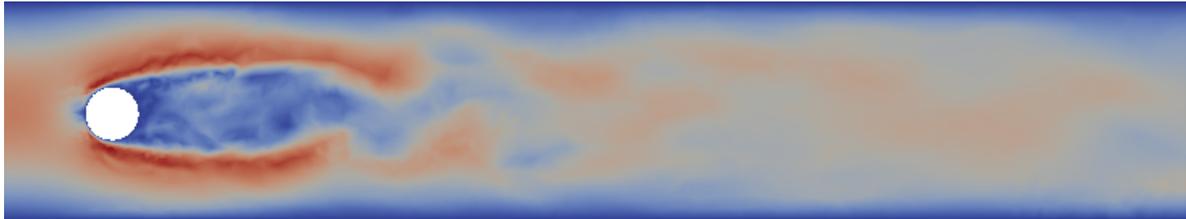


Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.0$.

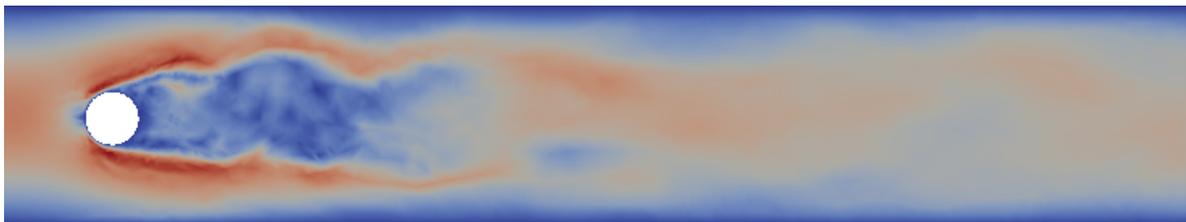
5.2 Beispiel in drei Raumdimensionen



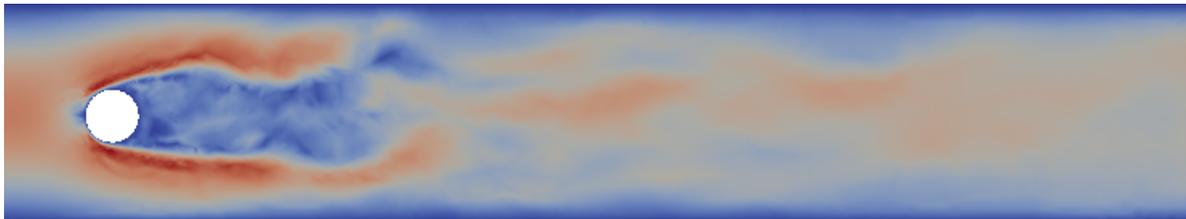
Betrag der Geschwindigkeit.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.25$.



Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.5$.



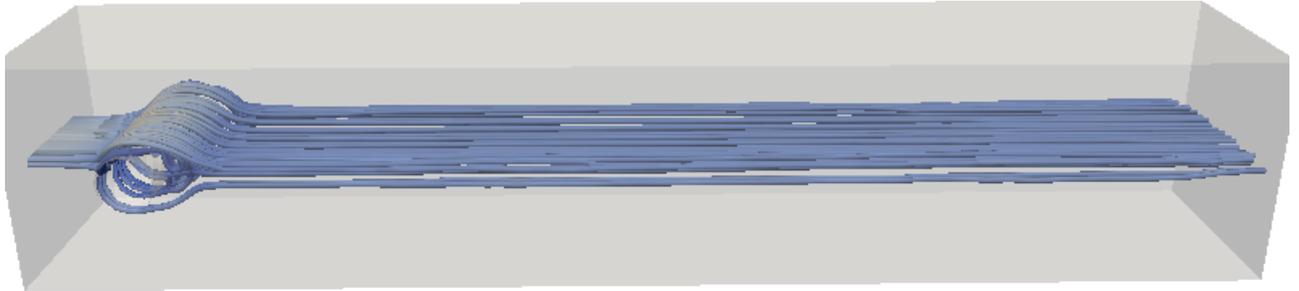
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2.75$.



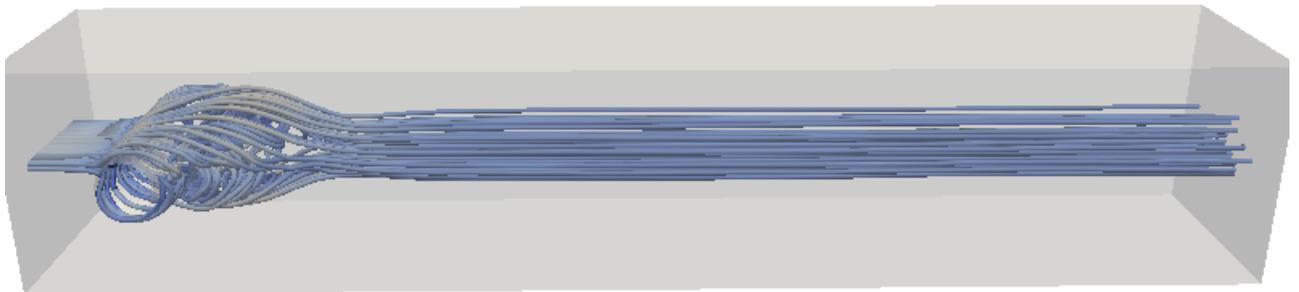
Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3.0$.

5 Numerische Beispiele

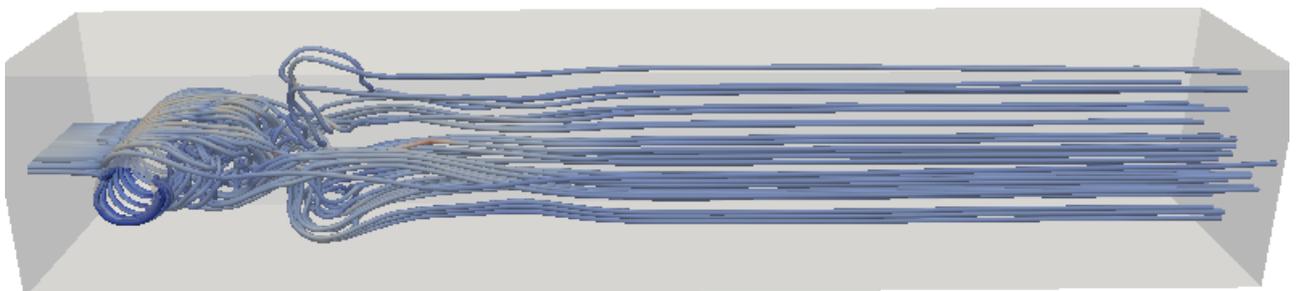
Im Dreidimensionalen kann analog zum zweidimensionalen Fall die Entstehung von Wirbeln hinter dem Hindernis beobachtet werden. Jedoch kann man erkennen, dass die Strömung im Gegensatz zum Zweidimensionalen kein periodisches Verhalten widerspiegelt. Die folgenden Grafiken zeigen die Stromlinien der Strömung.



Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 0.25$.

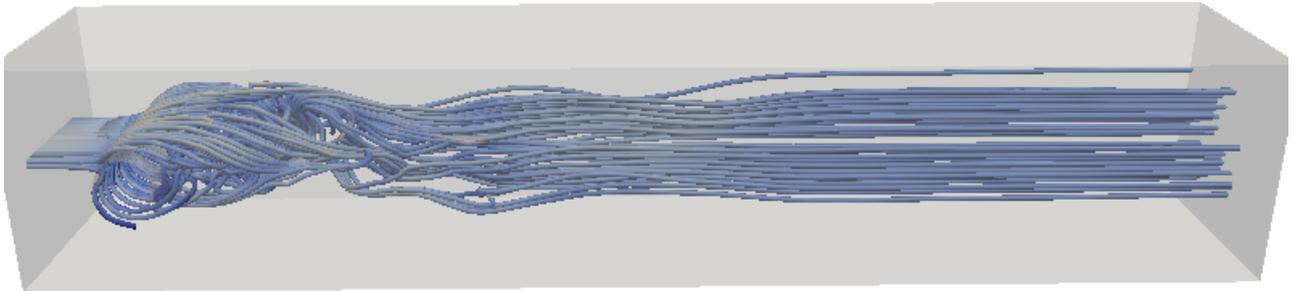


Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 0.5$.

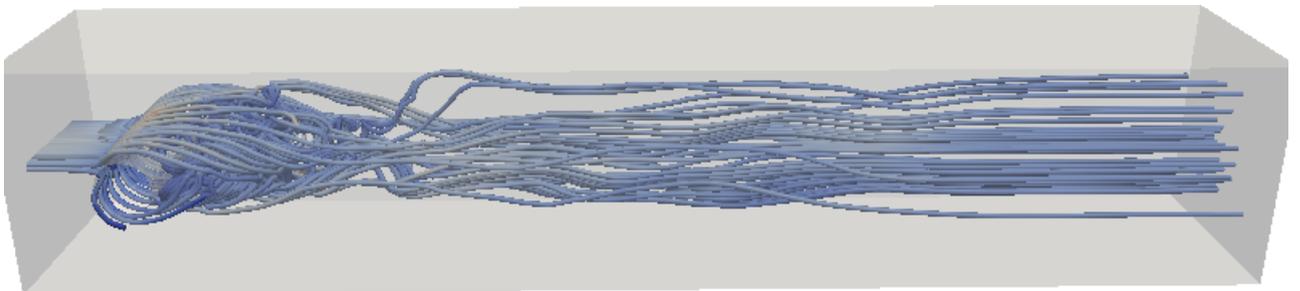


Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 0.75$.

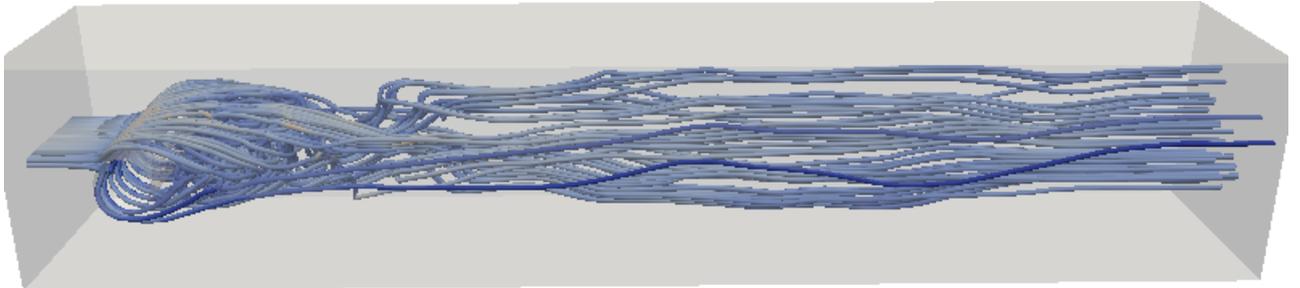
5.2 Beispiel in drei Raumdimensionen



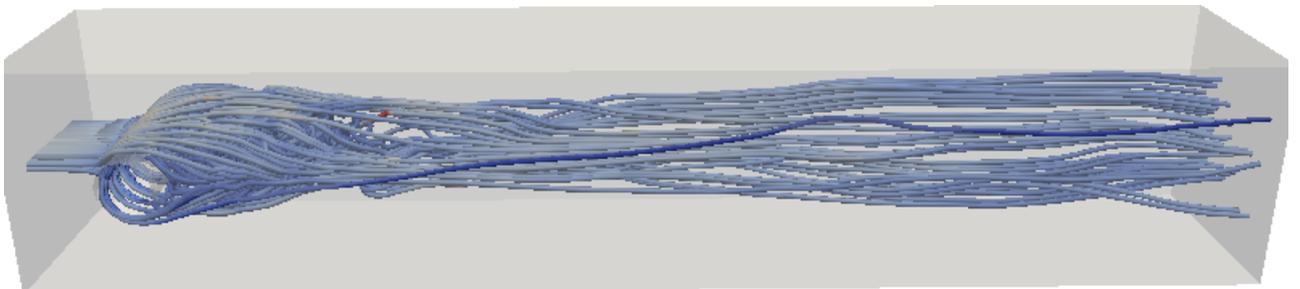
Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 1.0$.



Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 1.25$.

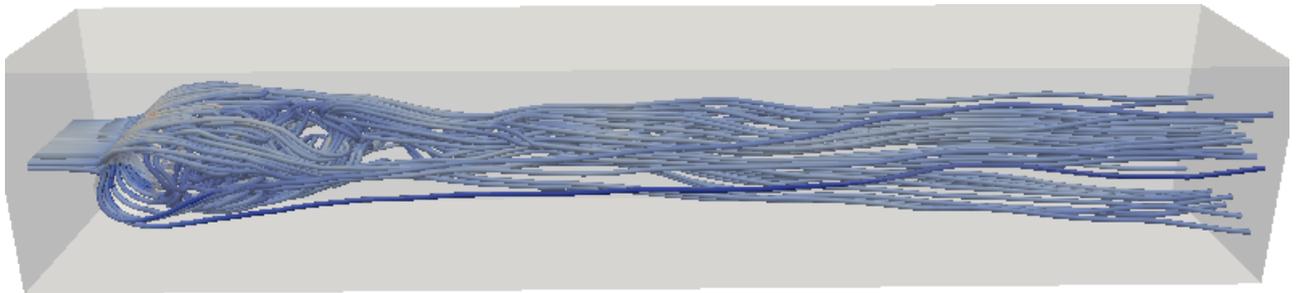


Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 1.5$.

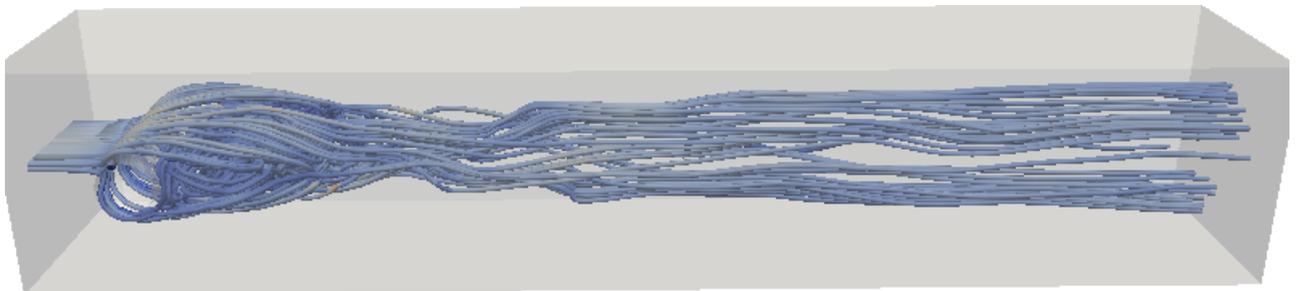


Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 1.75$.

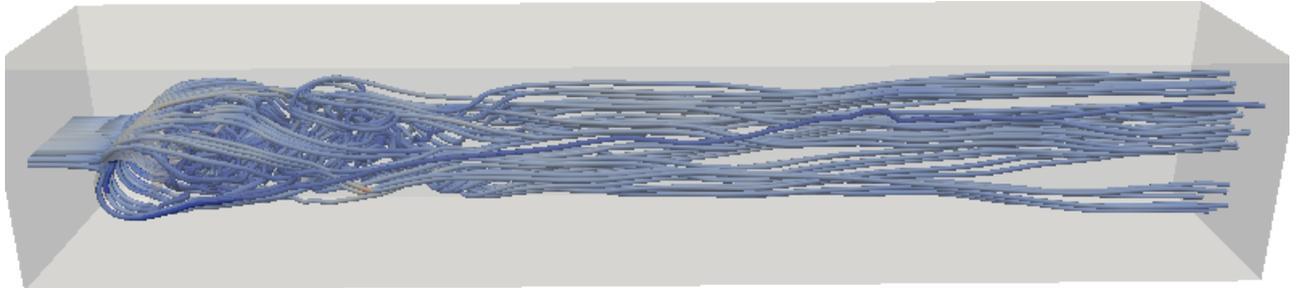
5 Numerische Beispiele



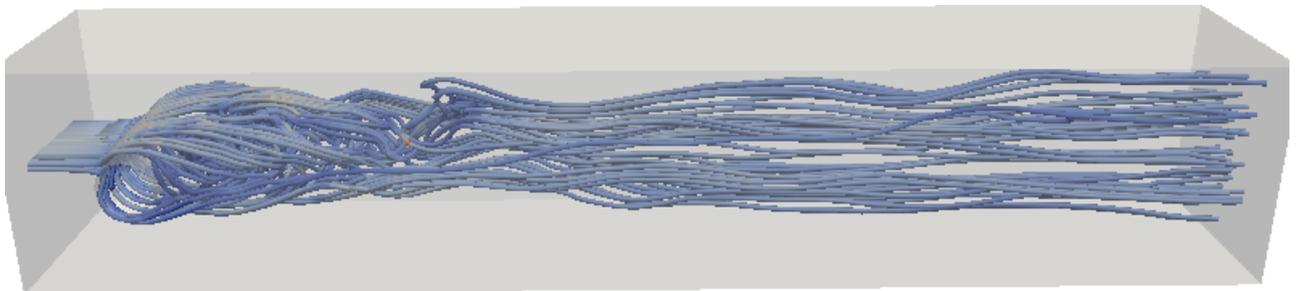
Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 2.0$.



Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 2.25$.

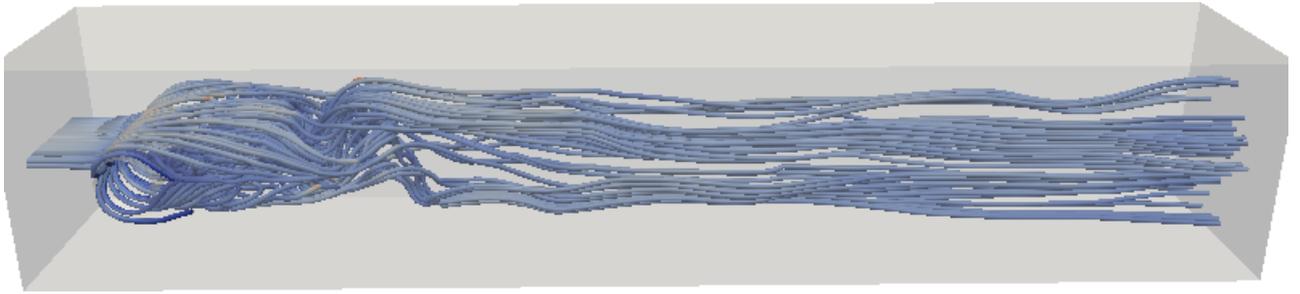


Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 2.5$.



Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 2.75$.

5.2 Beispiel in drei Raumdimensionen



Stromlinien zum Zeitpunkt $t = 3.0$.

Anhand der Stromlinien kann man die Wirbelbildung hinter dem Hindernis sehr gut erkennen. Man kann sehen, dass die Turbulenz nicht nur von der Strömung in x -Richtung und in y -Richtung beeinflusst wird, sondern auch von der Strömung in die z -Richtung.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Bonn, 2011. Eine anwendungsorientierte Einführung.
- [3] M. Bach, C. Constanda, G. C. Hsiao, A.-M. Sändig, and P. Werner, editors. *Analysis, numerics and applications of differential and integral equations*, volume 379 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1998. Papers from the conference held at the University of Stuttgart, Stuttgart, October 9–11, 1996.
- [4] M. Beneš. Mixed initial-boundary value problem for the three-dimensional Navier-Stokes equations in polyhedral domains. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (Dynamical systems, differential equations and applications. 8th AIMS Conference. Suppl. Vol. I):135–144, 2011.
- [5] M. Beneš and P. Kučera. Non-steady Navier-Stokes equations with homogeneous mixed boundary conditions and arbitrarily large initial condition. *Carpathian J. Math.*, 23(1-2):32–40, 2007.
- [6] D. Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2007. Theory, fast solvers, and applications in elasticity theory, Translated from the German by Larry L. Schumaker.
- [7] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] Ph. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.
- [9] G. Coppola, S. J. Sherwin, and J. Peiró. Nonlinear particle tracking for high-order elements. *Journal of Computational Physics*, 172(1):356 – 386, 2001.
- [10] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
- [11] Ch. Eck, H. Garcke, and P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer, Bielefeld, 2008.

Literaturverzeichnis

- [12] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [13] M. Feistauer, J. Felcman, and I. Straškraba. *Mathematical and computational methods for compressible flow*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [14] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [15] H. Manouzi. The Stokes problem and the mixed boundary conditions. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 12(5):155–160, 1990.
- [16] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [17] M. Morak. Betrachtungen zum k - ε -turbulenzmodell mit finiten-volumen. Masterarbeit, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2013.
- [18] J. Nečas. *Equations aux Dérivées Partielles*. Presses de l'Université de Montréal, 1965.
- [19] J. Nečas. *Direct Methods in the Theory of elliptic equations*. Springer, second edition, 2012. Translated from the French by Gerard Tronel and Alois Kufner.
- [20] M. A. Olshanskii and A. Reusken. Grad-div stabilization for Stokes equations. *Math. Comp.*, 73(248):1699–1718, 2004.
- [21] D. Pokrajac and Lazic R. An efficient algorithm for high accuracy particle tracking in finite elements. *Advances in Water Resources*, 25(4):353 – 369, 2002.
- [22] A. Quarteroni. *Numerical models for differential problems*, volume 2 of *MS&A. Modeling, Simulation and Applications*. Springer-Verlag Italia, Milan, 2009. Translated from the 4th (2008) Italian edition by Silvia Quarteroni.
- [23] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.
- [24] H. Schade and E. Kunz. *Strömungslehre*. Walter de Gruyter, Berlin, third edition, 2007.
- [25] O. Schenk, M. Bollhöfer, and R. A. Römer. On large-scale diagonalization techniques for the Anderson model of localization. *SIAM Rev.*, 50(1):91–112, 2008.

- [26] O. Schenk, A. Wächter, and M. Hagemann. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 36(2-3):321–341, 2007.
- [27] O. Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. Springer, New York, 2008. Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original.
- [28] H. Suk and G.-T. Yeh. Development of particle tracking algorithms for various types of finite elements in multi-dimensions. *Computers and Geosciences*, 36(4):564 – 568, 2010.
- [29] A. E. Taylor. *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1958.
- [30] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.
- [31] D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries Inc., California, second edition, 2002.
- [32] J. Wloka. *Funktionalanalysis und Anwendungen*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1971. de Gruyter Lehrbuch.
- [33] J. Wloka. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas.
- [34] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*. Springer-Verlag, New York, 1990. Linear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.