

Helga DUMPHART

Bewertung von Zinsgarantien

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades einer/s
Diplom-Ingenieur/in

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik



Technische Universität Graz

Betreuer:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang MÜLLER

Institut für Statistik

Graz, im Juni 2011

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quotes either literally or by content from the used sources.

.....
date
.....
(signature)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
1 Die Garantietypen	5
1.1 Die Typ I Garantie	5
1.2 Die Typ II Garantie	6
2 Bewertung der Garantien im Black Scholes Modell	8
2.1 Das Black Scholes Modell	8
2.2 Das äquivalente Martingalmaß im Black Scholes Modell	9
2.3 Bewertung von Forderungen im Black Scholes Modell	10
2.4 Bepreisung der Typ I Garantie	11
2.5 Bepreisung der Typ II Garantie	13
2.6 Diskussion der Ergebnisse	14
3 Zinsstrukturmodelle	16
3.1 Definition der grundlegenden Begriffe	16
3.2 Das erweiterte Vasicek Modell	18
3.3 Das Cox Ingersoll Ross Modell	18
3.3.1 Simulation eines Wurzelfdiffusionsprozesses	19
4 Stochastische Volatilität - das Heston Modell	21
4.1 Simulation im Heston Modell	21
5 Bewertung der Garantien in Modellen mit stochastischer Zinsstruktur	23
5.1 Das erweiterte Vasicek Modell	23
5.1.1 Bepreisung der Typ I Garantie	24
5.1.2 Bepreisung der Typ II Garantie	35
5.1.3 Diskussion der Ergebnisse	38
5.1.4 Bepreisungsformeln für die Typ I Garantie mit g_t^{MW} und g_t^{GLM}	41
5.1.4.1 Geschlossene Formeln für die Typ I Garantie für g_t^{GLM}	42
5.1.5 Simulation der Typ II Garantie mit den garantierten Zinsen g_t^{MW} bzw. g_t^{GLM}	47
5.1.5.1 Simulation des Prozesses (r_t, β_t, δ_t)	47
5.1.6 Diskussion der Ergebnisse für g_t^{MW} und g_t^{GLM}	52
5.2 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell	57
5.2.1 Diskussion der Ergebnisse	62

6	Bewertung der Garantien in Modellen mit stochastischer Volatilität des Referenzfonds	66
6.1	Heston Modell mit konstanter Zinsstruktur	66
6.1.1	Diskussion der Ergebnisse	70
6.2	Heston Modell mit stochastischer Zinsstruktur nach dem erweiterten Vasiček Modell	72
6.2.1	Diskussion der Ergebnisse	78
7	Vergleich der Modelle und Fazit	79
8	Programm-Codes	81
8.1	Kalkulationsprogramm für das erste einführende Modell aus Kapitel 2	81
8.2	Simulationsprogramm für Modell aus Kapitel 5.1	81
8.3	Simulationsprogramm für das Modell aus Kapitel 5.2	84
8.4	Simulationsprogramm für das Modell aus Kapitel 6.1	86
8.5	Simulationsprogramm für Modell aus Kapitel 6.2	88
	Literaturverzeichnis	92

Einleitung

Zu fondsgebundenen Lebens- und Pensionsversicherungen werden gerne Zinsgarantien angeboten, die den Besitzer im Falle von schlechten Fondsentwicklungen vor großen Kapitalverlusten bewahren sollen. Die Bepreisung solcher Garantien ist für den Versicherer von großer Bedeutung, denn werden die Garantien zu gering bewertet, kann es zu schwerwiegenden finanziellen Einbußen seitens des Versicherers kommen.

Vergangene Arbeiten zur Bepreisung von Zinsgarantien behandelten absolute Garantien, das heißt Garantien, die eine deterministische Entwicklung des Kapitals garantieren, wie zum Beispiel die Arbeiten von Brennan und Schwartz [4], Boyle [2], Miltersen und Persson [16], Grosen und Jørgensen [8], Hansen und Miltersen [9] und Schrage und Pelsser [18]. Absolute Garantien ergeben aber ein Problem: Niedrige deterministische garantierte Zinse machen den Vertrag für die Kunden unattraktiv, hohe für den Versicherer. Daher sind stochastische Zinsgarantien, deren Höhe sich an einem Referenzzins orientiert, in der Praxis sehr beliebt.

In [2] werden Garantien betrachtet, welche einen Endwert des Kapitals von zumindest 75% bzw. 100 % der eingezahlten Prämien garantieren. Die Preise dieser Garantien werden in [2] über eine Monte Carlo Simulation berechnet. In [16] werden für verschiedene deterministische Garantietypen geschlossene Formeln hergeleitet. Die Zinsstruktur wird dabei einerseits deterministisch gewählt und andererseits durch ein Heath Jarrow Morton Modell festgelegt.

[8] beschreibt einen Vertrag über eine Garantief orm, in dem zusätzlich Bonuszahlungen aus einem Unternehmensgewinn vereinbart sind. Die Zinsen werden als konstant angenommen.

Die Arbeiten von Yang, Yueh und Tang [19] und Lindset [15] beschäftigen sich mit stochastischen Garantien. In [15] wird die Zinsstruktur über ein Heath Jarrow Morton Modell beschrieben, [19] verwendet dazu das erweiterte Vasiček Modell. In beiden Arbeiten wird der diskontierte Wertprozess des Referenzfonds als geometrische Brown'sche Bewegung modelliert und beide Arbeiten behandeln Garantien vom Typ I und Typ II, die wie folgt definiert sind: Die Typ I Garantie legt eine Mindestverzinsung über die ganze Laufzeit des Vertrages fest. Die Typ II Garantie vereinbart im Gegensatz dazu die Mindestverzinsung für jedes Jahr, das heißt, entwickelt sich der Referenzfonds in einem Jahr schlechter als die vereinbarte Mindestverzinsung, wird bei der Typ II Garantie das Kapital am Ende des Jahres mit dem Mindestzinssatz aufgezinnt. Bei gleichem garantierten Zinssatz ist die Typ II Garantie stets wertvoller als die Typ I Garantie.

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit beschreibt die Typ I und die Typ II Garantie. Im zweiten Kapitel wird das Black-Scholes Modell als Basismodell für die Entwicklung des Referenzfonds herangezogen. In diesem Modell werden für die Preise beider Garantietypen geschlossene Formeln bei konstanter Zinsstruktur und deterministischen Garantien hergeleitet.

Um das Basismodell in verschiedener Weise erweitern zu können, geben Kapitel 3 und 4 Einblick in zwei Zinsstrukturmodelle und das Heston Modell für die stochastische Volatilität. Darauf aufbauend wird in Kapitel 5 die konstante Zinsstruktur durch ein stochastisches Mo-

dell ersetzt (erweitertes Vasiček Modell bzw. Cox Ingersoll Ross Modell) und in Kapitel 6, zunächst unter Annahme eines konstanten Zinses, die konstante Volatilität des Referenzfonds durch eine stochastische Volatilität nach dem Heston Modell ersetzt. Abschließend wird ein Modell betrachtet, das die Volatilität des Referenzfonds durch das Heston Modell, und zusätzlich die Zinsstruktur durch das erweiterte Vasiček Modell, beschreibt. In all diesen Modellen wird der Preis der verschiedenen Garantien entweder analytisch berechnet oder (in den komplexen Modellen) durch Monte-Carlo Simulation numerisch bestimmt.

Die Tabelle gibt eine Übersicht über die verschiedenen betrachteten Modelle in dieser Arbeit.

		Modellierung des Referenzportfolios	
		diskontierter Wertprozess als geometrische Brownsche Bewegung	stochastische Volatilität gemäß Heston Modell
deterministische Garantie und Zinsen		Kapitel 2	Kapitel 6.1
stochastische Garantie und Zinsen		Kapitel 5.1 (Vasiček Modell)	Kapitel 6.2 (Heston und Vasiček Modell)
		Kapitel 5.2 (Cox Ingersoll Ross Modell)	

Im Anschluss an jedes Modell finden sich Grafiken, die die Sensibilität der Garantiepriese in den verschiedenen Modellen gegenüber der Veränderung der verschiedenen Parameter beschreiben. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse aus den verschiedenen Modellen miteinander verglichen.

Die Hauptreferenz für die vorliegende Arbeit ist [19]. Gegenüber [19] neu ist die Bewertung der Garantien unter Verwendung des Cox Ingersoll Ross Modells bzw. unter Kombination des erweiterten Vasiček Modells mit dem Heston Modell für die Volatilität des Referenzfonds. Zudem wird ein neuer Garantietyp betrachtet, bei dem die Mindestverzinsung als gleitendes Mittel über vergangene Referenzzinssätze festgelegt wird (vgl. Kapitel 5.1.4). Je nach Modellannahme werden für die Garantien geschlossene Preisformeln bzw. Algorithmen zur Bepreisung mittels Monte Carlo Simulation angegeben. Zur Simulation von Wurzelfusionsprozessen im Cox-Ingersoll-Ross Modell wird ein neuer Ansatz vorgestellt, der sicherstellt, dass mit dem Wurzelfusionsprozess auch der simulierte approximierende Prozess stets positiv ist (was bei vielen der herkömmlichen Simulationsmethoden künstlich erzwungen wird).

Kapitel 1

Die Garantietypen

Eine fondsgebundene Lebensversicherung wird über T Jahre abgeschlossen. Die Auszahlung orientiert sich am Wert eines vertraglich festgelegten Referenzfonds. Für $0 \leq n \leq T$ bezeichne S_n den Wert des Referenzfonds zum Zeitpunkt n und

$$R_n = \log \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right) \quad (1 \leq n \leq T)$$

die jährliche Rendite im n -ten Jahr, das heißt k zum Zeitpunkt $n - 1$ im Fonds investierte Geldeinheiten haben zum Zeitpunkt n den Wert ke^{R_n} . Wird zu Beginn jedes n -ten Jahres eine Einzahlung der Höhe k_n vereinbart, erhält der Versicherungsnehmer am Ende der Laufzeit den Betrag

$$H_T = \sum_{n=1}^T k_n \prod_{t=n}^T e^{R_t}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass der Versicherte einen fixen Betrag Y_0 zu Vertragsbeginn investiert und diese Prämie jedes Jahr um i_Y Prozent wächst, das heißt $k_n = Y_0(1 + i_Y)^{n-1}$. Zusätzlich kann der Versicherte einen Vertrag abschließen, der ihm bei schlechter Entwicklung des Referenzfonds eine Minimalverzinsung seines Kapitals garantiert. Die zwei nachstehenden Kapitel beschreiben jeweils eine Variante für solche Garantien.

1.1 Die Typ 1 Garantie

Ein Vertrag über die Typ 1 Garantie wird zusätzlich zu einer fondsgebundenen Lebensversicherung über den Zeitraum $[0, T]$ abgeschlossen. Mit dem Vertrag über diese Garantie wird für jedes Jahr $1 \leq n \leq T$ ein Garantiezins g_n festgelegt. Dieser Zins kann sowohl fix, zum Beispiel $g_n = 0.03$ ($1 \leq n \leq T$), als auch zufälligen Schwankungen unterworfen sein. Der garantierte Zins könnte zum Beispiel an den EURIBOR gebunden sein.

Für einen Inhaber einer fondsgebundenen Versicherung mit Zinsgarantie ergibt sich folgende Situation: Am Beginn des n -ten Jahres ($1 \leq n \leq T$) wird der Betrag k_n eingezahlt. Zum Zeitpunkt T wird für diese Einzahlung entschieden, wie sie über das Intervall $[n - 1, T]$ verzinst wird. Hatte der Referenzfonds in diesem Zeitraum eine gute Entwicklung, so wird der Betrag k_{n+1} entsprechend der Rendite dieses Fonds wie in einer gewöhnlichen fondsgebundenen Versicherung verzinst, das heißt k_n zum Zeitpunkt $n - 1$ investierte Einheiten haben zum

Zeitpunkt T den Wert

$$k_n \prod_{t=n}^T e^{R_t}.$$

War die Entwicklung des Fonds aber schlechter als die durch die $(g_m)_{n \leq m \leq T}$ festgelegten Garantiezinsen, das heißt

$$\prod_{t=n}^T e^{R_t} < \prod_{t=n}^T e^{g_t},$$

dann wird das eingezahlte Kapital k_n mit dem garantierten Zins verzinst. Daher hat die Einzahlung k_n zum Zeitpunkt T den Wert

$$k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t}, \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right).$$

Der Versicherungsnehmer erhält am Ende der Laufzeit der fondsgebundenen Versicherung mit Typ 1 Garantie den Betrag

$$H_T(I) = \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t}, \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right).$$

Wegen

$$\begin{aligned} H_T(I) &= \sum_{n=1}^T k_n \cdot \left\{ \prod_{t=n}^T e^{R_t} + \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right\} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^T k_n \prod_{t=n}^T e^{R_t}}_{\text{fondsgebundene Versicherung}} + \underbrace{\sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right)}_{\text{Wert der Garantie}} \end{aligned}$$

ist der alleinige Wert $V_T(I)$ der Typ 1 Garantie zum Zeitpunkt T gleich

$$V_T(I) = \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right). \quad (1.1)$$

1.2 Die Typ II Garantie

Ein Vertrag über die Typ II Garantie wird zusätzlich zu einer fondsgebundenen Lebensversicherung über den Zeitraum $[0, T]$ abgeschlossen. Wie bei der Typ 1 Garantie wird für das n -te Jahr ein garantierter Zins g_n festgelegt. Zu Beginn des n -ten Jahres ($1 \leq n \leq T$) erfolgt eine Einzahlung in der Höhe k_n . Im Gegensatz zur Typ 1 Garantie wird hier das Kapital am Ende des n -ten Jahres mit dem Faktor

$$\max(e^{R_n}, e^{g_n})$$

aufgezinst, das heißt die Rendite im n -ten Jahre beträgt R_n , wenn sich der Referenzfonds besser als die garantierten Zinsen g_n entwickelt, und sie ist g_n , wenn sich der Referenzfonds

schlechter als g_n entwickelt. Wird vertraglich eine jährliche Zahlung der Höhe k_n für die Jahre $n = 1, \dots, T$ vereinbart, so bekommt der Versicherungsnehmer der fondsgebundenen Lebensversicherung mit Typ II Garantie am Ende der Laufzeit eine Auszahlung von

$$H_T(II) = \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right].$$

Teilt man den Vertragswert $H_T(II)$ ähnlich wie bei der Typ 1 Garantie auf,

$$\begin{aligned} H_T(II) &= \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right] \\ &= H_T + \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] \end{aligned}$$

so sieht man, dass der Wert der Typ II Garantie $V_T(II)$ zum Zeitpunkt T gleich

$$V_T(II) = \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] \quad (1.2)$$

ist. Es gilt stets

$$V_T(I) \leq V_T(II).$$

Die Funktionsweise der Typ 1 und Typ II Garantie soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel 1. Es gelte $T = 3, Y_0 = 1, i_Y = 0$, das heißt die Einzahlung $k_n = 1$ in allen drei Beitragsjahren $n = 1, 2, 3$. Der garantierte Zins g_n und die Rendite R_n seien wie folgt gegeben:

n	R_n	g_n
1	0.040	0.03
2	0.035	0.03
3	0.020	0.03

Damit ergibt sich der Endwert zum Zeitpunkt $T = 3$ der alleinigen fondsgebundenen Lebensversicherung H_T und der fondsgebundenen Versicherungen mit Typ 1 Garantie $H_T(I)$ bzw. Typ II Garantie $H_T(II)$.

$$H_3 = \sum_{n=1}^3 1 \prod_{t=n}^3 e^{R_t} = e^{0.04} \cdot e^{0.035} \cdot e^{0.02} + e^{0.035} \cdot e^{0.02} + e^{0.02} = 3.1764,$$

$$H_3(I) = \sum_{n=1}^3 1 \cdot \max \left[\prod_{t=n}^3 e^{g_t}, \prod_{t=n}^3 e^{R_t} \right] = e^{0.04} \cdot e^{0.035} \cdot e^{0.02} + e^{0.03} \cdot e^{0.03} + e^{0.03} = 3.19195,$$

$$H_3(II) = \sum_{n=1}^3 1 \cdot \left[\prod_{t=n}^3 \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right] = e^{0.04} \cdot e^{0.035} \cdot e^{0.03} + e^{0.035} \cdot e^{0.03} + e^{0.03} = 3.20832.$$

Für die Garantiewerte zum Zeitpunkt $T = 3$ erhält man

$$\begin{aligned} V_3(I) &= H_3(I) - H_3 = 0.01555 \\ V_3(II) &= H_3(II) - H_3 = 0.03192. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Bewertung der Garantien im Black Scholes Modell

In diesem Abschnitt soll der Wert der beiden Garantien im Black Scholes Modell berechnet werden, wobei angenommen wird, dass die garantierten Zinsraten g_n fix sind.

2.1 Das Black Scholes Modell

Im Black Scholes Modell [1] werden zwei Finanzgüter über dem Zeitintervall $[0, T]$ betrachtet:

1. eine risikolose Anleihe, deren Preis zum Zeitpunkt t gegeben ist durch

$$S_t^0 = e^{rt}$$

wobei $r \geq 0$ der konstante risikolose Zins ist, und

2. ein risikobehaftetes Gut (hier der Wert des Referenzfonds), dessen Preis zum Zeitpunkt t durch

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s B_t \right\}$$

gegeben ist. Dabei ist $\sigma_s > 0$ die Volatilität des Finanzgutes, $\mu \in \mathbb{R}$ die erwartete Rendite und B_t ist eine Standard-Brown'sche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Alternativ: S_t^1 ist die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t^1 = S_t^1 (\mu dt + \sigma_s dB_t). \quad (2.1)$$

Der Informationsverlauf wird über eine Filtration \mathcal{F}_t modelliert. Da zum Zeitpunkt t die Preise bis zum Zeitpunkt t bekannt sind, ist der Pfad $(B_s)_{s \leq t}$ bekannt und damit alle $\sigma(B_s | s \leq t)$ -meßbaren Zufallsvariablen. Daher wählt man

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s | s \leq t\} \cup \mathcal{N}),$$

wobei die Menge \mathcal{N} die Menge aller \mathbb{P} -Nullmengen aus technischen Gründen in die Filtration aufgenommen wird, damit verschiedene Sätze aus der stochastischen Analysis angewendet werden können.

2.2 Das äquivalente Martingalmaß im Black Scholes Modell

Es wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} konstruiert, das äquivalent zu \mathbb{P} ist, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, und bezüglich dem der diskontierte Preisprozess $(\tilde{S}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$, $\tilde{S}_t^1 = (S_t^0)^{-1} S_t^1$, ein Martingal ist.

Zur Konstruktion von \mathbb{Q} beachte man, dass nach der Produktregel für Itô-Integrale

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^1 &= d(e^{-rt} S_t^1) = (-re^{-rt} dt) S_t^1 + e^{-rt} dS_t^1 \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \tilde{S}_t^1 ((\mu - r) dt + \sigma_s dB_t) = \sigma_s \tilde{S}_t^1 dZ_t \end{aligned}$$

gilt, wobei $dZ_t = \frac{(\mu-r)}{\sigma_s} dt + dB_t$. Ist Z_t eine Brown'sche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{Q})$ ist, so ist $(\tilde{S}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ ein lokales Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Der Satz von Girsanov liefert uns das benötigte Maß \mathbb{Q} .

SATZ 2.2.1. (Satz von Girsanov) Sei B eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathcal{F} auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Es sei

$$\tilde{\mathcal{H}} := \left\{ H = (H_s)_{0 \leq s \leq T} \mid H \text{ meßbar, } H \text{ adaptiert, } \int_0^T H_s^2 ds < \infty \mathbb{P} - f.s. \right\}.$$

Für $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ betrachten wir eine Brown'sche Bewegung mit Drift $\int_0^t H_s ds$, das heißt

$$Z_t := B_t + \int_0^t H_s ds.$$

Angenommen der Exponentialprozess

$$\mathcal{E}_t := \exp \left\{ - \int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (H_s)^2 ds \right\}$$

ist ein Martingal bezüglich \mathbb{P} , dann ist $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{Q})$, wobei $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ durch $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_T$ festgelegt ist.

In unserem Fall ist $H_t = \frac{(\mu-r)}{\sigma_s}$ und $Z_t = B_t + \frac{(\mu-r)}{\sigma_s} t$. Weil

$$\mathcal{E}_t := \exp \left\{ - \frac{(\mu-r)}{\sigma_s} B_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma_s} \right)^2 t \right\}$$

ein Martingal bezüglich \mathbb{P} ist, ist Z eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{Q} . Wegen

$$\tilde{S}_t^1 = S_0^1 \cdot \exp \left\{ (\mu - r - \frac{\sigma_s^2}{2}) t + B_t \right\} = S_0^1 \cdot \exp \left\{ \sigma_s Z_t - \frac{\sigma_s^2}{2} t \right\}$$

ist \tilde{S}_t^1 ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Es gilt

$$S_t^1 = S_0^1 \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s Z_t \right\}. \quad (2.2)$$

2.3 Bewertung von Forderungen im Black Scholes Modell

Definition 2.3.1 (Forderung, Claim).

Eine Forderung (oder auch Claim) ist eine \mathcal{F}_T -meßbare Zufallsvariable C_T . Dem Besitzer der Forderung wird die Auszahlung C_T zum Zeitpunkt T zugesichert.

Definition 2.3.2 (Handelsstrategie).

Eine Handelsstrategie ist ein \mathbb{R}^2 -wertiger adaptierter Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^0 \\ X_t^1 \end{pmatrix}.$$

Der Wert der Handelsstrategie X zum Zeitpunkt t ist $V_t(X) := X_t^0 S_t^0 + X_t^1 S_t^1$.

Definition 2.3.3 (diskontierter Wertprozess, diskontierter Preisprozess).

Der Prozess $\tilde{S}_t = (S_t^0)^{-1} S_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{S}_t^1 \end{pmatrix}$ mit $S_t = \begin{pmatrix} S_t^0 \\ S_t^1 \end{pmatrix}$ heißt diskontierter Preisprozess. Der Prozess $\tilde{V}_t(X) = (S_t^0)^{-1} V_t(X)$ heißt diskontierter Wertprozess.

Definition 2.3.4 (Wertzuwachsprozess).

Sei X eine Handelsstrategie. Der Prozess $G(X) = (G_t(X))_{0 \leq t \leq T}$, wobei

$$G_t(X) = \int_0^t X_u^0 dS_u^0 + \int_0^t X_u^1 dS_u^1,$$

heißt der Wertzuwachsprozess der Handelsstrategie X und beschreibt die Summe der Wertänderungen des Portfolios aufgrund von Preisänderungen.

Definition 2.3.5 (selbstfinanzierend).

Eine Handelsstrategie X heißt selbstfinanzierend, wenn für ihren Wertzuwachsprozess $G(X)$ die Beziehung $G_u(X) = V_u(X) - V_0(X) \quad \forall u \in [0, T]$ erfüllt ist.

Definition 2.3.6 (zulässig).

Eine Handelsstrategie heißt zulässig, wenn gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{V}_t(X)^2 \right] < \infty.$$

Definition 2.3.7 (absicherbar, Hedge).

Eine Forderung C_T heißt absicherbar, wenn es eine zulässige, selbstfinanzierende Handelsstrategie X mit $V_T(X) = C_T$ gibt. $s_t(C_T) = V_t(X)$ heißt der faire Preis von C_T zum Zeitpunkt t . X heißt dann Hedge.

SATZ 2.3.1. Vollständigkeit des Black Scholes Modell

i) Jede bezüglich \mathbb{Q} quadratisch integrierbare Funktion C_T ist absicherbar.

ii) Ist X eine Hedge, dann ist der diskontierte Wertprozess ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{s}_t(C_T) &= \tilde{V}_t(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{C}_T | \mathcal{F}_t \right] \\ s_0(C_T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} C_T \right]. \end{aligned}$$

2.4 Bepreisung der Typ I Garantie

Der Wert des Referenzportfolios zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s Z_t \right\}, \quad (2.3)$$

wobei $(Z_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{Q} ist. Daraus folgt

$$R_t = r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1})$$

Die garantierten Zinsraten g_t ($1 \leq t \leq T$) seien fix. Für die Typ I Garantie gilt also

$$\begin{aligned} V_T(I) &= \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \\ &= \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1})}, 0 \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes 2.3.1 erhält man, dass der Preis $V_0(I)$ der Garantie zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V_0(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{V}_T(I) \right] \\ &= \sum_{n=1}^T k_n \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right]}_{=: \pi_0^{(n)}(I)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gelingt es also für $n \in \{1, \dots, T\}$ den Erwartungswert $\pi_0^{(n)}(I)$ aus Gleichung (2.4) auszuwerten, so kann ein Preis für die Garantie angegeben werden. Wegen

$$\prod_{t=n}^T e^{R_t} = \frac{S_T}{S_{n-1}} = e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T-n+1) + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\}}$$

und

$$\prod_{t=n}^T e^{g_t} = e^{\{\sum_{t=n}^T g_t\}} =: e^{A_{n,T}}$$

folgt

$$\begin{aligned} \pi_0^{(n)}(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max \left(e^{A_{n,T}} - e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T-n+1) + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\}}, 0 \right) \right] \\ &= e^{-rT} e^{A_{n,T}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max \left(1 - e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T-n+1) - A_{n,T} + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\}}, 0 \right) \right] \\ &= e^{-rT + A_{n,T}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max \left(1 - e^{\{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T} Z\}}, 0 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei $Z \sim N(0, 1)$ unter \mathbb{Q} eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und

$$\begin{aligned}\mu_{n,T} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) - A_{n,T} + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right] = \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) - A_{n,T} \\ \sigma_{n,T}^2 &= \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) - A_{n,T} + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right] = \sigma_s^2 (T - n + 1)\end{aligned}$$

Wegen

$$1 - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T} z} \geq 0 \iff z \leq -\frac{\mu_{n,T}}{\sigma_{n,T}} = d$$

folgt mit $d = -\frac{\mu_{n,T}}{\sigma_{n,T}}$

$$\begin{aligned}\pi_0^{(n)}(I) &= e^{-rT + A_{n,T}} \int_{-\infty}^d (1 - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T} z}) f_Z(z) dz \\ &= e^{-rT + A_{n,T}} \int_{-\infty}^d (1 - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T} z}) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= e^{-rT + A_{n,T}} \left(\int_{-\infty}^d \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T}^2/2} \int_{-\infty}^d e^{\sigma_{n,T} z - z^2/2 - \sigma_{n,T}^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz \right) \\ &= e^{-rT + A_{n,T}} \left(\phi(d) - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T}^2/2} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma_{n,T})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz \right) \\ &= e^{-rT + A_{n,T}} \left(\phi(d) - e^{\mu_{n,T} + \sigma_{n,T}^2/2} \phi(d - \sigma_{n,T}) \right)\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man:

SATZ 2.4.1. (Geschlossene Formel für die Typ I Garantie)

Im Black Scholes Modell mit fixen garantierten Zinsen g_t ($1 \leq t \leq T$) ist der faire Preis der Typ I Garantie zum Zeitpunkt 0 gegeben durch

$$V_0(I) = \sum_{n=1}^T k_n \pi_0^{(n)}(I)$$

mit

$$\pi_0^{(n)}(I) = e^{\{-rT + \sum_{t=n}^T g_t\}} \left(\phi(d) - e^{\mu_{n,T} + \frac{\sigma_{n,T}^2}{2}} \phi(d - \sigma_{n,T}) \right)$$

wobei $\phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der $N(0,1)$ -Verteilung ist und $d = -\frac{\mu_{n,T}}{\sigma_{n,T}}$ mit

$$\begin{aligned}\mu_{n,T} &= \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) - \sum_{t=n}^T g_t \\ \sigma_{n,T}^2 &= \sigma_s^2 (T - n + 1)\end{aligned}$$

2.5 Bepreisung der Typ II Garantie

Unter Verwendung des Satzes 2.3.1 erhält man wie im vorangegangenen Abschnitt, dass der Preis $V_0(II)$ der Typ II Garantie zum Zeitpunkt 0 in einem Modell mit fixen garantierten Zinsen g_n folgenden Wert hat

$$V_0(II) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} V_T(II)] = \sum_{n=1}^T k_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{e^{-rT} \left(\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right)}_{=:\pi_0^{(n)}(II)} \right]. \quad (2.6)$$

Wegen

$$\pi_0^{(n)}(II) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right] - e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] \quad (2.7)$$

genügt es die beiden Erwartungswerte dieser Gleichung getrennt zu berechnen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s(Z_t - Z_{t-1})}) \right] \\ &= \prod_{t=n}^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{g_t} \max(1, e^{-g_t + r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s(Z_t - Z_{t-1})}) \right] \\ &= e^{\sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max(0, e^{-g_t + r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s Z} - 1) \right] + 1 \right) \text{ wobei } Z \sim N(0, 1) \\ &= e^{\sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T \left(\int_{d_t}^{\infty} \left(e^{-g_t + r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s z} - 1 \right) f_Z(z) dz + 1 \right), \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$e^{-g_t + r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s z} \geq 1 \quad \iff \quad -g_t + r - \frac{\sigma_s^2}{2} + \sigma_s z \geq 0 \quad \iff \quad z \geq \frac{\frac{\sigma_s^2}{2} + g_t - r}{\sigma_s} =: d_t.$$

Setzt man die Dichte der Standardnormalverteilung $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{g_t}, e^{R_t}) \right] &= e^{\sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T \left(\int_{d_t}^{\infty} \frac{e^{-g_t + r - \frac{1}{2}(z - \sigma_s)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz - \int_{d_t}^{\infty} f_Z(z) dz + 1 \right) \\ &= e^{\sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T (e^{r - g_t} \phi(\sigma_s - d_t) + \phi(d_t)) \quad (2.8) \end{aligned}$$

Für den zweiten Erwartungswert aus Gleichung (2.7) erhält man wegen $\mathbb{E}[e^{\mu+\sigma Z}] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_{n-1}} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\} \right] \\
&= \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) (T - n + 1) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{\text{Var}_{\mathbb{Q}} [\sigma_s (Z_T - Z_{n-1})]}_{=\sigma_s^2(T-n+1)} \right\} \\
&= e^{r(T-n+1)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Insgesamt ergibt sich für $\pi_0^{(n)}(II)$ aus Gleichung (2.7) mit (2.8) und (2.9)

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(n)}(II) &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T \max(e^r, e^{R_t}) \right] - e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] \\
&= e^{-rT + \sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T (e^{r-g_t} \phi(\sigma_s - d_t) + \phi(d_t)) - e^{-r(n-1)}.
\end{aligned}$$

SATZ 2.5.1. (Geschlossene Formel für die Typ II Garantie)

Im Black Scholes Modell mit fixen garantierten Zinsen g_t ($1 \leq t \leq T$) ist der faire Preis der Typ II Garantie zum Zeitpunkt 0 gegeben durch

$$V_0(II) = \sum_{n=1}^T k_n \pi_0^{(n)}(II)$$

wobei

$$\pi_0^{(n)}(II) = e^{-rT + \sum_{t=n}^T g_t} \prod_{t=n}^T (e^{r-g_t} \phi(\sigma_s - d_t) + \phi(d_t)) - e^{-r(n-1)}.$$

Dabei bezeichnet $\phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der $N(0,1)$ -Verteilung und $d_t = \frac{1}{2}(\frac{\sigma_s^2}{2} + g_t - r)$.

2.6 Diskussion der Ergebnisse

In den Abschnitten 2.4 und 2.5 wurden im Black Scholes Modell geschlossene Formeln für die Preise der Typ I und Typ II Garantie hergeleitet. Es wurde angenommen, dass der Wert des Referenzportfolios zum Zeitpunkt t durch eine geometrische Brown'sche Bewegung mit konstanter Volatilität $\sigma_s > 0$ beschrieben wird. Die Zinsstruktur am Anlagenmarkt ist konstant gleich r . Im folgenden numerischen Beispiel ist $r = 0.03$. Zu Beginn des t -ten Jahres wird eine Einzahlung der Höhe

$$k_t = (1 + i_Y)^{t-1} Y_0$$

getätigt, wobei $i_Y = 0.02$ und $Y_0 = 6$

Die Abbildung 2.1 zeigt, wie sich die Preise für die Typ I und die Typ II Garantie in Abhängigkeit von der Laufzeit T und in Abhängigkeit von σ_s verändern. Wie zu erwarten sind bei

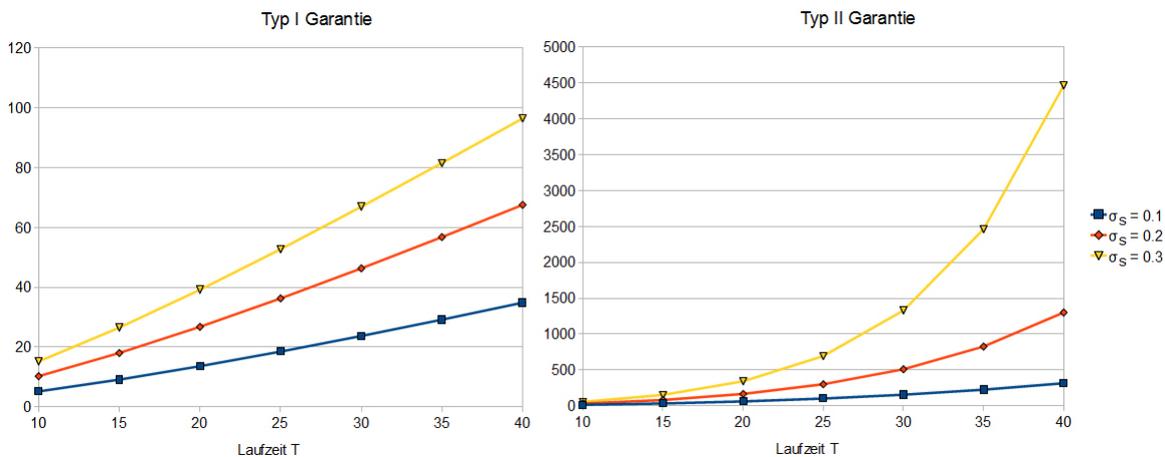


Abbildung 2.1: Garantiewerte für unterschiedlich volatile Referenzportfolios und verschiedene Laufzeiten

gleicher Parameterwahl die Werte der Typ I Garantie geringer als die der Typ II Garantie. Man beachte die unterschiedliche Skalierung der y-Achse in der rechten und linken Grafik.

Die Abbildung 2.2 zeigt für ein fixes $\sigma_s = 0.1$ und für verschiedene garantierte Zinsen g_t , wie sich die Preise für die Typ I und die Typ II Garantie in Abhängigkeit von der Laufzeit verändern. Es sei $g_t^{(1)} = 0.04$, $g_t^{(2)} = 0.03$, $g_t^{(3)} = 0.02$ und $g_t^{(4)} = 0$ ($1 \leq t \leq T$). Man sieht, dass die Garantiewerte für höhere garantierte Zinsen größer werden. Der garantierte Zins $g_t = 0$ entspricht einer Kapital sichernden Garantie.

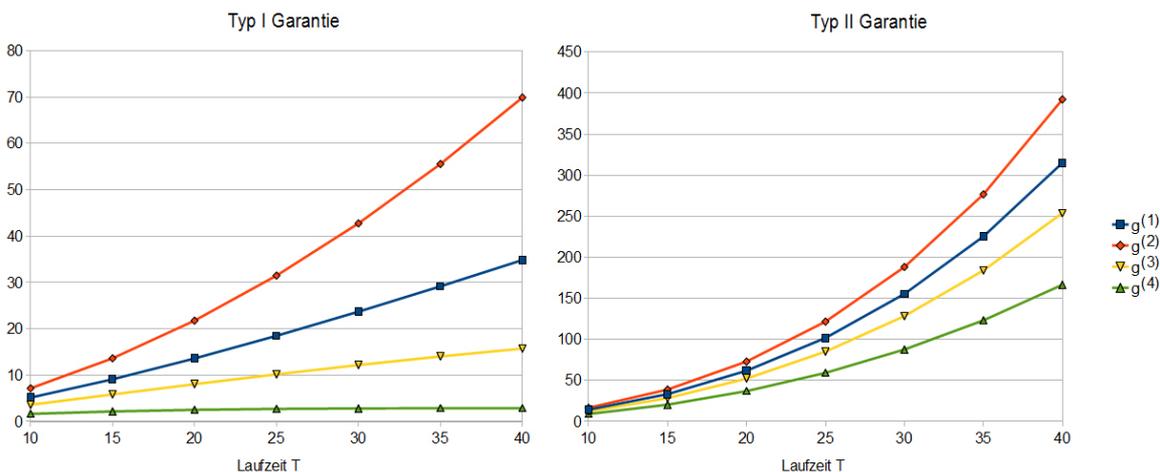


Abbildung 2.2: Garantiewerte für die garantierten Zinsen $g^{(i)}$ und verschiedene Laufzeiten

Kapitel 3

Zinsstrukturmodelle

3.1 Definition der grundlegenden Begriffe

Folgende Definitionen sind sinngemäß dem Skriptum von Schmidt[17] entnommen.

Definition 3.1.1 (Nullkuponanleihe bzw. zero-coupon bond). *Die Nullkuponanleihe ist ein zum Zeitpunkt t abgeschlossener Vertrag, der dem Inhaber eine Zahlung von einer Geldeinheit zum Fälligkeitszeitpunkt T (maturity) zusichert. Es gilt $0 \leq t \leq T$. Der Preis zum Zeitpunkt t wird mit $P(t, T)$ bezeichnet. Es gilt stets $P(T, T) = 1$.*

Ein weiterer wichtiger Begriff im Bereich der Zinsstrukturmodelle ist die *forward rate*. Forward rates ergeben sich aufgrund folgender Überlegung: Sei t der aktuelle Zeitpunkt. Man kann nun für ein in der Zukunft liegendes Zeitintervall $[T, S]$ einen Zins vereinbaren, der *forward rate* genannt wird. Ein Vertrag, der zum Zeitpunkt t für das Intervall $[T, S]$ den (einfachen linearen) Zins $F(t, T, S)$ festlegt, heißt *forward rate agreement*. Der Zahlungsstrom des forward rate agreements lässt sich mit Nullkuponanleihen nachbauen:

Man betrachte die Zeitpunkte t, T, S wobei $t < T < S$:

Zum Zeitpunkt t : Verkaufe einen zero-coupon (t, T) -bond zum Preis $P(t, T)$ und kaufe mit dem Erlös $\frac{P(t, T)}{P(t, S)}$ Stück (t, S) -bonds.

Zum Zeitpunkt T : Für den zum Zeitpunkt t verkauften (t, T) -bonds ist eine Zahlung von 1 zu tätigen.

Zum Zeitpunkt S : Man erhält für die zum Zeitpunkt t gekauften (t, S) -bonds $\frac{P(t, T)}{P(t, S)}$ Einheiten als Rückzahlung.

Das forward rate agreement liefert für eine zum Zeitpunkt T ausbezahlte Einheit im Gegenzug $1 + F(t, T, S)(S - T)$ Einheiten zum Zeitpunkt S . Zum Zeitpunkt t entstehen keine Kosten. Ist

$$1 + (S - T)F(t, T, S) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)},$$

dann liefert die obige Strategie genau den gleichen Zahlungsstrom. Jede andere Festlegung von $F(t, T, S)$ führt zu Arbitragemöglichkeiten.

Definition 3.1.2 (diskrete forward rate). Die diskrete forward rate zum Zeitpunkt t für das Intervall $[T, S]$ ist gegeben durch

$$F(t, T, S) := \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right).$$

Definition 3.1.3 (diskreter Zins). Der diskrete Zins zum Zeitpunkt t für das Intervall $[T, S]$ ist gegeben durch

$$y(t, T) := F(t, t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right)$$

Analog dazu können auch stetige Zinsen R definiert werden, die über $e^{R(S-T)} = 1 + F(T - S)$ auf lineare Zinsen umgerechnet werden können. Man erhält also

Definition 3.1.4 (stetige forward rate). Die stetige forward rate für das Intervall $[T, S]$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$R(t, T, S) := \frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}$$

Definition 3.1.5 (stetiger Zins oder spot rate). Die spot rate für $[t, T]$ ist

$$\bar{R}(t, T) := R(t, t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}.$$

In Anlehnung dazu wird die δ -year spot rate definiert:

Definition 3.1.6 (δ -year spot rate). Die δ -year spot rate ist

$$\bar{R}(t, t + \delta) := R(t, t, t + \delta) = -\frac{\log P(t, t + \delta)}{\delta}$$

Weiters ergeben sich folgende infinitesimale Zinsen, wenn man die Länge des Intervalls $[T, S]$ gegen Null gehen lässt, das heißt nur das Intervall $[T, T + dt]$ betrachtet:

Definition 3.1.7 (instantaneous forward rate). Die instantaneous forward rate für die maturity T zum Zeitpunkt t ist

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T} R(t, T, S) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T).$$

Diese Beziehung zwischen der instantaneous forward rate und dem Preis der Nullkuponanleihe ist daher

$$P(t, T) = \exp \left[-\int_t^T f(t, s) ds \right]. \quad (3.1)$$

Definition 3.1.8 (instantaneous short rate). Die instantaneous short rate (oder auch nur short rate genannt) zum Zeitpunkt t ist

$$r(t) := f(t, t) = \lim_{T \downarrow t} \bar{R}(t, T) = \lim_{T \downarrow t} y(t, T)$$

3.2 Das erweiterte Vasicek Modell

Im erweiterten Vasicek Modell (siehe [5]) genügt die short-rate der SDE

$$dr_t = (\theta(t) - \lambda r_t) dt + \sigma dW_t$$

mit

$$\theta(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0, t) + \lambda f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}),$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich einem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} ist. In den folgenden Kapiteln wird angenommen, dass $f(0, t) = f_0$ konstant und unabhängig von t ist. Daher gilt

$$\theta(t) = \lambda f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}).$$

Durch Lösen obiger SDE erhält man eine explizite Darstellung für die short rate r_t

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \theta(u) du + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u \\ &= r_0 e^{-\lambda t} + f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 - f(0, 0) e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u \\ &\stackrel{f(0,0)=r_0}{=} f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Weiters gilt für die Bond-Preise

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{\lambda^3} \left[\frac{(1 - e^{2\lambda t})(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda T})}{4} + (e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}) \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}) \int_0^t e^{\lambda u} dW_u \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

und für die forward rates

$$f(t, T) = f_0 - \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} (e^{-2\lambda(T-t)} - e^{-2\lambda T}) - (e^{-\lambda(T-t)} - e^{-\lambda T}) \right) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u. \quad (3.4)$$

3.3 Das Cox Ingersoll Ross Modell

In [6] beschreiben Cox, Ingersoll und Ross ein Modell für die short rate r_t , das im Gegensatz zum Vasicek Modell f.s. eine positive short rate $r_t > 0$, ($0 \leq t \leq T$) liefert. Die Dynamik der short rate wird dort durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

beschrieben, wobei

- $\theta > 0$ der mean des Prozesses ist. Der Prozess r_t schwankt um θ .
- $\kappa \geq 0$ ist die mean reversion speed. Der Parameter legt fest, wie stark der Prozess zum mean θ zurück drängt.

- σ ist die Volatilität des Prozesses.
- W_t ist eine Standard-Brown'sche Bewegung bezüglich dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} .

Prozesse dieser Form werden Wurzelfusionsprozesse genannt. Die als Feller-Bedingung bekannte Einschränkung an die Parameter

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2$$

garantiert, dass ein in $r_0 > 0$ startender Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht Null wird.

3.3.1 Simulation eines Wurzelfusionsprozesses

Für die Simulation eines Wurzelfusionsprozesses existieren exakte Methoden, die numerisch sehr aufwendig sind. Wesentlich einfacher ist die approximative Simulation des Wurzelfusionsprozesses mit dem Euler Maruyama Verfahren (siehe [7]). Dabei wird die Zeitachse in ein Gitter $\{\Delta j, j \in \mathbb{N}_0\}$ unterteilt und man approximiert den Prozess $(r_j)_{0 \leq j}$ durch den Prozess $(v_j)_{0 \leq j}$ wobei

$$v_{j\Delta} \approx v_{(j-1)\Delta} + \kappa(\theta - v_{(j-1)\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{v_{(j-1)\Delta}}\Delta W_j.$$

mit unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen W_j .

Der approximierende Prozess kann trotz eingehaltener Feller-Bedingung negativ werden. In der Literatur werden Möglichkeiten angegeben, wie mit diesem Problem umgegangen werden kann:

- *Die Methode der Absorption*

Verwende den positiven Anteil der vorangegangenen Iteration:

$$v_{j\Delta} \approx v_{(j-1)\Delta}^+ + \kappa(\theta - v_{(j-1)\Delta}^+)\Delta + \sigma\sqrt{v_{(j-1)\Delta}^+}\sqrt{\Delta}W.$$

- *Die Methode der Reflektion:*

Verwende den Absolutbetrag der vorangegangenen Iteration:

$$v_{j\Delta} \approx |v_{(j-1)\Delta}| + \kappa(\theta - |v_{(j-1)\Delta}|)\Delta + \sigma\sqrt{|v_{(j-1)\Delta}|}\sqrt{\Delta}W$$

- *Die Methode der teilweisen Reflektion:*

Verwende den Absolutbetrag $|v_{(j-1)\Delta}|$ unter der Wurzel

$$v_{j\Delta} \approx v_{(j-1)\Delta} + \kappa(\theta - v_{(j-1)\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{|v_{(j-1)\Delta}|}\sqrt{\Delta}W. \quad (3.5)$$

- usw.

Hier soll nun eine Vorgehensweise zur Simulation eines Wurzelfusionsprozesses $(v_t)_{0 \leq t}$ präsentiert werden, die trotz Diskretisierung mit dem Euler Maruyama Verfahrens sicher stellt, dass bei der Simulation keine negativen Werte erzeugt werden.

Dazu beachte man, dass unter der Annahme der Feller Bedingung $v_t > 0$ f.s. $\forall t \geq 0$, sodass der Prozess $z_t = \log(v_t)$ wohldefiniert ist. Mit der Formel von Itô für $f(x) = \log(x)$ erhält man

$$dz_t = d \log(v_t) = \frac{1}{v_t} dv_t - \frac{1}{2} \frac{1}{v_t^2} d[v]_t.$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t \\ d[v]_t &= \sigma^2 v_t dt \\ v_t &= e^{z_t} \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} dz_t &= e^{-z_t}(\kappa(\theta - e^{z_t})dt + \sigma e^{z_t/2}dW_t) - \frac{1}{2}e^{-2z_t}\sigma^2 e^{z_t} dt \\ &= (e^{-z_t}(\kappa\theta - \frac{1}{2}\sigma^2) - \kappa)dt + e^{-z_t/2}\sigma dW_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Diskretisiert man nun den durch Gleichung (3.6) gegebenen Prozess mit dem Euler Maruyama Verfahren, so erhält man

$$z_{\Delta t} \approx z_{\Delta(t-1)} + (e^{-z_{\Delta(t-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma e^{-z_{\Delta(t-1)}/2}(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)}), \quad (3.7)$$

wobei die Zufallsvariable $(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)}) \sim N(0, \Delta)$ normalverteilt ist. Der diskretisierte Prozess $z_{\Delta t}$ kann sowohl positiv als negativ sein, doch wegen der Beziehung $v_{\Delta t} = \exp(z_{\Delta t})$ ist der so approximierte Wurzelfusionsprozess $(v_{\Delta t})_{t \in \mathbb{N}}$ stets positiv.

Für einen Vergleich dieser Methode mit der Methode der Absorption siehe Kapitel 5.2.1.

Simulationsversuche mit Parameterkombinationen, die die Feller-Bedingung nicht erfüllen, zeigten folgende Situation auf: Der Prozess $(z_{\Delta t})_{t \in \mathbb{N}}$ strebt gegen $-\infty$, was einem Streben des Prozesses $(v_{\Delta t})_{t \in \mathbb{N}}$ gegen 0 entspricht. Dieses Verhalten ist zu erwarten, weil der Wurzelfusionsprozess in diesem Fall f.s. 0 erreicht.

Kapitel 4

Stochastische Volatilität - das Heston Modell

Im Black Scholes Modell wird die Dynamik des risikobehafteten Gutes (Referenzfonds) mit einer konstanten Volatilität σ_s modelliert. Im Heston Modell hingegen wird angenommen, dass die Volatilität ein Wurzelfdiffusionsprozess ist. Der Preis S_t des risikobehafteten Gutes wird im Heston Modell durch

$$dS_t = S_t(rdt + \sqrt{v_t}dZ_t) \quad (4.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t, \quad (4.2)$$

modelliert. Dabei sind $(Z_t)_{t \geq 0}$ und $(W_t)_{t \geq 0}$ zwei Brown'sche Bewegungen mit infinitesimaler Korrelation τ , das heißt $dW_t dZ_t = \tau dt$. Durch die Wahl $\tau < 0$ kann das Phänomen, dass fallende Kurse die Volatilität steigern, modelliert werden.

4.1 Simulation im Heston Modell

Um den Wertprozess des risikobehafteten Gutes $(S_t)_{t \geq 0}$ zu simuliert betrachtet man den logarithmierten Prozess $X_t = \log S_t$. Es gilt

$$\begin{aligned} X_t &:= \log \left(S_0 \exp \left\{ rt + \int_0^t \sqrt{v_u} dZ_u - \frac{1}{2} \int_0^t v_u du \right\} \right) \\ &= \log(S_0) + rt + \int_0^t \sqrt{v_u} dZ_u - \frac{1}{2} \int_0^t v_u du \end{aligned}$$

Diskretisiert man diesen Prozess über das Euler Maruyama Verfahren, so erhält man einen durch

$$\begin{aligned} X'_{\Delta t} &= X'_{\Delta(t-1)} + \left(r - \frac{1}{2}v_{\Delta(t-1)} \right) \Delta + \sqrt{v_{\Delta(t-1)}}(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)}), \\ X'_0 &:= \log(S_0) \end{aligned}$$

festgelegten Prozess $(X'_{\Delta t})_{t \geq 0}$, der $(X_{\Delta t})_{t \geq 0}$ approximiert. Da sowohl die Volatilität im Heston Modell als auch die short rate im Cox Ingersoll Ross Modell als Wurzelfdiffusionsprozess

formuliert werden, kann die in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Simulationmethode auch hier aufgegriffen werden:

$$z_{\Delta t} = z_{\Delta(t-1)} + (e^{-z_{\Delta(t-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma e^{-z_{\Delta(t-1)}/2}(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)}) \quad (4.3)$$

$$v'_{\Delta t} = \exp(z_{\Delta t}) \quad (4.4)$$

$$v_{\Delta t} \approx v'_{\Delta t}. \quad (4.5)$$

Die Zufallsvariable $(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)})$ und die Zufallsvariable $(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)})$ sind korrelierte $N(0, \Delta)$ -verteilte Zufallsvariablen, das heißt

$$(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)}) = \tau(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)}) + \sqrt{1 - \tau^2}Y_t$$

mit einer von $(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)})$ unabhängigen $N(0, \Delta)$ -verteilten Zufallsvariable Y_t . Zusammenfassend kann folgende Vorgehensweise für die Simulation des Preisprozesses $(S_t)_{t \geq 0}$ mit stochastischer Volatilität $(v_t)_{t \geq 0}$ angegeben werden:

1. Wähle ein $\Delta = \frac{1}{N_\Delta}$, welches die Feinheit der Diskretisierung festlegt.
2. Initialisiere die Volatilität und den logarithmierten Preisprozess mit den Anfangswerten aus den stochastischen Differentialgleichungen

$$z_0 := \log(v_0) \quad X_0 := \log(S_0)$$

3. Führe die Punkte i) bis iii) für alle $t = 1, \dots, N_\Delta \cdot T$ durch.

- i) Erzeuge Realisationen der unabhängigen Zufallsvariablen $(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)}) \sim N(0, \Delta)$, $Y_t \sim N(0, \Delta)$ und setze

$$(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)}) = \tau(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)}) + \sqrt{1 - \tau^2}Y_t$$

- ii) Setze

$$z_{\Delta t} = z_{\Delta(t-1)} + (e^{-z_{\Delta(t-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma e^{-z_{\Delta(t-1)}/2}(W_{\Delta t} - W_{\Delta(t-1)})$$

$$v'_{\Delta t} = \exp(z_{\Delta t})$$

- iii) Setze $X'_{\Delta t} = X'_{\Delta(t-1)} + \left(r - \frac{1}{2}v'_{\Delta(t-1)}\right)\Delta + \sqrt{v'_{\Delta(t-1)}}(Z_{\Delta t} - Z_{\Delta(t-1)})$.

Kapitel 5

Bewertung der Garantien in Modellen mit stochastischer Zinsstruktur

5.1 Das erweiterte Vasiček Modell

In [19] wird das in Kapitel 2 beschriebene einfache Modell mit fixer Zinsstruktur am Anleihenmarkt und deterministischen Garantien auf den Fall einer stochastischen Zinsstruktur (modelliert durch das erweiterte Vasiček Modell) und variablen Garantien (gleich den δ -year spot rates am Anleihenmarkt) erweitert. Diese Erweiterung wird in diesem Abschnitt behandelt. Wir nehmen also an, dass der Wert des Referenzportfolios zum Zeitpunkt t , die forward-rates bzw. short rates und Preise der (t, T) -Bonds wie folgt gegeben sind

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t r_u du - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t + \sigma_s Z_t \right\} \quad (5.1)$$

$$r_t = f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u \quad (5.2)$$

$$f(t, T) = f_0 - \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} (e^{-2\lambda(T-t)} - e^{-2\lambda T}) - (e^{-\lambda(T-t)} - e^{-\lambda T}) \right) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u \quad (5.3)$$

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\} \quad (5.4)$$

Und im Speziellen

$$P(0, t) = \exp \left\{ - \int_0^t f(0, u) du \right\} = \exp \{-t f_0\} \quad (5.5)$$

Dabei wurde angenommen, dass die Anfangswerte $f(0, t)$ der forward rates konstant gleich f_0 sind. $(Z_t)_{t \geq 0}$ und $(W_t)_{t \geq 0}$ sind zwei korrelierte Brown'sche Bewegungen unter \mathbb{Q} , also $dZ_t dW_t = \rho dt$.

Der garantierte Zins $(g_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird gleich der δ -year spot rate zum Zeitpunkt $t - 1$ gewählt, das heißt

$$g_t = \bar{R}(t - 1, t - 1 + \delta). \quad (5.6)$$

Eine zum Zeitpunkt 0 in die short-rate investierte Geldeinheit hat zum Zeitpunkt t den Wert

$$B_t = \exp \left\{ \int_0^t r_u du \right\}. \quad (5.7)$$

Die drei Basisfinanzgüter des Modells sind die risikolose Anleihe in der short rate mit Preis $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$, die Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T und Preis $(P(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ und der Referenzfonds mit Preis $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$. In der Arbeit von Yang [19] wird für dieses Modell eine geschlossene Formel für die Typ I und die Typ II Garantie hergeleitet.

5.1.1 Bepreisung der Typ I Garantie

Da der garantierte Zins als δ -year spot rate festgelegt wurde, gilt es einen Vertrag mit Endwert

$$V_T(I) = \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right)$$

zu bepreisen.

Definition 5.1.1.

(i) Eine Handelsstrategie ist ein adaptierter Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $X_t = (X_t^0, X_t^1, X_t^2)^T$. Ihr Wert zum Zeitpunkt t ist $V_t(X) = X_t^0 S_t^0 + X_t^1 P(t, T) + X_t^2 B_t$.

(ii) Eine Handelsstrategie X heißt selbstfinanzierend, wenn

$$dV_t(X) = X_t^0 dS_t^0 + X_t^1 dP(t, T) + X_t^2 dB_t.$$

(iii) Eine Forderung zum Zeitpunkt $S \leq T$ ist eine \mathcal{F}_s -meßbare Zufallsvariable C_S .

(iv) Eine Handelsstrategie X heißt zulässig, wenn $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{V}_t(X)^2 \right] < \infty$.

(v) Eine Forderung C_S mit Fälligkeit S heißt absicherbar, wenn es eine selbstfinanzierende zulässige Handelsstrategie X gibt, mit $V_s(X) = C_S$. X heißt dann Hedge und $s_t(C_S) = V_t(X)$ ($0 \leq t \leq S$) heißt fairer Preis von C_S zum Zeitpunkt t .

SATZ 5.1.1 (Vollständigkeit des erweiterten Vasiček Modells).

(i) Jede bezüglich \mathbb{Q} quadratisch integrierbare Forderung C_S mit Fälligkeit $S \leq T$ ist absicherbar.

(ii) Ist X eine Hedge von C_S , dann ist $(\tilde{V}_t(X))_{0 \leq t \leq S}$ eine Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \tilde{s}_t(C_S) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{C}_S | \mathcal{F} \right] \quad 0 \leq t \leq S, \\ \tilde{C}_S &= \exp \left\{ - \int_0^S r_u du \right\} C_S \quad \text{wobei,} \\ s_0(C) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{C}_S \right]. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.1. Dieser Satz und die obigen Definitionen gelten (unter technischen Bedingungen) für die ganze Klasse der einfaktoriellen Heath Jarrow Morton Modelle, in der das erweiterte Vasiček Modell enthalten ist. Das Modell ist nicht mehr vollständig, wenn die konstante Volatilität des Referenzfonds durch eine stochastische Volatilität ersetzt wird.

Mit dem Satz folgt, dass der faire Preis von $V_T(I)$ zum Zeitpunkt 0 durch

$$\begin{aligned} V_0(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} V_T(I) \right] \\ &= \sum_{n=1}^T k_n \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \max \left(\prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right]}_{=:\pi_0^{(n)}(I)} \end{aligned}$$

bestimmt ist. Mit

$$A_{1,T}^{(n)} := \prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} \quad \text{und} \quad A_{2,T}^{(n)} := \prod_{t=n}^T e^{R_t} = \frac{S_T}{S_{n-1}} \quad (5.8)$$

gilt

$$\begin{aligned} \pi_0^{(n)}(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \max \left(A_{1,T}^{(n)} - A_{2,T}^{(n)}, 0 \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_T^{-1} \max \left(A_{1,T}^{(n)} - A_{2,T}^{(n)}, 0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wir widmen uns der Berechnung von $\pi_0^{(n)}(I)$. Dazu betrachte man ein Finanzgut, das bei Investition von 1 Einheit im Investmentportfolio zum Zeitpunkt $n-1$ die Auszahlung $A_{2,T}^{(n)}$ zum Zeitpunkt T liefert. Der faire Preis dieses Finanzgutes zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$A_t = \begin{cases} P(t, n-1) & 0 \leq t \leq n-1 \\ A_{2,t}^{(n)} & n-1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Der diskontierte Preisprozess \tilde{A}_t ist ein \mathbb{Q} -Martingal, denn für $n-1 \leq t \leq T$ ist $\tilde{A}_{2,t}^{(n)}$ ein \mathbb{Q} -Martingal und für $0 \leq t \leq n-1$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A}_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_{2,T}^{(n)} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_{2,T}^{(n)} | \mathcal{F}_{n-1} \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_{n-1}^{-1} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{B_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_t}{B_n} | \mathcal{F}_t \right] = \tilde{P}(t, n-1). \end{aligned}$$

Die im folgenden Satz beschriebene Technik des Wechsel des Numeraires vereinfacht die Berechnung von $\pi_0^{(n)}(I)$.

SATZ 5.1.2. (Wechsel des Numeraires)

Ist $\left(\frac{S_t^1}{S_t^0} \right)$ ein \mathbb{Q} -Martingal und setzt man

$$\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{Q}} = L_T \quad \text{wobei} \quad L_t = \frac{S_t^1}{S_t^0} \left(\frac{S_0^1}{S_0^0} \right)^{-1},$$

dann ist $\left(\frac{S_t^0}{S_t^1} \right)$ ein \mathbb{Q}_1 -Martingal und es gilt für alle \mathcal{F}_T meßbaren Forderungen C_T

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_t^0}{S_t^1} C_T | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{S_t^1}{S_t^0} C_T | \mathcal{F}_t \right].$$

Wir wenden diesen Satz auf $S_t^1 = A_t$ und $S_t^0 = B_t$ an und erhalten wegen $B_0 = 1$, $A_0 = P(0, n-1)$ und $A_T = A_{2,T}^{(n)}$

$$\begin{aligned}\pi_0^{(n)}(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_0}{B_T} \max \left(A_{1,T}^{(n)} - A_{2,T}^{(n)}, 0 \right) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{A_0}{A_T} \max \left(A_{1,T}^{(n)} - A_{2,T}^{(n)}, 0 \right) \right] \\ &= P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\max \left(\frac{A_{1,T}^{(n)}}{A_{2,T}^{(n)}} - 1, 0 \right) \right]\end{aligned}$$

Um diesen Erwartungswert berechnen zu können, muss die Verteilung von $(A_{1,T}^{(n)}, A_{2,T}^{(n)})$ unter dem Maß \mathbb{Q}_1 bestimmt werden. Dazu betrachtet man den Dichteprozess $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$. Es gilt

$$L_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{P(0, n-1)} \tilde{A}_t,$$

also für $0 \leq t \leq n-1$

$$L_t = \frac{\tilde{P}(t, n-1)}{P(0, n-1)} = \frac{P(t, n-1)}{P(0, n-1)B_t}.$$

Lemma 5.1.1.

L_t besitzt für $0 \leq t \leq n-1$ die Darstellung

$$L_t = \frac{P(t, n-1)}{P(0, n-1)B_t} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \left(H_u^{(n)} \right)^2 du + \int_0^t H_u^{(n)} dW_u \right\},$$

wobei $H_u^{(n)} = \frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda(n-1-u)} - 1)$.

Beweis: Unter Verwendung der Darstellung von $P(t, n-1)$ aus Gleichung (3.3) und der Darstellung von r_t aus (5.2) gilt

$$\begin{aligned}\frac{P(t, n-1)}{P(0, n-1)B_t} &= \frac{B_t^{-1}}{P(0, t)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{\lambda^3} \left[(e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{2\lambda t})(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(n-1)}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1)}) \int_0^t e^{\lambda u} dW_u \right\}\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}B_t^{-1} &= \exp \left\{ -\int_0^t \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 + \sigma \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v \right) du \right\}, \\ P(0, t) &= \exp \left\{ -\int_0^t f_0 du \right\} \quad \text{und} \\ h_1(t) &:= \frac{\sigma^2}{\lambda^3} \left[(e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{2\lambda t})(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(n-1)}) \right] + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du\end{aligned}$$

erhält man weiters

$$\frac{P(t, n-1)}{P(0, n-1)B_t} = \exp \left\{ -h_1(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^t e^{\lambda v} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda u}) dW_u - \sigma \int_0^t \left(\int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v \right) du \right\}. \quad (5.10)$$

Man betrachte $h_1(t)$ und sieht

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= \frac{\sigma^2}{\lambda^3} \left[(e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{2\lambda t})(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(n-1)}) \right] + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[\frac{2}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1-t)} + e^{-\lambda(n-1)} \right) + \frac{1}{2\lambda} \left(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(n-1)} - 1 + e^{-2\lambda(n-1-t)} \right) \right. \\
&\quad \left. + t + \frac{2}{\lambda} \left(e^{-\lambda t} - 1 \right) - \frac{1}{2\lambda} \left(e^{-2\lambda t} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{2\lambda} \left(e^{-2\lambda(n-1-t)} - e^{-2\lambda(n-1)} \right) - \frac{2}{\lambda} \left(e^{-\lambda(n-1-t)} - e^{-\lambda(n-1)} \right) + t \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (e^{-\lambda(n-1-u)} - 1)^2 du = \frac{1}{2} \int_0^t (H_u^{(n)})^2 du. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Für

$$-\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^t e^{\lambda v} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda u}) dW_u - \sigma \int_0^t \left(\int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v \right) du$$

aus (5.10) gilt

$$\begin{aligned}
&-\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^t e^{\lambda v} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(n-1)}) dW_v - \sigma \int_0^t \left(\int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v \right) du \\
&= -\frac{\sigma}{\lambda} \left(\int_0^t (e^{-\lambda(t-v)} - e^{-\lambda(n-1-v)}) dW_v - \int_0^t (e^{-\lambda(t-v)} - 1) dW_v \right) \\
&= \int_0^t \frac{\sigma}{\lambda} \left(e^{-\lambda(n-1-v)} - 1 \right) dW_v = \int_0^t H_v^{(n)} dv \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Mit (5.11) und (5.12) folgt für (5.10)

$$\frac{P(t, n-1)}{P(0, n-1)B_t} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (H_u^{(n)})^2 du + \int_0^t H_u^{(n)} dW_u \right\}$$

□

Weiters gilt für $n-1 < t \leq T$

$$L_t = \frac{\tilde{S}_t}{P(0, n-1)S_{n-1}} = \frac{1}{P(0, n-1)B_{n-1}} \exp \left\{ \sigma_s (Z_t - Z_{n-1}) - \frac{\sigma_s^2}{2} (t - n + 1) \right\}.$$

Insgesamt kann der Dichteprozess geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
L_t &= \exp \left\{ \int_0^t 1_{(u \leq n-1)} H_u^{(n)} dW_u + \int_0^t 1_{(u > n-1)} \sigma_s dZ_u \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \left(1_{(u \leq n-1)} H_u^{(n)} \right)^2 du - \frac{1}{2} \int_0^t \left(1_{(u \leq n-1)} \sigma_s \right)^2 du \right\},
\end{aligned}$$

wobei $1_{(A)}$ die Indikatorfunktion der Bedingung A bezeichnet, das heißt $1_{(A)} = 1$ wenn A richtig ist und $1_{(A)} = 0$ sonst. Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
dZ_u &= \rho dW_u + \sqrt{1 - \rho^2} d\hat{W}_u \\
\gamma_u &:= H_u^{(n)} 1_{(u \leq n-1)} + \rho \sigma_s 1_{(u > n-1)} \\
\hat{\gamma}_u &:= \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_s 1_{(u > n-1)}
\end{aligned}$$

gilt

$$L_t = \exp \left\{ \int_0^t \gamma_u dW_u + \int_0^t \hat{\gamma}_u d\hat{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_u^2 du - \frac{1}{2} \int_0^t \hat{\gamma}_u^2 du \right\}.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} W_t^T &:= W_t - \int_0^t \gamma_u du \\ \hat{W}_t^T &:= \hat{W}_t - \int_0^t \hat{\gamma}_u du, \end{aligned}$$

dann ist nach dem Satz von Girsanov (W^T, \hat{W}^T) eine zweidimensionale Standard-Brown'sche Bewegung bezüglich \mathbb{Q}_1 , denn $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein Martingal bezüglich \mathbb{Q} . Die Dynamik von $f(t, T)$ und S_t unter \mathbb{Q} ist

$$df(t, T) = \left(\sigma^2 e^{-\lambda(T-t)} \int_t^T e^{-\lambda(x-t)} dx \right) dt + \sigma e^{-\lambda(T-t)} dW_t \quad (5.13)$$

$$dS_t = S_t (r_t dt + \sigma_s dZ_t) = S_t \left(r_t dt + \sigma_s d(\rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} \hat{W}_t) \right) \quad (5.14)$$

und daher gilt unter dem Maß \mathbb{Q}_1

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \left(\sigma^2 e^{-\lambda(T-t)} \int_t^T e^{-\lambda(x-t)} dx \right) dt + \sigma e^{-\lambda(T-t)} d(W_t^T + \int_0^t \gamma_u du) \\ &= \left(\sigma e^{-\lambda(T-t)} \left(\sigma \int_t^T e^{-\lambda(x-t)} dx + \gamma_t \right) \right) dt + \sigma e^{-\lambda(T-t)} dW_t^T \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left(r_t dt + \sigma_s d \left(\rho(W_t^T + \int_0^t \gamma_u du) + \sqrt{1-\rho^2} (\hat{W}_t^T + \int_0^t \hat{\gamma}_u du) \right) \right) \\ &= S_t \left((r_t + \sigma_s (\gamma_t \rho + \hat{\gamma}_t \sqrt{1-\rho^2})) dt + \sigma_s \left(\rho dW_t^T + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^T \right) \right) \\ &= S_t \left((r_t + \sigma_s (\gamma_t \rho + \hat{\gamma}_t \sqrt{1-\rho^2})) dt + \sigma_s dZ_t^T \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Damit gilt für S_t und r_t unter \mathbb{Q}_1

$$\begin{aligned} r_t &= f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} dW_v^T + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} \gamma_v dv \\ S_t &= S_0 \exp \left\{ \int_0^t r_u du + \sigma_s \rho \int_0^t \gamma_u du + \sigma_s \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \hat{\gamma}_u du + \sigma_s \int_0^t dZ_u^T \right\}, \end{aligned}$$

wobei $Z_t^T = \rho W_t^T + \sqrt{1-\rho^2} \hat{W}_t^T$ gesetzt wurde.

Wegen diesen Gleichungen resultiert für $A_{2,T}^{(n)}$

$$\begin{aligned} A_{2,T}^{(n)} &= \frac{S_T}{S_{n-1}} = \exp(Y_T) \quad \text{wobei} \\ Y_T &:= \int_{n-1}^T \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 + \sigma \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} \gamma_v dv \right) du + \sigma_s \rho \int_{n-1}^T \gamma_u du \\ &\quad + \sigma_s \sqrt{1-\rho^2} \int_{n-1}^T \hat{\gamma}_u du + \sigma \int_{n-1}^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v^T du + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_u^T \end{aligned} \quad (5.17)$$

Für $\bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ gilt

$$\begin{aligned}\bar{R}(t-1, t-1+\delta) &= \frac{1}{\delta} \log P(t-1, t-1+\delta) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\delta} \frac{\log P(0, t-1)}{\log P(0, t-1+\delta)} + \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \delta} \left[(1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda\delta}) - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda\delta}) \right]}_{=:g_1(t)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\sigma(1 - e^{-\lambda\delta})}{\lambda\delta}}_{=:c_1} \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-v)} dW_v,\end{aligned}$$

und daher unter

$$\bar{R}(t-1, t-1+\delta) = g_1(t) + c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-v)} dW_v^T + c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-v)} \gamma_v dv.$$

Man erhält damit für $A_{1,T}^{(n)}$

$$\begin{aligned}A_{1,T}^{(n)} &= \exp \left\{ \sum_{t=n}^T \bar{R}(t-1, t-1+\delta) \right\} = \exp \{X_T\} \quad \text{wobei} \\ X_T &:= \sum_{t=n}^T \left(g_1(t) + c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-v)} dW_v^T + c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-v)} \gamma_v dv \right)\end{aligned}\quad (5.18)$$

Da sowohl X_T als auch Y_T Summen von deterministischen Funktionen und stochastischen Integralen deterministischer Integranden nach Brown'schen Bewegungen bezüglich \mathbb{Q}_1 sind, ist der Vektor (X_T, Y_T) unter \mathbb{Q}_1 normalverteilt. Es gilt daher unter \mathbb{Q}_1 (vergleiche Satz 5.1.6)

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \mu_{X_T} \\ \mu_{Y_T} \end{pmatrix}, \Sigma \right),$$

wobei

$$\mu_{X_T} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [X_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)} \right] \quad (5.19)$$

$$\mu_{Y_T} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [Y_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{2,T}^{(n)} \right] \quad (5.20)$$

und Σ die Varianz-Kovarianzmatrix des Vektors $(X_T, Y_T)^t$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\pi_0^{(n)}(I) &= P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\max \left(\frac{A_{1,T}^{(n)}}{A_{2,T}^{(n)}} - 1, 0 \right) \right] \\ &= P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\max (e^{X_T - Y_T} - 1, 0) \right] \\ &= P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\max (e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)} Z_T} - 1, 0) \right],\end{aligned}$$

wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und

$$\begin{aligned}\mu_{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [X_T - Y_T] \\ \sigma_{(n)}^2 &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_T - Y_T] = \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_T] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [Y_T] - 2\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} [X_T, Y_T].\end{aligned}$$

Es folgt weiters mit $d_{(n)} = \mu_{(n)}/\sigma_{(n)}$ und der Verteilungsfunktion $\phi(\cdot)$ bzw. der Dichte $f_Z(\cdot)$ der Standardnormalverteilung, dass

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(n)}(I) &= P(0, n-1) \int_{-d_{(n)}}^{\infty} (e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)} z} - 1) f_Z(z) dz \\
&= P(0, n-1) \left(e^{\mu_{(n)}} \int_{-d_{(n)}}^{\infty} e^{\sigma_{(n)} z} f_Z(z) dz - \int_{-d_{(n)}}^{\infty} 1 f_Z(z) dz \right) \\
&= P(0, n-1) \left(e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)}^2/2} \int_{-d_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_{(n)} z - d_{(n)})^2} dz - \phi(d_{(n)}) \right) \\
&= P(0, n-1) \left(e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)}^2/2} \phi(\sigma_{(n)} + d_{(n)}) - \phi(d_{(n)}) \right) \\
&= A_{1,0}^{(n)} \phi(\sigma_{(n)} + d_{(n)}) - A_{2,0}^{(n)} \phi(d_{(n)}). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, da für $A_{1,0}^{(n)}$ und $A_{2,0}^{(n)}$ gilt

$$\begin{aligned}
A_{1,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_{1,T}^{(n)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{A_0}{A_T} A_{1,T}^{(n)} \right] = P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{A_{1,T}^{(n)}}{A_{2,T}^{(n)}} \right] \\
&= P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [e^{X_T - Y_T}] = P(0, n-1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)} Z}] \\
&= P(0, n-1) e^{\mu_{(n)} + \sigma_{(n)}^2/2} \tag{5.22}
\end{aligned}$$

$$A_{2,0}^{(n)} = A_2 = P(0, n-1). \tag{5.23}$$

Über die Gleichungen (5.22) und (5.23) kann $\mu_{(n)}$ geschrieben werden als

$$\mu_{(n)} = \log \left(\frac{A_{1,0}^{(n)}}{A_{2,0}^{(n)}} \right) - \frac{\sigma_{(n)}^2}{2}.$$

Um $\pi_0^{(n)}(I)$ angeben zu können, müssen noch $A_{1,0}^{(n)}$, $A_{2,0}^{(n)}$ sowie

$$\sigma_{(n)} = \text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[X_T] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[Y_T] - 2\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1}[X_T, Y_T]$$

berechnet werden. Diese Berechnungen werden in den folgenden Punkten a) bis e) durchgeführt.

a) Berechnung von $A_{1,0}^{(n)}$

$$A_{1,0}^{(n)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_{1,T}^{(n)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1} A_{1,T}^{(n)}] \stackrel{(5.8)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} \right]$$

Man betrachte zunächst nur die δ -year spot rate:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(t-1, t-1+\delta) &= \\
&= -\frac{\log P(t-1, t-1+\delta)}{\delta} \stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{\delta} \int_{t-1}^{t-1+\delta} f(t-1, s) ds \\
&\stackrel{(3.4)}{=} \frac{1}{\delta} \left[f_0 \delta + \sigma \int_{t-1}^{t-1+\delta} \int_0^{t-1} e^{-\lambda(s-v)} dW_v ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \int_{t-1}^{t-1+\delta} \frac{1}{2} \left(e^{-2\lambda(s-t+1)} - e^{-2\lambda s} \right) - \left(e^{-\lambda(s-t+1)} - e^{-\lambda s} \right) ds \right] \\
&= \frac{1}{\delta} \left[f_0 \delta + \sigma \int_0^{t-1} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(s-v)} \Big|_{s=t-1}^{s=t-1+\delta} \right) dW_v \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{\delta \lambda^3} \left((1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda \delta}) - \frac{1}{4} (1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda \delta}) \right) \right] \\
&= f_0 + \frac{\sigma}{\delta \lambda} (1 - e^{-\lambda \delta}) e^{-\lambda(t-1)} \left[\int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{\delta \lambda^3} \left[(1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda \delta}) - \frac{1}{4} (1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda \delta}) \right] \\
&= g_1(t) + c_1 \left[e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right], \tag{5.24}
\end{aligned}$$

wobei $g_1(t)$ den deterministischen Anteil von $\bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ beschreibt,

$$g_1(t) := f_0 + \frac{\sigma^2}{\delta \lambda^3} \left[(1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda \delta}) - \frac{1}{4} (1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda \delta}) \right].$$

und

$$c_1 := \frac{\sigma}{\delta \lambda} (1 - e^{-\lambda \delta}). \tag{5.25}$$

Damit gilt für $A_{1,0}^{(n)}$

$$\begin{aligned}
A_{1,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ - \int_0^T \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 + \sigma \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v \right) du \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{t=n}^T \exp \left\{ g_1(t) + c_1 \left[e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] \right\} \right]
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $g_2(n, T) := \sum_{t=n}^T g_1(t) - \int_0^T \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 \right) du$ gilt

$$\begin{aligned}
A_{1,0}^{(n)} &= e^{g_2(n, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\prod_{t=n}^T \exp \left\{ c_1 \left[e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] \right\} \right) \exp \left\{ -\sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right\} \right] \\
&= e^{g_2(n, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ c_1 \left[\sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] - \sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right\} \right] \\
&= e^{g_2(n, T)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[c_1 \sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v - \sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \right\} \\
&= e^{g_2(n, T)} \exp \left\{ \frac{1}{2} c_1^2 \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] + \frac{\sigma^2}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \right. \\
&\quad \left. - c_1 \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v, \sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \right\}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
(i) \quad \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] &= \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v, \int_0^{j-1} e^{-\lambda(j-1-v)} dW_v \right] \\
&= \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T \int_0^{\min(i-1, j-1)} e^{-\lambda(i+j-2-2v)} dv \\
&= \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T e^{-\lambda(i+j-2)} \left(e^{2\lambda \min(i-1, j-1)} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] &= \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \int_v^T e^{-\lambda(u-v)} du dW_v \right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-v)}) dW_v \right] = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-v)})^2 dv \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left[T - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda T}) \right] \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=n}^T e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v, \sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \\
&= \frac{\sigma}{\lambda} \sum_{t=n}^T \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v, \int_0^T 1 - e^{-\lambda(T-v)} dW_v \right] \\
&= \frac{\sigma}{\lambda} \sum_{t=n}^T \left[e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} (1 - e^{-\lambda(T-v)}) dv \right] \\
&= \frac{\sigma}{\lambda^2} \left[T - n + 1 - \left(\frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)}}{e^{-\lambda} - 1} \right) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-n+1)}}{2(e^{\lambda} - 1)} \right) + \left(\frac{e^{-2\lambda T} - e^{-\lambda(T+n-1)}}{2(e^{-\lambda} - 1)} \right) \right]
\end{aligned}$$

b) Berechnung von $A_{2,0}^{(n)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_{2,T}^{(n)}]$

$$\begin{aligned} A_{2,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_{2,T}^{(n)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1} A_{2,T}^{(n)}] \stackrel{(5.8)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \frac{S_T}{S_{n-1}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ -\int_0^{n-1} r_u du - \frac{1}{2} \sigma_s^2 (T - n + 1) + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\} \right] \end{aligned}$$

Mit $g_4(n, T) := -\int_0^{n-1} \left[f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 \right] du - \frac{1}{2} \sigma_s^2 (T - n + 1)$ gilt

$$\begin{aligned} A_{2,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ g_4(n, T) - \sigma \int_0^{n-1} \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du + \sigma_s (Z_T - Z_{n-1}) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ g_4(n, T) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{n-1} (1 - e^{-\lambda(n-1-v)}) dW_v + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ g_4(n, T) + \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[-\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{n-1} (1 - e^{-\lambda(n-1-v)}) dW_v + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ g_4(n, T) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{n-1} (1 - e^{-\lambda(n-1-v)}) dW_v \right] + \frac{\sigma_s^2}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} [(Z_T - Z_{n-1})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma \sigma_s}{\lambda} \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{n-1} (1 - e^{-\lambda(n-1-v)}) dW_v, \int_{n-1}^T dZ_v \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ g_4(n, T) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left(\int_0^{n-1} (1 - e^{-\lambda(n-1-v)})^2 dv \right) + \frac{\sigma_s^2}{2} (T - n + 1) - \frac{\sigma \sigma_s}{\lambda} \cdot 0 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\int_0^{n-1} f_0 du \right\} = \exp \{-f_0(n-1)\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

c) Berechnung von $\text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_T]$

Mit Gleichung (5.18) gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_T] &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sum_{t=n}^T \left(c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dW_v^T \right) \right] \\ &= c_1^2 \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sum_{t=n}^T \left(\sigma \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dW_v^T \right) \right] \\ &= c_1^2 \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T \int_0^{\min(i-1, j-1)} e^{-\lambda(i+j-2-2v)} dv \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right)^2 \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T e^{-\lambda(i+j-2)} \left(e^{2\lambda(\min(i-1, j-1))} - 1 \right). \end{aligned}$$

d) Berechnung von $\text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[Y_T]$

Über die Gleichung (5.17) erhält man

$$\begin{aligned}
\text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[Y_T] &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sigma \int_{n-1}^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v^T du + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v^T \right] \\
&= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sigma \int_0^{n-1} \int_{n-1}^T e^{-\lambda(u-v)} du dW_v^T + \sigma \int_{n-1}^T \int_v^T e^{-\lambda(u-v)} du dW_v^T + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v^T \right] \\
&= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[-\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{n-1} \left(e^{-\lambda(T-v)} - e^{-\lambda(n-2)} \right) dW_v^T - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{n-1}^T \left(e^{-\lambda(T-v)} - 1 \right) dW_v^T + \int_{n-1}^T \sigma_s dZ_v^T \right] \\
&= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[-\frac{\sigma}{\lambda} \left(e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)} \right) \int_0^{n-1} e^{\lambda v} dW_v^T \right] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{\sigma}{\lambda} \int_{n-1}^T \left(e^{-\lambda(T-v)} - 1 \right) dW_v^T \right] \\
&\quad + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v^T \right] - \frac{2\sigma\sigma_s}{\lambda} \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\int_{n-1}^T dZ_v^T, \int_{n-1}^T \left(e^{-\lambda(T-v)} - 1 \right) dW_v^T \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} \left(e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)} \right)^2 \left(e^{2\lambda(n-1)} - 1 \right) + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} \left[(T-n+1) - \left(\frac{1-e^{-\lambda(T-n+1)}}{\lambda} \right) \right] \\
&\quad + \sigma_s^2(T-n+1) + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[(T-n+1) - \left(\frac{2(1-e^{-\lambda(T-n+1)})}{\lambda} \right) + \left(\frac{1-e^{-2\lambda(T-n+1)}}{2\lambda} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.28}$$

e) Berechnung von $\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}]$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}] &= \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sum_{t=n}^T \bar{R}(t-1, t-1+\delta), \int_{n-1}^T r_u du + \sigma_s(Z_T^T - Z_{n-1}^T) \right] \\
&= \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\left(\frac{1-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right) \sum_{t=n}^T \left(\sigma \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dW_v^T \right), \right. \\
&\quad \left. -\frac{\sigma}{\lambda} \left(e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)} \right) \int_0^{n-1} e^{\lambda v} dW_v^T - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{n-1}^T \left(e^{-\lambda(T-v)} - 1 \right) dW_v^T + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v^T \right] \\
&= \sigma \left(\frac{1-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right) \sum_{t=n}^T \left[\frac{\sigma}{\lambda} \left(e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda T} \right) \int_0^{n-1} e^{-\lambda(t-1-2v)} dv \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{\lambda} \int_{n-1}^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} \left(1 - e^{-\lambda(T-v)} \right) dv + \sigma_s \rho \int_{n-1}^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dv \right] \\
&= \sigma \left(\frac{1-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right) \sum_{t=n}^T \left[\left(\frac{1-e^{-\lambda(t-n)}}{\lambda} \right) \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s \rho \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{2\lambda^2} \left(e^{-\lambda(T+t-1)} + e^{-\lambda(t-n)} - e^{-\lambda(t+n-2)} - e^{-\lambda(T-t+1)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Zusammenfassend kann folgender Satz angegeben werden:

SATZ 5.1.3. (Geschlossene Formel für die Typ I Garantie)

Im erweiterten Vasicek Modell mit den variablen garantierten Zinsen $g_t = \bar{R}(t-1, t-1+\delta)$

ist der Wert der Typ I Garantie zum Zeitpunkt 0 gegeben durch

$$V_0(I) = \sum_{n=1}^T k_n \pi_0^{(n)}(I).$$

Dabei ist

$$\pi_0^{(n)}(I) = A_{1,0}^{(n)} \phi(d_{(n)}) - A_{2,0}^{(n)} \phi(d_{(n)} - \sigma_{(n)})$$

wobei

$$A_{1,0}^{(n)} = \exp \left\{ g_2(n, T) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right)^2 \frac{\sigma^2}{2\lambda} \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T \left[e^{-\lambda(i+j-2)} \left(e^{2\lambda \min(i-1, j-1)} - 1 \right) \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ - \left(\frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right) \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[T - n + 1 - \left(\frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)}}{e^{-\lambda} - 1} \right) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-n+1)}}{2(e^\lambda - 1)} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{e^{-2\lambda T} - e^{-\lambda(T-n+1)}}{2(e^{-\lambda} - 1)} \right) \right] + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[T - \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) + \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda T}) \right] \right\},$$

$$A_{2,0}^{(n)} = \exp \{ -(n-1)f_0 \},$$

$$g_2(n, T) = \sum_{t=n}^T g_1(t) - T \cdot f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[T - \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) + \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda T}) \right],$$

$$g_1(t) = f_0 + \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} \left((1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda\delta}) \right) - \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} \left(\frac{(1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda\delta})}{4} \right),$$

$$d_{(n)} = \frac{\log \left(\frac{A_{1,0}^{(n)}}{A_{2,0}^{(n)}} \right) + \frac{\sigma_{(n)}^2}{2}}{\sigma_{(n)}},$$

$$\sigma_{(n)}^2 = \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)} \right] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{2,T}^{(n)} \right] - 2 \cdot \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)} \right] \\ = \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right)^2 \sum_{i=n}^T \sum_{j=n}^T e^{-\lambda(i+j-2)} \left(e^{2\lambda(\min(i-1, j-1))} - 1 \right) \\ + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} \left(\left[e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)} \right]^2 \left[e^{2\lambda(n-1)} - 1 \right] + \left[1 - e^{-2\lambda(T-n+1)} \right] \right) \\ + \left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2} + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} + \sigma_s^2 \right) (T - n + 1) - \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} \right) \left(1 - e^{-\lambda(T-n+1)} \right) \\ + \sigma \left(\frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\delta} \right) \sum_{t=n}^T \left[\left(\frac{1 - e^{-\lambda(t-n)}}{\lambda} \right) \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho \right) \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{2\lambda^2} \left(e^{-\lambda(T+t-1)} + e^{-\lambda(t-n)} - e^{-\lambda(t+n-2)} - e^{-\lambda(T-t+1)} \right) \right].$$

5.1.2 Bepreisung der Typ II Garantie

Der garantierte Zins sei wieder die δ -year spot rate, wobei hier speziell $\delta = 1$ gesetzt wird. Diese Wahl von δ erlaubt die analytische Berechnung des fairen Preises einer Typ II Garantie.

Es gilt einen Vertrag mit Endwert

$$V_T(II) = \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{\bar{R}(t-1,t)}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right]$$

zu bepreisen. Für den fairen Preis $V_0(II)$ der Garantie zum Zeitpunkt 0 gilt

$$\begin{aligned} V_0(II) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} V_T(II) \right] \\ &= \sum_{n=1}^T k_n \left(\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T \max(e^{\bar{R}(t-1,t)}, e^{R_t}) \right]}_{=:\pi_0^{a,(n)}(II)} - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right]}_{=:\pi_0^{b,(n)}(II)} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Man berechnet die zwei Erwartungswerte getrennt. Für den ersten erhält man

$$\begin{aligned} \pi_0^{a,(n)}(II) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T \max \left(e^{\bar{R}(t-1,t)}, \frac{S_T}{S_{n-1}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{n-1} r_u du} \prod_{t=n}^T e^{-\int_{t-1}^t r_u du} \max \left(e^{\bar{R}(t-1,t)}, \frac{S_T}{S_{n-1}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{n-1} r_u du} \prod_{t=n}^T \max \left(\exp \left\{ -\int_{t-1}^t r_u du + g_1(t) + \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right) \sigma \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dW_v \right\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_s^2 + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1}) \right\} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{n-1} r_u du} \prod_{t=n}^T \max \left(e^{g_3(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{t-1}^t (1-e^{-\lambda(t-v)}) dW_v}, e^{-\frac{1}{2} \sigma_s^2 + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1})} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{n-1} r_u du} \prod_{t=n}^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max \left(e^{g_3(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{t-1}^t (1-e^{-\lambda(t-v)}) dW_v}, e^{-\frac{1}{2} \sigma_s^2 + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1})} \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

wobei $g_1(t)$ wie in Satz 5.1.3 definiert ist und

$$g_3(t) = -f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{2}{\lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-1)}) - \frac{1}{2\lambda} (e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(t-1)}) \right) + g_1(t).$$

Es sei

$$\begin{aligned} A_{3,t} &:= B_t \exp \left\{ g_3(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{t-1}^t (1 - e^{-\lambda(t-v)}) dW_v \right\} \\ A_{4,t} &:= B_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_s^2 + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1}) \right\}. \end{aligned}$$

Damit und mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{n-1} r_u du} \right] &= \exp \left\{ -\int_0^{n-1} f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u}) du + \frac{\sigma^2}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{n-1} \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \right\} \\ &= e^{-(n-1)f_0} \end{aligned}$$

gilt weiters

$$\begin{aligned}\pi_0^{a,(n)}(II) &= e^{-(n-1)f_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} \max(A_{3,t}, A_{4,t}) \right] \\ &= e^{-(n-1)f_0} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} \max(A_{3,t} - A_{4,t}, 0) \right] + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} A_{4,t} \right]}_{=A_{4,0}} \right)\end{aligned}$$

Der erste Erwartungswert wird analog zum Erwartungswert aus Gleichung (5.9) ausgewertet und man erhält mit Gleichung (5.21)

$$\pi_0^{a,(n)}(II) = e^{-(n-1)f_0} \left(A_{3,0}(t) \phi(\hat{\sigma} + d_{(n)}) - A_{4,0} \phi(d_{(n)}) + A_{4,0} \right)$$

wobei

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{A_{3,t}}{A_{4,t}} \right] = \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[g_3(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{t-1}^t (1 - e^{-\lambda(t-v)}) dW_v + \frac{1}{2} \sigma_s^2 - \sigma_s (Z_t - Z_{t-1}) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda}) \right] + \sigma_s^2 + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} \left[1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right] \\ A_{3,0}(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} A_{3,t} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ g_3(t) - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{t-1}^t (1 - e^{-\lambda(t-v)}) dW_v \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ g_3(t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{t-1}^t (1 - e^{-\lambda(t-v)}) dW_v \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ g_3(t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[1 - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda}) \right] \right\} \\ A_{4,0} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} A_{4,t} \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} [\sigma_s (Z_t - Z_{t-1})] \right\} = 1. \\ d_{(n)} &= \frac{\log \left(\frac{A_{3,0}}{A_{4,0}} \right) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}{\hat{\sigma}}\end{aligned}$$

Damit erhält man für $\pi_0^{a,(n)}(II)$ aus Gleichung (5.29)

$$\pi_0^{a,(n)}(II) = e^{-(n-1)f_0} \left(A_{3,0}(t) \phi(\hat{\sigma} + d_{(n)}) - \phi(d_{(n)}) + 1 \right) = e^{-(n-1)f_0} \left(A_{3,0} \phi(\hat{\sigma} + d_{(n)}) + \phi(-d_{(n)}) \right)$$

Der zweite Erwartungswert aus Gleichung (5.29) wurde bereits im Abschnitt 5.1.1 auf Seite 33 ausgewertet. Es gilt

$$\pi_0^{b,(n)}(II) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] = e^{-(n-1)f_0}.$$

Zusammenfassend kann dieser Satz für die Typ II Garantie im Falle von $\delta = 1$ formuliert werden:

SATZ 5.1.4. (Geschlossene Formel für die Typ II Garantie)

Im erweiterten Vasiček Modell ist der Wert der Typ II Garantie zum Zeitpunkt 0 mit variablen garantierten Zinsen $g_t = \bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ gleich

$$V_0(II) = \sum_{n=1}^T k_n \pi_0^{(n)}(II).$$

Dabei ist

$$\pi_0^{(n)}(II) = \exp(-(n-1)f_0) \times \left\{ \prod_{t=n}^T [A_{3,0}\phi(\hat{\sigma} + d_{(n)}) + \phi(-d_{(n)})] - 1 \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{3,0}(t) &= \exp \left\{ g_3(t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[1 - \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) + \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda}) \right] \right\}, \\ g_3(t) &= g_1(t) - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \left[1 + \frac{2}{\lambda}(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-1)}) - \frac{1}{2\lambda}(e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda(t-1)}) \right], \\ g_1(t) &= f_0 + \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} \left((1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda\delta}) \right) - \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} \left(\frac{(1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda\delta})}{4} \right), \\ d_{(n)} &= \frac{\log(A_{3,0}(t)) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}{\hat{\sigma}}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) + \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda}) \right] + \sigma_s^2 + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} \left[1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

5.1.3 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die fairen Preis $V_0(I)$ und $V_0(II)$ für verschiedene Parameterkonstellationen verglichen. Die garantierten Zinsen sind gleich den Ein-Jahres spot rates, das heißt $\delta = 1$ und $g_t = \bar{R}(t-1, t)$, ($1 \leq t \leq T$). Weiters wurde

$$\begin{aligned} \rho &= -0.2, & \lambda &= 0.1, & \sigma &= 0.01 \\ \sigma_s &= 0.1, & f_0 &= 0.03, & k_n &= 6 \cdot (1.02)^{n-1}. \end{aligned}$$

gesetzt.

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen, wie sich die Garantiepreise in Abhängigkeit von der Volatilität des Referenzportfolios σ_s verändern.

Für volatilere Portfolios sind die Garantiepreise der Typ I und der Typ II Garantie größer. Bei Erhöhung des σ_s von 0.1 auf 0.3 verdreifacht sich der Preis der Typ I Garantie für $T = 40$, der Preis der Typ II Garantie vervierzehnfacht sich sogar. Vor allem bei Verträgen mit langen Laufzeiten sollte der Parameter σ_s also vorsichtig gewählt werden.

In Abbildung 5.3 werden die Garantiepreise hinsichtlich der Sensibilität gegenüber der Veränderung der Volatilitätsparameter σ aus der Zinsstruktur untersucht. Für wachsendes σ werden auch die Garantiepreise höher, jedoch nicht so stark, wie es bei einer entsprechenden Änderung von σ_s der Fall war. Der Fall $\sigma = 0$ entspricht einem Modell mit konstantem Zins, also dem Black-Scholes Modell aus Kapitel 2. Eine Veränderung mit dem Parameter λ aus der Zinsstruktur ist nicht gegeben (siehe Abbildung 5.4), die vier Kurven liegen sehr dicht beieinander.

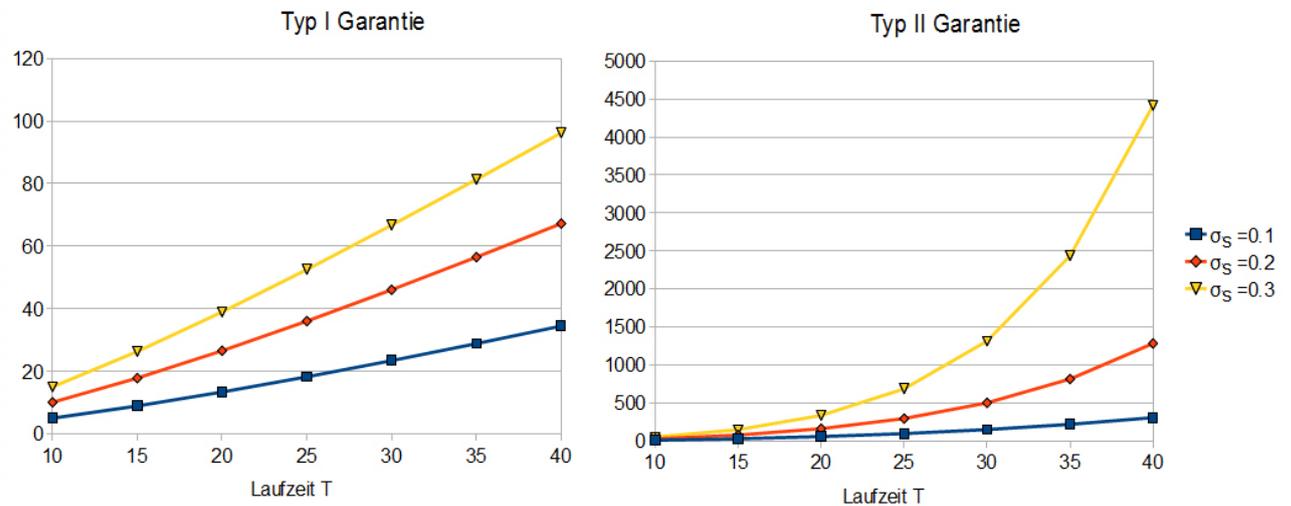


Abbildung 5.1: Garantiepreise für unterschiedlich volatile Referenzportfolios und verschiedene Laufzeiten

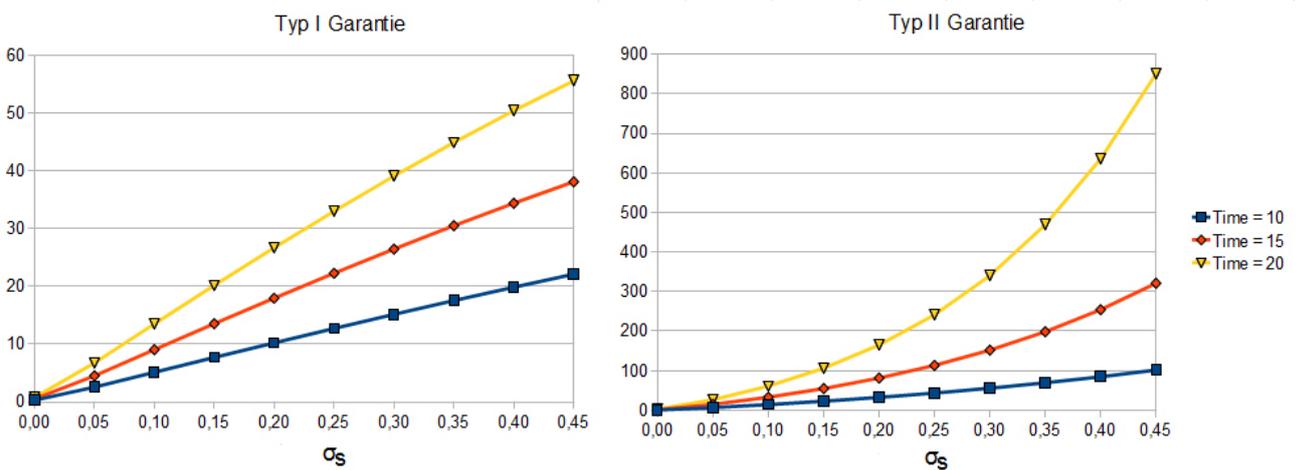


Abbildung 5.2: Garantiepreise für unterschiedlich volatile Referenzportfolios und drei verschiedene Laufzeiten

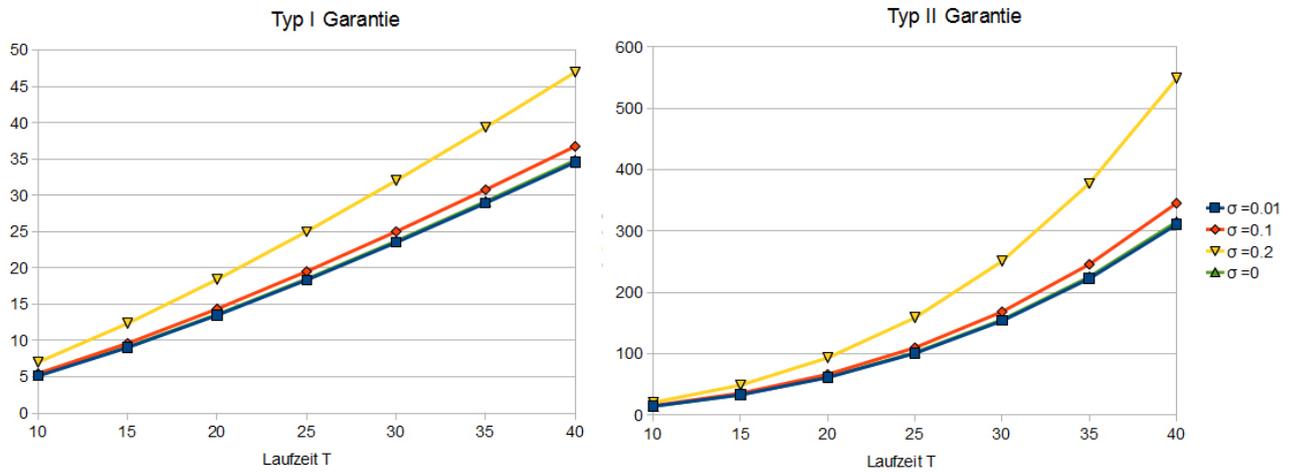


Abbildung 5.3: Garantiepreise für unterschiedlich volatile Zinskurven r_t und verschiedene Laufzeiten T

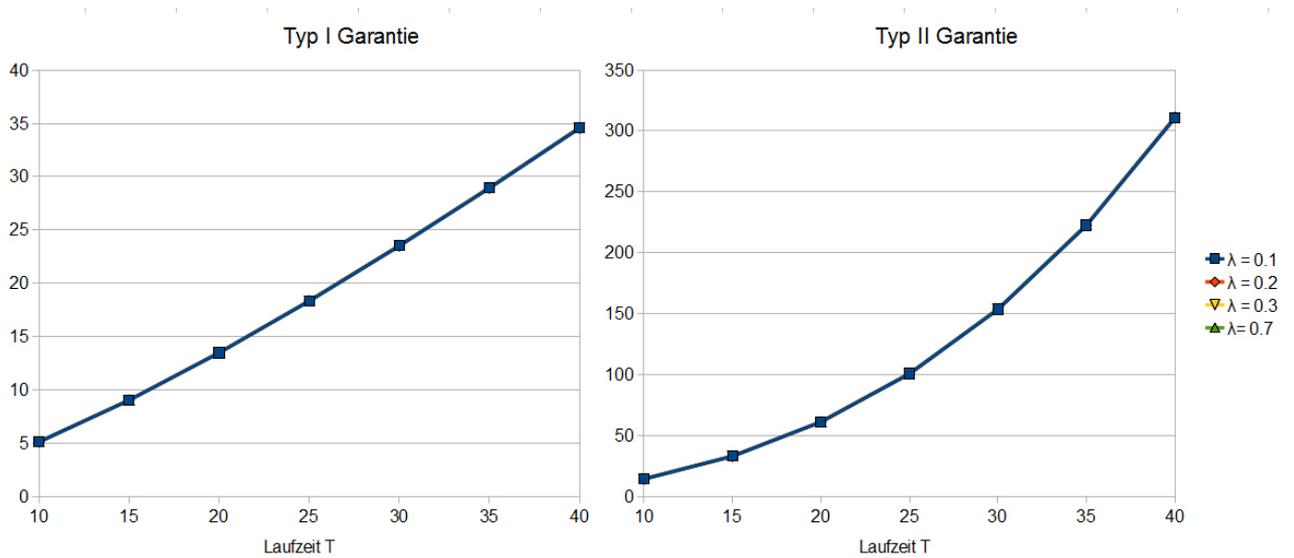


Abbildung 5.4: Garantiepreise für unterschiedliche λ der Zinsstruktur

5.1.4 Bepreisungsformeln für die Typ I Garantie mit g_t^{MW} und g_t^{GLM}

In den Abschnitten 1.1 und 2.5 wurden für die Typ I und Typ II Garantie mit einem fixen garantierten Zins g_t geschlossene Formeln hergeleitet. Im Abschnitt 5.1 wurde der garantierte Zins als δ -year spot rate festgelegt und dafür eine geschlossene Formel für die Typ I Garantie angegeben. Im Falle der Typ II Garantie war es nur für $\delta = 1$ möglich eine geschlossene Formel anzugeben.

In diesem Abschnitt werden zwei garantierte Zinse vorgestellt, die Abwandlungen des in Abschnitt 5.1 behandelten garantierten Zinses $g_t = \bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ aus Abschnitt 5.1 sind. Danach werden für diese neuen Zinse geschlossene Formel für die Typ I Garantie hergeleitet.

Der garantierte Zins g_t^{MW}

Anstatt von $g_t = \bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ wird der garantierte Zins

$$g_t^{MW} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{R}(i-1, i-1+\delta) \quad (5.32)$$

betrachtet. Der Zins g_t^{MW} stellt den Mittelwert über die seit Vertragsbeginn beobachteten δ -year spot rates $(\bar{R}(n-1, n-1+\delta))_{1 \leq n \leq t}$ dar, also

$$\begin{aligned} g_1^{MW} &= \bar{R}(0, \delta) \\ g_2^{MW} &= \frac{1}{2}(\bar{R}(0, \delta) + \bar{R}(1, 1+\delta)) \\ g_3^{MW} &= \frac{1}{3}(\bar{R}(0, \delta) + \bar{R}(1, 1+\delta) + \bar{R}(2, 2+\delta)) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

Durch die Mittelwertbildung ist g_t^{MW} stabiler als g_t .

Der garantierte Zins g_t^{GLM}

Der garantierte Zins g_t^{GLM} stellt das gleitende Mittel über die letzten x beobachtete $\bar{R}(i-1, i-1+\delta)$ seit Vertragsbeginn dar

$$g_t^{GLM} = \frac{1}{t-k(t)+1} \sum_{i=k(t)}^t \bar{R}(i-1, i-1+\delta) \quad \text{mit} \quad k(t) = \max(t-x+1, 1) \quad (5.33)$$

Für $x = 2$ ergibt sich für die g_t^{GLM}

$$\begin{aligned}
t = 1, k(1) = 1 : & \quad g_1^{GLM} = \bar{R}(0, \delta) \\
t = 2, k(2) = 1 : & \quad g_2^{GLM} = \frac{1}{2}(\bar{R}(0, \delta) + \bar{R}(1, 1 + \delta)) \\
t = 3, k(3) = 2 : & \quad g_3^{GLM} = \frac{1}{2}(\bar{R}(1, 1 + \delta) + \bar{R}(2, 2 + \delta)) \\
t = 4, k(4) = 3 : & \quad g_4^{GLM} = \frac{1}{2}(\bar{R}(2, 2 + \delta) + \bar{R}(3, 3 + \delta)) \\
& \quad \vdots = \quad \vdots
\end{aligned}$$

Das obige Beispiel zeigt, warum die Bildung des Maximums $k(t) = \max(t - x + 1, 1)$ notwendig ist: Da vom Vertragsbeginn zum Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 1 nur $\bar{R}(0, \delta)$ beobachtet werden kann, wird nur der „Mittelwert“ von $\bar{R}(0, \delta)$ gebildet. Durch die Bildung des gleitenden Mittels ist g_t^{GLM} stabiler als g_t alleine, was die Abbildung 5.5 veranschaulicht. Ist $x = T$, dann gilt $g^{GLM} = g^{MW}$, sodass nur die Garantie mit garantiertem Zins g^{GLM} zu bepreisen ist.

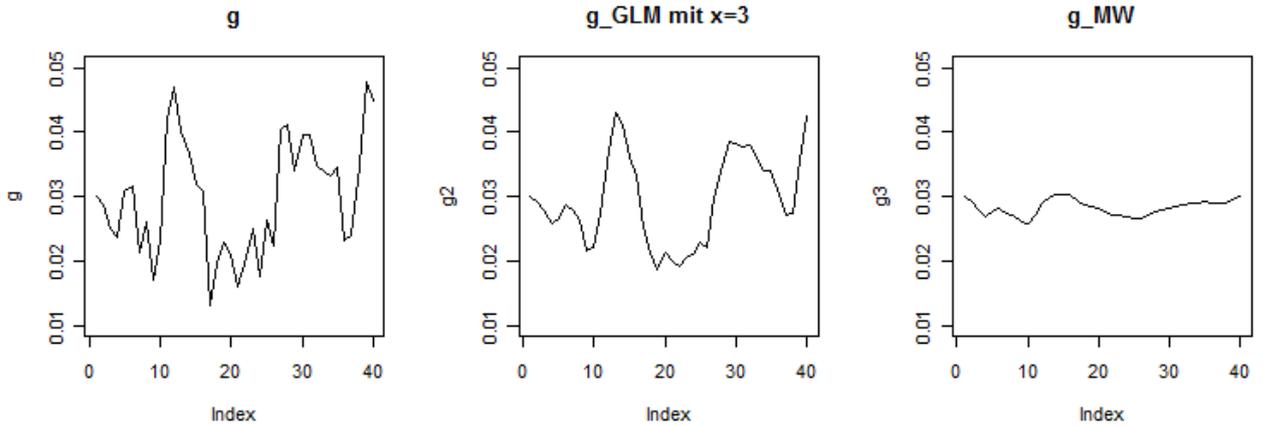


Abbildung 5.5: Vergleich der garantierten Zinsen g , g^{GLM} und g^{MW}

5.1.4.1 Geschlossene Formeln für die Typ I Garantie für g_t^{GLM}

Es gilt

$$\begin{aligned}
V_0(I) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} V_T(I) \right] \\
&= \sum_{n=1}^T k_n \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t^{GLM}} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right]}_{=:\pi_0^{(n)}(I)}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$A_{1,T}^{(n)} := \prod_{t=n}^T e^{g_t^{GLM}} \quad \text{und} \quad A_{2,T}^{(n)} := \prod_{t=n}^T e^{R_t} = \frac{S_T}{S_{n-1}} \quad (5.34)$$

erhält man wie in Abschnitt 5.1.1

$$\pi_0^{(n)}(I) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \max \left(A_{1,T}^{(n)} - A_{2,T}^{(n)}, 0 \right) \right] = A_{1,0}^{(n)} \phi(\sigma_{(n)} + d_{(n)}) - A_{2,0}^{(n)} \phi(d_{(n)}), \quad (5.35)$$

mit

$$\begin{aligned} d_{(n)} &= \frac{\log \left(\frac{A_{1,0}^{(n)}}{A_{2,0}^{(n)}} \right) - \frac{\sigma_{(n)}^2}{2}}{\sigma_{(n)}} \\ \sigma_{(n)}^2 &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{1,T}^{(n)}] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{2,T}^{(n)}] - 2\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}] \\ A_{1,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_{1,T}^{(n)} \right] \\ A_{2,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_{2,T}^{(n)} \right] \end{aligned}$$

Um diese Größen angeben zu können, müssen noch $A_{1,0}^{(n)}$, $\text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{1,T}^{(n)}]$ und $\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}]$ berechnet werden. Diese Berechnungen werden in den Punkten a) bis c) durchgeführt.

Die Größen $A_{2,0}^{(n)}$ und $\text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [\log A_{2,T}^{(n)}]$ wurden bereits im Abschnitt 5.1 berechnet (siehe Gleichungen (5.27) und (5.28)). Es sei

$$m(t) := t - k(t) + 1$$

a) Berechnung von $A_{1,0}^{(n)}$

Es sei

$$\begin{aligned} g_2(n, T) &:= \sum_{t=n}^T \frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t [g_1(i)] - f_0 \cdot T - \int_0^T \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 du \\ X_{(n,T)}^{(a)} &:= c_1 \sum_{t=n}^T \left[\frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v \right] \\ X_{(n,T)}^{(b)} &:= \sigma \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{1,0}^{(n)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{A}_{1,T}^{(n)} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T \exp \left\{ \frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \bar{R}(i-1, i-1 + \delta) \right\} \right] \\ &\stackrel{(5.24)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \prod_{t=n}^T \exp \left\{ \frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left[g_1(i) + c_1 \int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v \right] \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \sum_{t=n}^T \left(\frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left[g_1(i) + c_1 \int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v \right] \right) - \int_0^T r_u du \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ g_2(n, T) + \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)} - X_{(n,T)}^{(b)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Man benötigt daher

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)} - X_{(n,T)}^{(b)} \right] = \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)} \right] + \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(b)} \right] - 2\text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)}, X_{(n,T)}^{(b)} \right].$$

a.a) Berechnung von $\text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)} \right]$:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)} \right] &= \\ &= c_1^2 \sum_{t=n}^T \sum_{s=n}^T \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v, \frac{1}{m(s)} \sum_{j=k(s)}^s \int_0^{j-1} e^{-\lambda(j-1-v)} dW_v \right] \\ &= \frac{c_1^2}{2\lambda} \sum_{t=n}^T \sum_{s=n}^T \frac{1}{m(t)} \frac{1}{m(s)} \sum_{i=k(t)}^t \sum_{j=k(s)}^s e^{-\lambda(i+j-2)} (e^{2\lambda \min(i-1, j-1)} - 1) \end{aligned} \quad (5.36)$$

a.b) Berechnung von $\text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(b)} \right]$:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(b)} \right] &= \sigma^2 \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[T - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda T}) \right] \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist wegen Gleichung (5.26) auf Seite 32 erfüllt.

a.c) Berechnung von $\text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)}, X_{(n,T)}^{(b)} \right]$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[X_{(n,T)}^{(a)}, X_{(n,T)}^{(b)} \right] &= \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda\delta} \sum_{t=n}^T \frac{1 - e^{-\lambda\delta}}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \text{Cov}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v, \int_0^T \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} (1 - e^{-\lambda\delta}) \sum_{t=n}^T \left[\frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left(1 - e^{-\lambda(i-1)} - \frac{e^{-\lambda T}}{2} (e^{\lambda(i-1)} - e^{-\lambda(i-1)}) \right) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda^3\delta} (1 - e^{-\lambda\delta}) \left[T - n + 1 + \sum_{t=n}^T \frac{1}{m(t)} \left(\left(\frac{e^{-\lambda T}}{2} - 1 \right) \left(\frac{e^{-\lambda(t-k(t))} - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-\lambda T}}{2} \left(\frac{1 - e^{\lambda(t-k(t))}}{1 - e^{-\lambda}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

b) Berechnung von $\text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}]$

$$\begin{aligned}\text{Var}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}] &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log \left(\prod_{t=n}^T \exp \left\{ \frac{1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \bar{R}(i-1, i-1+\delta) \right\} \right) \right] \\ &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sum_{t=n}^T \frac{c_1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left(\int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v \right) \right] \\ &= \frac{c_1^2}{2\lambda} \sum_{t=n}^T \sum_{s=n}^T \sum_{i=k(t)}^t \sum_{j=k(s)}^s \frac{e^{2\lambda \min(i-1, j-1)} - 1}{(m(t))(m(s))} e^{-\lambda(i+j-2)}\end{aligned}$$

c) Berechnung von $\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}]$

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{\mathbb{Q}_1}[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{2,T}^{(n)}] &= \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\sum_{t=n}^T \frac{c_1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left(\int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v \right), \int_{n-1}^T r_u du + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v \right] \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \sum_{t=n}^T \frac{c_1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\int_0^{i-1} e^{-\lambda(i-1-v)} dW_v, -\frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)}) \int_0^{n-1} e^{\lambda v} dW_v \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma}{\lambda} \int_{n-1}^T (e^{-\lambda(T-v)} - 1) dW_v + \sigma_s \int_{n-1}^T dZ_v \right] \\ &= \sum_{t=n}^T \frac{c_1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left[-\frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)}) \int_0^{\min(i-1, n-1)} e^{-\lambda(i-1-2v)} dv \right. \\ &\quad \left. - 1_{(i>n)} \frac{\sigma}{\lambda} e^{-\lambda(i-1)} \int_{\max(0, n-1)}^{\min(i-1, T)} e^{-\lambda(T-2v)} - e^{\lambda v} dv \right. \\ &\quad \left. + 1_{(i>n)} \rho \sigma_s \int_{\max(0, n-1)}^{\min(i-1, T)} e^{-\lambda(i-1-v)} dv \right] \\ &= \sum_{t=n}^T \frac{c_1}{m(t)} \sum_{i=k(t)}^t \left[\frac{\sigma}{2\lambda^2} (e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda T}) e^{-\lambda(i-1)} (e^{2\lambda \min(i-1, n-1)} - 1) \right. \\ &\quad \left. + 1_{(i>n)} \left[\left(\frac{\sigma}{\lambda^2} + \frac{\sigma_s \rho}{\lambda} \right) (1 - e^{-\lambda(i-n)}) - \frac{\sigma}{2\lambda^2} e^{-\lambda(T+1)} (e^{\lambda i} - e^{-\lambda(i-2n)}) \right] \right]\end{aligned}$$

Zusammenfassend kann folgender Satz angegeben werden.

SATZ 5.1.5. (geschlossene Formel für die Typ I Garantie mit g_t^{GLM})

Im erweiterten Vasiček Modell ist der faire Preis $V_0(I)$ der Typ I Garantie zum Zeitpunkt 0 mit garantierten Zinsen $g_t^{GLM} = \frac{1}{t-k(t)+1} \sum_{i=k(t)}^t \bar{R}(i-1, i-1+\delta)$, $k(t) = \max(t-x+1, 1)$ gegeben durch

$$V_0(I) = \sum_{n=1}^T k_n \pi_0^{(n)}(I).$$

Dabei ist

$$\pi_0^{(n)}(I) = A_{1,0}^{(n)} \cdot \phi(\sigma(n) + d_{(n)}) - A_{2,0}^{(n)} \cdot \phi(d_{(n)})$$

mit

$$\begin{aligned} A_{1,0}^{(n)} &= \exp \{g_2(n, T)\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_n] \right\}, \\ A_{2,0}^{(n)} &= \exp \{-(n-1)f_0\}, \\ g_2(n, T) &= \sum_{t=n}^T \frac{1}{t-k(t)+1} \sum_{n=k(t)}^t [g_1(n)] - f_0 \cdot T - \int_0^T \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda u})^2 du, \\ g_1(t) &= f_0 + \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \delta} \left((1 - e^{-\lambda(t-1)})(1 - e^{-\lambda \delta}) \right) - \frac{\sigma^2}{\lambda^3 \delta} \left(\frac{(1 - e^{-2\lambda(t-1)})(1 - e^{-2\lambda \delta})}{4} \right), \\ \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} [X_n] &= \frac{\sigma^2}{2\lambda^3 \delta^2} (1 - e^{-\lambda \delta})^2 \sum_{t=n}^T \sum_{s=n}^T \sum_{i=k(t)}^t \sum_{j=k(s)}^s \frac{e^{-\lambda(i+j+2)}(e^{2\lambda \min(i,j)-1} - 1)}{(t-k(t)+1)(s-k(s)+1)} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[T - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda T}) \right] - \frac{2\sigma^2}{\lambda^3 \delta} (1 - e^{-\lambda \delta}) \left[T - n + 1 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=n}^T \frac{1}{t-k(t)+1} \left(\left(\frac{e^{-\lambda T}}{2} - 1 \right) \left(\frac{e^{-\lambda(t-k(t))} - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} \right) - \frac{e^{-\lambda T}}{2} \left(\frac{e^{\lambda(t-k(t))} - e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda}} \right) \right) \right], \\ d_{(n)} &= \frac{\log \left(\frac{A_{1,0}^{(n)}}{A_{2,0}^{(n)}} \right) - \frac{\sigma_{(n)}^2}{2}}{\sigma(n)}, \\ \sigma_{(n)}^2 &= \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)} \right] + \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{2,T}^{(n)} \right] - 2 \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{1,T}^{(n)} \right], \\ \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)} \right] &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2 \delta^2} (1 - e^{-\lambda \delta})^2 \sum_{t=n}^T \sum_{s=n}^T \sum_{i=k(t)}^t \sum_{j=k(s)}^s \frac{e^{2\lambda \min(i-1, j-1)} - 1}{(t-k(t)+1)(s-k(s)+1)} e^{-\lambda(i+j-2)}, \\ \text{Var}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{2,T}^{(n)} \right] &= \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} \left[e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(n-1)} \right]^2 \left[e^{2\lambda(n-1)} - 1 \right] + \frac{2\rho\sigma\sigma_s}{\lambda} \left[T - n + 1 - \frac{1 - e^{-\lambda(T-n+1)}}{\lambda} \right] \\ &\quad + \sigma_s^2 (T - n + 1) + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[T - n + 1 - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-n+1)}) + \frac{1 - e^{-2\lambda(T-n+1)}}{2\lambda} \right], \\ \text{Cov}_{\mathbb{Q}_1} \left[\log A_{1,T}^{(n)}, \log A_{1,T}^{(n)} \right] &= \left(\frac{1 - e^{-\lambda \delta}}{\lambda^2 \delta} \right) \sum_{t=n}^T \frac{\sigma^2}{t-k(t)+1} \times \\ &\quad \times \sum_{i=k(t)}^T \left[(e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda T})(e^{-\lambda(i+1-2\min(i,n))} - e^{-\lambda(i-1)}) \right. \\ &\quad \left. + 1_{(i>n)} \left(\left(\frac{\sigma_s \rho}{\sigma} + \frac{1}{\lambda} \right) (1 - e^{-\lambda(i-n)}) - \frac{e^{-\lambda(T+1)}}{2\lambda} (e^{\lambda i} - e^{-\lambda(i-2n)}) \right) \right], \end{aligned}$$

5.1.5 Simulation der Typ II Garantie mit den garantierten Zinsen g_t^{MW} bzw. g_t^{GLM}

Es sei $V_0^{MW}(II)$ (bzw. $V_0^{GLM}(II)$) der faire Preis der Typ II Garantie mit garantiertem Zins $(g_t^{MW})_{0 \leq t \leq T}$ (bzw. $(g_t^{GLM})_{0 \leq t \leq T}$), wobei $g_t^{MW} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{R}(i-1, i-1+\delta)$. Es gilt also

$$V_0^{MW}(II) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t^{MW}} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right] \quad (5.37)$$

$$V_0^{GLM}(II) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{g_t^{GLM}} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right] \quad (5.38)$$

Da für die Berechnung dieser Preise keine geschlossenen Formeln bekannt sind, müssen die Preise über eine Monte Carlo Simulation berechnet werden. Dazu werden Realisationen der Prozess

$$(R_t)_{1 \leq t \leq T} \quad \text{mit} \quad R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right),$$

$$(\beta_t)_{1 \leq t \leq T} \quad \text{mit} \quad \beta_t = \int_0^t r_u du \quad \text{und}$$

$$(\bar{R}(t-1, t-1+\delta))_{1 \leq t \leq T} \quad \text{mit} \quad \bar{R}(t-1, t-1+\delta) = g_1(t) + c_1 \int_0^{t-1} e^{-\lambda(t-1-v)} dW_v$$

benötigt. Dazu beachte man, dass wegen

$$r_t = f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} dW_v \quad (5.39)$$

$$\iff \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} dW_v = r_t - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 \quad (5.40)$$

Damit kann $\bar{R}(t-1, t-1+\delta)$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \bar{R}(t-1, t-1+\delta) &\stackrel{(5.24)}{=} g_1(t) + \frac{1}{\delta\lambda} (1 - e^{-\lambda\delta}) \left[\sigma e^{-\lambda(t-1)} \int_0^{t-1} e^{\lambda v} dW_v \right] \\ &= g_1(t) + \frac{1}{\delta\lambda} (1 - e^{-\lambda\delta}) \left(r_{t-1} - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(t-1)})^2 \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Für den Prozess der Rendite R_t gilt

$$R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - \log \left(\frac{S_{t-1}}{S_0} \right) = \delta_t - \delta_{t-1} \quad (5.42)$$

wobei $\delta_t := \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$. Zur Simulation von $(R_t, \beta_t, \bar{R}(t-1, t-1+\delta))_{(1 \leq t \leq T)}$ genügt es daher $(r_t, \beta_t, \delta_t)_{(1 \leq t \leq T)}$ zu simulieren.

5.1.5.1 Simulation des Prozesses (r_t, β_t, δ_t)

Wir zeigen, dass $(r_t, \beta_t, \delta_t)_{(0 \leq t \leq T)}$ ein Gauß'scher Prozess ist. Aus (5.39) folgt

$$\beta_t = \int_0^t r_u du = f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \sigma \int_0^t \int_0^u e^{-\lambda(u-v)} dW_v du$$

Das Doppelintegral kann mit dem Satz von Fubini für stochastische Integrale vereinfacht werden. Mit (5.40) folgt

$$\begin{aligned}
\beta_t &= f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \sigma \int_0^t e^{\lambda v} \int_v^t e^{-\lambda u} du dW_v \\
&= f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^t 1 - e^{-\lambda(t-v)} dW_v \\
&= f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{\sigma}{\lambda} W_t - \frac{\sigma}{\lambda} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda v} dW_v \\
&= f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{\sigma}{\lambda} W_t - \frac{1}{\lambda} \left(r_t - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 \right)
\end{aligned}$$

Aus (5.1) erhält man

$$\begin{aligned}
\delta_t &= \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = \int_0^t r_u du - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t + \sigma_s Z_t \\
&= \beta_t - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t + \sigma_s \rho W_t + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t
\end{aligned}$$

wobei \hat{W}_t eine von W_t unabhängige Brown'sche Bewegung ist. Insgesamt erhält man die Darstellung

$$r_t = f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} dW_v \quad (5.43)$$

$$\beta_t = f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{\sigma}{\lambda} W_t - \frac{1}{\lambda} \left(r_t - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 \right) \quad (5.44)$$

$$\delta_t = \beta_t - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t + \sigma_s \rho W_t + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t \quad (5.45)$$

Folgender Satz aus [14] zeigt, dass der Prozess $(r_t, \beta_t, \delta_t)_{(1 \leq t \leq T)}$ ein Gauß'scher Prozess ist.

SATZ 5.1.6. Für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq s$ seien Funktionen $H_{ij} : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die $\int_0^T H_{i,j}(t, u)^2 du < \infty$ für $t \in [0, T]$ erfüllen. Sei $Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^n)$ mit

$$Y_t^i = \sum_{j=1}^s \int_0^T H_{ij}(t, u) dW_u^j,$$

wobei $W = (W^1, \dots, W^s)$ eine s -dimensionale Standard Brown'sche Bewegung ist. Dann ist $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Gauß'scher Prozess. Insbesondere ist die bedingte Verteilung von Y_t gegeben Y_s ($s < t$) normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_t | Y_s]$ und Varianz $\text{Var}[Y_t | Y_s]$.

Bemerkung 5.1.2. Ist $\mathbb{E}[Y_t | \sigma(Y_u | u \leq s)] = g(Y_s)$ dann gilt $\mathbb{E}[Y_t | Y_s] = g(Y_s)$.

Im Weiteren bezeichne $\mathbb{E}_s[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_s]$. Nach Satz 5.1.6 ist die bedingte Verteilung von $(r_t, \beta_t, \delta_t)_{(1 \leq t \leq T)}$ gegeben (r_s, β_s, δ_s) gleich

$$N \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{E}_s[r_t] \\ \mathbb{E}_s[\beta_t] \\ \mathbb{E}_s[\delta_t] \end{pmatrix}}_{=:\mu(s,t)}, \underbrace{\begin{pmatrix} \text{Var}_s[r_t] & \text{Cov}_s[r_t, \beta_t] & \text{Cov}_s[r_t, \delta_t] \\ \text{Cov}_s[r_t, \beta_t] & \text{Var}_s[\beta_t] & \text{Cov}_s[\beta_t, \delta_t] \\ \text{Cov}_s[r_t, \delta_t] & \text{Cov}_s[\beta_t, \delta_t] & \text{Var}_s[\delta_t] \end{pmatrix}}_{=:\Sigma(s,t)} \right).$$

Dabei wurde verwendet, dass die bedingten Erwartungen und Varianzen (wie sich zeigen wird) alle von der Form $g(r_s, \beta_s, \delta_s)$ sind (vergleiche Bemerkung 5.1.2). Es gilt also die Komponenten des Erwartungsvektors $\mu(s, t)$ und der Varianz-Kovarianzmatrix $\Sigma(s, t)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_s[r_t] &= f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^s e^v dW_v + \underbrace{\sigma e^{-\lambda t} \mathbb{E}_s \left[\int_s^t e^v dW_v \right]}_{=0} \\
&= f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + e^{-\lambda(t-s)} \left(r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \\
&= r_s e^{-\lambda(t-s)} + f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 - e^{-\lambda(t-s)} \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \\
\mathbb{E}_s[\beta_t] &= f_0 \cdot t + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{\sigma}{\lambda} \underbrace{\mathbb{E}_s[W_t]}_{=W_s} - \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_s[r_t] + \frac{1}{\lambda} \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 \right)
\end{aligned}$$

Mit der Darstellung von β_s aus (5.44) folgt

$$W_s = \frac{\lambda}{\sigma} \left[\beta_s - f_0 \cdot s - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^s (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{1}{\lambda} \left[r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right] \right]$$

und damit gilt für $\mathbb{E}_s[\beta_t]$ weiters

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_s[\beta_t] &= f_0 \cdot t - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du \\
&\quad + \beta_s - f_0 \cdot s - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_0^s (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \frac{1}{\lambda} \left[r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \left[r_s e^{-\lambda(t-s)} + f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 - e^{-\lambda(t-s)} \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 \right) \\
&= \beta_s + \left(r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} + f_0 \cdot (t - s) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_s^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von δ_t gegeben \mathcal{F}_s kann wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_s[\delta_t] &= \mathbb{E}_s \left[\int_0^t r_u du \right] + \sigma_s \rho W_s + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t \\
&= \beta_s + \sigma_s \rho W_s + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 (t - s) + f_0 \cdot (t - s) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_s^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du + \left(r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \left(\frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \right) \\
&= \delta_s + \left(r_s - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda s})^2 \right) \left(\frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \right) + \left(f_0 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) (t - s) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_s^t (1 - e^{-\lambda u})^2 du.
\end{aligned}$$

Es werden die drei Varianzen berechnet.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar_s[\beta_t] &= \mathbb{V}ar_s\left[\frac{\sigma}{\lambda}W_t - \frac{1}{\lambda}r_t\right] = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}_s\left[(\sigma W_t - r_t - \mathbb{E}_s[\sigma W_t - r_t])^2\right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}_s\left[\left(\sigma(W_t - W_s) - (r_t - \mathbb{E}_s[r_t])\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\lambda^2}\mathbb{E}_s[(W_t - W_s)^2] - \frac{2}{\lambda^2}\mathbb{E}_s[\sigma(W_t - W_s)(r_t - \mathbb{E}_s[r_t])] + \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}_s[(r_t - \mathbb{E}_s[r_t])^2] \\
&= \frac{\sigma^2}{\lambda^2}(t-s) - \frac{2\sigma^2}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\underbrace{\mathbb{E}_s\left[\left(\int_s^t dW_v\right)\left(\int_s^t e^{\lambda v}dW_v\right)\right]}_{=\int_s^t e^{\lambda v}dv=\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t}-e^{\lambda s})} + \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{V}ar_s[r_t] \\
&= \frac{\sigma^2}{\lambda^2}(t-s) - \frac{2\sigma^2}{\lambda^3}\left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3}\left(1 - e^{-2\lambda(t-s)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar_s[\delta_t] &= \mathbb{V}ar_s\left[\beta_t + \sigma_s\rho W_t + \sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\hat{W}_t\right] \\
&\stackrel{(5.44)}{=} \mathbb{V}ar_s\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)W_t - \frac{1}{\lambda}r_t + \sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\hat{W}_t\right] \\
&\stackrel{(5.43)}{=} \mathbb{V}ar_s\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)W_t - \frac{\sigma}{\lambda}e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda v}dW_v + \sigma_s\sqrt{1-\rho^2}\hat{W}_t\right] \\
&= \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)^2\mathbb{V}ar_s[W_t] + e^{-2\lambda t}\frac{\sigma^2}{\lambda^2}\mathbb{V}ar_s\left[\int_0^t e^{\lambda v}dv\right] + \sigma_s^2(1-\rho^2)\mathbb{V}ar_s[\hat{W}_t] \\
&\quad - 2e^{-\lambda t}\frac{\sigma}{\lambda}\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)\mathbb{C}ov_s\left[W_t, \int_0^t e^{\lambda v}dW_v\right] \\
&= \left(\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)^2 + \sigma_s^2(1-\rho^2)\right)(t-s) + e^{-2\lambda t}\frac{\sigma^2}{\lambda^2}\int_s^t e^{2\lambda v}dv \\
&\quad - 2e^{-\lambda t}\frac{\sigma}{\lambda}\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)\int_s^t e^{\lambda v}dv \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2} + \frac{2\sigma\sigma_s\rho}{\lambda} + \sigma_s^2\right)(t-s) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3}\left(1 - e^{-2\lambda(t-s)}\right) - \frac{2\sigma}{\lambda^2}\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s\rho\right)\left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar_s[r_t] &= \mathbb{E}_s\left[(r_t - \mathbb{E}_s[r_t])^2\right] = \mathbb{E}_s\left[\left(\sigma e^{-\lambda t}\int_s^t e^{\lambda v}dW_v\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 e^{-2\lambda t}\mathbb{E}_s\left[\left(\int_s^t e^{\lambda v}dW_v\right)^2\right] = \sigma^2 e^{-2\lambda t}\mathbb{E}_s\left[\int_s^t e^{2\lambda v}dv\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda(t-s)}\right)
\end{aligned}$$

Nun betrachtet man die drei Kovarianzen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov_s [r_t, \delta_t] &= \mathbb{C}ov_s \left[r_t, \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s \rho \right) W_t - \frac{1}{\lambda} r_t + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t \right] \\
&= \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s \rho \right) \mathbb{C}ov_s [r_t, W_t] - \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}ar_s [r_t] + \underbrace{\sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \mathbb{C}ov_s [r_t, \hat{W}_t]}_{=0} \\
&= \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s \rho \right) \left(\sigma e^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda v} dv \right) - \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}ar_s [r_t] \\
&= \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \sigma_s \rho \right) \left(\frac{\sigma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \right) - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda(t-s)}) \\
\mathbb{C}ov_s [r_t, \beta_t] &= \mathbb{C}ov_s \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_t - \frac{1}{\lambda} r_t, r_t \right] \\
&= \mathbb{C}ov_s \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_t, \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda v} dW_v \right] - \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}ar_s [r_t] \\
&= \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\lambda t} \int_s^t e^{\lambda v} dv - \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}ar_s [r_t] \\
&= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda(t-s)}) \\
\mathbb{C}ov_s [\delta_t, \beta_t] &= \mathbb{C}ov_s \left[\beta_t + \sigma_s \rho W_t + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t, \beta_t \right] \\
&= \mathbb{V}ar_s [\beta_t] + \mathbb{C}ov_s [\beta_t, \sigma_s \rho W_t] + \underbrace{\mathbb{C}ov_s [\beta_t, \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t]}_{=0} \\
&\stackrel{(5.44)}{=} \mathbb{V}ar_s [\beta_t] + \sigma_s \rho \mathbb{C}ov_s \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_t - \frac{1}{\lambda} r_t, W_t \right] \\
&\stackrel{(5.43)}{=} \mathbb{V}ar_s [\beta_t] + \sigma_s \rho \mathbb{C}ov_s \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_t - e^{-\lambda t} \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^t e^{\lambda v} dW_v, \int_0^t dW_v \right] \\
&= \mathbb{V}ar_s [\beta_t] + \sigma_s \rho \frac{\sigma}{\lambda} \mathbb{V}ar_s [W_t] - e^{-\lambda t} \frac{\sigma_s \rho \sigma}{\lambda} \int_s^t e^{\lambda v} dv \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma_s \rho \sigma}{\lambda} \right) (t - s) - \left(\frac{2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{\sigma_s \rho \sigma}{\lambda^2} \right) (1 - e^{-\lambda(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} (1 - e^{-2\lambda(t-s)})
\end{aligned}$$

Für jede Realisation von $((r_t, \beta_t, \delta_t))_{1 \leq t \leq T}$ können über die Gleichungen (5.37), (5.38), (5.41) und (5.42) die Garantiewerte $V_0^{MW}(II)$ bzw. $V_0^{GLM}(II)$ berechnet werden.

Wie in [19] vorgeschlagen werden die Garantiewerte $V_0^{MW}(II)$ bzw. $V_0^{GLM}(II)$ für $N = 50000$ Pfade von $((r_t, \beta_t, \delta_t))_{1 \leq t \leq T}$ berechnet. Durch Bildung des Mittelwerts der N Realisationen können Monte Carlo Schätzer für die fairen Preise $V_0^{MW}(II)$ bzw. $V_0^{GLM}(II)$ angegeben werden. Diese Wahl wird durch die Abbildungen 5.6 und 5.7 gerechtfertigt. Die vier oberen Kurven aus Abbildung 5.6 zeigen für vier verschiedenen σ_s die Veränderung der Garantieschätzer der Typ I Garantie $\hat{V}_0(I)^{GLM}$ für größer werdende Simulationsanzahl N . Das entsprechenden Ergebnis aus der geschlossenen Formel wurde als grüne horizontale Linien in die Grafik aufgenommen. Die unteren vier Kurven zeigen den Verlauf der empirischen Standardabweichung der Garantieschätzer für die vier verschiedenen σ_s . Abbildung zeigt selbiges für die Typ II

Garantie. Ab $N = 50000$ verändern sich die Garantieschätzer der Typ I und Typ II Garantie nicht mehr stark und sind für die Typ I Garantie nahe am Ergebnis aus der geschlossenen Formel, weswegen für die folgenden Analysen stets $N = 50000$ verwendet wird.

Bemerkung 5.1.3. *Zur Berechnung der Garantieschätzer in den Abbildungen 5.6 und 5.7 wurden die restlichen Parameter wie folgt gewählt*

$$\begin{array}{llll} T & = 10 & \rho & = -0.2 \quad \lambda = 0.1 \quad \delta = 1 \\ k_n & = 6(1.02)^{(n-1)} & \sigma & = 0.2 \quad x = 1. \end{array}$$

Bemerkung 5.1.4. *Auf die selbe Art und Weise können auch Monte Carlo Schätzer für die Preise der Typ I Garantie $V_0^{MW}(I)$ bzw. $V_0^{GLM}(I)$ gewonnen werden. In Kapitel 8 ist das R-Simulationsprogramm für dieses Modell abgedruckt.*

5.1.6 Diskussion der Ergebnisse für g_t^{MW} und g_t^{GLM}

Für die gleichen Parameterwahl wie in der Analyse aus Abschnitt 5.1.3 werden hier die Preise der Typ I und Typ II Garantie für die garantierten Zinse g_t^{MW} bzw. g_t^{GLM} besprochen.

Abbildung 5.8 zeigt die fairen Preise $V_0^{MW}(I)$ der Typ I Garantie bzw. $V_0^{MW}(II)$ der Typ II Garantie für verschiedene Laufzeiten T und drei verschiedenen volatile Referenzportfolios. Für volatilere Referenzportfolios ist der Garantiepreis höher.

Abbildung 5.9 zeigt, dass für die Garantiepreise mit garantiertem Zins g_t^{GLM} das gleiche gilt: Volatilere Referenzportfolios ergeben höhere Garantiepreise.

Die Abbildung 5.10 zeigt links die Garantiepreise $V_0(I)$, $V_0^{MW}(I)$, $V_0^{GLM}(I)$ bzw. rechts $V_0(II)$, $V_0^{MW}(II)$, $V_0^{GLM}(II)$ für verschiedene Laufzeiten T . Die Preise unterscheiden sich für die verschiedenen Zinse nur gering. Erhöht man aber die Volatilität des Referenzportfolios von $\sigma_s = 0.1$ auf 0.4 und die Volatilität der Zinsstruktur von $\sigma = 0.01$ auf $\sigma = 0.05$, so wird der Unterschied zwischen den garantierten Zinsen deutlicher, was Abbildung 5.11 zeigt. Die Preis $V_0^{MW}(I)$ sind stets kleiner als die $V_0(I)$ und $V_0^{GLM}(I)$. Die Preise für die Standardgarantie $V_0(I)$ sind für alle Laufzeiten am größten.

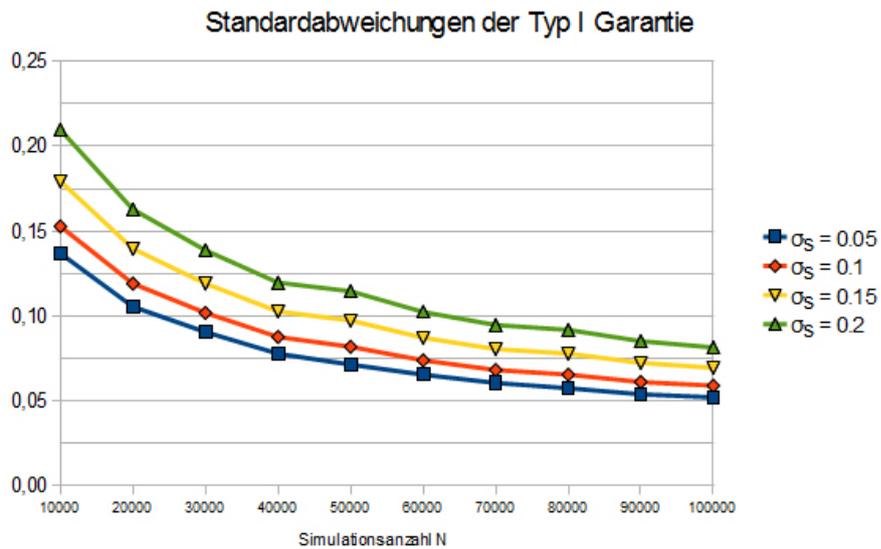
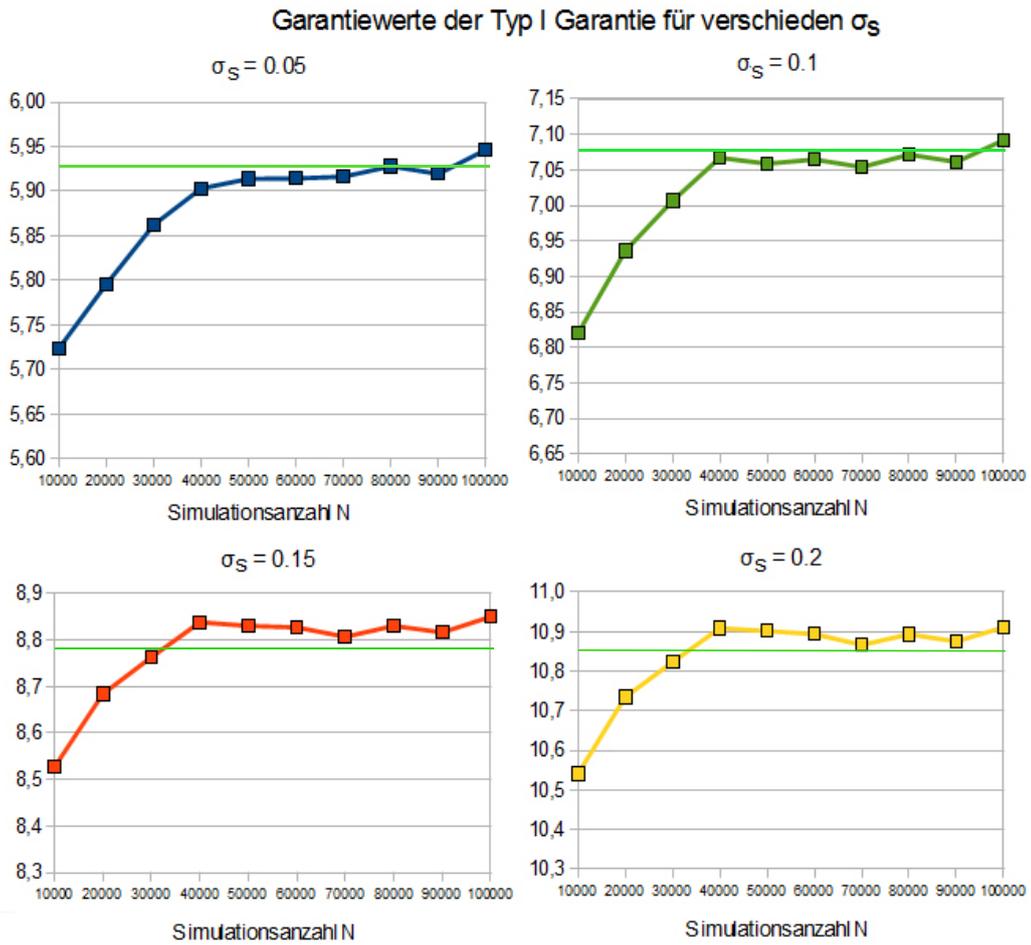


Abbildung 5.6: Schätzer $\hat{V}_0(I)^{GLM}$ der Typ I Garantiepreise und deren empirische Standardabweichungen für verschiedene Laufzeiten T und vier verschieden volatile Referenzportfolios

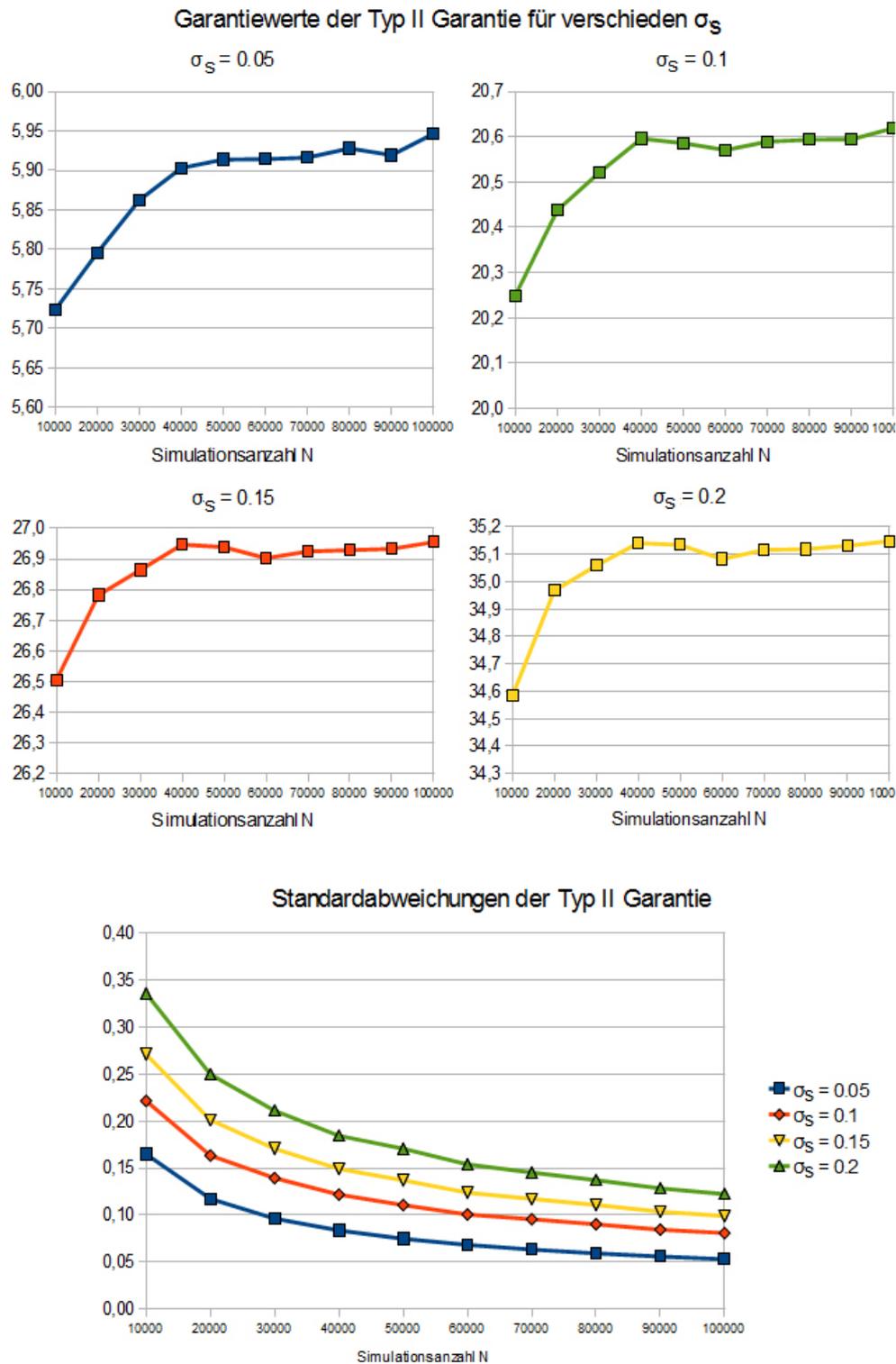


Abbildung 5.7: Schätzer $\hat{V}_0(II)^{GLM}$ der Typ II Garantiepreise und deren empirische Standardabweichungen für verschiedene Laufzeiten T und vier verschieden volatile Referenzportfolios

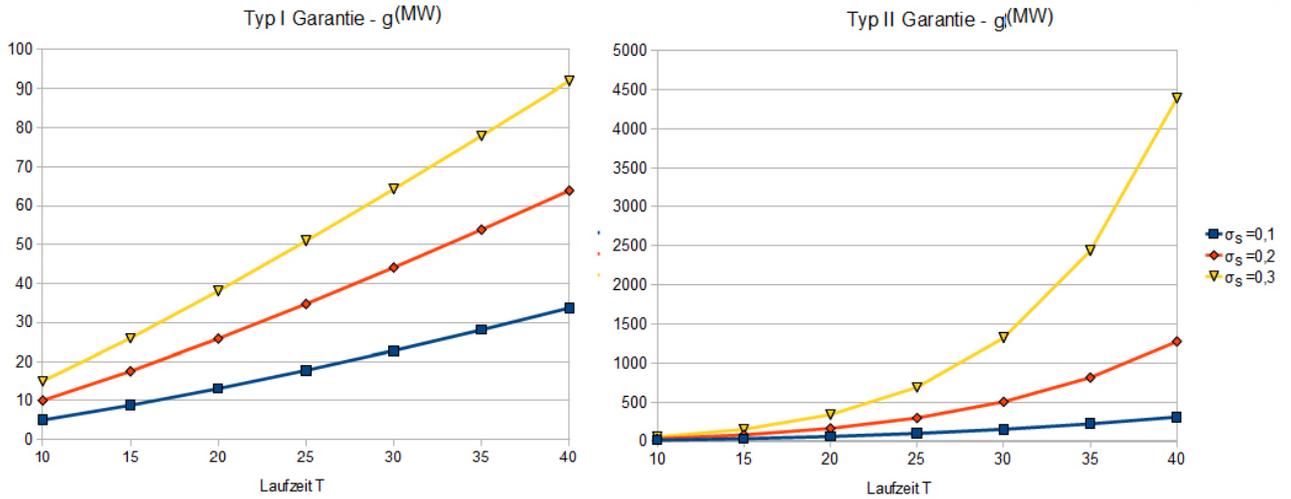


Abbildung 5.8: $V_0^{MW}(I)$ und $V_0^{MW}(II)$ für verschiedene Laufzeiten T und drei verschieden volatile Referenzportfolios

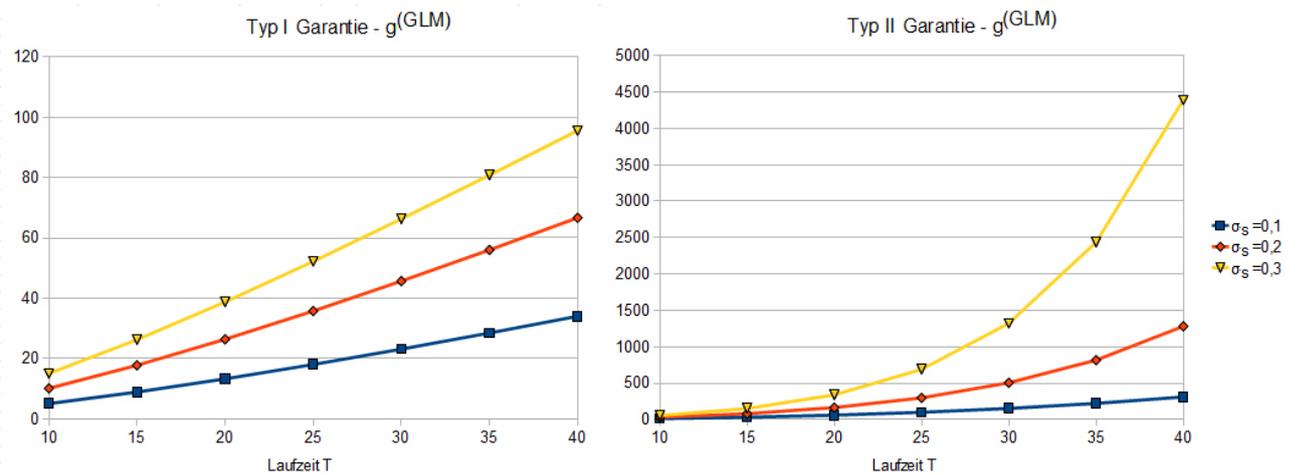


Abbildung 5.9: $V_0^{GLM}(I)$ und $V_0^{GLM}(II)$ für verschiedene Laufzeiten T und drei verschieden volatile Referenzportfolios

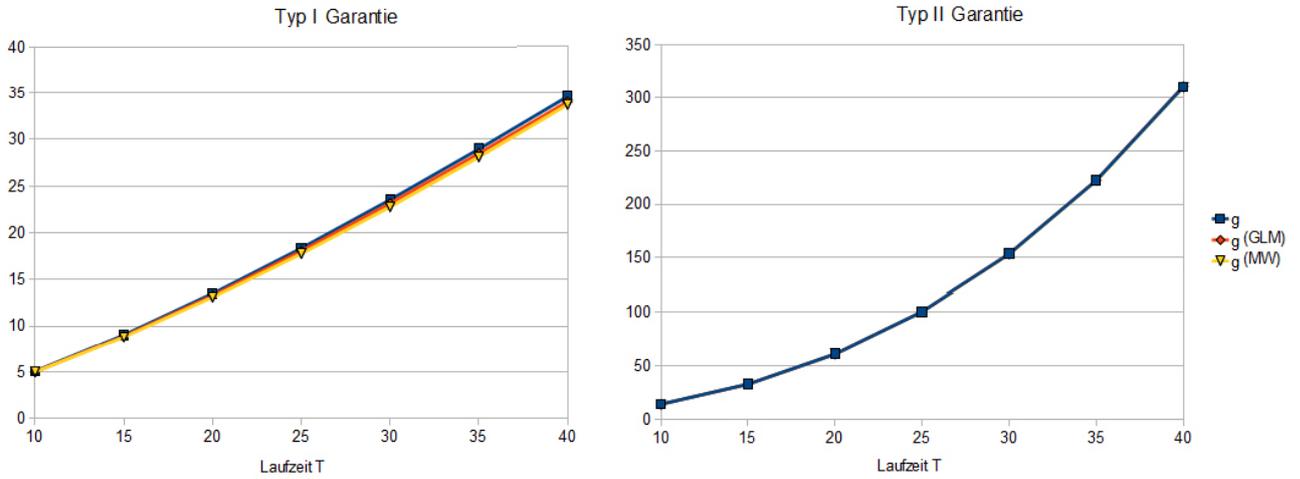


Abbildung 5.10: Preise $V_0(I), V_0^{MW}(I), V_0^{GLM}(I)$ bzw. $V_0(II), V_0^{MW}(II), V_0^{GLM}(II)$ für verschiedene Laufzeiten T , $\sigma_s = 0.1$ und $\sigma = 0.01$

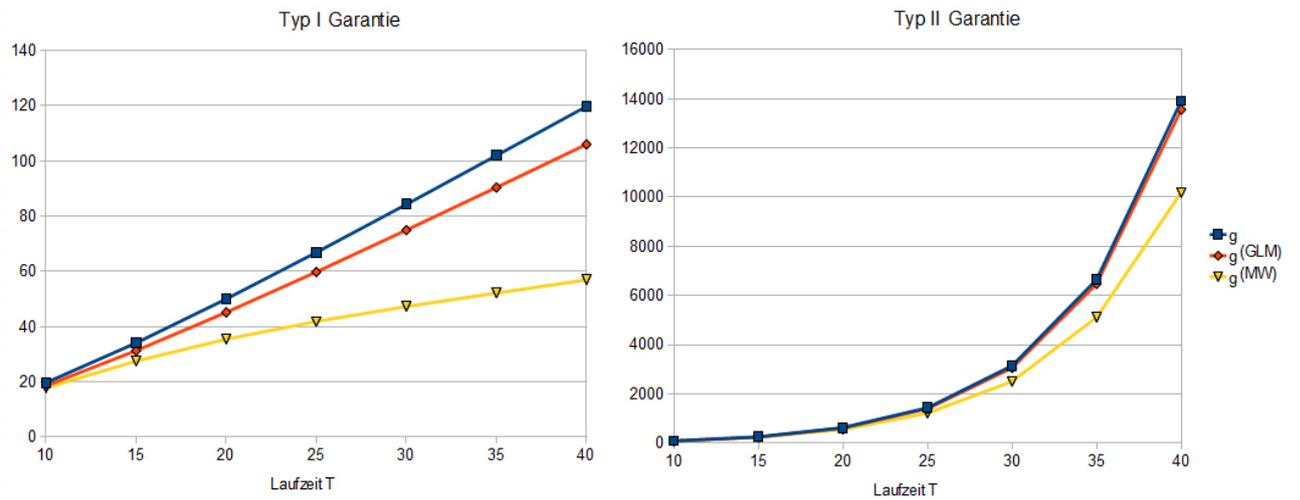


Abbildung 5.11: Preise $V_0(I), V_0^{MW}(I), V_0^{GLM}(I)$ bzw. $V_0(II), V_0^{MW}(II), V_0^{GLM}(II)$ für verschiedene Laufzeiten T , $\sigma_s = 0.4$ und $\sigma = 0.05$

5.2 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell

Im letzten Abschnitt wurde die short rate r_t mit dem erweiterten Vasiček Modell modelliert. In den folgenden Ausführungen wird der short rate das Cox Ingersoll Ross Modell zugrunde gelegt. In diesem Modell gilt

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r_t dt + \sigma_s dZ_t) & S_0 &= S \\ dr_t &= \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t & r_0 &= r \end{aligned}$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ und $(Z_t)_{t \geq 0}$ zwei korrelierte Brown'sche Bewegungen mit $dW_t dZ_t = \rho dt$ sind. Der garantierte Zins $(g_t)_{1 \leq t \leq T}$ sei wieder die δ -year spot rate, $g_t = \bar{R}(t-1, t-1+\delta)$.

Für die Modelle aus den Abschnitten 2 und 5.1 konnten noch geschlossene Formeln für die fairen Preise der Typ I und Typ II Garantie angegeben werden. Für dieses Modell sind keine geschlossenen Formeln für die Typ I und Typ II Garantie bekannt. Schätzer für die Garantiepreise $V_0(I)$ und $V_0(II)$ können aber über eine Monte Carlo Simulation gewonnen werden.

Es seien $V_{0,j}(I)$ bzw. $V_{0,j}(II)$ die Garantiewerte zum Zeitpunkt 0, welche im j -ten Simulationsschritt erzeugt wurde und

$$\hat{V}_0(I) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(I) \quad \text{bzw.} \quad \hat{V}_0(II) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(II)$$

die Monte Carlo Schätzer der fairen Preise zum Zeitpunkt 0, wobei

$$V_{0,j}(I) = \exp \left\{ - \int_0^T r_t dt \right\} \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \quad (5.46)$$

$$V_{0,j}(II) = \exp \left\{ - \int_0^T r_t dt \right\} \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right]. \quad (5.47)$$

Man benötigt daher für jede der N Simulationen Pfade von

$$\begin{aligned} (\beta_t)_{1 \leq t \leq T} & \quad \text{mit} \quad \beta_t = \int_0^t r_u du, \\ (R_t)_{1 \leq t \leq T} & \quad \text{mit} \quad R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \text{ und} \\ (\bar{R}(t-1, t-1+\delta))_{1 \leq t \leq T} & \quad \text{mit} \quad \bar{R}(t-1, t-1+\delta) = - \frac{\log P(t-1, t-1+\delta)}{\delta}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Der Prozess der short rate $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird wie in Abschnitt 3.3 vorgeschlagen diskretisiert und für ein geeignetes $\Delta = \frac{1}{N\Delta}$ approximiert. Der Prozess $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird dazu lediglich zu den Zeitpunkten Δj für $j = 0, \dots, \frac{T}{\Delta}$ durch $(r'_t)_{0 \leq t \leq T}$ approximiert. Es gilt

$$\begin{aligned} z_0 &= \log(r_0), \\ z_{\Delta j} &= z_{\Delta(j-1)} + (e^{-z_{\Delta(j-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma e^{-z_{\Delta(j-1)}/2}(W_{\Delta j} - W_{\Delta(j-1)}), \\ r'_{\Delta j} &= \exp \{z_{\Delta j}\} \\ r_{\Delta j} &\approx r'_{\Delta j} \end{aligned}$$

wobei $W_{\Delta j} - W_{\Delta(j-1)}$ unabhängige $N(0, \Delta)$ -verteilte Zufallsvariablen sind. Der Prozess $(\beta_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird unter Anwendung der Trapezregel approximiert. Dazu werden die Werte der short rate an den Stützstellen $\{\Delta i\}_{i=0}^{T/\Delta}$ verwendet.

$$\begin{aligned}
\beta_t &= \int_0^t r_u du \\
&= \int_0^\Delta r_u du + \int_\Delta^{\Delta \cdot 2} r_u du + \dots + \int_{t-\Delta}^t r_u du \\
&\approx \frac{(r'_0 + r'_\Delta)}{2} \Delta + \frac{(r'_\Delta + r'_{\Delta \cdot 2})}{2} \Delta + \dots + \frac{(r'_{(t-\Delta)} + r'_t)}{2} \Delta \\
&\approx \frac{1}{2}(r'_0 + r'_t) \Delta + \Delta \sum_{i=1}^{t/\Delta-1} r'_{\Delta i}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Der Prozess $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$ kann wie folgt approximiert werden:

$$\begin{aligned}
R_t &= \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \\
&= \int_{t-1}^t r_u du + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1}) - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \\
&= \beta_t - \beta_{t-1} + \sigma_s (Z_t - Z_{t-1}) - \frac{1}{2} \sigma_s^2
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Für den Zuwachs $(Z_t - Z_{t-1})$ der Brown'schen Bewegung aus (5.50) ist zu bemerken, dass $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ aus der short rate korreliert sind. Wegen

$$(Z_t - Z_{t-1}) = \sum_{i=(t-1)/\Delta}^{t/\Delta-1} (Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i})$$

wird der Renditenprozess wie folgt approximiert

$$R_t \approx \frac{1}{2} \Delta (r'_t - r'_{t-1}) + \Delta \sum_{i=(t-1)/\Delta}^{t/\Delta-1} r'_{\Delta i} + \sigma_s \sum_{i=(t-1)/\Delta}^{t/\Delta-1} (Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}) - \frac{1}{2} \sigma_s^2. \tag{5.51}$$

Die Zuwächse $(Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}, W_{\Delta(i+1)} - W_{\Delta i})$ sind zweidimensional normalverteilt mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\Delta i} [W_{\Delta(i+1)} - W_{\Delta i}] &= \mathbb{E}_{\Delta i} [Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}] = 0 \\
\text{Var}_{\Delta i} [W_{\Delta(i+1)} - W_{\Delta i}] &= \text{Var}_{\Delta i} [Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}] = \Delta \\
\text{Cov}_{\Delta i} [W_{\Delta(i+1)} - W_{\Delta i}, Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}] &= \rho \Delta.
\end{aligned}$$

Damit kann $(r'_{\Delta j})_{0 \leq j \leq T}$ simuliert werden und mit (5.49) und (5.50) auch approximativ $(\beta_{\Delta j})_{0 \leq j \leq T}$ und $(R_{\Delta j})_{0 \leq j \leq T}$. Durch die Kenntnis der $r'_{\Delta j}$ für $0 \leq j \leq \frac{T}{\Delta}$ kann auch der Prozess $\bar{R}(t - 1, t - 1 + \delta)$ approximiert werden. Der Preis einer Nullkuponanleihe im Cox-Ingerson-Ross Modell ist nach [5]

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T)r_t},$$

wobei $A(t, T)$ und $B(t, T)$ durch

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\{(\kappa + h)(T - t)/2\}}{2h + (\kappa + h)(\exp\{(T - t)/h\} - 1)} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (\kappa + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2},$$

gegeben sind. θ, σ und κ sind die Parameter der short rate. Damit erhält man eine Gleichung für die Berechnung von $\bar{R}(t - 1, t - 1 + \delta)$:

$$\begin{aligned} \bar{R}(t - 1, t - 1 + \delta) &= -\frac{\log P(t - 1, t - 1 + \delta)}{\delta} \\ &= -\frac{A(t - 1, t - 1 + \delta)}{\delta} + r_t \frac{B(t - 1, t - 1 + \delta)}{\delta}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

$$z_{\Delta j} = z_{\Delta(j-1)} + (e^{-z_{\Delta(j-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma e^{-z_{\Delta(j-1)}/2}(W_{\Delta(j+1)} - W_{\Delta j})$$

$$r_{\Delta j} = \exp\{z_{\Delta j}\},$$

und weiters für $t = \Delta j, 0 \leq j \leq TN_{\Delta}$ die Prozesse

$$\beta_t \approx \frac{1}{2}(r'_0 + r'_t)\Delta + \Delta \sum_{i=1}^{t/\Delta-1} r'_{\Delta i}$$

$$R_t \approx \frac{1}{2}\Delta(r'_t - r'_{t-1}) + \Delta \sum_{i=(t-1)/\Delta}^{t/\Delta-1} r'_{\Delta i} + \sigma_s \sum_{i=(t-1)/\Delta}^{t/\Delta-1} (Z_{\Delta(i+1)} - Z_{\Delta i}) - \frac{1}{2}\sigma_s^2$$

$$\bar{R}(t - 1, t - 1 + \delta) \approx -\frac{A(t - 1, t - 1 + \delta)}{\delta} + r'_t \frac{B(t - 1, t - 1 + \delta)}{\delta}.$$

Über die erzeugten Prozesse sind dann die Realisationen $V_{0,j}(I)$ und $V_{0,j}(II)$ zu berechnen.

Es ist noch zu eruieren, für welche N_{Δ} und für welche Simulationsanzahl N die Schätzer ein stabiles Verhalten aufweisen, das heißt eine Erhöhung der Simulationsanzahl N verändert die Schätzer und ihre empirische Standardabweichung

$$sd(I) = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (V_{0,j}(I) - \hat{V}_0(I))^2 \right)^{1/2}$$

$$sd(II) = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (V_{0,j}(II) - \hat{V}_0(II))^2 \right)^{1/2}$$

nicht wesentlich.

Dazu wurden die Schätzer $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(II)$ für unterschiedliche feine Diskretisierungen $\Delta =$

$\frac{1}{N_{\Delta}}$ und verschiedene Simulationsanzahlen N berechnet. Die restlichen Parameter bleiben unverändert,

$$\begin{array}{cccccccc} T & = & 10 & \delta & = & 1 & \sigma_s & = & 0.1 & \sigma & = & 0.1 & k_n & = & 6 \cdot (1.02)^{n-1} \\ \rho & = & -0.2 & \theta & = & 0.03 & r_0 & = & 0.03 & \kappa & = & 4 & & & \end{array}$$

In den Abbildungen 5.12 und 5.13 wurde die Typ I Garantie untersucht. 5.12 zeigt für die verschiedenen N_{Δ} je eine Kurve, welche die Werte der Schätzer für größer werdende Simulationsanzahl N beschreibt. Für die N von 10000 bis 40000 sind die Werte der Schätzer breiter gestreut, als ab $N = 50000$.

In der Grafik 5.13 wurden die empirischen Standardabweichungen für die Schätzer aus der oberen Grafik dargestellt. Es zeigt sich, dass für große N die Standardabweichung der Schätzer geringer wird und vor allem, dass die Schätzer für die groben Diskretisierungen, wie z.B. $\Delta = \frac{1}{12}$, die gleiche Güte aufweisen, wie es Schätzer mit feinen Diskretisierungen tun, z.B. $\Delta = \frac{1}{1000}$.

Selbes Bild zeigt sich für die Schätzer der Garantieprie der Typ II Garantie (vgl. Abbildungen 5.14 und 5.15). Für beide Garantietypen liegen die Garantieschätzer für die verschiedenen N_{Δ} ab $N = 70000$ nahe beieinander und haben eine ausreichend kleine Standardabweichung, weshalb für die weiteren Simulationen der Typ I und Typ II Garantiepreis $N = 70000$ herangezogen wird. Da der Rechenaufwand für die kleinen Δ viel geringer ist und die Grafik zeigt, dass die Standardabweichung der Schätzer trotz feinerer Diskretisierung nicht besser wird, verwenden wir $\Delta = \frac{1}{12}$ für die folgenden Berechnungen.

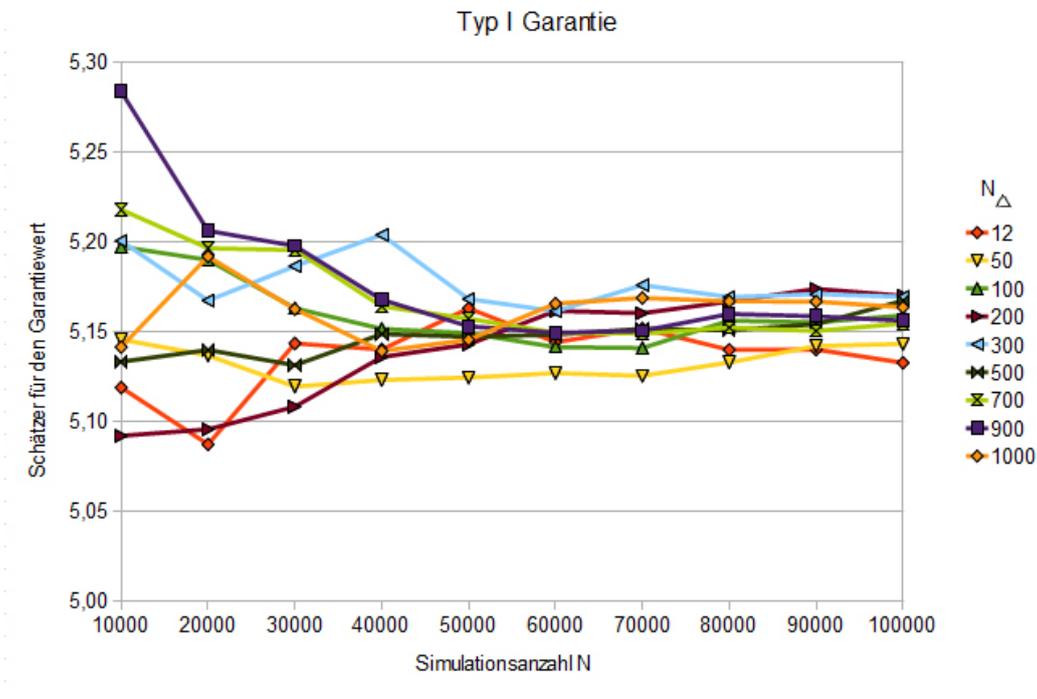


Abbildung 5.12: Schätzer für die Preise der Typ I Garantie für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

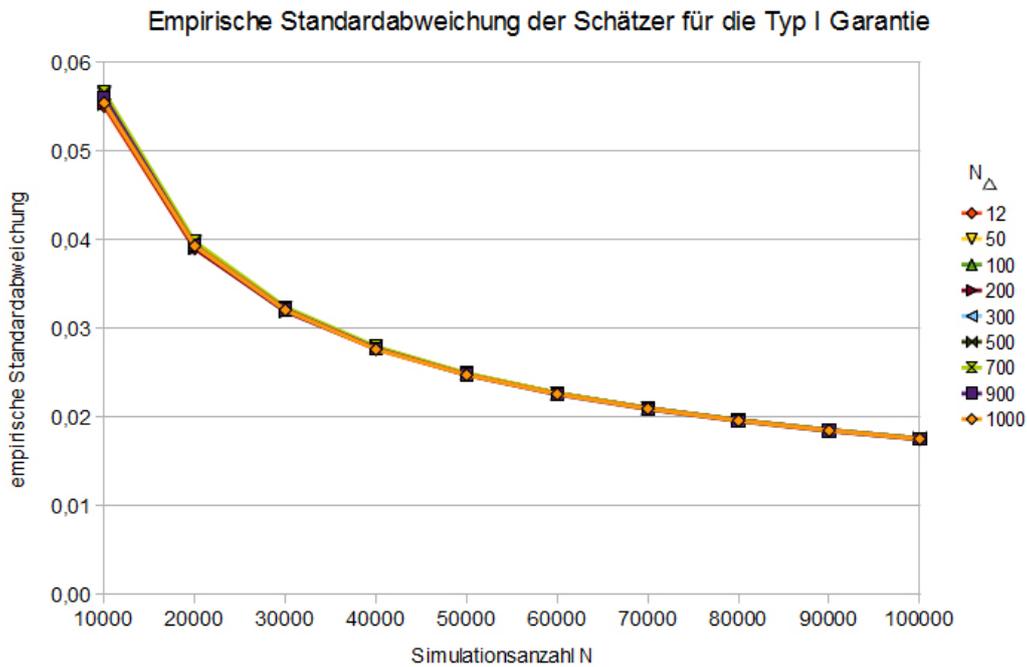


Abbildung 5.13: Empirische Standardabweichung der Preisschätzer der Typ I Garantie für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

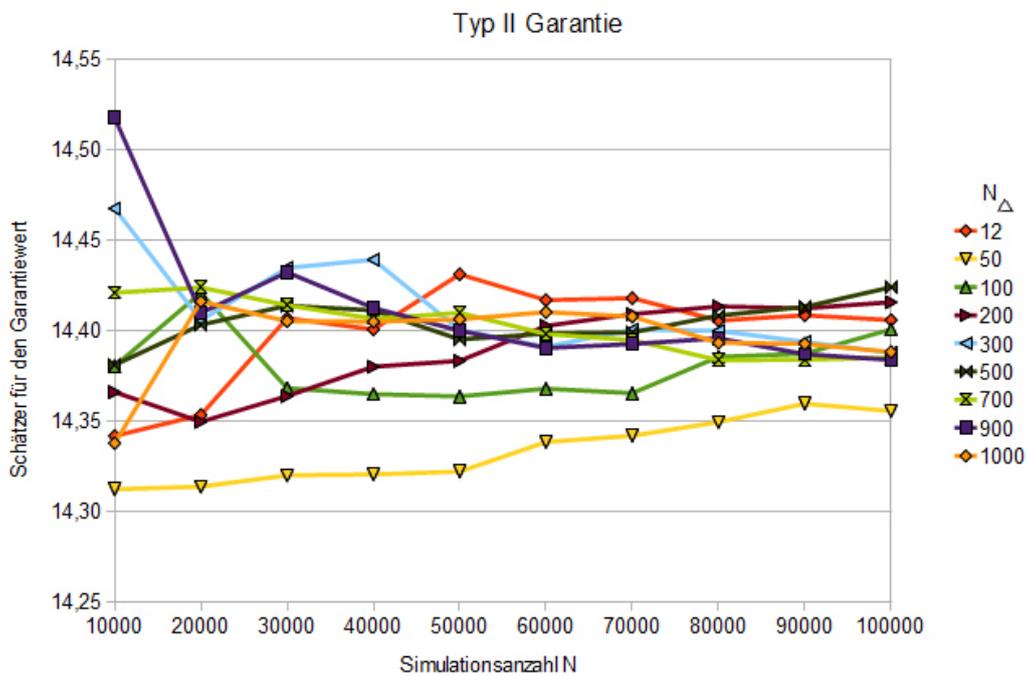


Abbildung 5.14: Schätzer für die Preise der Typ II Garantie für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

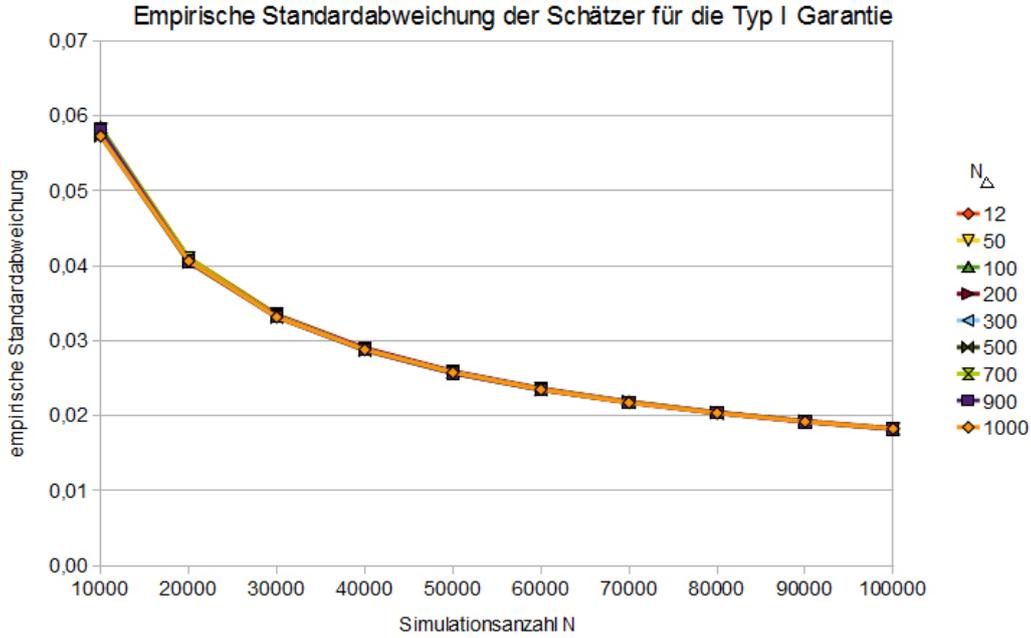


Abbildung 5.15: Empirische Standardabweichung der Preisschätzer der Typ II Garantie für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

5.2.1 Diskussion der Ergebnisse

Zur Berechnung der Schätzer für die Garantiewerte wurden die Parameter wie folgt gewählt

$$\begin{aligned} \kappa &= 4 & \delta &= 1 & \sigma_s &= 0.1 & \sigma &= 0.1 \\ \rho &= -0.2 & \theta &= 0.03 & r_0 &= 0.03 & k_n &= 6 \cdot (1.02)^{n-1} \end{aligned}$$

Die erste der nachstehenden Tabellen zeigt die Schätzer der Garantiewerte, bei deren Berechnung der Wurzelfusionsprozess $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ wie in [13] vorgeschlagen simuliert wurde, das heißt

$$r_{\Delta i} = r_{\Delta(i-1)} + \kappa(\theta - r_{\Delta(i-1)})\Delta + \sigma\sqrt{\max(r_{\Delta(i-1)}, 0)}\sqrt{\Delta}W_i \quad (5.52)$$

mit unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen W_i . Die zweite Tabelle zeigt die Garantiewerte, bei deren Berechnung $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ wie in Abschnitt 3.3 vorgeschlagen simuliert wurde, das heißt

$$z_{\Delta i} = z_{\Delta(i-1)} + ((\kappa\theta - \sigma^2/2) \exp(z_{\Delta(i-1)}) - \kappa)\Delta + \sigma \exp(-z_{\Delta(i-1)}/2)\sqrt{\Delta}W_i \quad (5.53)$$

$$r_{\Delta i} = \exp(z_{\Delta i}). \quad (5.54)$$

Man erkennt einen geringen Unterschied zwischen den Methoden, der mit der Laufzeit T wächst und für die Typ II Garantie größer ist. Die Werte aus der oberen Tabelle sind stets kleiner als die in der unteren. Für die weiteren Berechnungen wird immer die Methode aus Abschnitt 3.3 verwendet. Rechts in Klammer neben den Garantieschätzern findet man in beiden Tabellen die empirischen Standardabweichungen der Schätzer, die für beide Methoden sehr ähnlich sind.

Garantiewerte für eine durch (5.52) approximierte short rate

Laufzeit T	Typ I Garantie					
	$\sigma_s = 0, 1$		$\sigma_s = 0, 2$		$\sigma_s = 0, 3$	
10	5,156	(0,021)	10,263	(0,037)	15,212	(0,048)
15	9,082	(0,036)	17,996	(0,061)	26,497	(0,077)
20	13,594	(0,052)	26,831	(0,086)	39,264	(0,106)
25	18,39	(0,069)	36,216	(0,111)	52,736	(0,134)
30	23,603	(0,087)	46,251	(0,137)	66,909	(0,161)
35	28,947	(0,105)	56,591	(0,162)	81,447	(0,186)
40	34,685	(0,124)	67,467	(0,188)	96,451	(0,21)
Laufzeit T	Typ II Garantie					
	$\sigma_s = 0, 1$		$\sigma_s = 0, 2$		$\sigma_s = 0, 3$	
10	14,419	(0,022)	32,778	(0,045)	55,954	(0,091)
15	33,254	(0,038)	82,016	(0,108)	153,16	(0,313)
20	61,652	(0,060)	165,909	(0,244)	342,018	(0,876)
25	101,411	(0,092)	300,565	(0,517)	693,388	(2,195)
30	154,756	(0,14)	508,154	(0,886)	1323,299	(4,379)
35	224,623	(0,214)	826,639	(1,565)	2466,487	(5,666)
40	313,807	(0,317)	1299,824	(2,736)	4463,776	(5,932)

Garantiewerte für eine durch (5.53) und (5.54) approximierte short rate

Laufzeit T	Typ I Garantie					
	$\sigma_s = 0, 1$		$\sigma_s = 0, 2$		$\sigma_s = 0, 3$	
10	5,116	(0,021)	10,215	(0,036)	15,156	(0,048)
15	8,991	(0,036)	17,884	(0,06)	26,365	(0,076)
20	13,433	(0,052)	26,627	(0,086)	39,021	(0,105)
25	18,137	(0,069)	35,891	(0,111)	52,345	(0,133)
30	23,236	(0,086)	45,774	(0,136)	66,332	(0,160)
35	28,448	(0,104)	55,937	(0,161)	80,652	(0,185)
40	34,033	(0,122)	66,604	(0,186)	95,399	(0,209)
Laufzeit T	Typ II Garantie					
	$\sigma_s = 0, 1$		$\sigma_s = 0, 2$		$\sigma_s = 0, 3$	
10	14,367	(0,022)	32,7	(0,045)	55,845	(0,091)
15	33,113	(0,038)	81,773	(0,108)	152,773	(0,312)
20	61,356	(0,060)	165,326	(0,243)	340,968	(0,874)
25	100,865	(0,092)	299,338	(0,515)	690,875	(2,188)
30	153,835	(0,139)	505,798	(0,883)	1317,793	(4,364)
35	223,159	(0,213)	822,354	(1,558)	2454,894	(5,644)
40	311,592	(0,315)	1292,402	(2,723)	4440,47	(5,947)

In Abbildung 5.16 sind die Garantiewerte für unterschiedlich volatile Referenzportfolios aufgetragen. Je größere die Volatilität σ_s ist, desto höher werden die entsprechenden Garantiewerte. Für längere Laufzeiten ist der Effekt viel stärker als für kurze. Die Parameter wurden so gewählt, sodass die Garantiewerte mit denen aus Abbildung 5.1 für das erweiterte Vasiček

Modell vergleichbar sind. Die short rate wurde im erweiterten Vasicek Modell durch

$$dr_t = \left(\lambda f_0 + \frac{\sigma_V^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) - \lambda r_t \right) dt + \sigma_V dW_t \quad (5.55)$$

$$= \lambda \left(f_0 + \frac{\sigma_V^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}) - r_t \right) dt + \sigma_V dW_t \quad (5.56)$$

modelliert und im Cox Ingersoll Ross Modell durch

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_C \sqrt{r_t} dW_t.$$

Für

$$\lambda = \kappa = 0.1$$

$$\sigma_V = \sigma_C = 0.1$$

$$\theta = \lim_{t \rightarrow 0} f_0 + \frac{\sigma_V^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) = f_0 = 0.03$$

sind die short rate Prozesse in den zwei Modell sehr ähnlich. Der Parameter θ aus dem Cox Ingersoll Ross Modell wurde gleich f_0 aus dem erweiterten Vasicek Modell gewählt und entspricht damit dem Start- θ aus dem erweiterten Vasicek Modell.

In Abbildung 5.17 wird im Unterschied zur vorherigen Abbildung der Parameter θ so gewählt, dass er dem Langzeit- θ aus dem Vasicek Modell entspricht, das heißt

$$\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} f_0 + \frac{\sigma_V^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) = f_0 + \frac{\sigma_V^2}{2\lambda} = 0.08$$

Die Werte aus Abbildung 5.1 verhalten sich sehr ähnlich wie die in Abbildung 5.16. Die Werte aus Abbildung 5.17 für $\theta = 0.08$ sind für alle Laufzeiten und all drei σ_s kleiner als die entsprechenden aus dem Vasicek Modell (man beachte die unterschiedlich skalierten y-Achsen). Abbildung 5.18 zeigt die Garantiewerte für verschiedene θ . Je größer das θ , desto

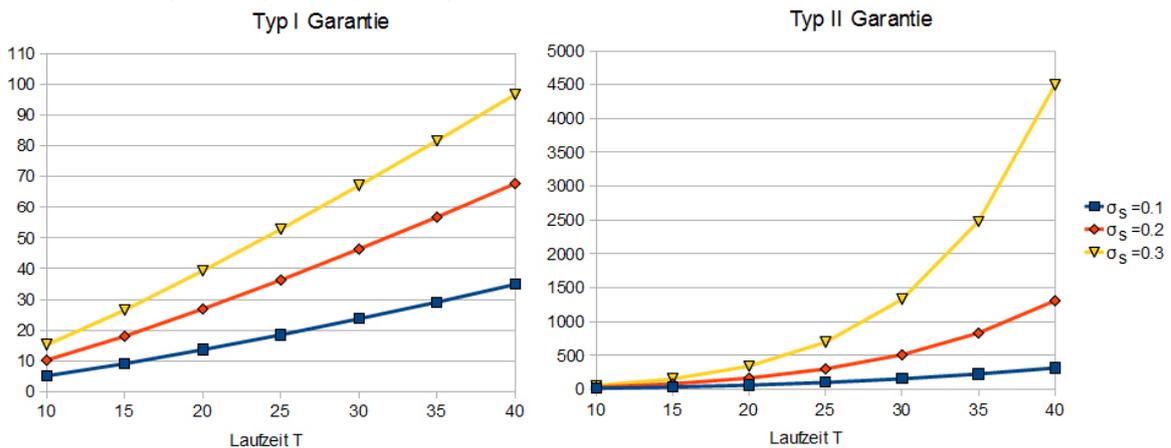


Abbildung 5.16: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für $\theta = 0.03$, verschiedene Laufzeiten T und drei unterschiedlich volatile Referenzportfolios ($\sigma_s = 0.1, 0.2, 0.3$).

kleiner werden die Garantiepreise.

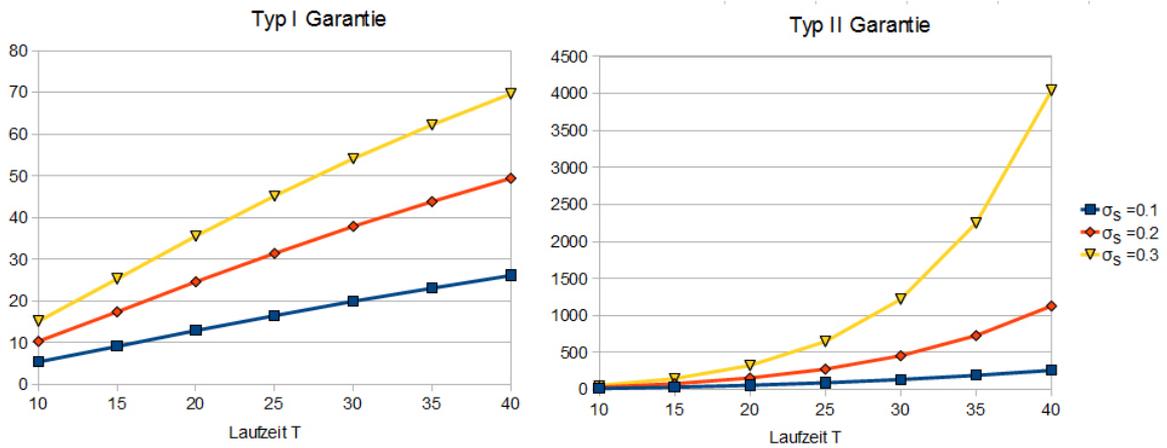


Abbildung 5.17: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für $\theta = 0.08$, verschiedene Laufzeiten T und drei unterschiedlich volatile Referenzportfolios ($\sigma_S = 0.1, 0.2, 0.3$).

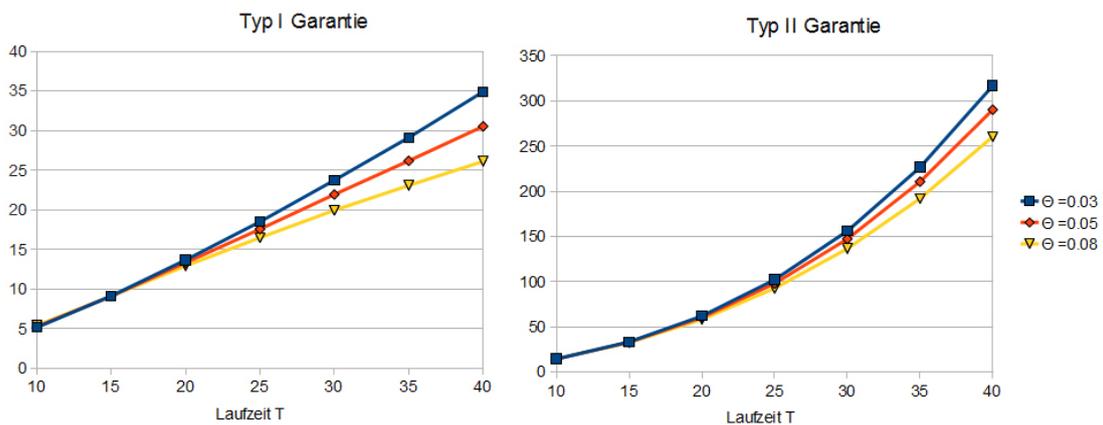


Abbildung 5.18: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für verschiedene Laufzeiten T und verschiedene $\theta = 0.03, 0.05, 0.08$,

Kapitel 6

Bewertung der Garantien in Modellen mit stochastischer Volatilität des Referenzfonds

6.1 Heston Modell mit konstanter Zinsstruktur

In diesem Abschnitt wird das einfachste Modell aus Kapitel 2 erweitert, indem anstatt der konstanten Volatilität σ_s eine stochastische Volatilität $(v_t)_{0 \leq t \leq T}$ aus dem Heston Modell (siehe Kapitel 4) verwendet wird, das heißt

$$dS_t = S_t(rdt + \sqrt{v_t}dZ_t) \quad (6.1)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_t \quad (6.2)$$

$$dZ_t dW_t = \tau dt, \quad (6.3)$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ und $(Z_t)_{t \geq 0}$ zwei korrelierte Brown'sche Bewegungen sind. Der garantierte Zins $(g_t)_{0 \leq t \leq T}$ wird konstant gleich g gewählt. Schätzer für die Garantiepreise $V_0(I)$ und $V_0(II)$ können aber über eine Monte Carlo Simulation gewonnen werden.

Es seien $V_{0,j}(I)$ bzw. $V_{0,j}(II)$ die Garantiewerte zum Zeitpunkt 0, welche im j -ten Simulationsschritt erzeugt wurde und

$$\hat{V}_0(I) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(I) \quad \text{bzw.} \quad \hat{V}_0(II) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(II)$$

die Monte Carlo Schätzer der fairen Preise zum Zeitpunkt 0, wobei

$$V_{0,j}(I) = e^{-rT} \sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^g - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \quad (6.4)$$

$$V_{0,j}(II) = e^{-rT} \sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^g, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right]. \quad (6.5)$$

Man benötigt daher für jede der N Simulationen Pfade von $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$. Wegen

$$R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \log(S_t) - \log(S_{t-1}) = X_t - X_{t-1} \quad (6.6)$$

kann $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$ mit dem Algorithmus aus Abschnitt 4 wie folgt approximiert werden:

- Initialisiere den Logarithmus der Volatilität und den Prozess des risikobehafteten Gutes:

$$z(0) = \log(v_0) \quad \text{und} \quad X(0) = \log(S_0)$$

- Wähle ein $\Delta = \frac{1}{N_\Delta}$, wobei N_Δ die Anzahl der Schritte innerhalb eines der betrachteten Jahre 1 bis T ist.
- Erzeuge für $j = 1, \dots, (N_\Delta T)$ iid Zufallszahlen $(Z_{\Delta j} - Z_{\Delta(j-1)}) \sim N(0, \Delta)$ und $Y_j \sim N(0, \Delta)$ und setze

$$(W_{\Delta j} - W_{\Delta(j-1)}) = \tau(Z_{\Delta j} - Z_{\Delta(j-1)}) + \sqrt{1 - \tau^2} Y_j$$

- Berechne damit für alle $j = 1, \dots, (N_\Delta T)$ die Prozesse $z_j = \log(v(\Delta j))$ und $X(\Delta j)$ gemäß

$$z_{\Delta j} = z_{\Delta(j-1)} + (e^{-z_{\Delta(j-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma_v^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma_v e^{-z_{\Delta(j-1)}/2}(W_{\Delta j} - W_{\Delta(j-1)})$$

$$v_{\Delta j} = \exp(z_{\Delta j})$$

$$X_{\Delta j} = X_{\Delta(j-1)} + \left(r - \frac{1}{2}v_{\Delta(j-1)}\right)\Delta + \Delta\sqrt{v_{\Delta(j-1)}}(Z_{\Delta j} - Z_{\Delta(j-1)})$$

Den Renditenprozess $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$ kann durch

$$R_t \approx X_t - X_{(t-1)} = X_{\Delta(t \cdot N_\Delta)} - X_{\Delta((t-1) \cdot N_\Delta)}$$

approximiert werden. Zur Wahl der Simulationsanzahl N und der Feinheit der Diskretisierung von $[0, T]$ betrachtet man die gleichen Grafiken wie in Abschnitt 5.2: Für fixe Parameter

$$\begin{array}{llll} \delta = 1 & k_n = 6 \cdot (1.02)^{n-1} & r = 0.03 & g = 0.03 \\ \rho = -0.2 & \theta = 0.01 & \kappa = 1 & \sigma_v = 0.01 \\ v_0 = 0.1 & S_0 = 1 & & \end{array}$$

werden die Schätzer für Garantiewerte und deren empirische Standardabweichungen für verschiedene N und N_Δ betrachtet. In Abbildung 6.1 sind oben die Schätzer für die Preise der Typ I Garantie und unten deren empirische Standardabweichung abgebildet. Die Abbildung 6.2 ist die entsprechende Grafik für die Typ II Garantie.

Man erkennt, dass die Wahl des N_Δ für die Schätzer der Garantieprie und deren empirische Standardabweichung kaum Einfluss hat. Ab einem $N = 80000$ haben die Schätzer der Typ I und Typ II Garantie ein stabiles Verhalten. Die empirische Standardabweichung wird für wachsendes N kleiner. Für die folgenden Berechnungen wurde daher immer $N_\Delta = 12$ und $N = 80000$ verwendet.

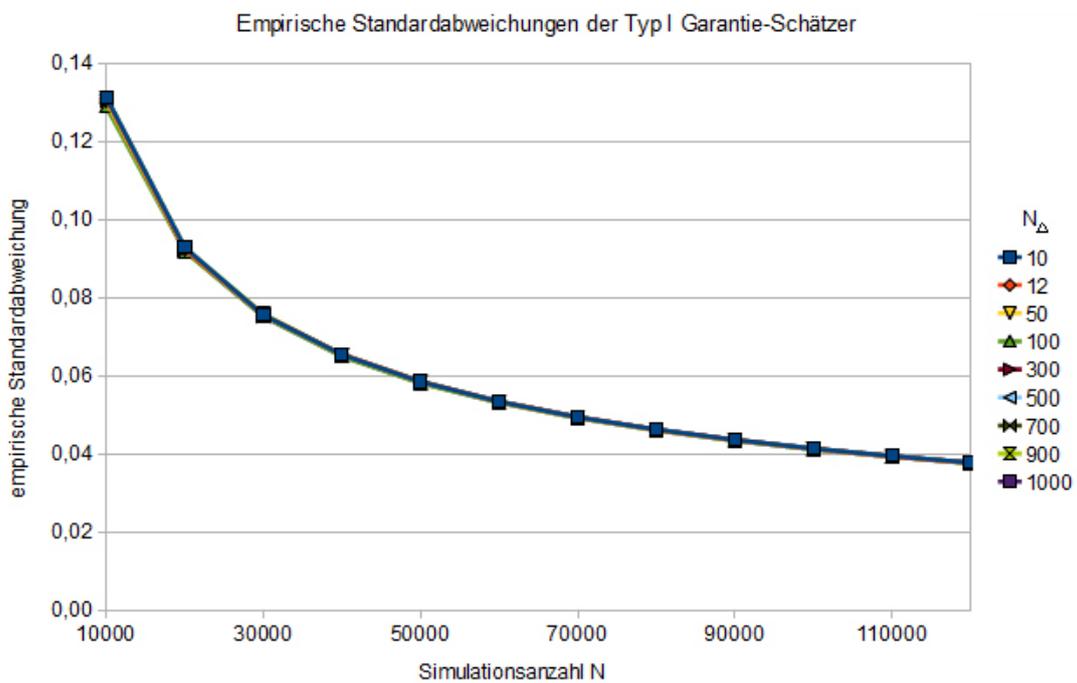
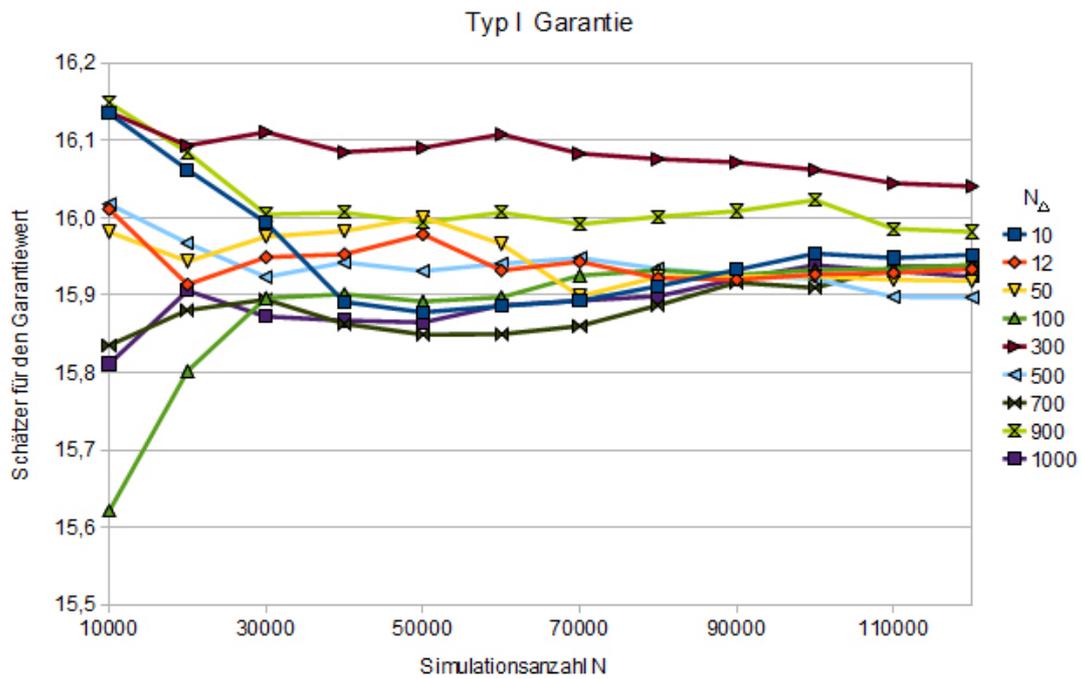


Abbildung 6.1: Schätzer für die Preise der Typ I Garantie und ihre empirische Standardabweichung für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

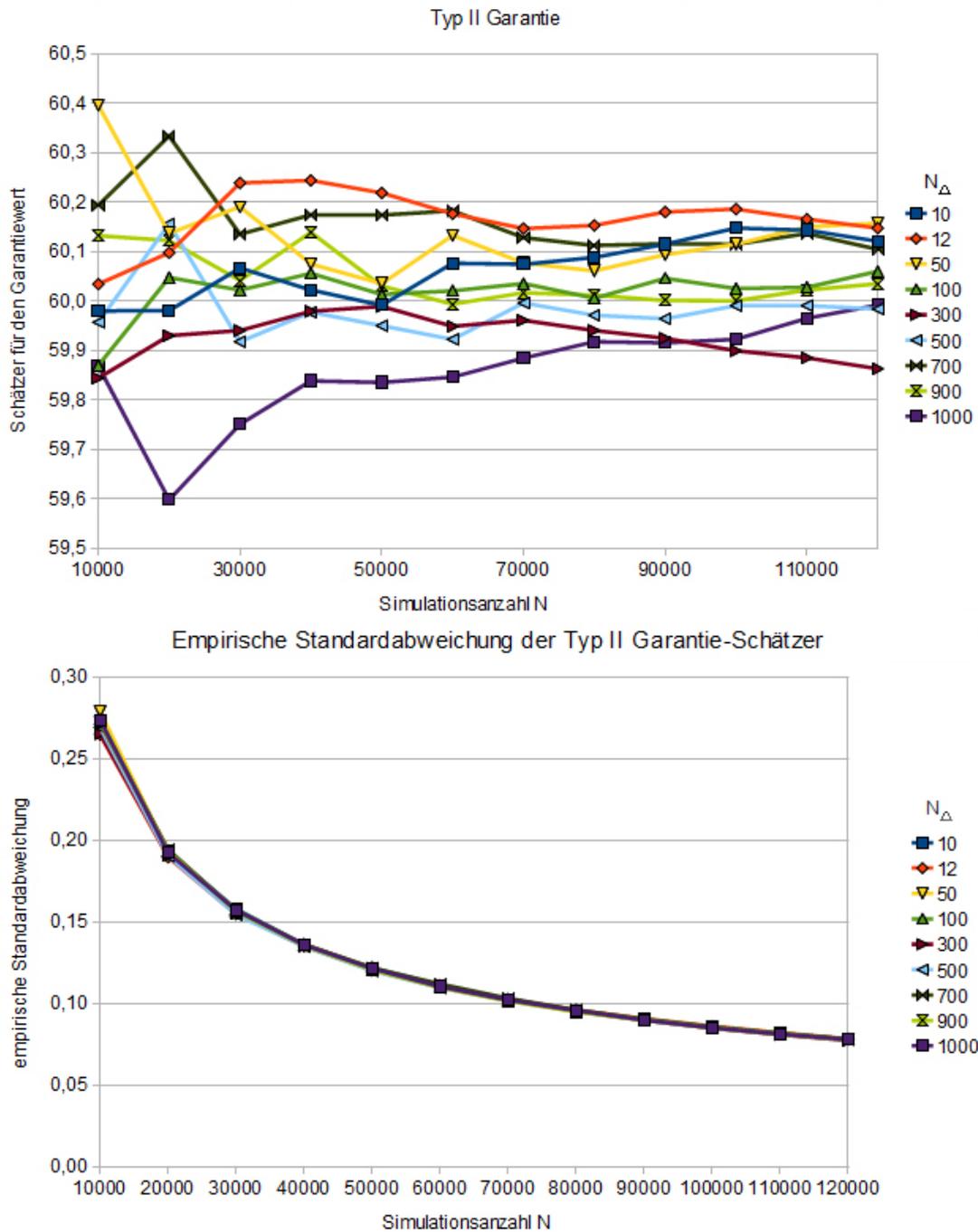


Abbildung 6.2: Schätzer für die Preise der Typ II Garantie und ihre empirische Standardabweichung für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

6.1.1 Diskussion der Ergebnisse

Zur Berechnung der folgenden Schätzer für die Garantiewerte wurden die Parameter wie folgt gewählt

$$\begin{array}{llll} T = 10 & \delta = 1 & k_n = 6 \cdot (1.02)^{n-1} & r = 0.03 \\ g = 0.03 & \rho = -0.2 & \theta = 0.1 & \kappa = 4 \\ \sigma_v = 0.1 & v_0 = 0.1 & S_0 = 1 & \end{array}$$

Abbildung 6.3 zeigt die Schätzer für die Garantiewerte für verschiedene κ . Man erkennt, dass der Einfluss von κ auf die Garantiewerte gering ist.

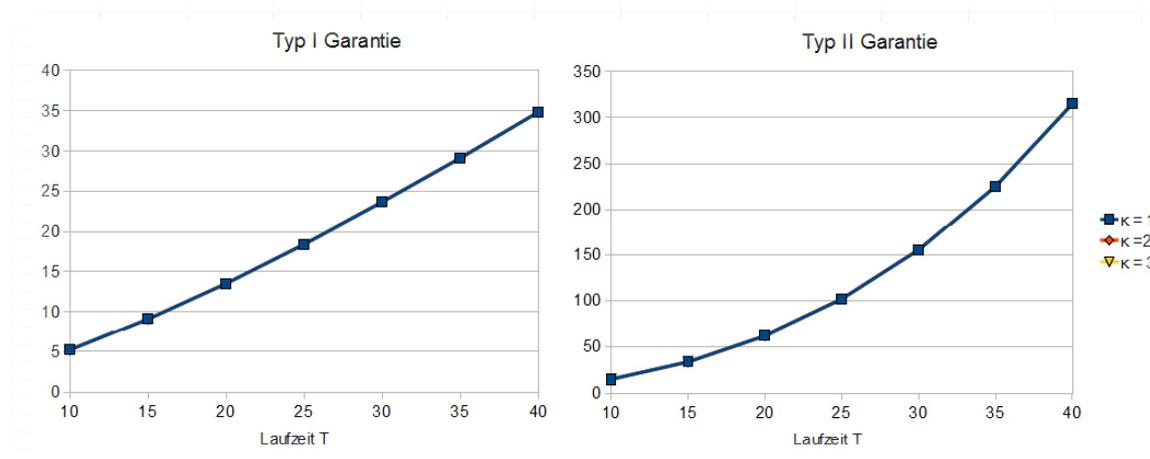


Abbildung 6.3: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für verschiedene Laufzeiten T und verschiedene $\kappa = 1, 2, 3$.

In Abbildung 6.4 wurden die Garantieschätzer für $\theta = 0.01, 0.04, 0.09$ abgebildet. Die Schätzer verändern sich sehr stark bei Variation von θ . Die Abbildung 6.5 zeigt die Sensitivität der

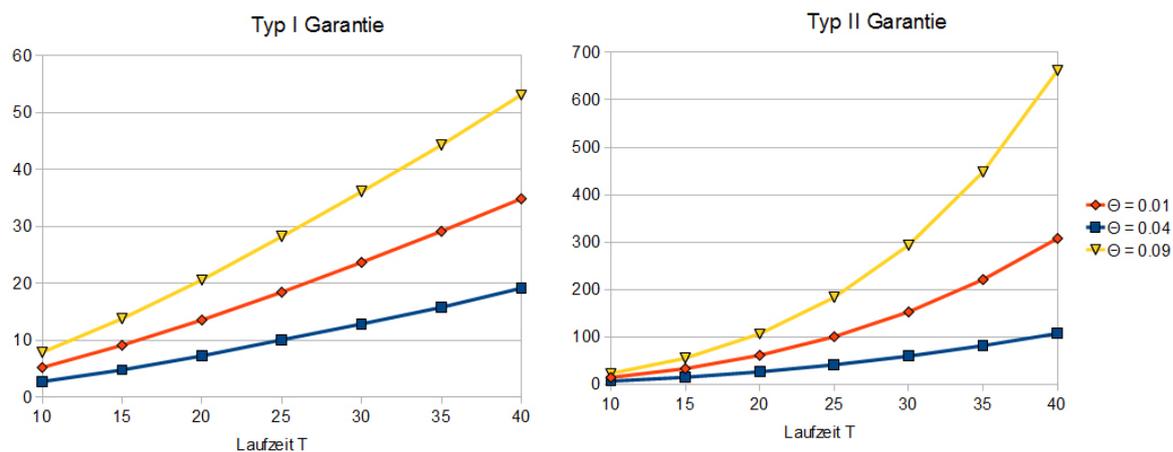


Abbildung 6.4: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für verschiedene Laufzeiten T und verschiedene $\theta = 0.01, 0.04, 0.09$.

Schätzer gegenüber σ_v . Die Schätzer wachsen mit σ_v . Die Kurven für $\sigma_v = 0.01, 0.05$ und 0.1

liegen noch dicht beieinander, doch für $\sigma_v = 0.2$ sind die Garantiepreise schon deutlich höher.

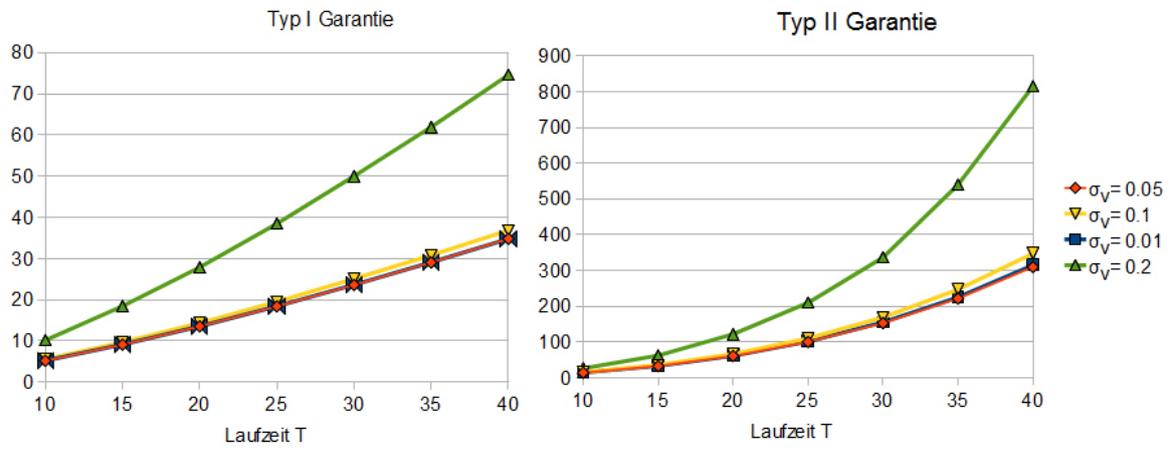


Abbildung 6.5: Schätzer für die Preise $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(I)$ für verschiedene Laufzeiten T und verschiedene $\sigma_v = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$.

6.2 Heston Modell mit stochastischer Zinsstruktur nach dem erweiterten Vasiček Modell

In diesem Abschnitt sei die Dynamik des Referenzportfolios nach dem Heston Modell durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r_t dt + \sqrt{v_t} dZ_t) \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^v \end{aligned} \quad (6.7)$$

festgelegt. Die Zinsstruktur wird durch das erweiterte Vasiček-Modell festgelegt, das heißt die forward rates und short rates den Gleichungen

$$\begin{aligned} f(t, s) &= f(0, s) + \frac{\sigma^2}{\lambda} \int_0^T e^{-\lambda(T-u)}(1 - e^{-\lambda(T-u)})du + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(T-u)} dW_u^r \\ r_t = f(t, t) &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} dW_v^r \end{aligned}$$

wobei Z_t, W_t^r und W_t^v paarweise korrelierte Brown'sche Bewegungen mit $dZ_t dW_t^v = \tau dt$, $dW_t^r dW_t^v = \epsilon dt$ und $dZ_t dW_t^r = \rho dt$ sind. Der garantierte Zins für die Typ I und Typ II Garantie wird wieder als δ -year spot rate festgelegt.

Da für dieses Modell keine geschlossenen Formeln für die Typ I und Typ II Garantie bekannt sind, werden Schätzer für die Garantiepreis $V_0(I)$ und $V_0(II)$ zum Zeitpunkt 0 über eine Monte Carlo Simulation gewonnen.

Es seien $V_{0,j}(I)$ bzw. $V_{0,j}(II)$ die Garantiewerte zum Zeitpunkt 0, welche im j -ten Simulationsschritt erzeugt wurden und

$$\hat{V}_0(I) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(I) \quad \text{bzw.} \quad \hat{V}_0(II) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_{0,j}(II) \quad (6.8)$$

die Monte Carlo Schätzer der fairen Preise zum Zeitpunkt 0. $V_{0,j}(I)$ und $V_{0,j}(II)$ sind Realisationen der Zufallsvariablen

$$V_0(I) = \exp \left\{ - \int_0^T r_t dt \right\} \left(\sum_{n=1}^T k_n \max \left(\prod_{t=n}^T e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)} - \prod_{t=n}^T e^{R_t}, 0 \right) \right) \quad (6.9)$$

$$V_0(II) = \exp \left\{ - \int_0^T r_t dt \right\} \left(\sum_{n=1}^T k_n \left[\prod_{t=n}^T \max(e^{\bar{R}(t-1, t-1+\delta)}, e^{R_t}) - \prod_{t=n}^T e^{R_t} \right] \right). \quad (6.10)$$

Wie in den vorangegangenen Modellen ist auch hier zu überlegen, wie $(R_t)_{1 \leq t \leq T}$ berechnet werden kann. Mit Gleichung (6.7) bekommt man

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t r_u du - \frac{1}{2} \int_0^t v_u du + \int_0^t \sqrt{v_u} dZ_u \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
R_t &= \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \log(S_t) - \log(S_{t-1}) \\
&= \int_{t-1}^t r_u du - \frac{1}{2} \int_{t-1}^t v_u du + \int_{t-1}^t \sqrt{v_u} dZ_u \\
&= \beta_t - \beta_{t-1} - \frac{1}{2} \int_{t-1}^t v_u du + \int_{t-1}^t \sqrt{v_u} dZ_u
\end{aligned} \tag{6.11}$$

wobei $\beta_t := \int_0^t r_u du$ der Diskontierungsprozess ist. Da für den Prozess $(v_t)_{1 \leq t \leq T}$ keine explizite Darstellung vorhanden ist, müssen Approximationsmethoden verwendet werden um $K_t := \int_{t-1}^t v_u du$ und $H_t := \int_{t-1}^t \sqrt{v_u} dZ_u$ für $1 \leq t \leq T$ zu erhalten.

Die als Wurzelfusionsprozess formulierte Volatilität $(v_t)_{1 \leq t \leq T}$ wird wie in Abschnitt 3.3 durch $(v'_t)_{1 \leq t \leq T}$ approximiert, das heißt

$$v_t \approx v'_t \tag{6.12}$$

$$z_{\Delta j} = z_{\Delta(j-1)} + (e^{-z_{\Delta(j-1)}}(\kappa\theta - \frac{\sigma_v^2}{2}) - \kappa)\Delta + \sigma_v e^{-z_{\Delta(j-1)}/2} \underbrace{\sqrt{\Delta} (W_{\Delta j}^v - W_{\Delta(j-1)}^v)}_{= \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dW_t^v} \tag{6.13}$$

$$v'_{\Delta j} = \exp(z_{\Delta j}) \tag{6.14}$$

Damit kann $K_t := \int_{t-1}^t v_u du$ mit der Trapezregel angenähert werden,

$$\begin{aligned}
K_t &= \int_{t-1}^t v_u du = \int_{t-1}^{(t-1)+\Delta} v_u du + \int_{(t-1)+\Delta}^{(t-1)+2\Delta} v_u du + \dots + \int_{t-\Delta}^t v_u du \\
&\approx \Delta \left(\frac{v'_{t-1} + v'_t}{2} \right) + \Delta \sum_{i=1}^{N_{\Delta}-1} v'_{(t-1)+i\Delta}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Weiters wird H_t durch

$$H'_t := \sum_{j=1}^{N_{\Delta}} \sqrt{v'_{t-1+\Delta(j-1)}} \int_{t-1+\Delta(j-1)}^{t-1+\Delta j} dZ_u \tag{6.16}$$

approximiert. Die Gleichung (5.41) liefert

$$\bar{R}(t-1, t-1+\delta) = g_1(t) + \frac{1}{\delta\lambda} (1 - e^{-\lambda\delta}) \left(r_{t-1} - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(t-1)})^2 \right).$$

Es bleibt also der Prozess $(r_{\Delta j}, \beta_{\Delta j}, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dW_t^v, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dZ_t)$ zu simulieren um sich damit über die obigen Formeln (6.8) bis (6.16) die Schätzer für die fairen Preise berechnen zu können. Gegeben $\mathcal{F}_{\Delta(j-1)}$ ist $(r_{\Delta j}, \beta_{\Delta j}, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dW_t^v, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dZ_t)$ ein vierdimensionaler Gauss'scher Zufallsvektor, das heißt die bedingte Verteilung des Vektors ist eine mehrdimensionale Normalverteilung

$$(r_{\Delta j}, \beta_{\Delta j}, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dW_t^v, \int_{\Delta(j-1)}^{\Delta j} dZ_t) \sim N(\mu(\Delta j), \Sigma(\Delta j)),$$

wobei

$$\mu(j) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{j-\Delta}[r_j] \\ \mathbb{E}_{j-\Delta}[\beta_j] \\ \mathbb{E}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v] \\ \mathbb{E}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dZ_t] \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(j) = \begin{pmatrix} \text{Var}_{j-\Delta}[r_j] & \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \beta_j] & \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v] & \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] \\ \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \beta_j] & \text{Var}_{j-\Delta}[\beta_j] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] \\ \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v] & \text{Var}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] \\ \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] & \text{Cov}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v, \int_{j-\Delta}^j dZ_t] & \text{Var}_{j-\Delta}[\int_{j-\Delta}^j dZ_t] \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten $\mathbb{E}_{j-\Delta}[r_j]$, $\mathbb{E}_{j-\Delta}[\beta_j]$, $\text{Var}_{j-\Delta}[r_j]$, $\text{Var}_{j-\Delta}[\beta_j]$ und $\text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \beta_j]$ wurden schon für das Modell in Abschnitt 5.1 berechnet, in dem ebenfalls die short rate über das Vasiček Modell formuliert wurde, also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{j-\Delta}[r_j] &= r_s e^{-\lambda\Delta} + f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 - e^{-\lambda\Delta} \left(f_0 + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(j-\Delta)})^2 \right) \\ \mathbb{E}_{j-\Delta}[\beta_j] &= \delta_{j-\Delta} + \left(r_{j-\Delta} - f_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(j-\Delta)})^2 \right) \left(\frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \right) \\ &\quad + \left(f_0 - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) \Delta + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} \int_{j-\Delta}^j (1 - e^{-\lambda u})^2 du \\ \text{Var}_{j-\Delta}[r_j] &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda\Delta}) \\ \text{Var}_{j-\Delta}[\beta_j] &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \Delta - \frac{2\sigma^2}{\lambda^3} (1 - e^{-\lambda\Delta}) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} (1 - e^{-2\lambda\Delta}) \\ \text{Cov}_{j-\Delta}[r_j, \beta_j] &= \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda\Delta}) - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda\Delta}) \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{j-\Delta} \left[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] &= \mathbb{E}_{j-\Delta} \left[\int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] = 0 \\ \text{Var}_{j-\Delta} \left[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] &= \text{Var}_{j-\Delta} \left[\int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] = \Delta \end{aligned}$$

und mit (5.43) und (5.44) folgt

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{j-\Delta} \left[r_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] &= \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\sigma e^{-\lambda j} \int_0^j e^{\lambda t} dW_t^r, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] \\ &= \sigma e^{-\lambda j} \int_{j-\Delta}^j e^{\lambda t} dW_t^r dW_t^v = \sigma \epsilon e^{-\lambda j} \int_{j-\Delta}^j e^{\lambda t} dt = \frac{\sigma \epsilon}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta}) \\ \text{Cov}_{j-\Delta} \left[r_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] &= \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\sigma e^{-\lambda j} \int_0^j e^{\lambda t} dW_t^r, \int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] \\ &= \sigma e^{-\lambda j} \int_{j-\Delta}^j e^{\lambda t} dW_t^r dZ_t = \frac{\sigma \rho}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{j-\Delta} \left[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] &= \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_j^r - \frac{1}{\lambda} r_j, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] \\ &= \frac{\sigma}{\lambda} \left(\text{Cov}_{j-\Delta} \left[\int_0^j dW_t^r, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] - \text{Cov}_{j-\Delta} \left[e^{-\lambda j} \int_0^j e^{\lambda t} dW_t^r, \int_{j-\Delta}^j dW_t^v \right] \right) \\ &= \frac{\sigma}{\lambda} \epsilon \left(\int_{j-\Delta}^j dt - e^{-\lambda j} \left(\int_{j-\Delta}^j e^{\lambda t} dt \right) \right) = \frac{\sigma}{\lambda} \epsilon \left(\Delta - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta}) \right), \\ \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\beta_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] &= \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\frac{\sigma}{\lambda} W_j^r - \frac{1}{\lambda} r_j, \int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] = \frac{\sigma}{\lambda} \rho \left(\Delta - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta}) \right), \\ \text{Cov}_{j-\Delta} \left[\int_{j-\Delta}^j dW_t^v, \int_{j-\Delta}^j dZ_t \right] &= \tau \Delta.\end{aligned}$$

Es ist noch zu diskutieren, wie die Simulationsanzahl N und die Diskretisierung N_Δ für die Berechnung der Schätzer gewählt werden soll.

Dazu betrachte man die Abbildungen 6.6 und 6.7. Die Abbildung 6.6 zeigt oben für verschiedene N_Δ die Veränderung der Schätzer $\hat{V}_0(I)$ für immer größer werdende Simulationsanzahl N . Darunter sind die empirischen Standardabweichungen für diese Schätzer aufgetragen. Wie bei den bereits besprochenen Modellen zeigt sich hier, dass die Wahl von N_Δ die Schätzer nicht stark beeinflusst - die Kurven für die verschiedenen N_Δ liegen dicht beieinander. Die Standardabweichungen der Schätzer werden für wachsendes N kleiner. Die Abbildung 6.7 zeigt die entsprechenden Kurven für die Typ II Garantie. Ab $N = 80000$ bleiben die Schätzer für die Typ I und Typ II Garantie fast unverändert, die Standardabweichung reduziert sich für höhere N nicht mehr wesentlich. Für die weiteren Berechnungen in diesem Modell werden deshalb immer $N = 80000$ und $N_\Delta = 12$ verwendet.

Zur Berechnung wurden die Parameter wie folgt gewählt

$$\begin{array}{llll} T = 10 & \delta = 1 & k_n = 6 \cdot (1.02)^{n-1} & S_0 = 1 \\ \tau = -0.2 & \rho = -0.2 & \epsilon = 0.2 & v_0 = 0.01 \\ \theta = 0.01 & \kappa = 1 & \sigma_v = 0.01 & \\ \sigma = 0.01 & \lambda = 0.1 & f_0 = 0.03 & \end{array} .$$

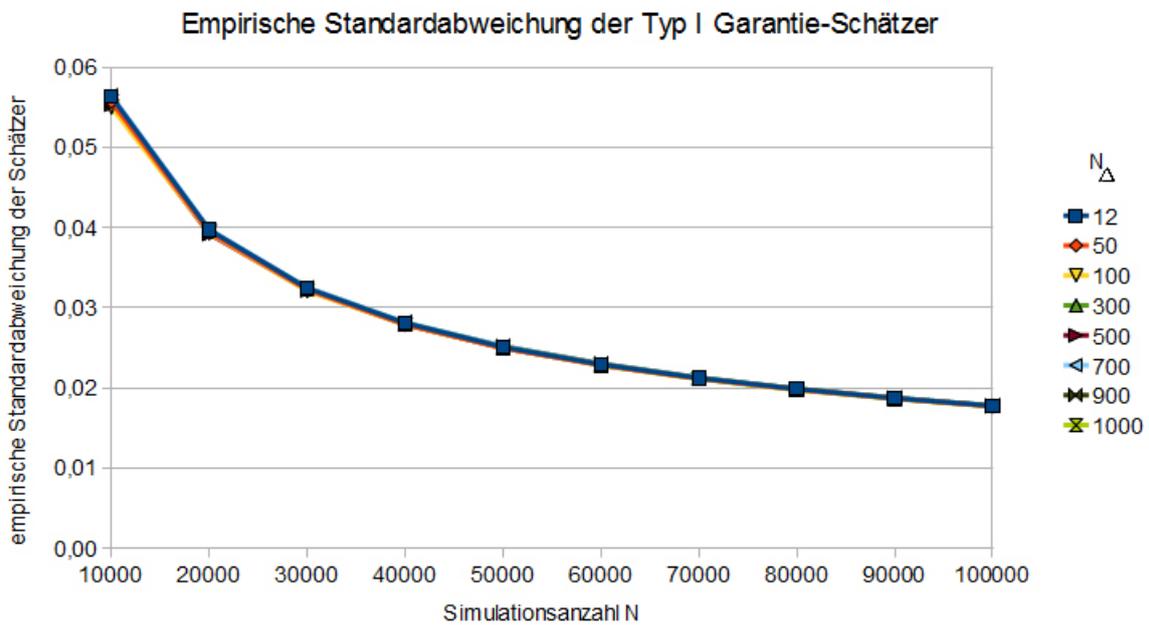
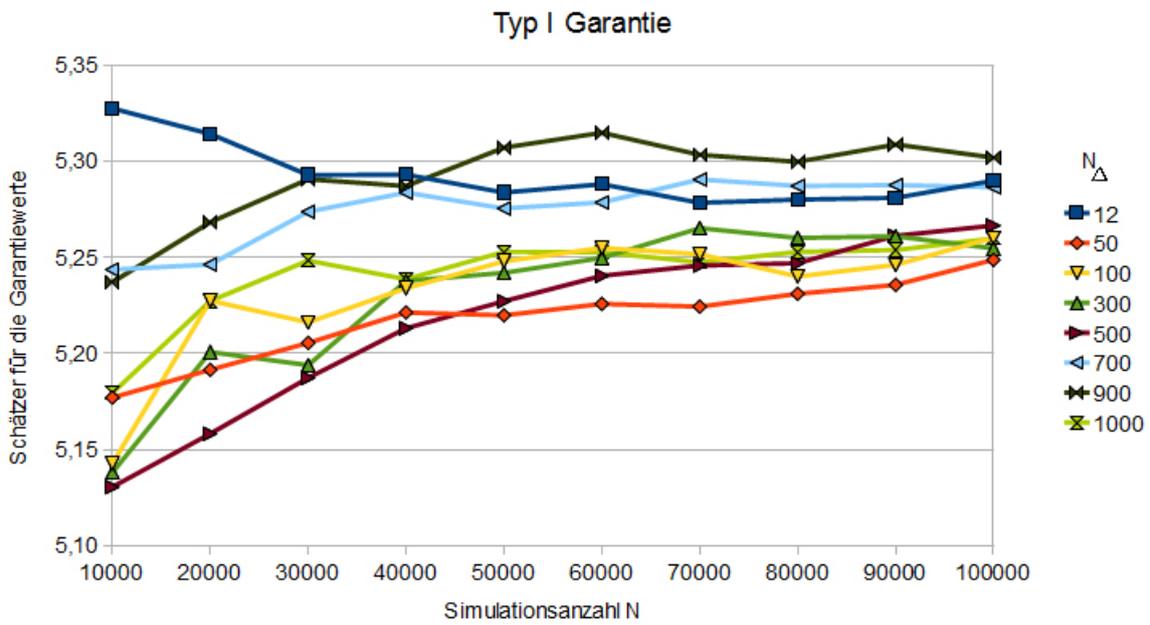


Abbildung 6.6: Schätzer für die Preise der Typ I Garantie und ihre empirische Standardabweichung für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

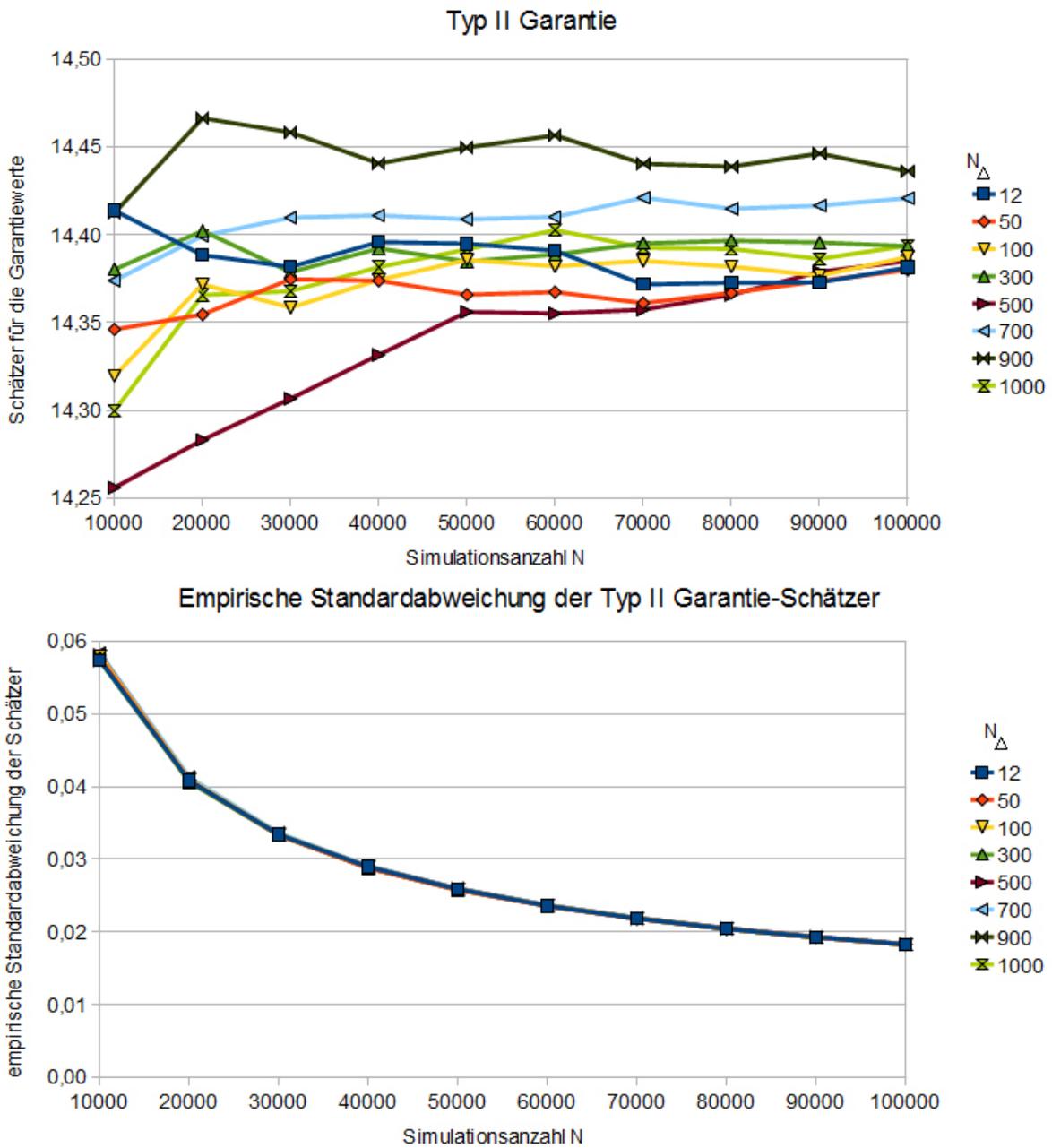


Abbildung 6.7: Schätzer für die Preise der Typ II Garantie und ihre empirische Standardabweichung für verschiedene Diskretisierungen und Simulationsanzahlen

6.2.1 Diskussion der Ergebnisse

Im Folgenden wurden die Schätzer $\hat{V}_0(I)$ und $\hat{V}_0(II)$ mit den Parameter

$$\begin{array}{llllll} \delta = 1 & k_n = 6 \cdot (1.02)^{n-1} & S_0 = 1 & f_0 = 0.03 & v_0 = 0.01 \\ \tau = -0.2 & \rho = -0.2 & \epsilon = 0.2 & \lambda = 0.1 & \\ \theta = 0.01 & \kappa = 1 & \sigma_v = 0.01 & \sigma = 0.01 & \end{array}$$

berechnet und deren Verhalten bei Variation eines Parameters aufgezeichnet.

In Abbildung 7.1 wurden die Schätzer für die Garantiewerte für verschieden Laufzeiten T und verschiedene θ berechnet. Die Schätzer unterscheiden sich stark für die verschiedenen θ .

Abbildung 6.9 zeigt die Schätzer für drei unterschiedliche σ_v (Volatilität der Volatilität). Sowohl die Typ I als auch die Typ II Garantiewerte verändern sich mit σ_v .

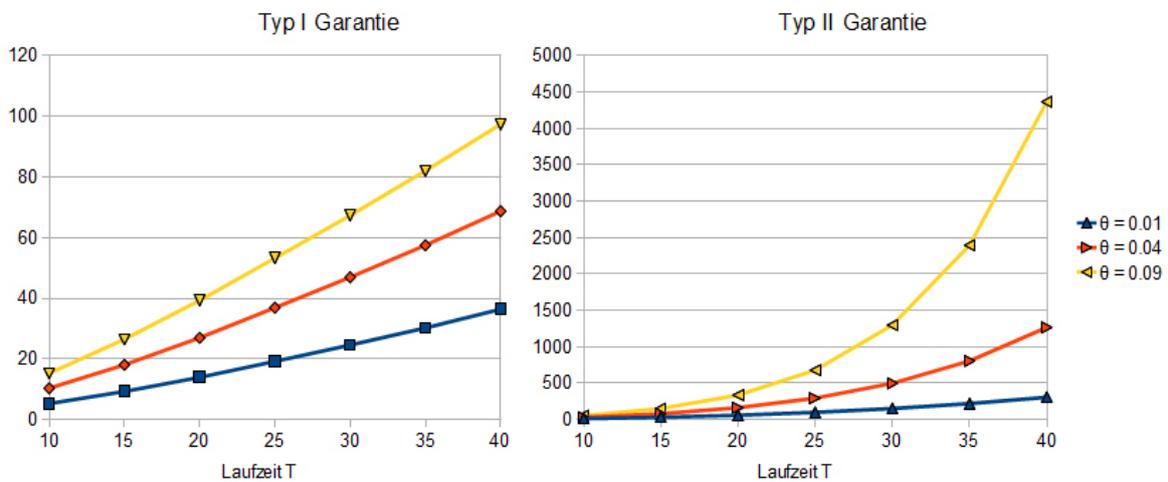


Abbildung 6.8: Schätzer für die Garantiewerte für verschiedene Laufzeiten T und versch. θ

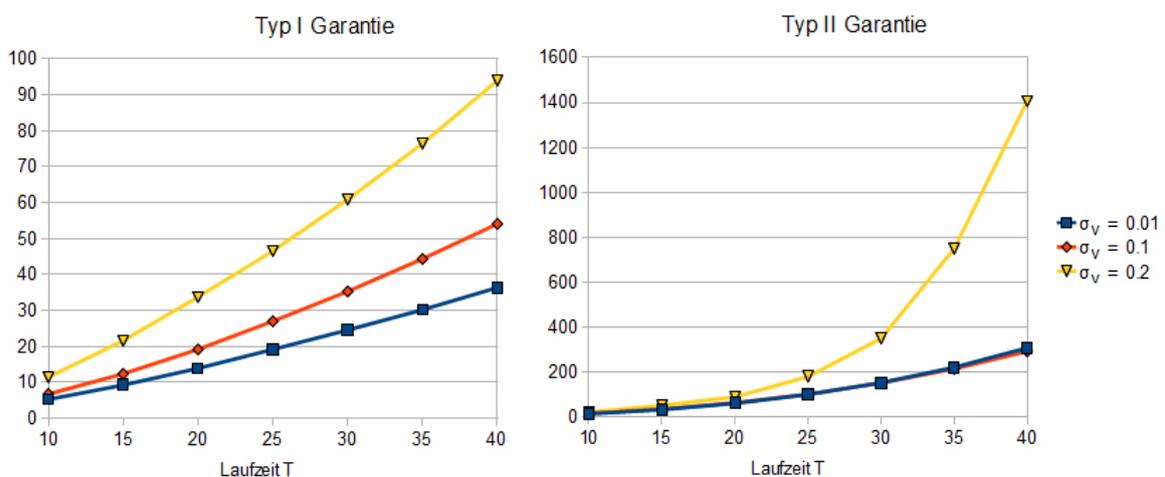


Abbildung 6.9: Schätzer für die Garantiewerte für verschiedene Laufzeiten T und versch. σ_v

Kapitel 7

Vergleich der Modelle und Fazit

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den einzelnen Modellen miteinander verglichen.

Für die Modelle mit konstanter Volatilität σ_s des Referenzportfolios wurde in den entsprechenden Kapiteln analysiert, wie sich die Garantieprie bei Variation von σ_s verhalten. Für die beiden Modelle mit einer stochastischen Volatilität wurde gezeigt wie sich die Garantieprie bei Variation von θ verhalten. θ ist der mean der Volatilität des Referenzportfolios in den Modellen mit stochastischer Volatilität. Daher ist in diesen Modellen die Veränderung der Garantiewerte mit θ vergleichbar stark, wie die Veränderung der Garantiewerte mit σ_s in den Modellen mit einer konstanten Volatilität σ_s (vergleiche dazu die Abbildungen 5.1, 5.18, 6.4 und 7.1). Zwischen den Garantiewerten aus den verschiedenen Modellen besteht kein wesentlicher Unterschied. Dabei wurde $\sigma_s^2 = \theta$ gewählt um ähnlich große Volatilitäten bei der Berechnung zu verwenden. Es scheint, als wäre es für die Garantiewerte unwichtig, ob die Volatilität des Referenzportfolios konstant oder stochastisch modelliert wird. Betrachtet man jedoch die Abbildung 6.9, so erkennt man, dass sich die Garantiewerte für $\sigma_v = 0.2$ stark von denen für $\sigma_v = 0.01$ unterscheiden. Unter der Annahme einer stark schwankenden Volatilität sollte daher ein Modell mit einer stochastischen Volatilität gewählt werden. Unter der Annahme einer nahezu konstanten Volatilität scheint eine Modellierung über eine konstante Volatilität ausreichend gut zu sein. Die Bewertung der Garantien in den stochastischen Modellen nimmt wesentlich mehr Zeit in Anspruch: Die Monte Carlo Simulation einer Kurve aus Abbildung 7.1 dauert ca. 5 Stunden, die Berechnung der Werte für eine entsprechende Kurve aus dem Black Scholes Modell über die geschlossene Formel ist ohne Wartezeit möglich.

Betrachtet man Abbildung 7.2, in welcher die Garantiewerte aus dem Modell mit stochastischen Zinsen laut dem Vasiček Modell und einer konstanten Volatilität σ_s (Abschnitt 5.1), so erkennt man, dass auch hier die Preise wieder sehr ähnlich zu denen aus den anderen Modellen sind. Die Veränderung der Garantiewerte mit σ , der Volatilität der Zinsstruktur ist aber gegeben (vergleiche Abbildung 5.3 auf Seite 40), weswegen die Einführung eines stochastischen Zinses sinnvoll erscheint.

In der letzten Grafik sind die Garantiewerte aus verschiedenen Modellen aufgetragen. Die Parameter sind dabei so gewählt, wie in den jeweiligen Kapiteln angegeben.

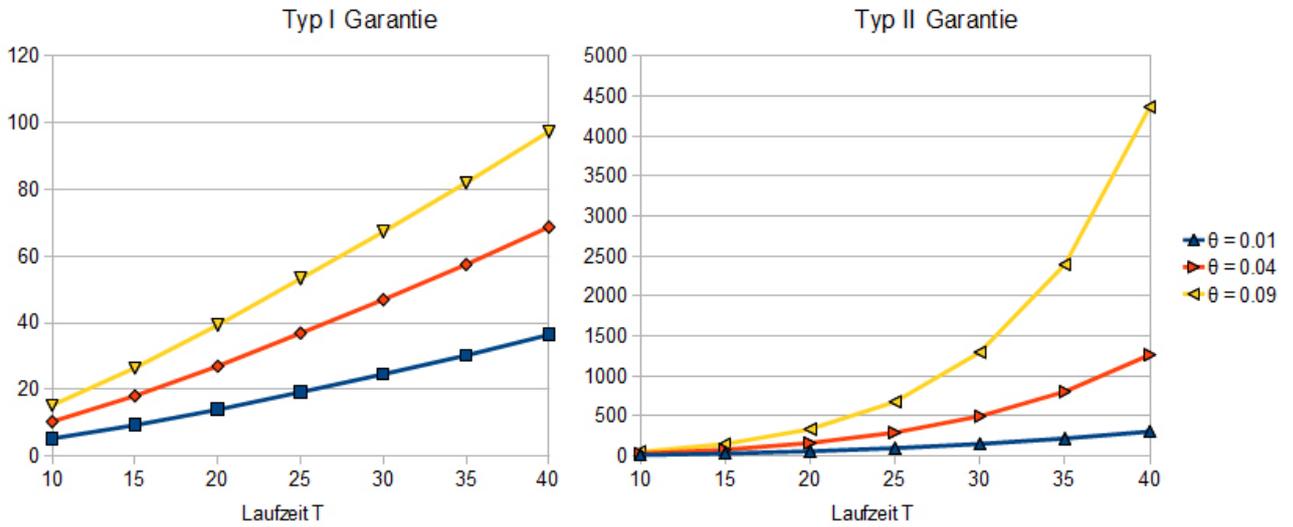


Abbildung 7.1: Schätzer für die Garantiewerte für verschiedene Laufzeiten T und versch. θ

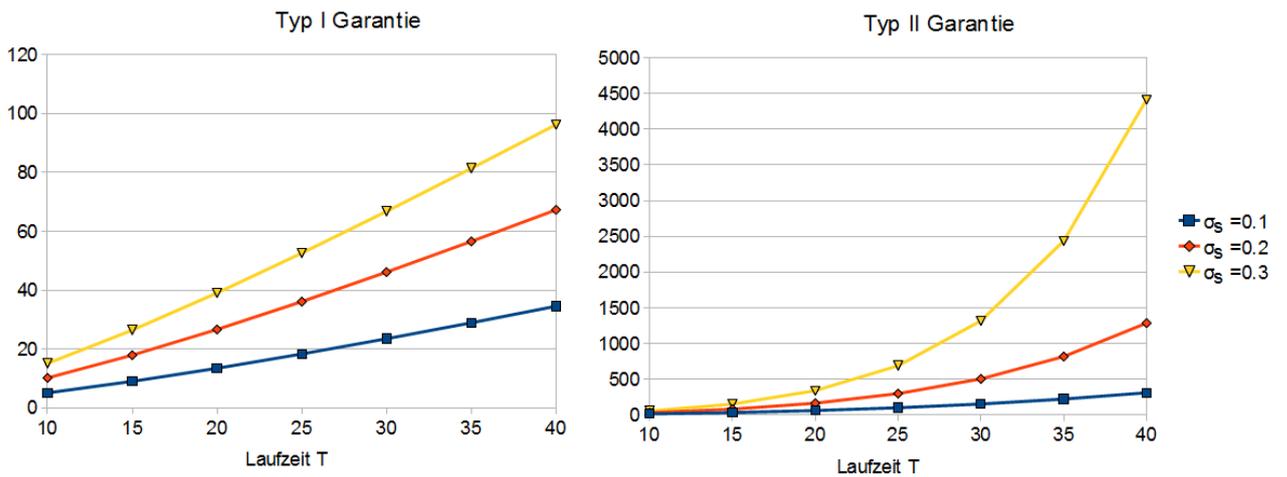


Abbildung 7.2: Garantiewerte für konstante Volatilität σ_s und stochastische Zinsen laut dem Vasicek Modell

Kapitel 8

Programm-Codes

Im Folgenden sind die R-Programmcodes für das Modell aus Abschnitt 2 mit konstanten Zinsen und konstanter Volatilität der Referenzportfolios sowie für die Modelle aus Abschnitt 5.1 (Vasiček Modell für die Zinsstruktur), Abschnitt 5.2 (Cox Ingersoll Ros Modell für die Zinsstruktur), Abschnitt 6.1 (Heston Modell für die stochastische Volatilität) und Abschnitt 6.2 (Vasiček Modell für die Zinsstruktur und Heston Modell für die stochastische Volatilität) abgedruckt.

8.1 Kalkulationsprogramm für das erste einführende Modell aus Kapitel 2

```
1 ## PARAMETER
2
3 Time <- 10      # Vertragslaufzeit T in Jahren
4 Y_0 <- 6        # Einzahlung zu Vertragsbeginn (Zeitpunkt 0)
5 i_Y <- 0.02     # jährliche Wachstumsrate des Gehalts
6 sigma_s <- 0.1 # Volatilität des Investmentportfolios
7 r <- -0.03     # garantierte Zins, konstant
8
9 k <-sapply(1:Time, function(n){con*Y*((1+i_Y)^(n-1))})
10
11 mu_T <-sapply(1:Time, function(n){(r-sigma_s^2/2)*(Time - n+1)})
12 sigma_T <-sapply(1:Time, function(n){(sigma_s)*sqrt(Time - n+1)})
13 d <-sapply(1:Time, function(n){sigma_s*sqrt(Time -n+1)/2})
14
15 pi_0_I <-sapply(1:Time, function(n){exp(-r*(n-1))*pnorm(d[n])
16 - exp(-r*Time + mu_T[n] + sigma_T[n]^2/2)*pnorm(d[n]-sigma_T[n])})
17 pi_0_II <-sapply(1:Time, function(n){exp(-r*(n-1))*((2*pnorm(sigma_s/2))^(Time-n+1)-1)})
18
19 V_0_I <-k%%pi_0_I
20 V_0_II<-k%%pi_0_II
```

8.2 Simulationsprogramm für Modell aus Kapitel 5.1

```
22 ## PARAMETER
23
24 delta <- 1     # delta der Delta-year-spot rate
25 Time <- 10    # Vertragslaufzeit T in Jahren
26 sigma_s <- 0.1 # Volatilität des Investmentportfolios
27 sigma <- 0.01 # Volatilität der Zinsstruktur
28 lambda <- 0.1 #
29 rho <- -0.2   # Korrelation der BB Z_t im Portfolio und W_t aus der Zinsstruktur
```

```

30 con      <- 0.06  # für Pension zurückgelegter Gehaltsanteil c
31 Y        <- 100  # Jahresgehalt zum Zeitpunkt 0
32 i_Y      <- 0.02  # jährliche Wachstumsrate des Gehalts
33 f_init   <- 0.03  # f_0, Startwert der forward rate
34 SEED     <- 294  # Seed für die Simulation
35 ANZAHL   <-50000 # N, Anzahl der Simulationsdurchläufe
36
37 set.seed(SEED)
38
39 # Vektoren, in die die Werte der Zinsgarantie für jeden Simulationsdurchlauf
40 # von 1 bis ANZAHL gespeichert werden, werden angelegt
41 Typ1<-c(1:ANZAHL)
42 Typ2<-c(1:ANZAHL)
43
44 # mu_r(t) ist der bedingte Erwartungswert von r_t gegeben r_(t-1)
45 # mu_Delta(t) ist der bedingte EW von Delta_t gegeben Delta_(t-1), usw.
46
47 mu_r      <-function(b)
48   { exp(-lambda)*r[b-1] + f_init + (sigma^2)/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*b))^2
49   - exp(-lambda)*(f_init + (sigma^2)/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*(b-1)))^2)}
50 mu_Delta  <-function(b)
51   { Delta[b-1] - 0.5*sigma_s^2 + 1/lambda*(1-exp(-lambda))*(r[b-1] - f_init
52   - sigma^2/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*(b-1)))^2) + f_init
53   + sigma^2/(2*lambda^2)*(1 + 1/lambda*(2*exp(-lambda*b) - 2*exp(-lambda*(b-1))
54   - 0.5*exp(-2*lambda*b) + 0.5*exp(-2*lambda*(b-1))))}
55 mu_BBeta  <-function(b)
56   { BBeta[b-1] + 1/lambda*(1-exp(-lambda))*(r[b-1] - f_init
57   - sigma^2/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*(b-1)))^2) + f_init
58   + sigma^2/(2*lambda^2)*(1 + 1/lambda*(2*exp(-lambda*b) - 2*exp(-lambda*(b-1))
59   - 0.5*exp(-2*lambda*b) + 0.5*exp(-2*lambda*(b-1))))}
60
61 # nun wird (COV)^(1/2) berechnet
62 # dazu wird zuerst die Varianz/Kovarianzmatrix COV für alle t aufgestellt
63 # und daraus dann via der Cholesky Zerlegung die Matrix L berechnet
64
65 # die Einträge der Varianz/Kovarianz Matrix von (r_t, delta_t, beta_t) gegeben
66 # (r_(t-1), delta_(t-1), beta_(t-1)) werden berechnet
67
68 Var_r_t    <- {sigma*sigma/(2*lambda)*(1-exp(-2*lambda))}
69 Var_Delta_t <- {((sigma/lambda)^2 + 2*sigma*sigma_s*rho/lambda + sigma_s^2) +
70   sigma^2/(2*lambda^3) *(1-exp(-2*lambda)) -
71   2*sigma/(lambda^2)*(sigma_s*rho + sigma/lambda)*(1-exp(-lambda))}
72 Cov_r_Delta <- {sigma/lambda*(sigma_s*rho + sigma/lambda)*(1-exp(-lambda))
73   -(sigma^2)/(2*lambda^2) *(1-exp(-2*lambda))}
74
75 Var_BBeta_t <- {(sigma/lambda)^2*(1 - 2/lambda*(1-exp(-lambda))
76   + 1/(2*lambda)*(1-exp(-2*lambda)))}
77 Cov_Delta_BBeta <- {Var_BBeta_t + sigma_s*rho*sigma/lambda*(1 - (1-exp(-lambda))/lambda)}
78 Cov_r_BBeta <- {(sigma/lambda)^2 *(1-exp(-lambda)) - Var_r_t/lambda}
79
80
81 # die Varianz/Kovarianzmatrix COV wird aufgestellt
82 # davon die Choleskyszerlegung COV = R'R
83 ## WICHTIG: R berechnet die Cholesky Zerlegung von COV in COV = R'R, für die Simulation
84 ## wird aber eine Zerlegung in LL' benötigt.
85 ## Daher wird die transponierte Matrix aus der Choleskyzerlegung gespeichert
86
87 COV<- matrix( c(Var_r_t,      Cov_r_Delta,      Cov_r_BBeta,
88   Cov_r_Delta, Var_Delta_t,      Cov_Delta_BBeta,
89   Cov_r_BBeta,  Cov_Delta_BBeta, Var_BBeta_t      ),3,3)
90 L<-t(chol(COV))
91
92 # da die Berechnung von mu_r(1) bzw. mu_Delta(1) die Werte r[0] bzw. Delta[0]
93 # erfordern, diese aber in R nicht indiziert werden können, werden sie einfach
94 # außerhalb der for-Schleife berechnet. Gleiches gilt für BBeta0.
95

```

```

96 r0      <- f_init      # entspricht r[0]
97 Delta0 <- 0           # Delta[0]
98 BBeta0 <- 0           # BBeta[0]
99
100 # mu_r[1], mu_Delta[1] und mu_Beta[1]
101
102 mu_r_1   <- exp(-lambda)*r0 + f_init + (sigma^2)/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda))^2
103          - exp(-lambda)*(f_init)
104 mu_Delta_1 <- Delta0 - 0.5*sigma_s^2 + 1/lambda*(1-exp(-lambda))*(r0 - f_init) + f_init
105          + sigma^2/(2*lambda^2)*(1 + 1/lambda*(2*exp(-lambda) - 2
106          - 0.5*exp(-2*lambda) + 0.5))
107 mu_BBeta_1 <- BBeta0 + 1/lambda*(1-exp(-lambda))*(r0 - f_init) + f_init
108          + sigma^2/(2*lambda^2)*(1 + 1/lambda*(2*exp(-lambda) - 2
109          - 0.5*exp(-2*lambda) + 0.5))
110
111 # für ANZAHL Durchläufe wird nun die 3-dim NV simuliert und aus den sich daraus
112 # ergebenden R und Rquer werden die Werte der Typ I bzw. Typ II Garantie berechnet
113 # system.time stoppt die Rechenzeit mit
114
115 ZEIT<-system.time(
116
117 for(z in 1:ANZAHL){
118
119 # will X_t = (r_t, delta_t, beta_t) als 3-dim NV simulieren
120 # also X_t = mu_t + L*Z_t, wobei L = CCOV = t(chol(COV))
121 # generiere dreimal "Time" Stück normalverteilte Zufallsvariablen
122
123 Z1<-c(1:Time); Z2<-c(1:Time); Z3<-c(1:Time)
124 Z1<-rnorm(Time); Z2<-rnorm(Time); Z3<-rnorm(Time)
125
126 r      <- c(1:Time)
127 Delta <- c(1:Time)
128 BBeta <- c(1:Time)
129
130 # und damit werden die drei Prozesse simuliert
131
132 r[1]   <- mu_r_1      + L[1,1]*Z1[1]
133 Delta[1] <- mu_Delta_1 + L[2,1]*Z1[1] + L[2,2]*Z2[1]
134 BBeta[1] <- mu_BBeta_1 + L[3,1]*Z1[1] + L[3,2]*Z2[1] + L[3,3]*Z3[1]
135
136 for(i in 2:Time)
137 {
138   r[i]      <- mu_r(i)      + CCOV[1,1]*Z1[i]
139   Delta[i]  <- mu_Delta(i) + CCOV[2,1]*Z1[i] + CCOV[2,2]*Z2[i]
140   BBeta[i]  <- mu_BBeta(i) + CCOV[3,1]*Z1[i] + CCOV[3,2]*Z2[i] + CCOV[3,3]*Z3[i]
141 }
142
143 # aus den r[i] wird nun das Rquer_t berechnet (Rquer[t] = Rquer(t-1, t-1+delta))
144 # aus den Delta[i] wird das R_t berechnet (R[t] = R_t)
145
146 R<-c(1:Time)
147 R<-c(Delta[1] - Delta0, diff(Delta))
148
149 #Rquer(0,1) (dh t=1) wird extra berechnet
150 Rquer1 <- 1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*r0 + f_init
151          - 1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*(f_init)
152
153 fRquer <- function(i)
154 {1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*r[i-1] + f_init -
155  1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*(f_init
156  + (sigma^2/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*(i-1)))^2)
157  + (sigma^2/(lambda^3*delta)*((exp(lambda*(i-1))-1)*(exp(-lambda*(i-1))
158  -exp(-lambda*(i-1+delta))) - 0.25*(exp(2*lambda*(i-1))-1)*(exp(-2*lambda*(i-1))
159  -exp(-2*lambda*(i-1+delta))))))}
160
161 Rquer <-c(Rquer1, sapply(2:Time, fRquer))

```

```

162
163 # der garantierte Zins g wird als Rquer festgelegt
164 g <- Rquer # Standardgarantie
165
166 # oder als g^{MM}
167 # g <- sapply(1:Time, function(i, Rquer){mean(Rquer[1:i])}, Rquer)
168 # oder als g^{GLM}
169 # x<-3
170 # g<-sapply(1:Time, function(i, Rquer){mean(Rquer[max(i-x+1,1):i])}, Rquer)
171
172 ## prodR[i] = Produkt der exp(R[n]) für n von i bis Time
173 ## prodg[i] = Produkt der exp(g[n]) für n von i bis Time
174
175 prodR <- sapply(1:Time, function(i, g) {prod(exp(R)[i:Time])}, R)
176 prodg <- sapply(1:Time, function(i, g) {prod(exp(g)[i:Time])}, g)
177
178 # Typ1
179 # der Garantiewert für die z-te Simulation wird in den Vektor Typ1[,] gespeichert
180
181 PI<-pmax(prodg - prodR, 0) # im paper "pi-T^n(I)" genannt
182
183 n<-1:Time
184 Typ1[z]<-exp(-BBeta[Time])*con*Y*sum( ((1 + i_Y)^(n-1))*PI[n])
185
186
187 # nun Typ2
188 # der in der z-ten Simulation erhaltene Garantiewert wird in "Typ2[z]" gespeichert
189
190 prodMax <- sapply(1:Time, function(i, g, R) {prod(exp(pmax(g, R))[i:Time])}, g, R)
191 PI2 <- prodMax - prodR # im paper "pi-T^n(II)" genannt
192
193 m<-1:Time
194 Typ2[z]<- exp(-BBeta[Time])*con*Y*sum( ((1+i_Y)^(m-1))*PI2[m])
195
196 }
197 ##### ENDE DER FOR-SCHLEIFE #####
198 ) # rechte Klammer zu system.time
199
200
201 #Garantiewerte
202 mean(Typ1)
203 mean(Typ2)

```

8.3 Simulationsprogramm für das Modell aus Kapitel 5.2

```

205
206 delta <- 1 # delta der Delta-year-spot rate
207 Time <- 10 # Ansparungszeitraum in Jahren
208 r <- 0.03
209 con <- 0.06 # contribution rate c (für Pension zurückgelegter Gehaltsanteil)
210 Y <- 100 # Jahresgehalt zum Zeitpunkt 0 - also zu Ansparungsbeginn
211 i_Y <- 0.02 # jährliche Wachstumsrate des Gehalts
212 f_init <- r # initial term structure f(0,t)
213
214 dis <- 12 # dis = N_Delta
215 Kappa <- 1 # mean reverting speed aus der Volatilität
216 theta <- 0.01 # mean des Wurzeldiffusionsprozesse der Volatilität
217 sigma_v <- 0.01 # Volatilität der Volatilität
218 v0 <- 0.01
219 Tau <- -0.2
220
221 g <- rep(r, 1:Time) # garantierte Zins wird gleich r festgelegt
222
223 SEED <- 294 # Seed für die Simulation
224 ANZAHL <- 80000

```

```

225
226 Kdis <-Kappa/dis
227 sqinvdis <-sqrt(1/dis)
228 conYZins <-sapply(1:Time, function(n){con*Y*(1+i_Y)^(n-1)})
229
230 set.seed(SEED)
231
232 # Vektoren, in die die Werte der Zinsgarantie für jeden Simulationsdurchlauf
233 # von 1 bis ANZAHL gespeichert werden, werden angelegt
234 Typ1<-c(1:ANZAHL)
235 Typ2<-c(1:ANZAHL)
236
237 # die Varianz/Kovarianzmatrix COV wird erstellt
238 # davon die Choleskyszerlegung CCOV
239 ## WICHTIG: R berechnet die Cholesky Zerlegung von COV in COV = R'R, benötigt
240 ## wird aber für die Simulation eine Zerlegung in LL'.
241 ## Daher wird die transponierte Matrix aus der CholeskyZerlegung gespeichert
242
243 COV<- matrix( c(1, rho, rho, 1),2,2)
244 CCOV<-t(chol(COV))
245
246 # für ANZAHL Durchläufe wird nun die 2-dim NV simuliert und aus den sich daraus
247 # ergebenden R und Rquer werden die Werte der Typ1 bzw. Typ2 Garantie berechnet
248 # system.time stoppt die Rechenzeit mit
249
250 ZEIT<-system.time(
251
252 for(z in 1:ANZAHL){
253
254 # will (W_t - W_(t-1) , Z_t - Z_(t-1)) als 2-dim NV simulieren
255 # L = CCOV = t(chol(COV))
256
257 X1<-c(1:(Time*dis)); X2<-c(1:(Time*dis));
258 X1<-rnorm((Time*dis)); X2<-rnorm((Time*dis));
259
260 DiffW<-c(1:(Time*dis)) # DiffW[t] = W_t - W_(t-1)
261 DiffZ<-c(1:(Time*dis)) # DiffZ[t] = Z_t - Z_(t-1)
262
263 DiffW <- CCOV[1,1]*X1
264 DiffZ <- CCOV[2,1]*X1 + CCOV[2,2]*X2
265
266 r <-c(1:(Time*dis))
267 Z <-c(1:(Time*dis)) # für die log-Volatilität
268 r0 <- f_init # entspricht r[0]
269 Z0 <- log(r0)
270
271 Z[1] <- Z0 + ((Kappa*theta - sigma_r^2/2)*exp(-Z0) - Kappa)*(1/dis)
272 + sigma_r*exp(-Z0/2)*sqrt(1/dis)*DiffW[1]
273
274 for(i in 2:(Time*dis)) # falls r negativ wird kann wurzel nicht gezogen werden
275 { # deshalb kommt hier 2mal Maximum (r_t, 0) rein
276 Z[i] <-Z[i-1] + ((Kappa*theta - sigma_r^2/2)*exp(-Z[i-1]) - Kappa)*(1/dis) +
277 sigma_r*exp(-Z[i-1]/2)*sqrt(1/dis)*DiffW[i]
278 }
279 r <-exp(Z)
280
281 R <-c(1:Time)
282 Rquer <-c(1:Time)
283
284 R[1] <- 0.5*(r[dis] + r0)/dis + sum(r[1:(dis - 1)])/dis
285 + sigma_s*sum(DiffZ[1:dis])*sqinvdis - 0.5*sigma_s^2*sigma_s^2}
286 for(i in 2:Time)
287 {
288 R[i]<- 0.5*(r[i*dis] + r[(i-1)*dis])/dis + sum(r[((i-1)*dis + 1):(i*dis - 1)])/dis
289 - 0.5*sigma_s^2 + sigma_s*sum(DiffZ[((i-1)*dis + 1):(i*dis)])/sqrt(dis)
290 }

```

```

291
292 # aus den r[i] wird nun das Rquer_t berechnet (Rquer[t] = Rquer(t-1, t-1+delta))
293 # A(t-1,t) und B(t-1,t) sind unabhängig von t!
294 K<-sqrt(Kappa^2 + 2*sigma_r^2)
295 A <- (2*H*exp((Kappa+H)/2)/(2*H + (Kappa + H)*(exp(H)- 1)))^(2*Kappa*theta/sigma_r^2)
296 B <- 2*(exp(H)-1)/(2*H + (Kappa + H)*(exp(H) -1 ))
297
298 Rquer <- c(-log(A*exp(-B*r0)), sapply(2:Time, function(i,r){-log( A*exp(-B*r[i*dis]))}, r))
299
300 # der garantierte Zins g wird festgelegt
301 g <- Rquer
302 #g <-sapply(1:Time, function(i, Rquer){mean(Rquer[max(i-x+1,1):i])}, Rquer)
303 #g <- sapply(1:Time, function(i,Rquer){mean(Rquer[1:i])}, Rquer)
304
305 ## prodR[i] = Produkt der exp(R[n]) für n von i bis Time
306 ## prodg[i] = Produkt der exp(g[n]) für n von i bis Time
307 ## prodMax[i] = Produkt der exp( max(g[n],R[n]) ) für n von i bis Time
308
309 prodR <- sapply(1:Time, function(i, R) {exp(sum(R[i:Time]))}, R)
310 prodg <- sapply(1:Time, function(i, g) {exp(sum(g[i:Time]))}, g)
311 prodMax <- sapply(1:Time, function(i, g,R) {exp(sum(pmax(g[i:Time],R[i:Time])))}, g, R)
312
313 # Typ1
314 P1<-pmax(prodg - prodR,0) # im paper "pi-T^n(I)" genannt
315 Typ1[z]<-exp(- ((r0+r[Time*dis])*0.5 + sum(r[2:(Time*dis-1)]))/dis)*conYZins%*%PI
316
317 # Typ2
318 P12 <- prodMax - prodR # im paper "pi-T^n(II)" genannt
319 Typ2[z]<- exp(- ((r0+r[Time*dis])*0.5 + sum(r[2:(Time*dis-1)]))/dis)*conYZins%*%PI2
320
321 }
322 ##### ENDE DER FOR-SCHLEIFE #####
323 ) # rechte Klammer zu system.time
324
325 #Garantiewerte
326 mean(Typ1)
327 mean(Typ2)

```

8.4 Simulationsprogramm für das Modell aus Kapitel 6.1

```

329
330 delta <- 1 # delta der Delta-year-spot rate
331 Time <- 10 # Ansparungszeitraum in Jahren
332 r <- 0.03
333 con <- 0.06 # contribution rate c (für Pension zurückgelegter Gehaltsanteil)
334 Y <- 100 # Jahresgehalt zum Zeitpunkt 0 - also zu Ansparungsbeginn
335 i_Y <- 0.02 # jährliche Wachstumsrate des Gehalts
336 f_init <- r # initial term structure f(0,t)
337
338 dis <-12 # dis = N_Delta
339 Kappa <- 1 # mean reverting speed aus der Volatilität
340 theta <- 0.01 # mean des Wurzel diffusionsprozesse der Volatilität
341 sigma_v <- 0.01 # Volatilität der Volatilität
342 v0 <- 0.01
343
344 rho <- -0.2 # für Korrelation
345 eps <- 0.2
346 Tau <- -0.2
347
348 g <- rep(r,1:Time) # garantierte Zins wird gleich r festgelegt
349
350 SEED <- 294 # Seed für die Simulation
351 ANZAHL <- 80000 # Anzahl der Simulationsdurchläufe brechnet werden soll
352
353 Kdis<-Kappa/dis

```

```

354 sqinvdis<-sqrt(1/dis)
355 FakZins<-sapply(1:Time, function(n){exp(-r*Time)*con*Y*((1+i_Y)^(n-1))})
356
357
358 set.seed(SEED)
359
360 # Vektoren, in die die Werte der Zinsgarantie für jeden Simulationsdurchlauf
361 # von 1 bis ANZAHL gespeichert werden, werden angelegt
362 Typ1_z<-c(1:ANZAHL)
363 Typ2_z<-c(1:ANZAHL)
364
365 ZEIT<-system.time(
366 for(e in 1:ANZAHL){
367
368 # will (v_t, delta_t) als 2-dim NV simulieren
369 # also mu_t + L*Z_t, wobei L = CCOV = t(chol(COV))
370 # generiere dreimal "Time" Stück normalverteilte Zufallsvariablen
371
372 # jedes Jahr wird in "dis" Zeiteinheiten geteilt
373 Z <-c(1:(Time*dis)); Z2<-c(1:(Time*dis)); W <-c(1:(Time*dis))
374 Z <-rnorm((Time*dis)); Z2<-rnorm((Time*dis)); W <-rho*Z + sqrt(1-rho^2)*Z2
375
376 v <- c(1:(Time*dis))
377 z <- c(1:(Time*dis))
378 Xv <- c(1:(Time*dis))
379 Xz <- c(1:(Time*dis))
380 z0<-log(v0)
381
382 z[1] <- log(v0) + ((Kappa*Theta - sigma_v^2/2)*exp(-z0) - Kappa)*(1/dis)
383 + sigma_v*exp(-z0/2)*sqinvdis*W[1]
384 Xz[1] <- log(S0) + (r - 0.5* exp(z0))/dis + sqrt(exp(z0)) *sqinvdis*Z[1]
385
386 for(j in 2:(Time*dis))
387 {
388 z[j] <- z[j-1] + ((Kappa*Theta - sigma_v^2/2)*exp(-z[j-1]) - Kappa)*(1/dis) +
389 sigma_v*exp(-z[j-1]/2)*sqinvdis*W[j]
390 Xz[j] <- Xz[j-1] + (r - 0.5* exp(z[j-1]))/dis + sqrt(exp(z[j-1]))*sqinvdis*Z[j]
391 }
392
393 # hier wird wieder in Jahren gerechnet - Index i ist das i-te Jahr
394 Rz <-c(1:Time);
395 Rz[1]<-Xz[1*dis] - log(S0)
396 for(g in 2:Time)
397 {
398 Rz[g]<- Xz[g*dis]-Xz[(g-1)*dis]
399 }
400
401 ## prodR[i] = Produkt der exp(R[n]) für n von i bis Time
402 ## prodg[i] = Produkt der exp(g[n]) für n von i bis Time
403
404 prodR_z <- sapply(1:Time, function(i, Rz) {prod(exp(Rz)[i:Time])}, Rz)
405 prodg <- sapply(1:Time, function(i, g) {prod(exp(g)[i:Time])}, g)
406 prodMax_z <- sapply(1:Time, function(i, g, Rz) {prod(exp(pmax(g, Rz)))[i:Time])}, g, Rz)
407
408 # Typ1
409 # der Garantiewert für die z-te Simulation wird in den Vektor Typ1[,] gespeichert
410 P1_z<-pmax(prodg - prodR_z,0) # im paper "pi-T^n(I)" genannt
411 Typ1_z[e]<- FakZins%*%P1_z
412
413 # nun Typ2
414 # der in der z-ten Simulation erhaltene Garantiewert wird in "Typ2[z]" gespeichert
415 P12_z <- prodMax_z- prodR_z # im paper "pi-T^n(II)" genannt
416 Typ2_z[e]<- FakZins%*%P12_z
417
418 #Garantiewerte
419 mean(Typ1_z)

```

420 mean(Typ2-z)

8.5 Simulationsprogramm für Modell aus Kapitel 6.2

```
1 ## PARAMETER
2
3 delta <- 1      # delta der Delta-year-spot rate
4 Time <- 10     # Ansparungszeitraum in Jahren
5 con <- 0.06    # contribution rate c (für Pension zurückgelegter Gehaltsanteil)
6 Y <- 100      # Jahresgehalt zum Zeitpunkt 0 – also zu Ansparungsbeginn
7 i_Y <- 0.02   # jährliche Wachstumsrate des Gehalts
8 f_init <- 0.03 # initial term structure f(0,t)
9
10 sigma <- 0.01 # Volatilität der Forward Rate
11 lambda <- 0.1 # forward rate volatility parameter
12 rho <- -0.2   # Korrelation der BB im Investmentportfolio Z_t und in der
13              # Zinsstrukturkurve W_t
14 SEED <- 294   # Seed für die Simulation
15 set.seed(SEED)
16 ANZAHL <- 80000 # Anzahl der Simulationsdurchläufe brechnet werden soll
17
18
19
20 dis <- 12     # dis = N_Delta
21 Kappa <- 1    # mean reverting speed aus der Volatilität
22 theta <- 0.01 # mean des Wurzel diffusionsprozesse der Volatilität
23 sigma_v <- 0.01 # Volatilität der Volatilität
24 v0 <- 0.01
25 eps <- 0.2
26 Tau <- -0.2
27
28 #Hilfsgrößen für eine effiziente Berechnung
29
30 FakZins<-sapply(1:Time, function(n){con*Y*((1+i_Y)^(n-1))})
31 Kdis<-Kappa/dis
32 sqinvdis<-sqrt(1/dis)
33 lambdadis<-lambda/dis
34 Kathe <- (Kappa*theta-sigma_v^2/2)/dis
35 sigzweilam <- (sigma^2)/(2*lambda^2)
36
37 # Vektoren, in die die Werte der Zinsgarantie für jeden Simulationsdurchlauf
38 # von 1 bis ANZAHL gespeichert werden, werden angelegt
39 Typ1<-c(1:ANZAHL)
40 Typ2<-c(1:ANZAHL)
41
42 # mu_r(t) ist der bedingte Erwartungswert von r_(t/dis) gegeben r_((t-1)/dis)
43 # mu_BBeta(t) ist der bedingte EW von BBeta_(t/dis) gegeben r_((t-1)/dis), usw.
44
45 mu_r <-function(b) { exp(-lambdadis)*r[b-1] + f_init
46                   + sigzweilam*(1-exp(-lambdadis*b))^2 - exp(-lambdadis)*(f_init +
47                   sigzweilam*(1-exp(-lambdadis*(b-1)))^2)}
48 mu_BBeta <-function(b) { BBeta[b-1] + 1/lambda*(1-exp(-lambdadis))*(r[b-1] - f_init -
49                   sigzweilam*(1-exp(-lambdadis*(b-1)))^2 ) + f_init/dis +
50                   sigzweilam*(1/dis + 1/lambda*(2*exp(-lambdadis*b) - 2*exp(-lambda*((b-1)/dis))
51                   - 0.5*exp(-2*lambdadis*b) + 0.5*exp(-2*lambda*((b-1)/dis))))}
52
53 # nun wird (COV)^(1/2) berechnet, dazu wird die Varianz/Kovarianzmatrix COV für alle t
54 # aufgestellt und daraus via der Cholesky Zerlegung die "Wurzel" berechnet
55
56 Var_r_t <- {sigma^2/(2*lambda)*(1-exp(-2*lambdadis))}
57 Var_BBeta_t <- {(sigma/lambda)^2*(1/dis - 2/lambda*(1-exp(-lambdadis))
58               + 1/(2*lambda)*(1-exp(-2*lambdadis)) )}
59 Var_diffW <- 1/dis
60 Var_diffZ <- 1/dis
61
```

```

62 Cov_r_BBeta      <- {(sigma/lambda)^2 *(1-exp(-lambdadis)) - Var_r_t/lambda}
63 Cov_r_diffW     <- eps*sigma/lambda*(1-exp(-lambdadis))
64 Cov_diffW_BBeta <- eps*sigma/lambda*(1/dis- 1/lambda*(1- exp(-lambdadis)))
65 Cov_r_diffZ     <- rho*sigma/lambda*(1-exp(-lambdadis))
66 Cov_BBeta_diffZ <- rho*sigma/lambda*(1/dis- 1/lambda*(1- exp(-lambdadis)))
67 Cov_diffW_diffZ <- Tau/dis
68
69 # die Varianz/Kovarianzmatrix COV wird erstellt , davon die Choleskyszerlegung CCOV
70 ## WICHTIG: R berechnet die Cholesky Zerlegung von COV in COV = R'R, benötigt
71 ## wird aber für die Simulation eine Zerlegung in LL'.
72 ## Daher wird die transponierte Matrix aus der CholeskyZerlegung gespeichert
73
74 COV<- matrix( c(Var_r_t,      Cov_r_BBeta,  Cov_r_diffW,      Cov_r_diffZ,
75                Cov_r_BBeta, Var_BBeta_t,  Cov_diffW_BBeta,  Cov_BBeta_diffZ,
76                Cov_r_diffW, Cov_diffW_BBeta, Var_diffW,      Cov_diffW_diffZ,
77                Cov_r_diffZ, Cov_BBeta_diffZ, Cov_diffW_diffZ, Var_diffZ  ),4,4)
78 CCOV<-t(chol(COV))
79
80 # da die Berechnung von mu_r(1/dis) bzw. mu_BBeta(1/dis) die Werte r[0] bzw. BBeta[0]
81 # erfordern, diese aber in R nicht indiziert werden können, werden sie einfach
82 # außerhalb der for-Schleife berechnet. Gleiches gilt für BBeta0.
83
84 r0      <- f_init      # entspricht r[0]
85 BBeta0 <- 0            # BBeta[0]
86
87 # mu_r[1] und mu_Beta[1] .... also mu_r(1/dis), mu_Beta(1/dis)
88
89 mu_r_1   <- exp(-lambdadis)*r0 + f_init + sigzweilam*(1-exp(-lambdadis))^2
90           - exp(-lambdadis)*f_init
91 mu_BBeta_1 <- BBeta0 + f_init/dis + sigzweilam*(1/dis +
92               1/lambda*(2*exp(-lambdadis) - 2 - 0.5*exp(-2*lambdadis) + 0.5))
93
94 # für ANZAHL Durchläufe wird nun die 2-dim NV simuliert und aus den sich daraus
95 # ergebenden R und Rquer werden die Werte der Typ1 bzw. Typ2 Garantie berechnet
96 # system.time stoppt die Rechenzeit mit
97
98 ZEIT<-system.time(
99
100 for(y in 1:ANZAHL){
101
102 # will X_t = (r_t, delta_t, beta_t) als 3-dim NV simulieren
103 # also X_t = mu_t + L*Z_t, wobei L = CCOV = t(chol(COV))
104 # generiere dreimal "Time" Stück normalverteilte Zufallsvariablen
105
106 Z1<-c(1:(Time*dis)); Z2<-c(1:(Time*dis)); Z3<-c(1:(Time*dis)); Z4<-c(1:(Time*dis));
107 Z1<-rnorm(Time*dis); Z2<-rnorm(Time*dis); Z3<-rnorm(Time*dis); Z4<-rnorm(Time*dis);
108
109 r      <- c(1:(Time*dis))
110 BBeta <- c(1:(Time*dis))
111 diffW <- c(1:(Time*dis))
112 diffZ <- c(1:(Time*dis))
113 z      <- c(1:(Time*dis))
114 v      <- c(1:(Time*dis))
115
116 # und damit werden die zwei Prozesse r und BBeta simuliert CCOV = L
117 # v_t (die Volatilität) wird mitsimuliert
118 # auf diffW wird bereits jetzt sigma_v multipliziert
119
120 r[1]   <- mu_r_1      + CCOV[1,1]*Z1[1]
121 BBeta[1] <- mu_BBeta_1 + CCOV[2,1]*Z1[1] + CCOV[2,2]*Z2[1]
122 diffW   <-          sigma_v*(CCOV[3,1]*Z1 + CCOV[3,2]*Z2 + CCOV[3,3]*Z3)
123 diffZ   <-          CCOV[4,1]*Z1 + CCOV[4,2]*Z2 + CCOV[4,3]*Z3 + CCOV[4,4]*Z4
124 z[1]   <- log(v0) + exp(-log(v0)/2)*(Kathe)-Kdis + exp(-log(v0)/2)*diffW[1]
125
126
127 for(i in 2:(Time*dis))

```

```

128 {
129   r[i] <- mu_r(i) + CCOV[1,1]*Z1[i]
130   BBeta[i] <- mu_BBeta(i) + CCOV[2,1]*Z1[i] + CCOV[2,2]*Z2[i]
131   z[i] <- z[i-1] + exp(-z[i-1])*Kathe - Kdis + exp(-z[i-1]/2)*diffW[i]
132 }
133 v<-exp(z)
134
135 #mit den v_t wird jetzt der Prozess K_t simuliert
136 # K_t ~ N(0, int_((t-1))^(t) v_u du )
137
138
139 funK<-function(i)
140 {
141   j<-1:(dis-1)
142   return(0.5/dis*(v[(i-1)*dis]+v[i*dis]) + sum(v[dis*(i-1) + j])/dis)
143 }
144 K <- c(0.5/dis*(v0+v[dis]) + sum(v[1:(dis-1)])/dis, sapply(2:Time, funK))
145
146 funH<-function(i)
147 {
148   j<-1:dis
149   return(sum(sqrt(v[(i-1)*dis+(j-1)])*diffZ[(i-1)*dis+(j-1)]))
150 }
151 H <- sapply(1:Time, funH)
152 # aus den r[i] wird nun das Rquer_t berechnet (Rquer[t] = Rquer(t-1, t-1+delta))
153 # aus den Delta[i] wird das R_t berechnet (R[t] = R_t)
154
155 R <- c(1:Time)
156 R[1]<- BBeta[dis*1] - BBeta0 - 0.5*K[1] + H[1]
157 R <- c(R[1], sapply(2:Time, function(i){BBeta[dis*i]-BBeta[dis*(i-1)] - 0.5*K[i] + H[i]}))
158
159 #Rquer(0,1) (dh t=1) wird extra berechnet
160 Rquer1 <- 1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*r0 + f_init
161 - 1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*(f_init)
162
163 fRquer <- function(i)
164 {1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*r[i-1] + f_init -
165 1/(lambda*delta)*(1-exp(-lambda*delta))*(f_init
166 + (sigma)^2/(2*lambda^2)*(1-exp(-lambda*(i-1)))^2)
167 + (sigma)^2/(lambda^3*delta)*((exp(lambda*(i-1))-1)*(exp(-lambda*(i-1))
168 -exp(-lambda*(i-1+delta))) - 0.25*(exp(2*lambda*(i-1))-1)*(exp(-2*lambda*(i-1))
169 -exp(-2*lambda*(i-1+delta))))}
170
171 Rquer <-c(Rquer1, sapply(2:Time, fRquer))
172
173 # der garnatierte Zins g wird als Rquer festgelegt
174 g <- Rquer
175
176 ## prodR[i] = Produkt der exp(R[n]) für n von i bis Time
177 ## prodg[i] = Produkt der exp(g[n]) für n von i bis Time
178
179 prodR <- sapply(1:Time, function(i, R) {exp(sum(R[i:Time]))}, R)
180 prodg <- sapply(1:Time, function(i, g) {exp(sum(g[i:Time]))}, g)
181
182 # Typ1
183 # der Garantiewert für die z-te Simulation wird in den Vektor Typ1[,] gespeichert
184
185 PI<-pmax(prodg - prodR,0) # im paper "pi-T^n(I)" genannt
186
187 n<-1:Time
188 Typ1[y]<-exp(-BBeta[Time*dis])*FakZins%*PI
189
190
191 # nun Typ2
192 # der in der z-ten Simulation erhaltene Garantiewert wird in "Typ2[z]" gespeichert
193

```

```

194 prodMax <- sapply(1:Time, function(i, g, R) {exp(sum(pmax(g[i:Time], R[i:Time])))}, g, R)
195 PI2 <- prodMax - prodR # im paper "pi-T^n(II)" genannt
196
197 m<-1:Time
198 Typ2[y]<- exp(-BBeta[Time*dis])*FakZins%PI2
199
200 }
201 ##### ENDE DER FOR-SCHLEIFE #####
202 ) # rechte Klammer zu system.time
203
204 #Garantiwerte
205 mean(Typ1)
206 mean(Typ2)

```

Literaturverzeichnis

- [1] FISCHER BLACK UND MYRON SCHOLES: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (1973), pp. 637-654
- [2] PHELM P. BOYLE UND MARY R. HARDY: Reserving for maturity guarantees: Two approaches. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21 (1997), pp. 113-127
- [3] PAUL BRATELY, BENNET L. FOX, KINUS E. SCHRAGE. *A Guide to Simulation*. Springer, New York, 1993
- [4] MICHAEL J. BRENNAN UND EDUARDO S. SCHWARTZ: The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Insurance: Mathematics and Economics*, 3 (1976), pp. 195-213
- [5] DAMINO BRIGO UND FABIO MERCURIO. *Interest Rate Models*. Springer, Berlin [u.a.] 2001.
- [6] JOHN C. COX, JONATHAN E. INGERSOLL UND STEPHEN A. ROSS. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53 (1985), pp. 385-407
- [7] PAUL GLASSERMAN: *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer, New York 2004
- [8] ANDERS GROSEN UND PETER L. JØRGENSEN: Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26 (2000), pp. 37-57
- [9] METTE HANSEN UND KRISTIAN R. MILTERSEN: Minimum Rate of Return Guarantees: The Danish Case. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, (2002), pp. 280 - 318
- [10] DAVID HEATH, ROBERT JARROW, und ANDREW MORTON: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1), 1992, pp. 77-105.
- [11] JOHN HULL: *Optionen, Futures und andere Derivate*. 6. Auflage, Pearson Studium, München 2006
- [12] ACHIM KLENKE: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin Heidelberg 2006
- [13] RALF KORN U.A: *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Boca Raton, 2010

- [14] SIEGHARTSLEITNER GÜNTHER: Fondsgebundene Lebensversicherungsverträge mit garantierten Auszahlungen. Diplomarbeit am Statistik Institut der Technischen Universität Graz, 2005
- [15] SNORRE LINDSET: Relative guarantees. The GENEVA Papers on Risk and Insurance - Theory, 29, pp. 187-209
- [16] KRISTIAN MILTERSEN UND SVEIN-ARNE PERSSON: Pricing rate of return guarantee in a Heath-Jarrow-Morton framework. Insurance: Mathematics and Economics, 25 (1999), pp. 307-325
- [17] THORSTEN SCHMIDT: Zinsstrukturmodelle. [http://www.math.unileipzig.de/~tschmidt/FM skriptWS04 05.pdf](http://www.math.unileipzig.de/~tschmidt/FM_skriptWS04_05.pdf), Jan. 2005. Vorlesungsskriptum.
- [18] DAVID SCHRAGER UND ANTOON PELSSER: Pricing rate of return guarantees in regular premium unit linked insurance. Insurance: Mathematics and Economics, 35 (2004), pp. 369-398
- [19] SHARON YANG, MENG-LAN YUEH, CHUN-HUA TANG: Valuation of the interest rate guarantee embedded in defined contribution pension plans. Insurance: Mathematics and Economics, 42 (2008), pp. 920-934. <http://www.ncu.edu.tw/~fm/teacher/Meng-Lan Yuen.file/Valuation of Interest Rate Guarantees.pdf>