

Labor für konstruktiven Ingenieurbau TU-Graz  
Institut für Betonbau TU-Graz

## Masterarbeit

# Theoretische Modellbildung von anisotropen Faserorientierungszuständen und die Berechnung zugehöriger Faserorientierungsbeiwerte

Erarbeitet von

Brunetti André, BSc.

März 2013

Erstbetreuer:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Viet Tue
Zweitbetreuer:	Dipl.-Ing. Dr.techn. Freytag Bernhard
Drittbetreuer:	Dipl.-Ing. Heinzle Günter

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen Betreuern Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Bernhard Freytag, Herrn Dipl.-Ing. Heinzle Günter und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Viet Tue für ihren persönlichen Einsatz und Engagement ein großes Dankeschön aussprechen.

Ebenso danke ich den Mitarbeitern am Labor für Konstruktiven Ingenieurbau der TU-Graz, denn auch sie waren bei Problemen und Fragen stets zur Stelle.

Die glückliche Studienzeit verdanke ich unter anderem meinen Freunden, alte und neue, sowie den ganzen Mitbewohnern, von Studienbeginn weg über die Erasmuszeit bis zu den Aktuellen.

Abschließend möchte ich mich noch bei den wichtigsten Personen in meinem Leben bedanken, den Geschwistern und meinen Eltern. Sie haben mich unterstützt, motiviert und sind in jeder Situation hinter mir gestanden.

## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere, als angegebene Quellen, nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ich versichere, dass ich diese Arbeit bisher weder im In- noch im Ausland einem Beurteiler oder einer Beurteilerin in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe

Graz, März 2013

\_\_\_\_\_

## Kurzfassung

Im Zuge des Projektes „Fibre-Scan“ am Labor für konstruktiven Ingenieurbau wurde eine zerstörungsfreie Methode entwickelt, um die Faserorientierung von Stahlfasern in UHPC zu messen. Die Orientierung ist Großteils anisotrop, obwohl bisher von einer isotropen Verteilung ausgegangen wurde. In dieser Arbeit wird die Anisotropie mit verschiedenen Orientierungsverteilungen modelliert und anschließend im Bezug auf den Faserorientierungsbeiwert ausgewertet. Die Kurven der Verteil-Funktionen sind durch verschiedene Messergebnisse gegeben. Dazu werden zuerst per Hand oder mit Hilfe des Softwareprogrammes „Mathematica“ von Wolfram Inc. zweidimensionale Modelle erstellt, von denen die interessantesten und mathematisch lösbaren Varianten ausgewählt und in den dreidimensionalen Raum übertragen werden. Es wird eine Formel erarbeitet, mit welcher der Faserorientierungsbeiwert in alle Richtungen für jede realistische Faserorientierungsverteilung berechnet werden kann. Dabei soll es keine Rolle spielen, in welchem Winkel Hauptfaserorientierungsrichtung und Oberfläche des gemessenen Prüfkörpers zueinander stehen. Die erarbeiteten Lösungen werden grafisch dargestellt und die Ergebnisse der verschiedenen Verteil-Funktionen bei Bedarf miteinander verglichen.

## Abstract

In the course of the project „Fibre-Scan“ at the Laboratory for structural Engineering at TU-Graz there was evolved a non-destructive method to measure the orientation state of steel fibres in UHPC. In the most cases the orientation is anisotropic, although until now it was assumed to be isotropic. In this thesis the anisotropy is modeled in terms with different orientation-distributions. They will be evaluated in reference to the coefficient of fibre-orientation. The curves of the orientation-distributions are given through different measurement results.

At first several bi-dimensional distribution-functions are generated manually or with the software-program “Mathematica” by Wolfram Inc.. The most meaningful and mathematically solvable variants are then transformed in tri-dimensional functions. A formula, which can be used to calculate the fibre-orientation coefficient in every direction for every realistic fibre-orientation distribution, is being developed. The angle between the principal fibre-orientation direction and the surface of the test specimen should be irrelevant. The solutions achieved are diagramed and the different results of the distribution-functions are compared as needed.

## Sintesi

Nel corso del progetto „Fibre-Scan“ del laboratorio per ingegneria dell' università tecnica di Graz è stato sviluppato un metodo privo di distruzione per misurare l'orientamento delle fibre d'acciaio in UHPC. L'Orientamento è principalmente anisotropico, anche se fino adesso si è partiti dal presupposto che fosse isotropico. In questa tesi l'anisotropia è modellata con diverse distribuzioni di orientamento. Queste vengono analizzate rispettando il coefficiente di orientamento delle fibre. Le curve delle distribuzioni derivano da diversi risultati di misurazione. Col programma software “Mathematica” di Wolfram Inc. oppure a mano vengono creati modelli bidimensionali. Tra questi si scelgono i più interessanti e matematicamente solvibili per poi trasformarli in funzioni tridimensionali. Viene elaborato un teorema che sappia calcolare il coefficiente di orientamento delle fibre in tutte le direzioni per funzioni di distribuzione realistiche. Deve essere indifferente sotto quale angolo la direzione dell' orientamento delle fibre è in confronto alla superficie del provino. Si procede con l'illustrazione delle soluzioni ottenute e i risultati delle funzioni differenti vengono paragonati secondo necessità.

## Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	10
1.1	Projekt Fibre-Scan [1]	10
1.2	Werkstoff UHPC	10
1.3	Fasereigenschaften im UHPC	12
1.3.1	Faserwerkstoffe	12
1.3.2	Fasergehalt	13
1.3.3	Fasergeometrie und Länge	13
1.3.4	Faserorientierung	14
2	ZIEL DER ARBEIT [1]	15
3	ORIENTIERUNG DER FASERN IM RAUM	16
3.1	Geometrische Definitionen	16
3.1.1	Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes	16
3.1.2	Lokales Koordinatensystem einer beliebigen Blickrichtung	17
3.1.3	Koordinatensystem des Bauteils	19
3.1.4	Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen in 2D	20
3.1.5	Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen in 3D	21
3.2	Statistische Definitionen	22
3.2.1	Ereignisse $\theta_n$ und $\varphi_n$	22
3.2.2	Grundmenge $\Omega$	22
3.2.3	Wahrscheinlichkeit $P$	23
3.3	Isotrope Verteil-Funktionen 2D und 3D	25
3.4	Anisotrope Verteil-Funktionen allgemein	27
3.5	Anisotrope homogene Verteil-Funktion in 2D	30
3.5.1	Lineare Verteil-Funktion	30
3.5.2	Cosinus-Verteil-Funktion	34

3.5.3	CosinusQuadrat-Verteil-Funktion	37
3.5.4	Vergleich der homogenen Verteil-Funktionen in 2D	40
3.6	Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in 2D	41
3.7	Anisotrope Verteil-Funktion mittels Fourier-Reihe in 2D	45
3.8	Allgemein gültige lineare Verteil-Funktion in 2D für homogene und inhomogene anisotrope Orientierungszustände	51
3.9	Anisotrope homogene Verteil-Funktion in 3D (Cosinus zum Quadrat)	59
3.10	Anisotrope inhomogene und homogene lineare Verteil-Funktion in 3D	62
<b>4</b>	<b>BERECHNUNG DES FASERORIENTIERUNGSBEIWERTES</b>	<b>67</b>
4.1	Herleitung des Faserorientierungsbeiwertes $\eta$ bei einem Fasergemenge mit isotroper Orientierung nach Behloul [2]	69
4.2	Definition des Faserorientierungsbeiwertes $\eta$	73
4.3	Faserorientierungsbeiwert bei homogenen Verteil-Funktionen in 2D	74
4.3.1	Faserorientierungsbeiwert bei linearer homogener Verteil-Funktion in 2D	75
4.3.2	Faserorientierungsbeiwert der Cosinus-Verteil-Funktion in 2D	79
4.3.3	Vergleich und Annäherung der homogenen Cosinus-Verteil-Funktion und homogenen lineare Verteil-Funktion in 2D	83
4.3.4	Faserorientierungsbeiwert der Cosinus-Quadrat-Funktion	86
4.4	Faserorientierungsbeiwerte des handgerechneten Dreieck-Impulses in 2D	90
4.5	Faserorientierungsbeiwerte der Fourier-Reihe in 2D	96
4.6	Vergleich der inhomogenen Verteil-Funktionen der Fourier-Reihe und des handgerechneten Dreieck-Impulses	100
4.7	Darstellung der Ergebnisse für den Faserorientierungsbeiwert des inhomogenen Dreieck-Impulses und der homogenen genäherten linearen Verteil-Funktion in 2D	102
4.8	Faserorientierungsbeiwert der anisotropen inhomogenen bzw. homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D	105

4.9	Faserorientierungsbeiwert der homogenen anisotropen Cosinus-Quadrat-Funktion in 3D	110
4.9.1	Isotroper Fall	111
4.9.2	Ein allgemeiner Fall	114
4.9.3	Grenzfall 1	116
4.9.4	Grenzfall 2	119
4.10	Faserorientierungsbeiwert der linearen Verteil-Funktion in 3D	121
4.10.1	Allgemeiner inhomogener Fall	125
4.10.2	Allgemeiner homogener Fall	127
4.10.3	Grenzfall 1	130
4.10.4	Grenzfall 2	132
4.11	Vergleich lineare und Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion in 3D	135
4.12	Sonstige Verteil-Funktionen in 3D	140
5	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	141
6	INDEXNOTATION	144
7	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	147
8	LITERATURVERZEICHNIS	155

# 1 Einleitung

## 1.1 Projekt Fibre-Scan [1]

UHPC ist ein Beton mit ungefähr fünffacher Druckfestigkeit von Normalbeton. Die Zugabe von Fasern wirkt der Sprödigkeit dieses hochfesten Betons entgegen. Das Labor für konstruktiven Ingenieurbau an der TU-Graz hat in Zusammenarbeit mit dem Institut für Betonbau vor 12 Jahren die sich bietenden Möglichkeiten dieses Baustoffes erkannt und sich seitdem damit beschäftigt. Unter anderem haben sei beim Bau einer Brücke in UHPC in Österreich mitgewirkt. Die Brücke ist vorgespannt, auf Schlabfbewehrung wurde ganz verzichtet. Die Fasern im Beton haben dementsprechend eine wichtige, tragende Wirkung, doch ist es international noch nicht gelungen, deren Orientierung und Verteilung mit zerstörungsfreien Messmethoden zufriedenstellend zu untersuchen.

Am Labor für konstruktiven Ingenieurbau wurde im Zuge des Projektes ein auf magnetischer Induktion basierendes Verfahren entwickelt, welches es ermöglicht, anhand der ferromagnetischen Eigenschaft der Stahlfasern auf deren Orientierung im Beton zu schließen. Zur Zeit können mit dieser Methode nur Schlüsse für das untersuchte Bauteil gezogen werden, und zwar durch individuelle Kalibrierung an Proben, geschnitten aus den „Überlängen“ der Bauteile. Ziel ist es jedoch, ein allgemein gültiges Verfahren zu erarbeiten. Beruhend auf physikalischen Grundlagen sind dazu mehrere theoretische Ansätze nötig, unter anderem die Herleitung der mathematischen Zusammenhänge von Hauptorientierungsrichtungen (angelehnt an die Hauptspannungsrichtungen) in anisotropen Orientierungszuständen und dem Einfluss der Lage und Orientierung einer einzelnen Stahlfaser auf die Magnetflussdichte.

Mit diesen beiden Herleitungen wird ein Auswertalgorithmus für die Berechnung des räumlichen Orientierungszustandes erstellt. Nach Durchführung von Messungen an ca. 100 Proben mit unterschiedlichen Faserorientierungszuständen wird dieser bei Bedarf anhand der Ergebnisse modifiziert bzw. kalibriert.

## 1.2 Werkstoff UHPC

Der Name UHPC kommt aus dem Englischen und bedeutet Ultra High Performance Concrete. Es handelt sich dabei um eine Betonmischung die eine Druckfestigkeit von mindestens  $150 \text{ N/mm}^2$  aufweist. Um diese Eigenschaft zu erreichen wird eine hohe Dichte des Endproduktes benötigt. Es wird ein Größtkorndurchmesser zwischen  $0,5\text{mm}$  und  $8\text{mm}$  verwendet. Das Wasser/Bindemittel-Verhältnis sehr niedrig und beträgt ungefähr  $0,2$ . Um eine Verarbeitbarkeit des Betons zu gewährleisten werden Fließmittel verwendet. Die Festigkeit des Betons kann mit einer Wärmebehandlung im Nachhinein nochmal gesteigert werden. Theoretisch möglich ist eine Druckfestigkeit von  $800\text{N/mm}^2$ .

Der große Vorteil des UHPC ist also die hohe Druckfestigkeit und Dauerhaftigkeit. Konstruktionen aus UHPC werden dementsprechend auch schlanker und der Energie- und Rohstoff-

aufwand bei der Herstellung wird verringert. Sie weisen eine um ca. ein Drittel geringere Eigenlast auf als Normalbeton. Der Kapillarporenanteil bewegt sich wegen der Feinkörnung in einem Bereich von 1,5 Volumenprozent, die Resistenz gegen Wasser und Chloride wird gesteigert.

Auch die Zugfestigkeit ist im UHPC ( $8-10\text{N/mm}^2$ ) etwas höher als in Normalbeton ( $1-4\text{N/mm}^2$ ), steigt aber im Verhältnis zur Druckfestigkeit nur unterproportional.

Schwierigkeiten gibt es noch in der Herstellung des UHPCs auf Baustellen, da die erforderlichen Bedingungen meist nur im Werk vorhanden sind.

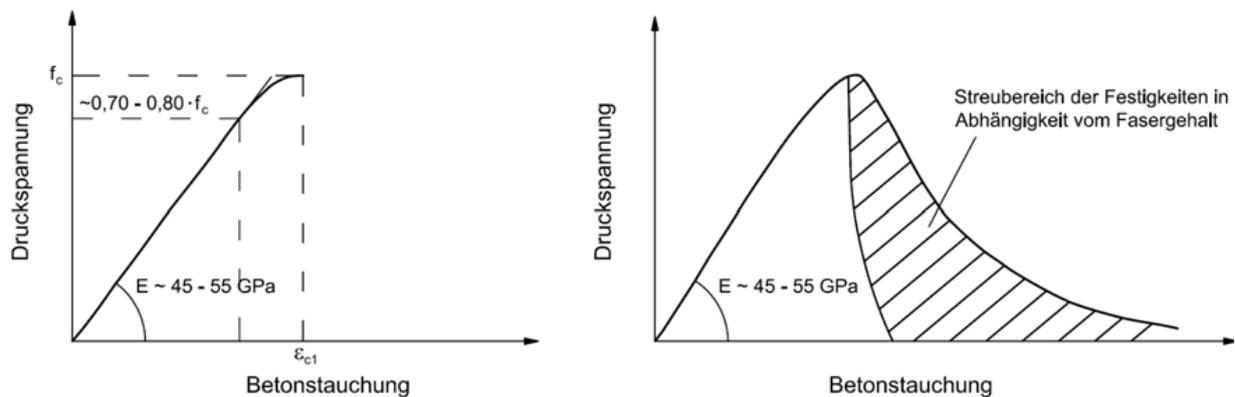


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungslinie UHPC mit und ohne Fasern [10]

UHPC verhält sich bei steigender Belastung linear-elastisch. Wird eine gewisse Belastung erreicht, kommt es zu einem Spröbruch, welcher in der Regel verhindert werden soll. Durch Hinzufügen von Fasern gelingt es, den Spröbruch zu vermeiden und dem Bauteil eine gewisse Duktilität zu geben. Zu erkennen ist dies im Nachbruchbereich der Spannungs-Dehnungslinie der Abbildung 1 des UHPC mit Fasern. Nachdem die Betonmatrix gerissen ist, werden die zu übertragenden Kräfte ausschließlich von den Fasern übernommen.

### 1.3 Fasereigenschaften im UHPC

Es gibt verschiedene Faktoren die den Streubereich der Zugfestigkeiten (Abbildung 1) beeinflussen, sie werden in den nachfolgenden Abschnitten erklärt.

#### 1.3.1 Faserwerkstoffe

Der verwendete Werkstoff muss, wie eine gängige Bewehrung, im alkalischen Milieu des Betons ausreichend beständig sein. Ebenso soll der E-Modul der verwendeten Faser höher als der E-Modul des Zementsteines sein. In Frage kommen deshalb vor allem hochfeste Stahlfasern, Glasfasern, Kohlenstofffasern sowie Mixturen aus diesen Werkstoffen. Einige davon sind in Abbildung 2 dargestellt. Kunststofffasern (meist Polypropylen-Fasern) werden auch in manchen Fällen verwendet, dienen aber nur dem Brandschutz, da sie bei großer Hitze verbrennen und so Raum für entstehenden Wasserdampf schaffen. Der Beton platzt nicht ab und die darunterliegende Bewehrung wird länger vor der Hitze geschützt.



Abbildung 2: Verschiedene Faserarten: l.o. Stahlfasern, r.o. Polypropylen-Fasern, l.u. Kohlenstofffasergewebe, r.u. Glasfasern [5]

### 1.3.2 Fasergehalt

Je nachdem wie gut sich der Beton verarbeiten lässt, sind 0,8 bis 3 Vol.-% an Fasern üblich. Höhere Faseranteile sind nur realistisch wenn die Faserorientierung gesteuert wird. [7] Bei Normalbeton steuert die Gesteinskörnung die Richtung der Fasern, während bei UHPC, wo die Gesteinskörnung sehr klein ist, sich die Fasern nur gegenseitig behindern können. Daher ist der Fasergehalt ein wesentlicher Parameter dafür, wie leicht bzw. schwer sich eine Faser ausrichten lässt. [4]

### 1.3.3 Fasergeometrie und Länge

Ebenso sind Form und Länge eine Eigenschaft der Faser. Die Faserschlankheit entnimmt man aus dem Verhältnis der Faserlänge  $l_f$  zum Faserdurchmesser  $d_f$ .

$$\lambda_f = \frac{l_f}{d_f} \quad (1-1)$$

In Versuchen hat sich gezeigt, dass die Faser eine Schlankheit zwischen 50 und 100 haben soll. [8] Bei Schlankheiten größer 60 besteht jedoch die Gefahr der Igelbildung. Darunter versteht man die Verballung von Fasern die bei der Betonherstellung entstehen kann. Dieses Faserbündel kann Hohlräume und Einschlüsse verursachen, welche dann eine ordentliche Verdichtung des Betons verhindern. Bei der Verwendung einer Betonpumpe kann diese blockieren.

Zu beachten ist außerdem die Größe der Gesteinskörnung, und zwar im Verhältnis der Faserlänge  $l_f$  zum Größtkorndurchmesser  $d_{max}$ . Jedoch finden sich für das Verhältnis Werte zwischen 2 und 10 in der Literatur.

$$\frac{l_f}{d_{max}} \geq 2 - 10 \quad (1-2)$$

Bei grobkörnigem UHPC (Größtkorndurchmesser > 1mm ) wird oft ein Verhältnis von zwei bis vier angestrebt. Die Faserlängen liegen üblicherweise zwischen 4 und 20 mm. [9]

### 1.3.4 Faserorientierung

Die Faserorientierung ist in eindimensionale, zweidimensionale und dreidimensionale Ausrichtung unterteilt. Im allgemeinen Fall ist die Ausrichtung dreidimensional, wird aber absichtlich oder ungewollt durch die Betonier-Richtung nahe der Schalung auf eine zweidimensionale bzw. Kantenbereichen eindimensionale Ausrichtung reduziert.

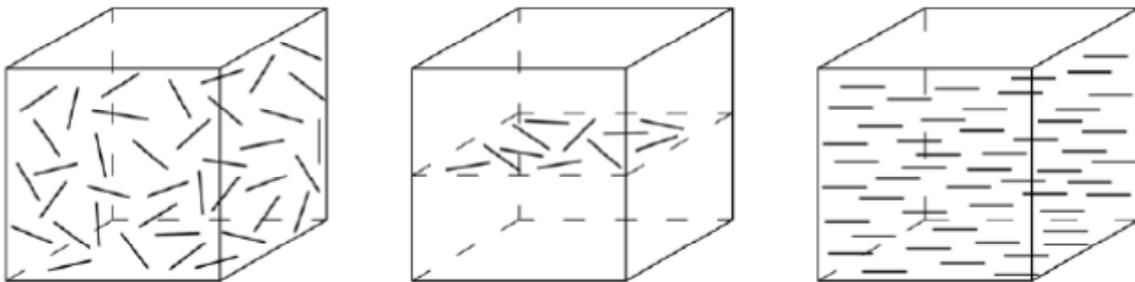


Abbildung 3: Dreidimensionale, zweidimensionale und eindimensionale Faserorientierung in Beton [6]

## 2 Ziel der Arbeit [1]

Im Rahmen des Projekts WILD-Brücke wurde eine Methode zur Bestimmung der Orientierungsverteilung von Stahlfasern, basierend auf der zerstörungsfreien Messung der ferromagnetischen Eigenschaften mittels Induktivitätsmessung als kurzfristige empirische Lösung entwickelt. Dadurch kann man auf die Ausrichtung der Stahlfasern im Beton schließen. Die Methode hat sich als wesentlich leistungsfähiger herausgestellt als erwartet.

Ziel dieser Arbeit ist es, die theoretische Herleitung der mathematischen Zusammenhänge für den Faserorientierungsbeiwert in beliebigen Richtungen in anisotropen Orientierungszuständen zu erarbeiten. Dies geschieht mit Hilfe von geometrischen Grundlagen, aufbauend auf mathematischen Modellen im zwei und dreidimensionalen Raum.

Die volle Leistungsfähigkeit der zerstörungsfreien Messmethode soll somit genutzt werden können.

### 3 Orientierung der Fasern im Raum

#### 3.1 Geometrische Definitionen

Die an Probekörpern gemessene Verteilung der Fasern im Raum wird im Allgemeinen in Kugelkoordinaten beschrieben. Die Darstellung in kartesischen Koordinaten dient der besseren Visualisierung und Verständnis der Orientierungsverteilungen.

##### 3.1.1 Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes

Die Achsen werden als „1“, „2“, „3“ bezeichnet und sind die drei Hauptorientierungsrichtungen (angelehnt an die Hauptspannungsrichtungen). „1“ wird dabei als die Richtung festgelegt, in welche die meisten Fasern orientiert sind. Als Zenit wird die „3“-Achse festgelegt, der dazugehörige Zenit-Winkel ist  $\psi$ . Beide fallen im zweidimensionalen Raum weg. Als Azimut dient die „1“-Achse und der gegen den Uhrzeigersinn laufende Azimut-Winkel wird  $\xi$  genannt.

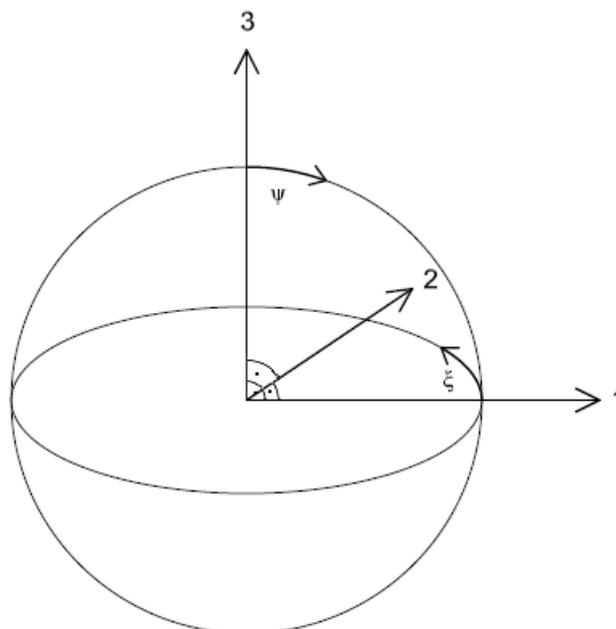


Abbildung 4: Richtungswinkel des Koordinatensystems des Faserorientierungszustandes

### 3.1.2 Lokales Koordinatensystem einer beliebigen Blickrichtung

Die Hauptachsen dieses lokalen Koordinatensystems werden mit „u“, „v“ und „w“ bezeichnet. Der Zenit-Winkel  $\theta$  geht von der „w“-Achse, hingegen der Azimut-Winkel  $\varphi$  von der „u“-Achse aus. Im zweidimensionalen Fall dient die auf die „1“-„2“-Ebene (Ebene 1) projizierte „u“-Achse  $u'$  als Hauptachse, auch fallen Winkel  $\theta$  und die „w“-Achse weg.

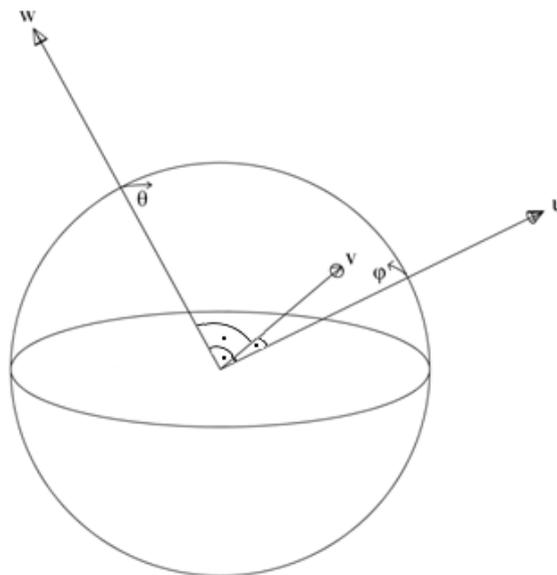


Abbildung 5: Richtungswinkel eines lokalen Blickrichtungskordinatensystem

Die Raumrichtungen zwischen dem lokalen Koordinatensystem der Blickrichtung und dem globalen Koordinatensystem der Faserorientierung werden durch die Winkel  $\beta$  und  $\alpha$  festgelegt (siehe Abbildung 6).

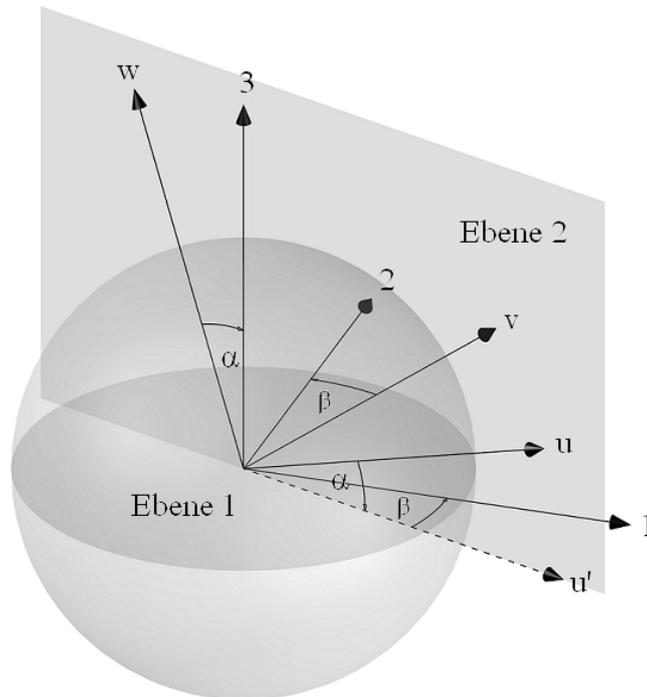


Abbildung 6: Richtungswinkel zwischen einem lokalen Blickrichtungskordinatensystem und dem Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes

Im zweidimensionalen Raum wird nur Ebene 1 betrachtet. Die „u“-Achse fällt also mit deren Projektion auf die Ebene 1 ( $u'$ ) zusammen.

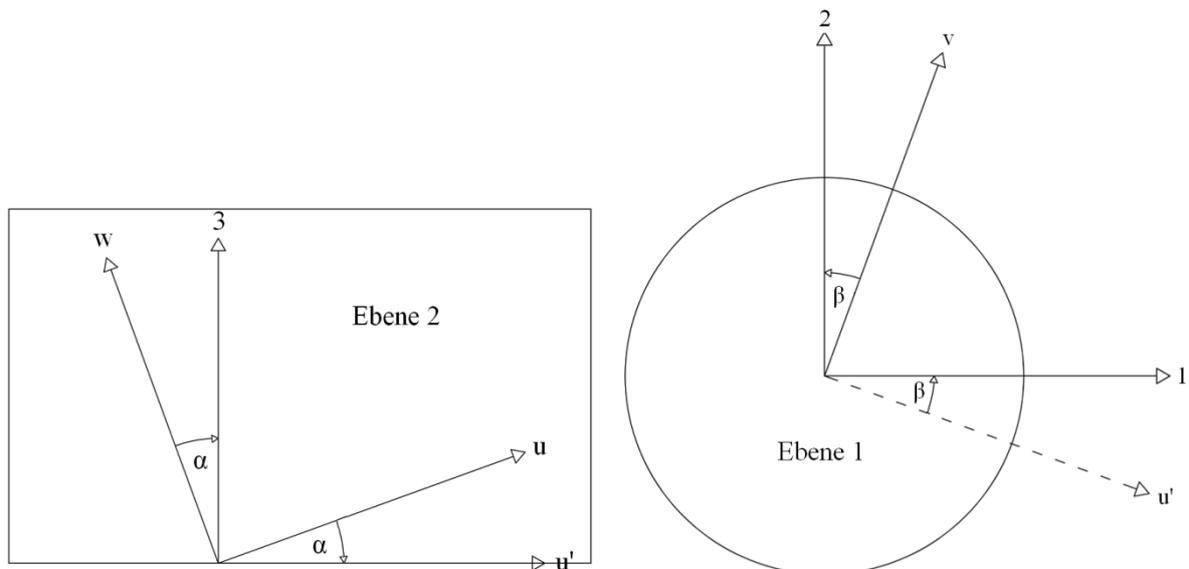


Abbildung 7: Darstellung der Ebenen 1 und 2 aus Abbildung 6

### 3.1.3 Koordinatensystem des Bauteils

Dieses Koordinatensystem wird durch die Geometrie des Bauteils, Oberfläche und Kanten, definiert. Die Längsrichtung wird als x-Achse, die Dicke als z-Achse und die Breite als y-Achse bestimmt. Der Zenit-Winkel zwischen dem Koordinatensystem des Bauteils und dem Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes wird mit  $\gamma$  angeführt, der Azimut-Winkel mit  $\delta$ . Dieser Zusammenhang ist erst dann von Interesse, wenn zB. Bei der Bemessung ein globales Koordinatensystem des Bauteils benötigt wird. Für die Herleitung der Faserorientierungsbeiwerte ist dies aber nicht notwendig und wird deshalb weiter nicht verwendet.

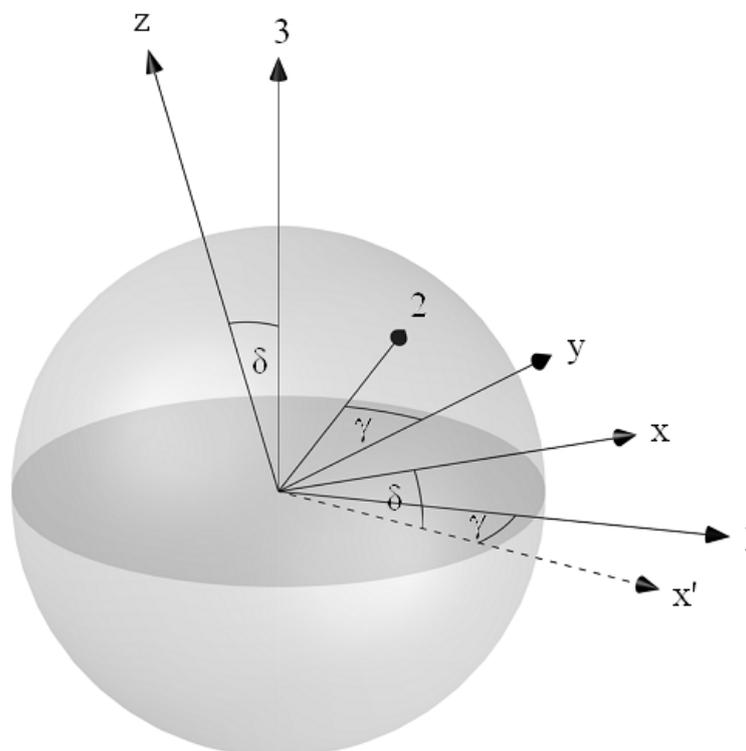


Abbildung 8: Winkel zwischen dem Koordinatensystem des Bauteils und dem Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes

### 3.1.4 Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen in 2D

Es ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinatensystemen (siehe Ebene1)

$$\begin{pmatrix} "1" \\ "2" \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

Der Zusammenhang zwischen Blickrichtungskordinatensystem und dem des Faserorientierungszustandes ergibt sich durch

$$\begin{pmatrix} "1" \\ "2" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \cos \beta + v \sin \beta \\ -u' \sin \beta + v \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} "1" \cos \beta - "2" \sin \beta \\ "1" \sin \beta + "2" \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Aus den Gleichungen (3-8) und (3-3) berechnet sich für  $\xi$

$$\begin{pmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta \\ -\cos \varphi \sin \beta + \sin \varphi \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

$$\xi = -\sin^{-1}(\sin(\beta - \varphi)) = \varphi - \beta \quad (3-6)$$

Und dementsprechend

$$\varphi = \xi + \beta \quad (3-7)$$

### 3.1.5 Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen in 3D

Ähnlich wie im zweidimensionalen Raum sind die Zusammenhänge zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} "1" \\ "2" \\ "3" \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \psi \cos \xi \\ \sin \psi \sin \xi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

Der Zusammenhang zwischen Blickrichtungskordinatensystem und dem des Faserorientierungszustandes ist

$$\begin{pmatrix} "1" \\ "2" \\ "3" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \alpha \cos \beta + v \sin \beta - w \sin \alpha \cos \beta \\ -u \cos \alpha \sin \beta + v \cos \beta + w \sin \alpha \sin \beta \\ u \sin \alpha + w \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} "1" \cos \alpha \cos \beta - "2" \cos \alpha \sin \beta + "3" \sin \alpha \\ "1" \sin \beta + "2" \cos \beta \\ -"1" \sin \alpha \cos \beta + "2" \sin \alpha \sin \beta + "3" \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

Aus den Gleichungen (3-8) und (3-10) berechnet sich für  $\xi$  und  $\psi$

$$\begin{pmatrix} \sin \psi \cos \xi \\ \sin \psi \sin \xi \\ \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta + \sin \theta \sin \varphi \sin \beta - \cos \theta \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta + \sin \theta \sin \varphi \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$$\psi = \cos^{-1}(\sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha) \quad (3-13)$$

$$\xi = \cos^{-1} \left( \frac{\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta + \sin \theta \sin \varphi \sin \beta - \cos \theta \sin \alpha \cos \beta}{\sin^{-1}(\cos^{-1}(\sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha))} \right) \quad (3-14)$$

Und aus (3-9) und (3-11) für  $\theta$  und  $\varphi$

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \cos \xi \cos \alpha \cos \beta - \sin \psi \sin \xi \cos \alpha \sin \beta + \cos \psi \sin \alpha \\ \sin \psi \cos \xi \sin \beta + \sin \psi \sin \xi \cos \beta \\ -\sin \psi \cos \xi \sin \alpha \cos \beta + \sin \psi \sin \xi \sin \alpha \sin \beta + \cos \psi \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

$$\theta = \cos^{-1}(-\sin \psi \cos \xi \sin \alpha \cos \beta + \sin \psi \sin \xi \sin \alpha \sin \beta + \cos \psi \cos \beta) \quad (3-16)$$

$$\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \psi \cos \xi \sin \beta + \sin \psi \sin \xi \cos \beta}{\sin^{-1}(\cos^{-1}(-\sin \psi \cos \xi \sin \alpha \cos \beta + \sin \psi \sin \xi \sin \alpha \sin \beta + \cos \psi \cos \beta))} \right) \quad (3-17)$$

## 3.2 Statistische Definitionen

### 3.2.1 Ereignisse $\theta_n$ und $\varphi_n$

Ein Ereignis ist in diesem Fall die Orientierungsrichtung der Fasern. Durch die Winkel  $\theta$  und  $\varphi$ , bzw.  $\xi$  und  $\psi$ , ist die Lage der Einzelfaser im Raum genau bestimmt.

Die verschiedenen Ereignisse sind Element der reellen Zahlen und werden durch die Grundmenge  $\Omega$  begrenzt.

### 3.2.2 Grundmenge $\Omega$

$\Omega$  ist der Raum der Ereignisse und in diesem Fall für  $\varphi$  und  $\xi$  ein Intervall zwischen 0 und  $\pi$  und für  $\theta$  und  $\psi$  ein Intervall zwischen 0 und  $\pi$ . Somit ist jede mögliche Ausrichtung der Fasern mit einer Halbkugeloberfläche beschrieben und abgedeckt. Wird nämlich eine Faser um  $180^\circ$  gedreht, nimmt sie wieder dieselbe Position ein. Hiermit ist auch die Wahrscheinlichkeit

des sicheren Ereignisses gegeben, das heißt 100% der Orientierungsmöglichkeiten können mit diesen Intervallen beschrieben werden, das Ereignis tritt sicher ein. Behloul geht aus Symmetriegründen sogar noch weiter und definiert die Faserorientierung anhand einer Achtelkugel.

### 3.2.3 Wahrscheinlichkeit P

Dementsprechend ergibt das Integral, mit der Grundmenge als Grenzwerte, über alle Auftretenswahrscheinlichkeiten der Ereignisse den Wert 1 (100%).

Die Orientierung der Fasern im Raum wird mittels einer Verteil-Funktion  $p$  definiert. Sie beinhaltet alle möglichen Ereignisse. Die Faserkonzentration wird als gleichmäßig angenommen, da das betrachtete Volumen des Bauteils im Verhältnis klein ist.

Im Allgemeinen gilt in 2D

$$P = \int_{\xi=0}^{\pi} p(\xi) d\xi = 1 \quad (3-18)$$

und ebenso

$$P = \int_{\varphi=0}^{\pi} p(\varphi) d\varphi = 1 \quad (3-19)$$

Im 3D fließt jetzt neben dem Winkel  $\psi$  im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes auch der Faktor  $\sin(\psi)$  in die Formel ein. Dieser berücksichtigt die Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten. Das Volumenelement ändert sich nämlich, wie bei der Herleitung der Formel für Kugeloberflächen via Integral.

$\psi=0$  im Kugelkoordinatensystem entspricht einem Punkt (Abbildung 9, geografischer Nordpol), im kartesischen Koordinatensystem bildet sich hingegen dieser Punkt als Gerade entlang von  $\xi$  ab (siehe zB. Abbildung 47).

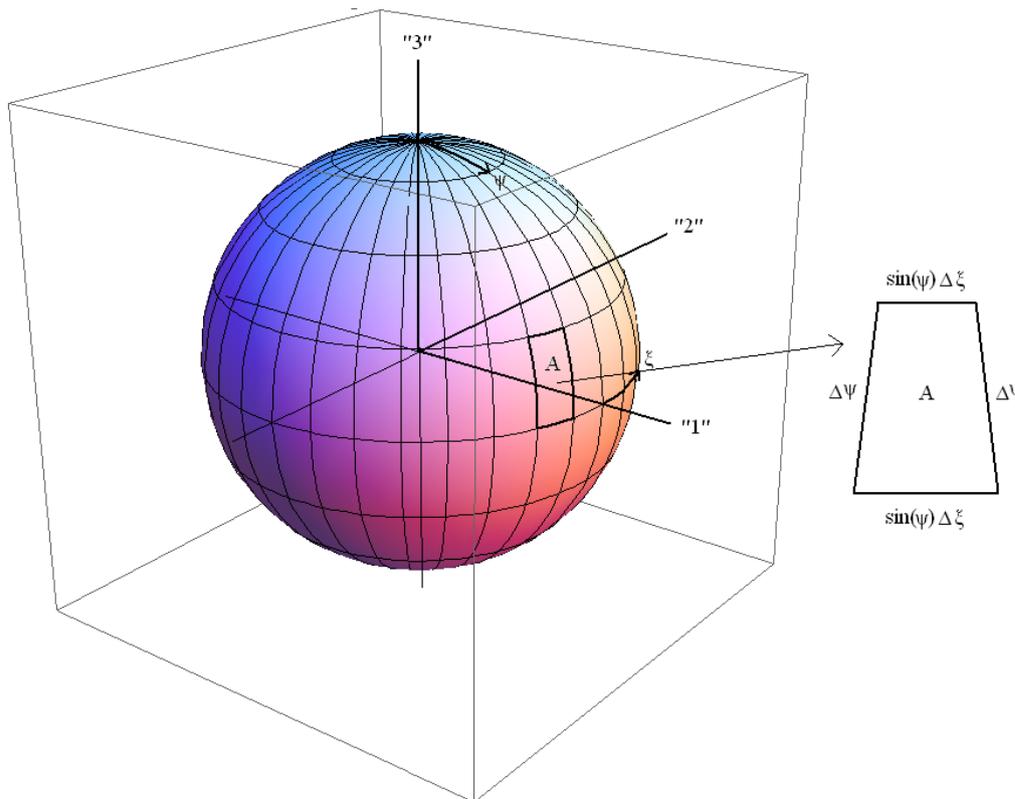


Abbildung 9: Darstellende Beschreibung Faktors  $\sin(\psi)$

Daraus folgt jetzt für den dreidimensionalen Fall

$$P = \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\xi=0}^{\pi} p(\xi, \psi) \sin \psi d\xi d\psi = 1 \quad (3-20)$$

Dieser Faktor „verzerrt“ die Darstellung in kartesischen Koordinaten etwas, das heißt das Volumen unter der Verteil-Funktion  $p(\xi, \psi)$  ist nicht mehr gleich 1.

Dasselbe gilt natürlich auch für das Koordinatensystem der Blickrichtung mit  $\theta$  und  $\varphi$ .

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} p(\varphi, \theta) \sin \varphi d\varphi d\theta = 1 \quad (3-21)$$

### 3.3 Isotrope Verteil-Funktionen 2D und 3D

Behloul löste vorerst den isotropen Fall. Dabei haben die Fasern im Beton eine gleichmäßige dreidimensionale Ausrichtung haben. Das heißt, dass jede Orientierung die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit hat. Isotropes Material hat in alle Richtungen dieselben Eigenschaften, wie zum Beispiel die Druckfestigkeit von Beton. Andere isotrope Werkstoffe sind Stahl, Glas, Gummi und Gase.

In diesem Fall wird die Verteil-Funktion für den zweidimensionalen Fall mit der Bedingung (3-18) zu

$$p(\varphi)_{\text{iso},2\text{D}} = \text{const.} = \frac{1}{\pi} \quad (3-22)$$

Und in 3D mit (3-21) zu

$$p(\theta, \varphi)_{\text{iso},3\text{D}} = \text{const.} = \frac{1}{2\pi} \quad (3-23)$$

„iso“ gibt die Art der Verteil-Funktion an und 2D dass sie im zweidimensionalen Raum gilt. In anderen Verteil-Funktionen gibt es noch die Buchstaben „h“ und „i“, welche für eine homogene oder inhomogene Verteilung stehen.

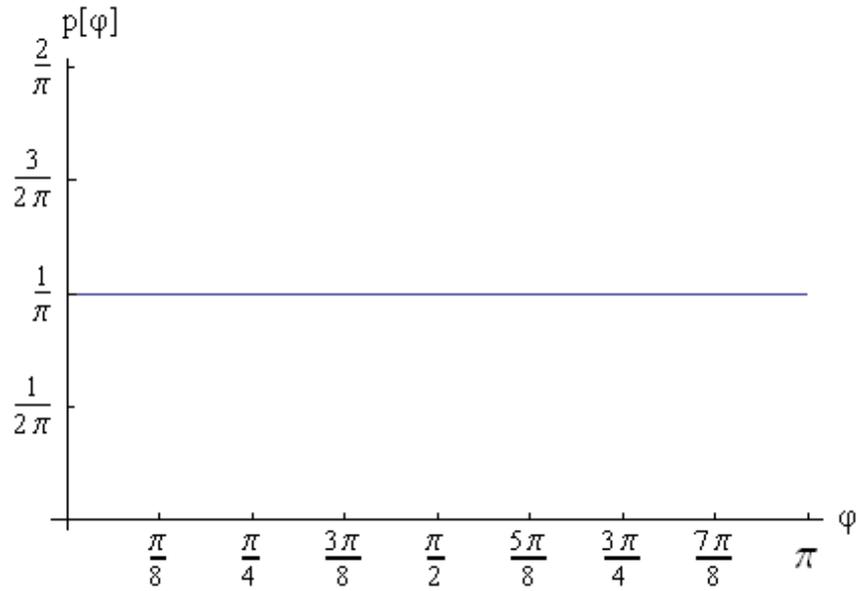


Abbildung 10: Verlauf von  $p(\varphi)$  im isotropen Fall 2D

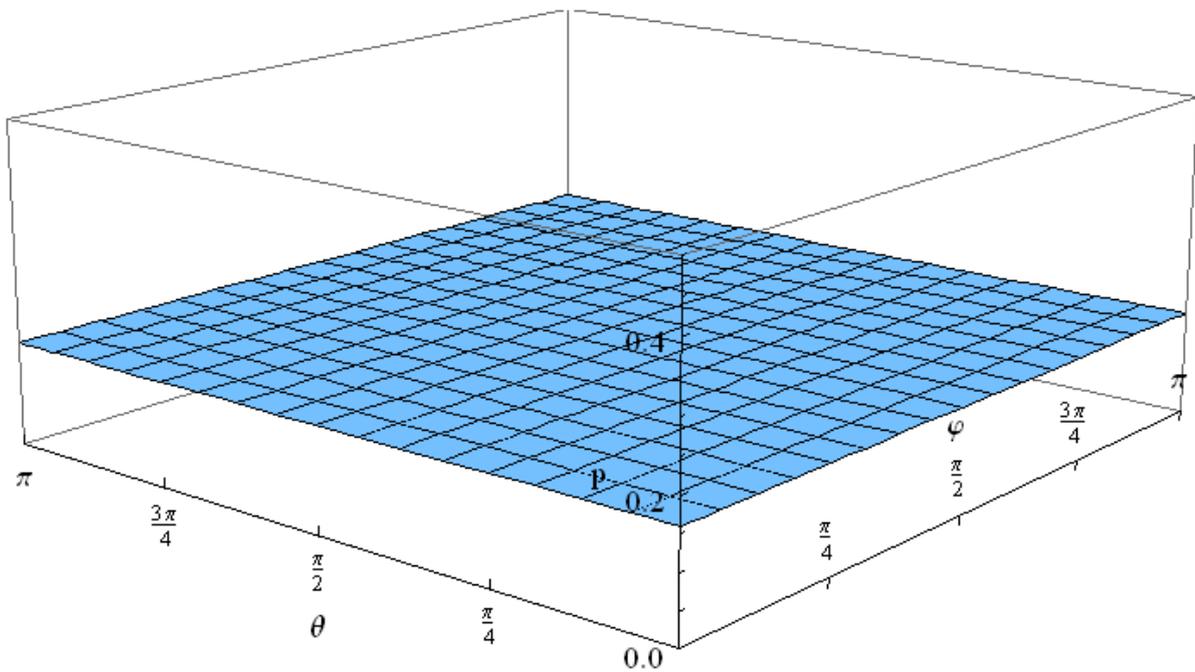


Abbildung 11: Verlauf von  $p(\theta, \varphi)$  im isotropen Fall 3D

### 3.4 Anisotrope Verteil-Funktionen allgemein

Fasern richten sich aber im Allgemeinen eher in Fließrichtung aus, was zu anisotropen Zuständen führt. Das heißt, im zu untersuchenden Probekörper existiert eine Richtung in der die meisten Fasern orientiert sind ( $p_1$ ; 1.Hauptorientierungsrichtung).  $\beta$  beschreibt den Winkel zwischen Blickrichtungsachse  $u'$  und der Hauptorientierungsrichtung 1. Geht man davon aus, dass die natürlichen Vorgänge während des Mischens und Gießens des Faserbetons nicht zu un stetigen Orientierungszuständen (wie z.B. orthotropen) führen, tritt die „faser-schwächste“ Richtung ( $p_2$ ; 2.Hauptorientierungsrichtung) senkrecht zur 1. Hauptrichtung auf.

Im dreidimensionalen Raum wird die Darstellung durch die Faserorientierungsrichtung 3 mit Hauptorientierungsrichtung  $p_3$ , der Blickrichtung  $w$  und Winkel  $\alpha$  zwischen diesen beiden Achsen erweitert.

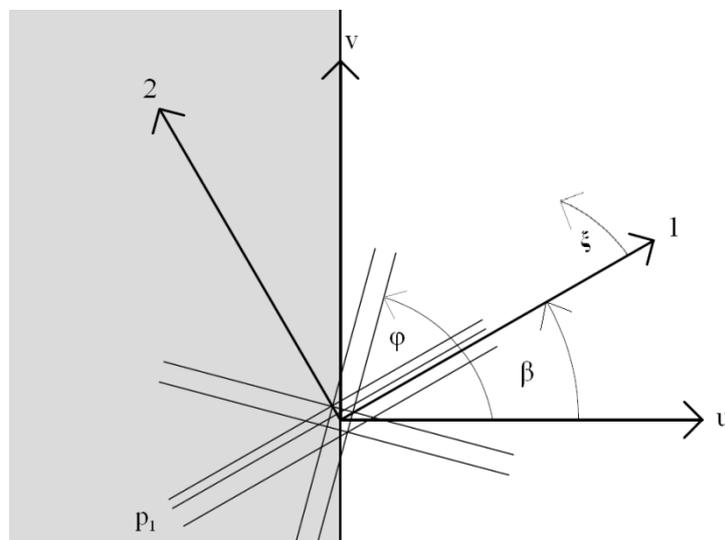


Abbildung 12: Definition der Winkel und Achsen in 2D

Die Homogenität bedeutet in diesem Fall, dass es keine Richtung gibt, in die keine Fasern zeigen. Gibt es mehrere Richtungen in die keine Fasern zeigen, wird diese Verteil-Funktion als inhomogen bezeichnet. Bedingung für eine brauchbare Verteil-Funktion ist deren Integrierbarkeit und die Reduzierung auf eine möglichst einfache mathematische Darstellung. Die Bedingung (3-18) muss erhalten bleiben.

Ein Beispiel für solch eine homogene Verteil-Funktion im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes kann in Abbildung 13 und Abbildung 14 betrachtet werden.  $p(\xi)$  ist ein sich laufend verändernder Wert in Abhängigkeit von  $\xi$ .

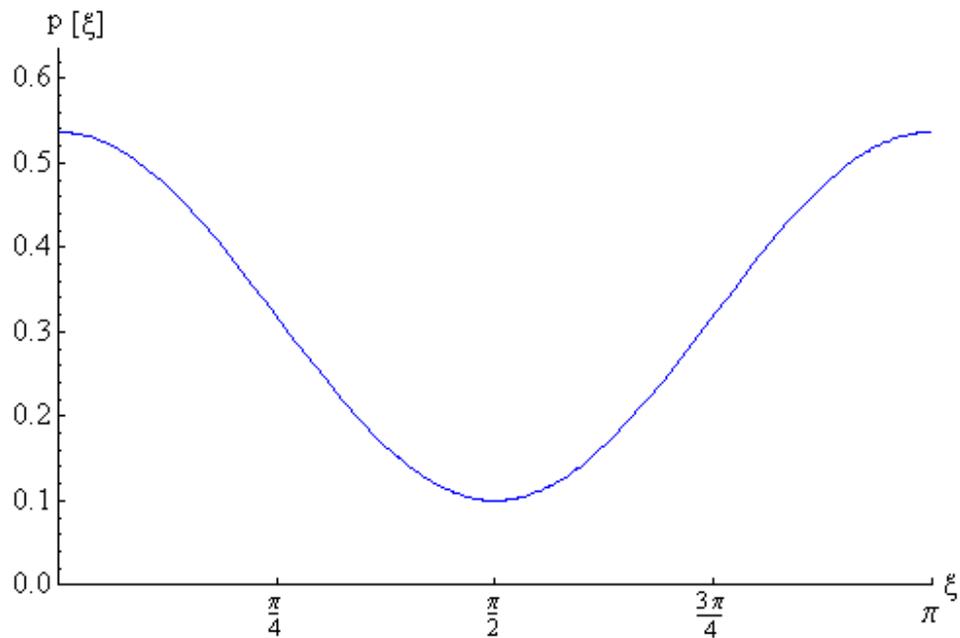


Abbildung 13: Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten der Faserorientierung in 2D

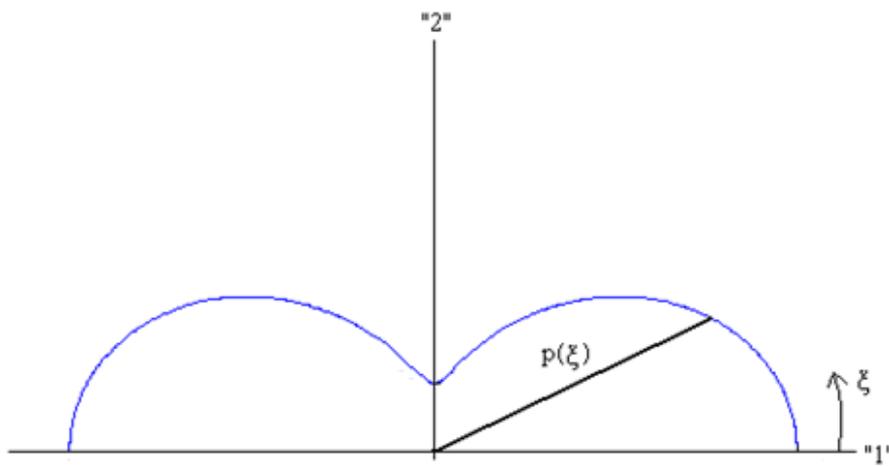


Abbildung 14: Verteil-Funktion in Polarkoordinaten der Faserorientierung in 2D

Dieselbe Verteil-Funktion im Koordinatensystem der Blickrichtung ist in Abbildung 15 und Abbildung 16 einsehbar. In diesem Fall ist  $p$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  dargestellt.

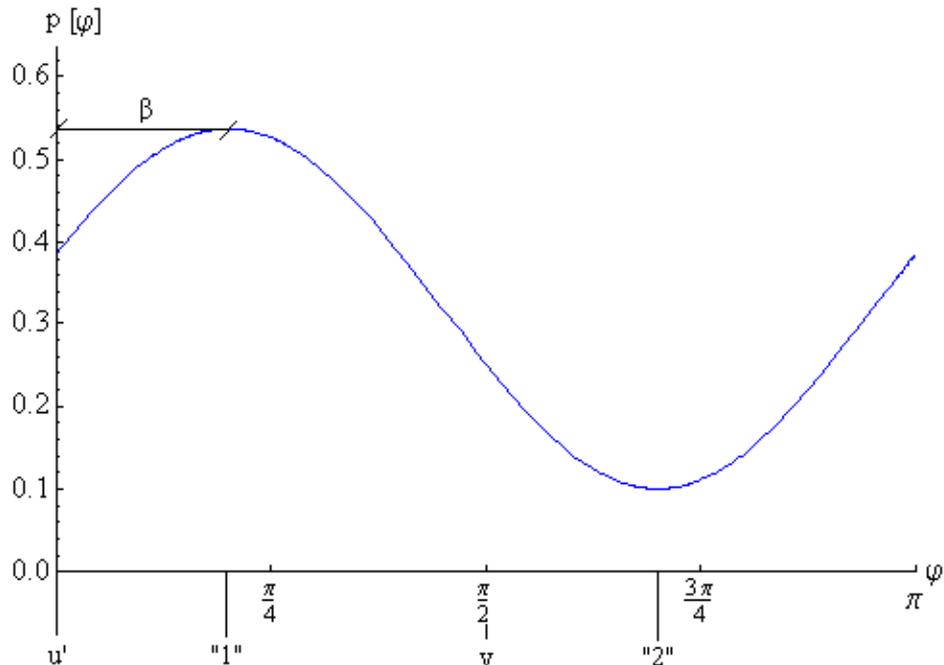


Abbildung 15: Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Verteil-Funktionen ist in kartesischen Koordinaten die Phasenverschiebung um  $\beta$  oder in Polarkoordinaten die Verdrehung um  $\beta$ . Im dreidimensionalen Raum kommt die Verschiebung bzw. Verdrehung um  $\alpha$  noch dazu.

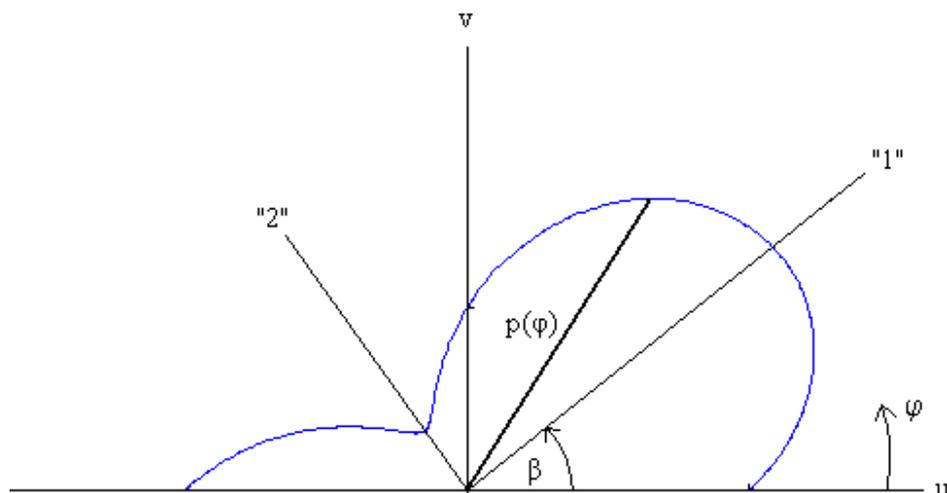


Abbildung 16: Verteil-Funktion in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D

In den ersten beiden 2D-Verteil-Funktionen des nächsten Kapitels wird im Koordinatensystem der Blickrichtung gerechnet.

### 3.5 Anisotrope homogene Verteil-Funktion in 2D

#### 3.5.1 Lineare Verteil-Funktion

Folgende lineare Verteil-Funktion wurde mit der Hand untersucht:

$$\begin{aligned} p_{h,lin,2D,1} &= p_0 + s \\ p_{h,lin,2D,2} &= p_1 - s \\ p_{h,lin,2D,3} &= p_2 + s \end{aligned} \quad (3-24)$$

Die Funktion wird bei den lokalen Minima und Maxima aufgrund der Unstetigkeit geteilt. Für einen beliebigen Winkel  $\beta$  gibt es aber nicht drei sondern vier Intervalle, hinzu kommt nämlich das Intervall bei  $\pi/2$  aufgrund des Absolut-Betrags des Einzelfaserorientierungsbeiwerts (siehe Kapitel 4) welcher später noch in die Rechnung einfließen wird.

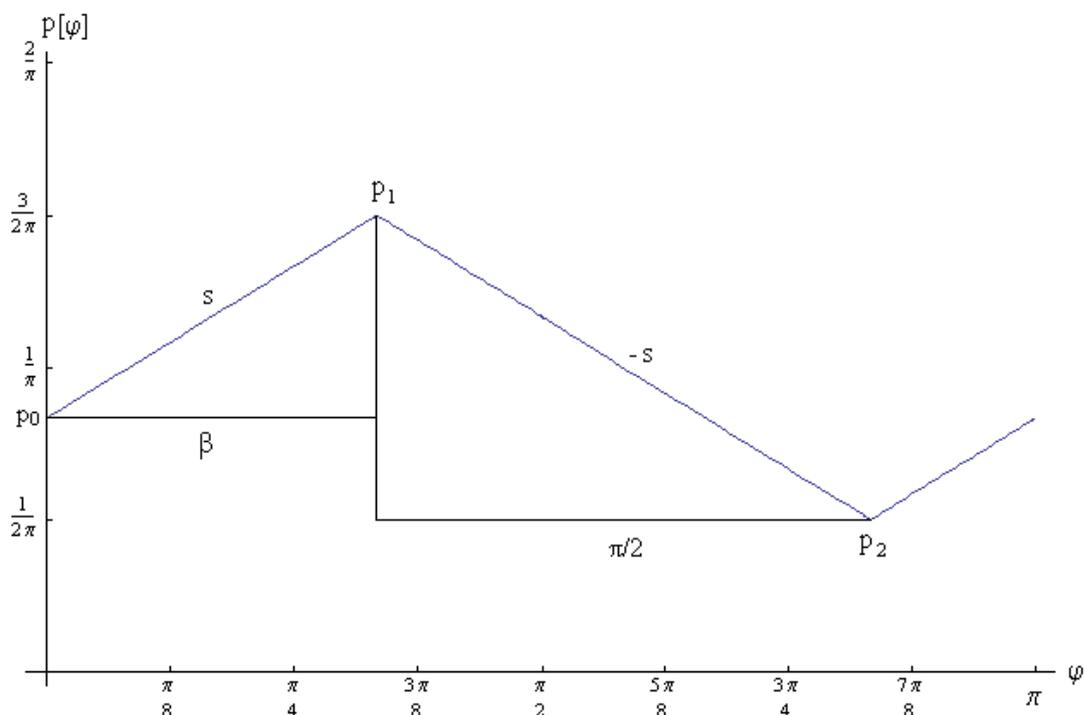


Abbildung 17: Beispiel einer homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D mit Annahme  $\beta=\pi/3$  in kartesischen Koordinaten 2D

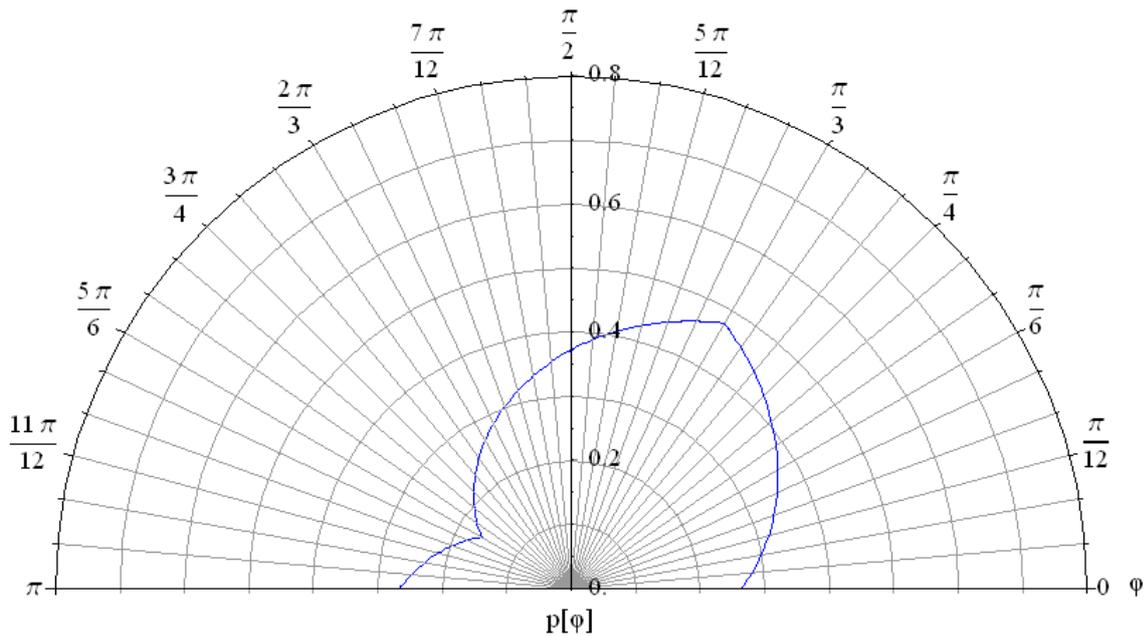


Abbildung 18: Beispiel einer homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D mit Annahme  $\beta = \pi/3$  in Polarkoordinaten 2D

Die lineare Verteil-Funktion beschreibt eine Gerade mit der Steigung  $s$  mit dem höchsten Punkt  $p_1$ . Mit Bedingung (3-19) lässt sich das Minimum  $p_2$  über das Verhältnis der Dreiecke mit gleichem Winkel berechnen.

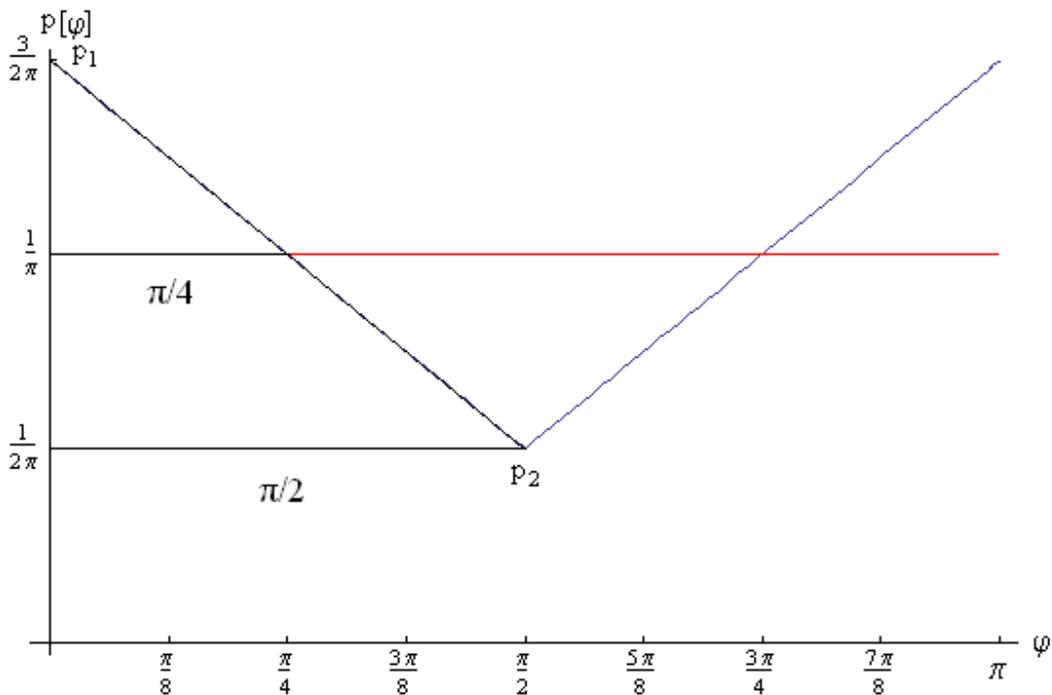


Abbildung 19: Bestimmung der Parameter der linearen Verteil-Funktion

$$\begin{aligned}\frac{p_1 - \frac{1}{\pi}}{\frac{\pi}{4}} &= \frac{p_1 - p_2}{\frac{\pi}{2}} \\ 2 p_1 - \frac{1}{\pi} &= p_1 - p_2 \\ p_2 &= \frac{2}{\pi} - p_1\end{aligned}\quad (3-25)$$

Hier haben wir die geringste Auftretenswahrscheinlichkeit.

Die Steigung  $s$  der linearen Funktion wird folgendermaßen berechnet

$$s = \frac{p_1 - \frac{1}{\pi}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \quad (3-26)$$

Genauso lässt sich  $p_0$  aus den Dreiecken mit gleichem Winkel berechnen (Abbildung 18)

$$\begin{aligned}p_{h,lin,2D,1} &= \left( \frac{4}{\pi^2} \beta + p_1 - \frac{4}{\pi} p_1 \beta \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \varphi \\ p_{h,lin,2D,2} &= p_1 - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) (\varphi - \beta) \\ p_{h,lin,2D,3} &= \left( \frac{2}{\pi} - p_1 \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \varphi - \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \right)\end{aligned}\quad (3-27)$$

Zur Kontrolle wird in Bedingung (3-19) eingesetzt

$$\begin{aligned}P &= P_{h,lin,2D,1} + P_{h,lin,2D,2} + P_{h,lin,2D,3} + P_{h,lin,2D,4} \\ &= \int_0^{\beta} p_{h,lin,2D,1} d\varphi + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} p_{h,lin,2D,2} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\beta} p_{h,lin,2D,2} d\varphi \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}+\beta}^{\pi} p_{h,lin,2D,3} d\varphi\end{aligned}$$

$$P_{h,lin,2D,1} = \int_0^{\beta} \left( \frac{4}{\pi^2} \beta + p_1 - \frac{4}{\pi} p_1 \beta \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \beta^2 + p_1 \beta - \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2$$

$$P_{h,lin,2D,2} = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} p_1 - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) (\varphi - \beta) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} + p_1 \beta - \frac{2}{\pi} \beta - \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 + \frac{2}{\pi^2} \beta^2$$

$$P_{h,lin,2D,2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\beta} p_1 - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \, d\varphi =$$

$$= -p_1 \beta + \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 - \frac{2}{\pi^2} \beta^2 + \frac{2}{\pi} \beta$$

$$P_{h,lin,2D,2} = \int_{\frac{\pi}{2}+\beta}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi} - p_1 \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \varphi - \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \right) \, d\varphi =$$

$$= -p_1 \beta + \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \beta^2$$

Die Summe aller Teilergebnisse ist dann

$$P = P_{h,lin,2D,1} + P_{h,lin,2D,2} + P_{h,lin,2D,3} + P_{h,lin,2D,4} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \beta^2 + p_1 \beta - \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 + \frac{1}{2} + p_1 \beta - \frac{2}{\pi} \beta - \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 + \frac{2}{\pi^2} \beta^2 - p_1 \beta + \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2$$

$$- \frac{2}{\pi^2} \beta^2 + \frac{2}{\pi} \beta - p_1 \beta + \frac{2}{\pi} p_1 \beta^2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \beta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(3-28)

Die Lösung ergibt 1 und ist von  $\beta$  unabhängig, das heißt es kann jeder Winkel  $\beta$  und jedes beliebige  $p_1$  eingesetzt werden, solange die Funktion homogen bleibt. Die Grenzen für  $p_1$  werden mit

$$\frac{1}{\pi} \geq p_1 \geq \frac{2}{\pi} \quad (3-29)$$

bestimmt, da  $p_2$  nicht kleiner Null sein darf und mit  $1/\pi$  der isotrope Fall eintrifft.

### 3.5.2 Cosinus-Verteil-Funktion

Folgende Cosinus-Verteil-Funktion wurde mit der Hand geprüft:

$$p_{h,cos,2D} = a \cos(\omega\varphi) + m \quad (3-30)$$

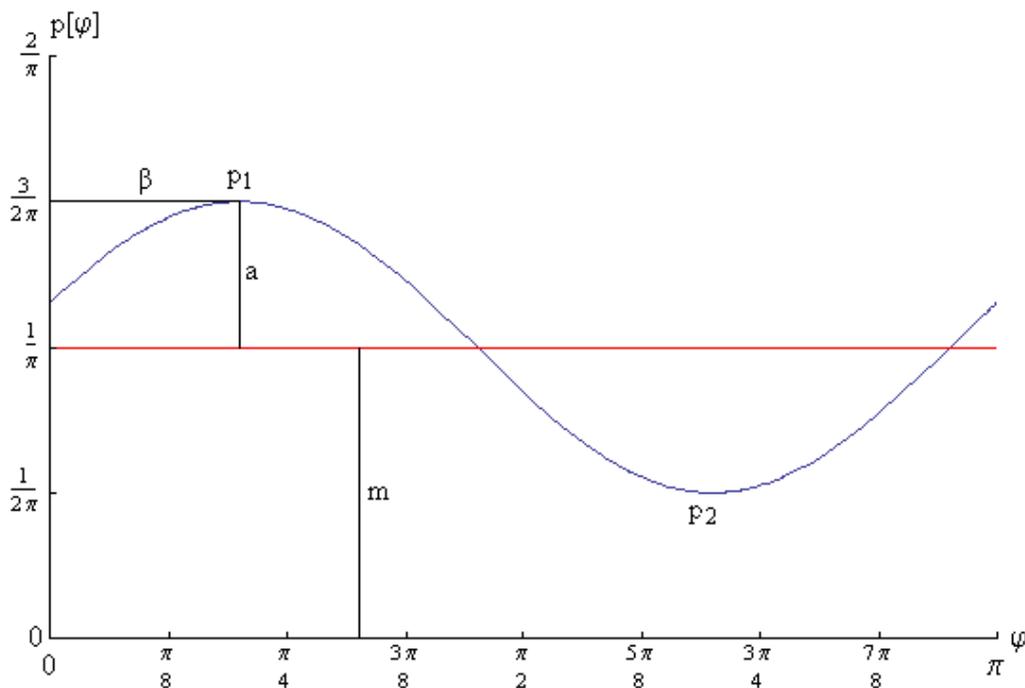


Abbildung 20: Beispiel einer Cosinus-Verteil-Funktion mit  $\beta = \pi/5$  in kartesischen Koordinaten in 2D

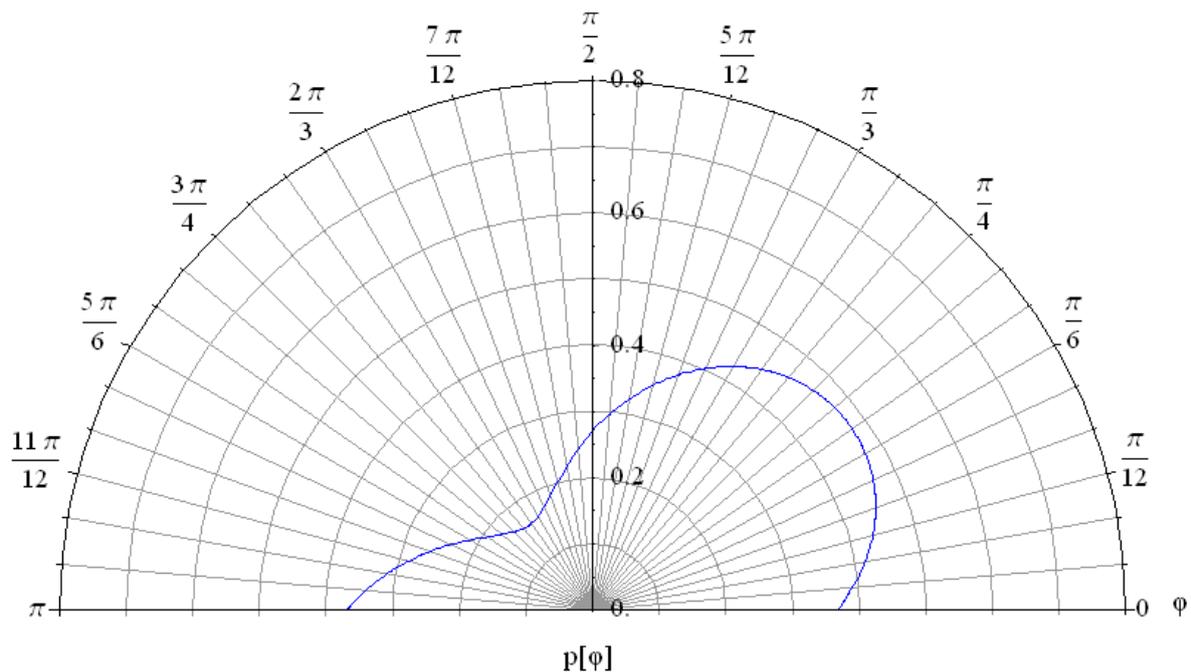


Abbildung 21: Beispiel einer Cosinus-Verteil-Funktion mit  $\beta=\pi/5$  in Polarkoordinaten in 2D

Auch in der Cosinus-Verteil-Funktion muss (3-19) gelten.

Der Mittelwert  $m$  berechnet sich aus

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{\pi} p_{h,cos,2D}(\varphi) d\varphi = 1 = \int_0^{\pi} \cos \varphi + m d\varphi = \sin \pi + m \pi - \sin 0 - m 0 \\
 &= m \pi \\
 m \pi &= 1 \\
 m &= \frac{1}{\pi}
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

Und die Amplitude  $a$  ergibt sich aus Abbildung 20 mit

$$a = p_1 - \frac{1}{\pi} \tag{3-32}$$

Die Frequenz  $\omega$  berechnet man aus

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad (3-33)$$

mit T als Periodendauer. Diese ergibt sich aus den Grenzen der Rotationswinkel der Koordinatensysteme. Somit ergibt sich für die Verteil-Funktion des Cosinus folgende Formel

$$p_{h,cos,2D} = \left(p_1 - \frac{1}{\pi}\right) \cos(2(\varphi - \beta)) + \frac{1}{\pi} \quad (3-34)$$

Als Kontrolle dient wiederum (3-19)

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi} \left(p_1 - \frac{1}{\pi}\right) \cos(2(\varphi - \beta)) + \frac{1}{\pi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left(p_1 - \frac{1}{\pi}\right) (\cos(2\varphi) \cos(2\beta) + \sin(2\varphi) \sin(2\beta)) + \frac{1}{\pi} d\varphi \\ &= \left(p_1 - \frac{1}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{2} \sin(2\beta) - 0\right) + 1 \\ &\quad - \left(p_1 - \frac{1}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{2} \sin(2\beta) - 0\right) - 0 = 1 \end{aligned} \quad (3-35)$$

Die Grenzen für  $p_1$  werden mit

$$\frac{1}{\pi} \leq p_1 \leq \frac{2}{\pi} \quad (3-36)$$

bestimmt, da  $p_2$  nicht kleiner Null sein darf und mit  $1/\pi$  der isotrope Fall eintritt.

### 3.5.3 Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion

Diese Funktion wurde mit dem mathematischen Software-Programmes „Mathematica“ von „Wolfram Research, Inc.“ erstellt. Sie dient als Vorlage für die homogene Verteil-Funktion im dreidimensionalen Raum und ist eigentlich eine umgeformte Variante der Cosinus-Verteil-Funktion mit anderen Parametereingaben. Integrationen mit  $\cos(2x)$  im Zusammenhang mit anderen Funktionen bereiten nämlich dem Programm „Mathematica“ des Öfteren Schwierigkeiten.

Es wird im Unterschied zu den beiden vorherigen Verteil-Funktionen vom Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes ausgegangen. Dieser Schritt wurde in den Kapiteln vorher übersprungen. Nachher erfolgt eine Koordinatentransformation in die lokale Blickrichtung.

Die untersuchte Funktion lautet

$$p_{h,\cos Q,2D}(\xi) = (p_1 - p_2) \cos^2(\xi) + p_2 \quad (3-37)$$

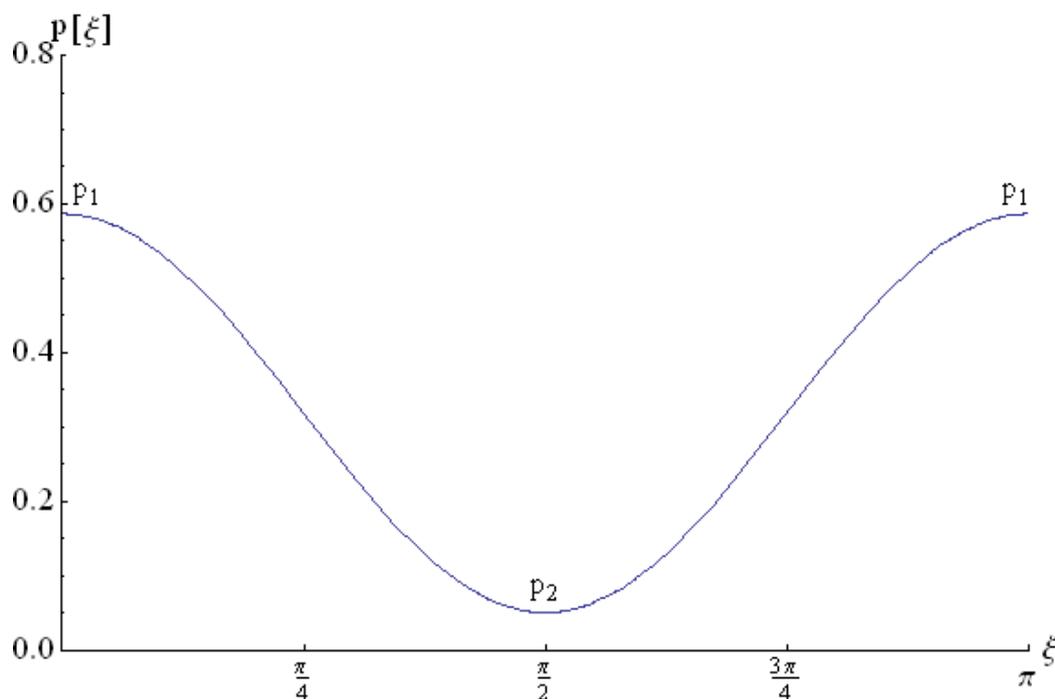


Abbildung 22: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

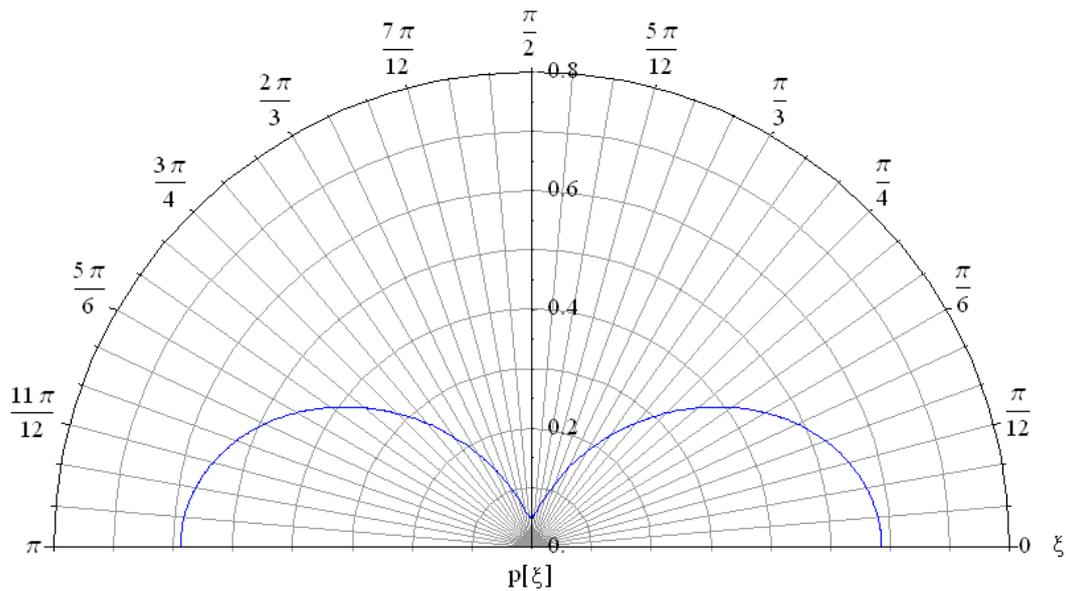


Abbildung 23: beliebige homogene Verteilungsfunktion Cosinusquadrat in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

Mit (3-18) als Bedingung ergibt sich für  $p_1$

$$p_1 = \frac{2 - \pi p_2}{\pi} \quad (3-38)$$

$p_{h, \cos Q, 2D}(\xi)$  wird also zu

$$p_{h, \cos Q, 2D}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi} - p_2\right) \cos^2(\xi) + p_2 \quad (3-39)$$

Als Kontrolle kann das Integral (3-18) mit Einsetzen von  $p_{h, \cos Q, 2D}$  aufgelöst werden, das Ergebnis ist 1.

Die Verdrehung um  $\beta$  folgt aus der Koordinatentransformation (Kapitel 3.1.4). Aus (3-39) wird also

$$p_{h, \cos Q, 2D}(\varphi) = \left(\frac{2}{\pi} - p_2\right) \cos^2(\varphi - \beta) + p_2 \quad (3-40)$$

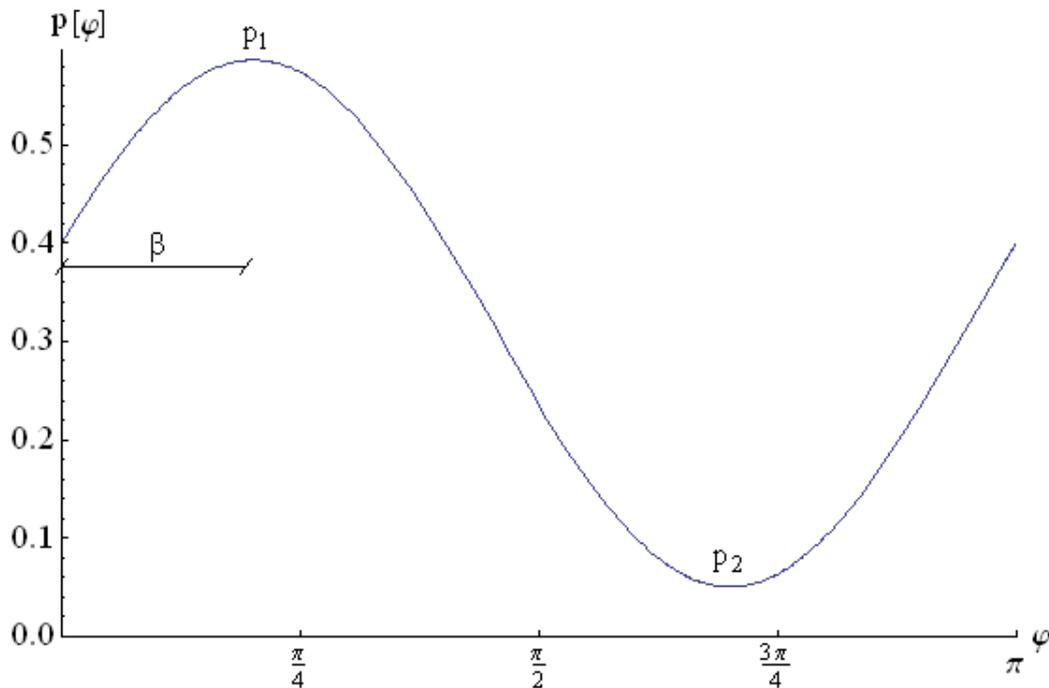


Abbildung 24: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat mit gewähltem  $\beta = \pi/5$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D

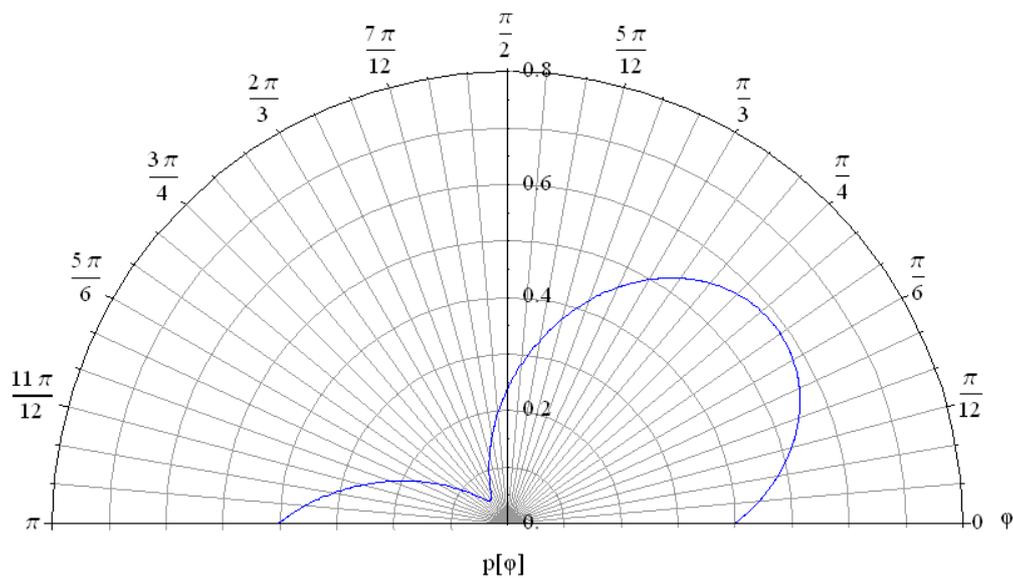


Abbildung 25: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat mit gewähltem  $\beta = \pi/5$  in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D

$p_2$  hat einen positiven Wert und wird nach oben durch den isotropen Fall begrenzt

$$0 \leq p_2 \leq \frac{1}{\pi} \quad (3-41)$$

### 3.5.4 Vergleich der homogenen Verteil-Funktionen in 2D

Die behandelten homogenen Verteil-Funktionen in 2D werden nun gegenübergestellt. Da die Cosinus-Quadrat-Funktion nur die umgeformte Version der Cosinus-Verteil-Funktion ist, wird diese beim Vergleich nicht berücksichtigt. Der Unterschied liegt bei der Eingabe der Parameter und dass das Programm „Mathematica“ manchmal Probleme mit dem Integrieren von  $\cos(2x)$  hat. Es bleiben die homogene lineare Verteil-Funktion und die Cosinus-Verteil-Funktion übrig. Die Eingabeparameter wurden folgendermaßen gewählt:

$$\begin{array}{lll}
 p_{h,lin,2D} : & p_1 = \frac{3}{2\pi} & \beta = \frac{\pi}{5} \\
 p_{h,cos,2D} : & p_1 = \frac{3}{2\pi} & \beta = \frac{\pi}{5} \quad (p_{h,CosQ,2D} : \quad p_2 = \frac{1}{2\pi})
 \end{array}$$

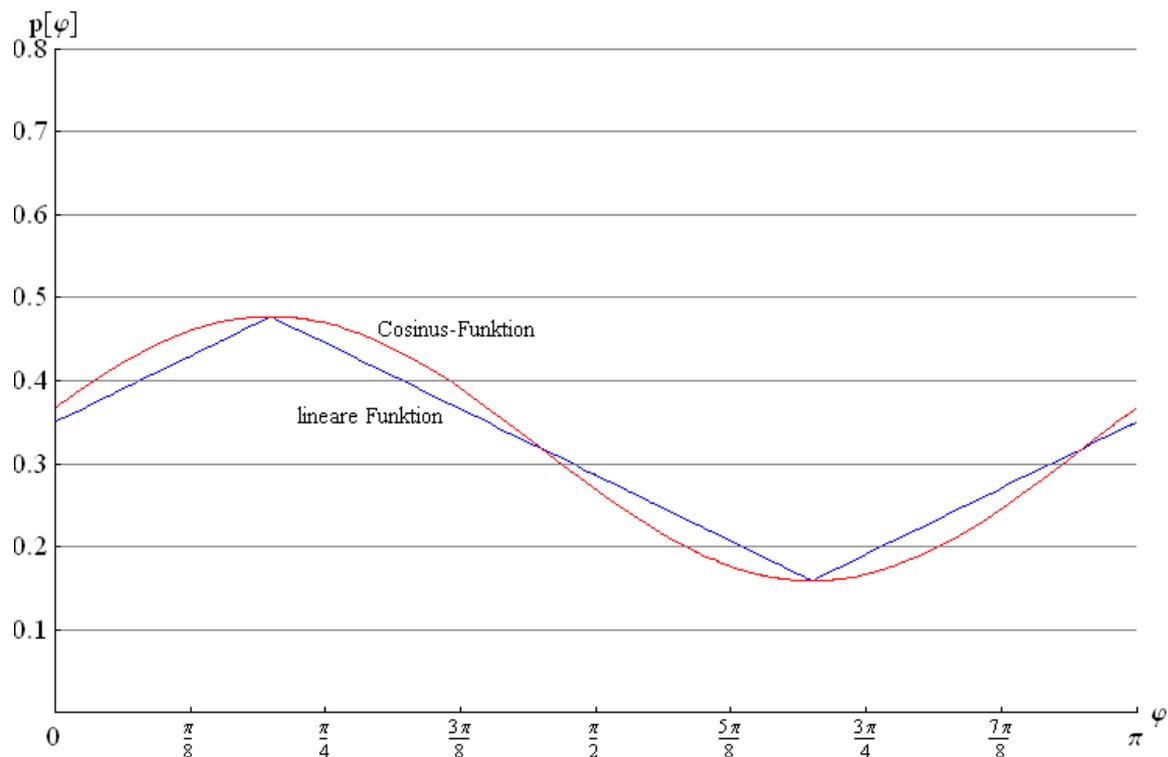


Abbildung 26: beliebig gewählte homogene Verteil-Funktionen im Vergleich in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D

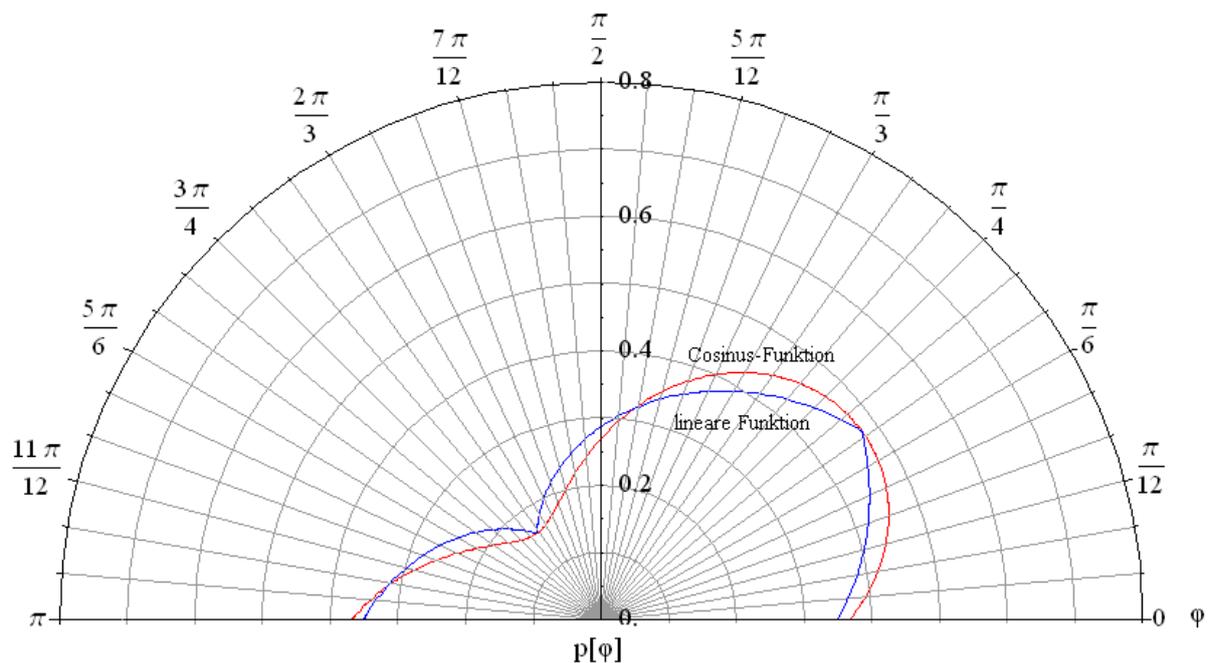


Abbildung 27: beliebig gewählte homogene Verteil-Funktionen im Vergleich in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D

Die Unstetigkeitsstellen der linearen Verteil-Funktion sind in Abbildung 26 und Abbildung 27 klar ersichtlich. Die Cosinus-Funktion hat eine „weichere“ Form und die Hauptorientierungsrichtungen sind nicht so stark definiert, aber wie erwartet haben beide in Richtung 1 und 2 denselben Wert. Welche Funktion aufschlussreicher ist, muss sich noch anhand von Probestimmungen herausstellen.

### 3.6 Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in 2D

In diesem Kapitel wird ein 2D-Fall betrachtet wo es einen geschlossenen Richtungsbereich gibt, in den keine Fasern ausgerichtet sind. Er wird als inhomogener Orientierungszustand bezeichnet.

Die gewählte Annahme ist abermals aufgrund der Unstetigkeit der Funktion in zwei Intervalle unterteilt.  $p_1$  ist auch hier die Richtung in der die meisten Fasern orientiert sind und  $\Delta\varphi$  ist die Hälfte der Bandbreite der Richtungen in die Fasern auftreten.

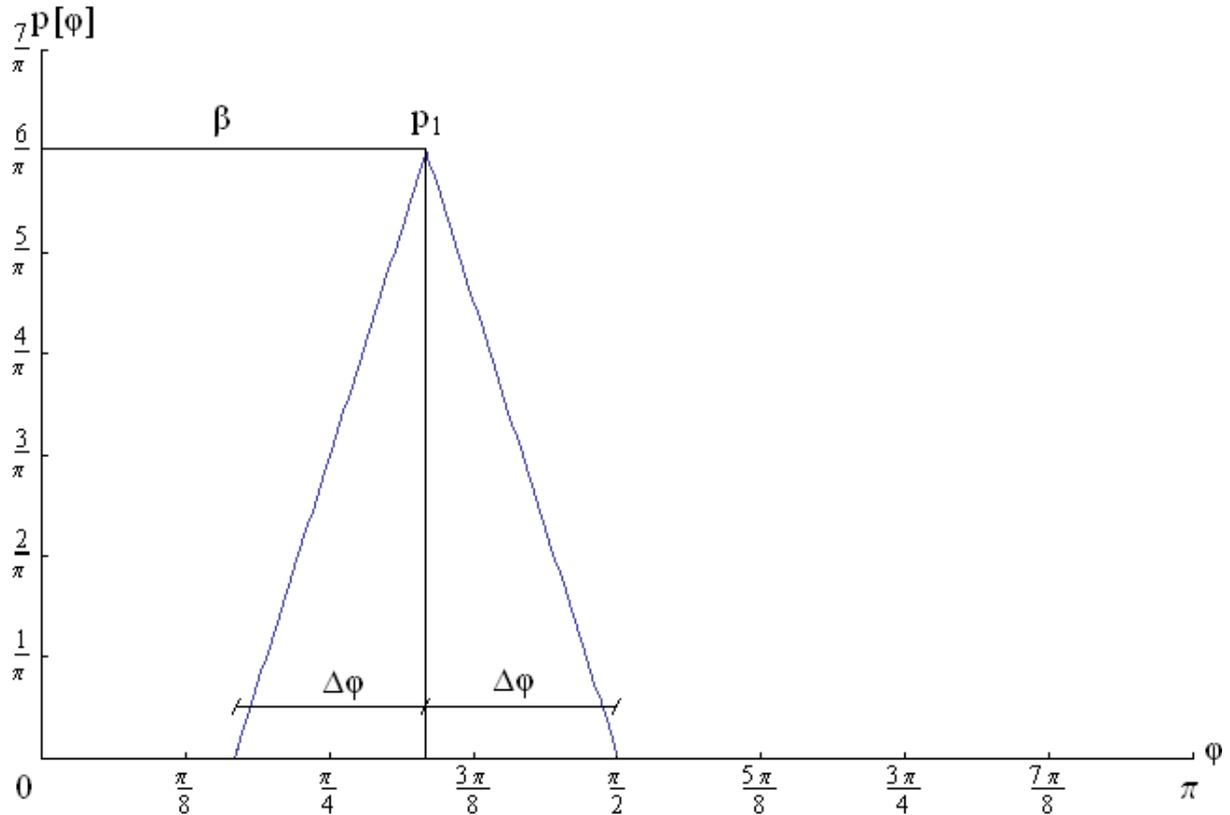


Abbildung 28: inhomogene Verteil-Funktion mittels Dreieck-Impuls mit gewähltem  $\beta=\pi/3$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D

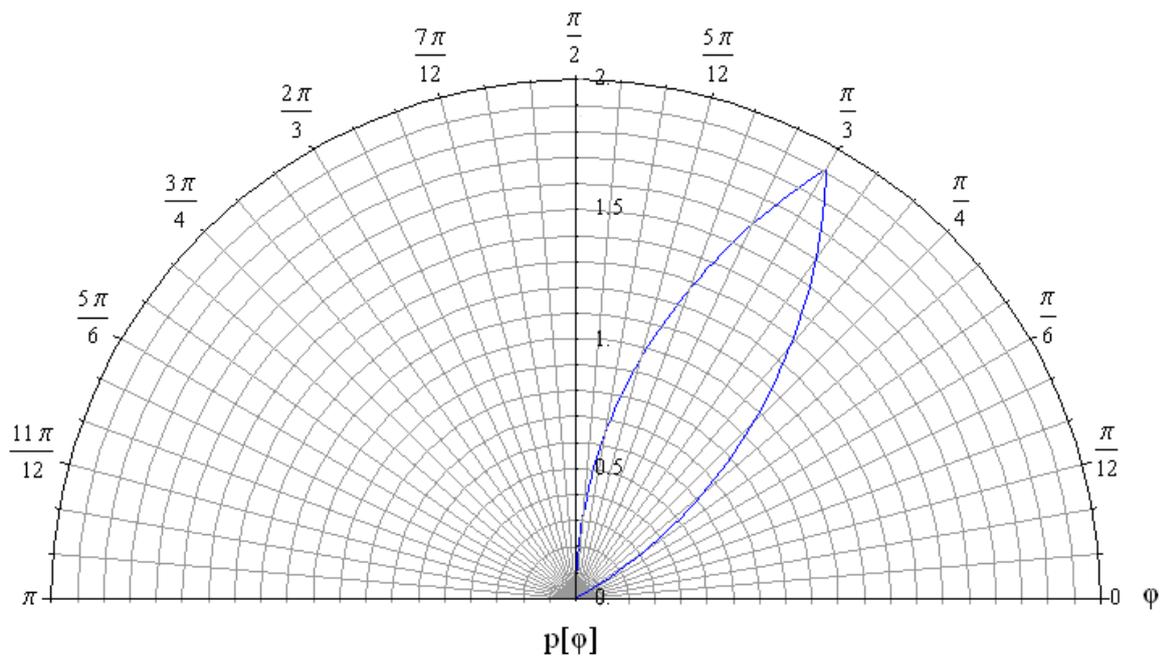


Abbildung 29: inhomogene Verteil-Funktion mittels Dreieck-Impuls mit gewähltem  $\beta=\pi/3$  in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D

Es hat sich wegen der als schwierig herausgestellt, eine integrierbare Verteil-Funktion zu finden. Die gewählte Annahme ist abermals aufgrund der Unstetigkeit der Funktion in zwei Intervalle unterteilt.  $p_1$  ist auch hier die Richtung in der die meisten Fasern orientiert sind und  $\Delta\varphi$  ist die Hälfte der Bandbreite der Richtungen in die Fasern auftreten.

$$p_{i,lin,2D,1} = -t + s \quad (3-42)$$

$$p_{i,lin,2D,2} = m - s$$

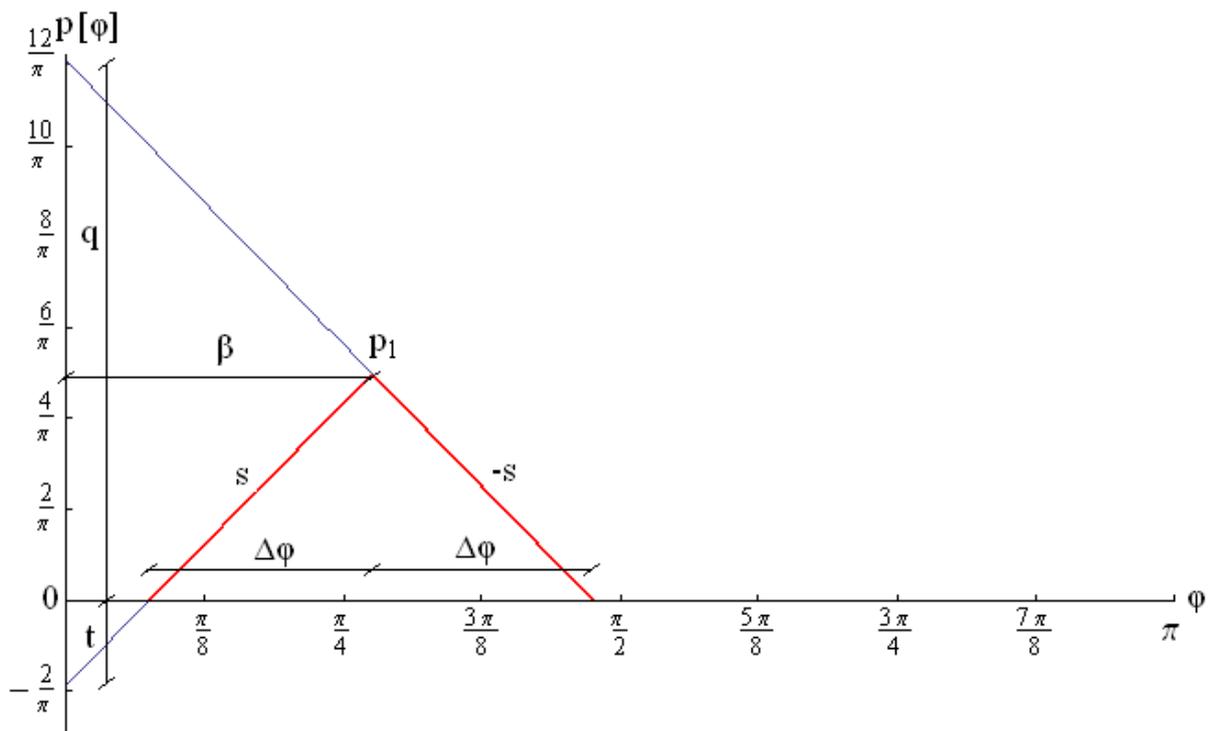


Abbildung 30: Festlegung der Parameter der inhomogenen Verteil-Funktion

Die Steigung  $s$  wird mit

$$s = \frac{p_1}{\Delta\varphi} \varphi \quad (3-43)$$

angenommen, während  $q$  und  $t$  über die Dreiecke mit gleichem Winkel (siehe Abbildung 30)

berechnet werden können

$$\frac{p_1}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\beta + \Delta\varphi}$$

$$q = \frac{p_1\beta}{\Delta\varphi} + p_1 \quad (3-44)$$

$$\frac{p_1}{\Delta\varphi} = \frac{t}{\beta - \Delta\varphi}$$

$$t = \frac{p_1\beta}{\Delta\varphi} - p_1 \quad (3-45)$$

Da die Fläche unter dem Dreieck 1 ist (Bedingung (3-19)), kann  $\Delta\varphi$  auch als

$$1 = \frac{p_1\Delta\varphi}{2} + \frac{p_1\Delta\varphi}{2} = p_1\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{p_1} \quad (3-46)$$

angeschrieben werden. (3-44) berechnet sich also zu

$$p_{i,lin,2D,1} = p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi$$

$$p_{i,lin,2D,2} = p_1^2\beta + p_1 - p_1^2\varphi \quad (3-47)$$

Als Kontrolle kann wieder das Integral von (3-19) aufgelöst werden

$$\begin{aligned}
 & \int_{\beta^{-1/p_1}}^{\beta} p_1 - p_1^2 \beta + p_1^2 \varphi \, d\varphi + \int_{\alpha}^{\beta+1/p_1} p_1^2 \beta + p_1 - p_1^2 \varphi \, d\varphi = \\
 & = p_1 \beta - p_1^2 \beta^2 + \frac{p_1^2 \beta^2}{2} - \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right) p_1 + p_1^2 \beta \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right) - \frac{p_1^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right)^2 \\
 & \quad + \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right) p_1 + p_1^2 \beta \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right) - \frac{p_1^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{p_1} \right)^2 - p_1 \beta - p_1^2 \beta^2 \\
 & \quad + \frac{p_1^2 \beta^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}
 \tag{3-48}$$

Einzigste Bedingung für  $p_1$  ist, dass der Wert größer als Null ist

$$0 < p_1 \tag{3-49}$$

Ein  $p_1$  das gegen Unendlich geht, beschreibt eine unidirektionale Orientierungsverteilung. Hingegen sehr kleine Werte nähern die Funktion dem isotropen Zustand.

### 3.7 Anisotrope Verteil-Funktion mittels Fourier-Reihe in 2D

In diesem Kapitel wird die Verteil-Funktion in Anlehnung an die linearen Verteil-Funktionen mittels eines Dreieckimpulses dargestellt. Um die später erforderliche lineare Verteil-Funktion in 3D einfacher lösen zu können ist sie jetzt als Fourier-Reihe ausgedrückt. Im Allgemeinen gilt die Grundformel

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_j x + b_k \sin \omega_j x) \tag{3-50}$$

Die Fourier-Koeffizienten bestehen also aus dem Gleichanteil  $a_0$  und den harmonischen Teil-schwingungen  $a_j$  und  $b_j$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) dx \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \cos(\omega_j x) dx & j = 0, 1, 2, \dots \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \sin(\omega_j x) dx & j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3-51)$$

wobei aufgrund der Bedingung  $f(x)=f(-x)$  die Symmetrie der Funktion zur Ordinate erwiesen ist und  $b_j=0$  gesetzt werden kann. Es reichen die Schwingungen der Cosinus-Funktionen um die gesuchte Kurve zu beschreiben.

Dabei ist  $k$  eine Laufvariable ganzer Zahlen,  $T$  die Periodendauer und  $c$  ein Faktor im Bereich der reellen Zahlen, welcher die Verschiebung in  $x$ -Richtung beschreibt.

Die Fourier-Koeffizienten für den Dreiecksimpuls lautet dementsprechend mit  $j=3$ , einer Periodizität von  $T=2\pi$  und  $c=0$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{p_1 \Delta\varphi}{\sqrt{\pi}} \\ a_1 &= 2 \cos(2\xi) \frac{p_1 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\ a_2 &= 2 \cos(4\xi) \frac{p_1 \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\ a_3 &= 2 \cos(6\xi) \frac{p_1 \sin(3\Delta\varphi)^2}{18 \Delta\varphi} \end{aligned} \quad (3-52)$$

Die Verteil-Funktion ist also

$$\begin{aligned} p_{i, fou, 2D}(\xi) &= \frac{p_1 \Delta\varphi}{\sqrt{\pi}} + 2 \cos(2\xi) \frac{p_1 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\ &+ 2 \cos(4\xi) \frac{p_1 \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\ &+ 2 \cos(6\xi) \frac{p_1 \sin(3\Delta\varphi)^2}{18 \Delta\varphi} \end{aligned} \quad (3-53)$$

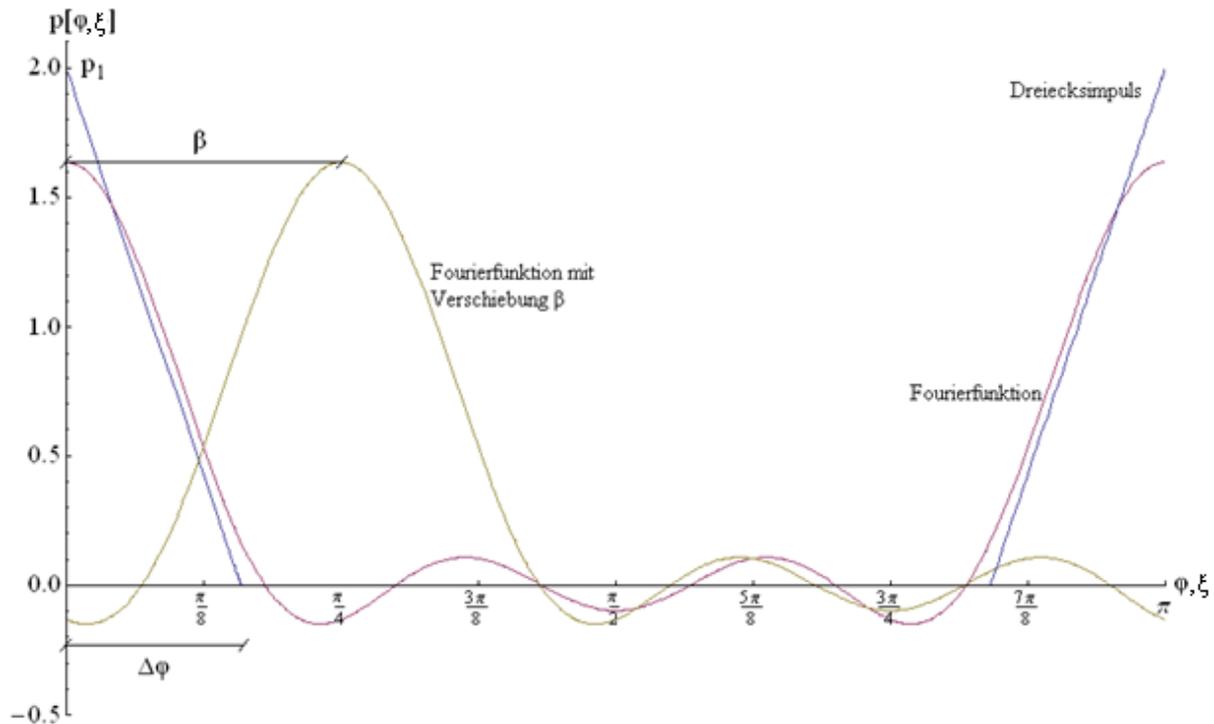


Abbildung 31: Vergleich Dreieckimpuls mit Fourier-Reihe 2D

$p_1$  beschreibt dabei das Maximum und  $\Delta\varphi$  die halbe Bandbreite der auftretenden Faserorientierungen. Es fehlt hier noch die Verschiebung entlang der  $\varphi$ -Achse um  $\beta$ , dem Winkel zwischen Blick-Richtung „u“ und der Hauptorientierungsrichtung „1“. Die Fourier-Reihe wird demnach zu

$$\begin{aligned}
 p_{i, fou, 2D}(\varphi) = & \frac{p_1 \Delta\varphi}{\sqrt{\pi}} + 2 \cos(2(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 & + 2 \cos(4(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 & + 2 \cos(6(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(3\Delta\varphi)^2}{18 \Delta\varphi}
 \end{aligned} \tag{3-54}$$

Mit steigendem  $k$  würde sich die Anpassung der Fourier-Reihe an den Dreieckimpuls erhöhen. Die weiteren Koeffizienten lauten

$$a_4 = 2 \cos(8(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(4\Delta\varphi)^2}{16\sqrt{\pi} \Delta\varphi}$$

$$a_5 = 4 \cos(10(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(5\Delta\varphi)^2}{50 \Delta\varphi} \quad (3-55)$$

Jedoch sinkt die Integrierbarkeit der Funktion durch die neuen Glieder in der Reihe. Grafisch dargestellt in Abbildung 32 und Abbildung 33 vergrößert sich aber der Fehler zum Dreiecksimpuls je kleiner  $\Delta\varphi$  angenommen wird.

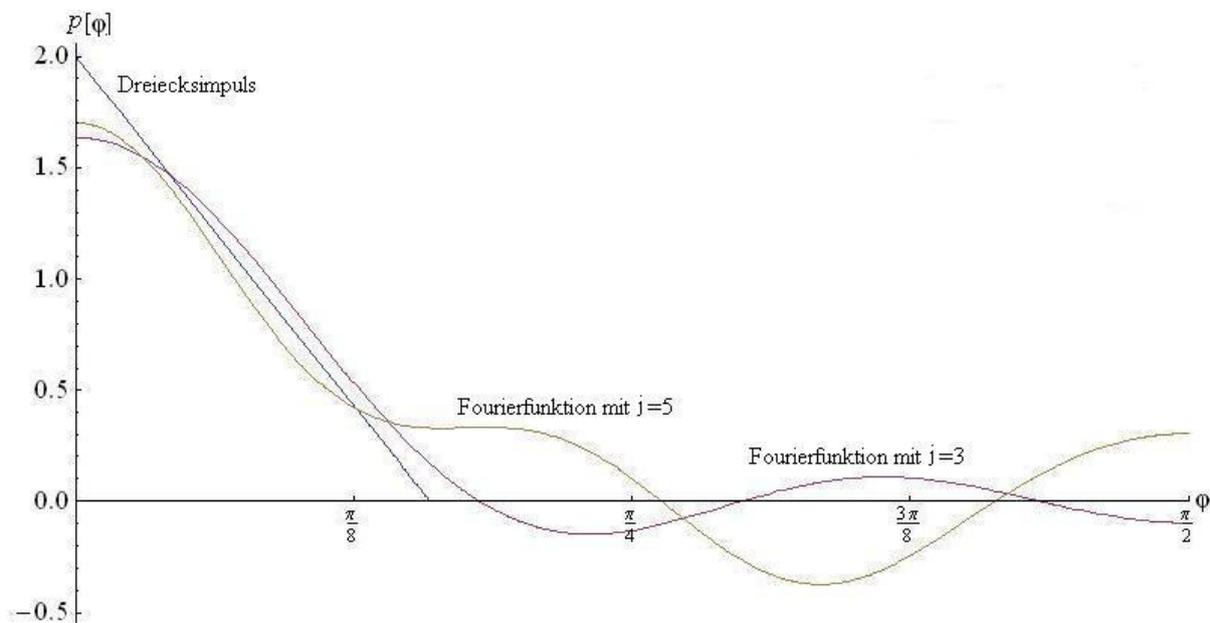


Abbildung 32: Genauigkeit der Fourier-Reihen von  $j=3$  und  $j=5$  mit  $\Delta\varphi = 0,5$  und  $\beta=0$

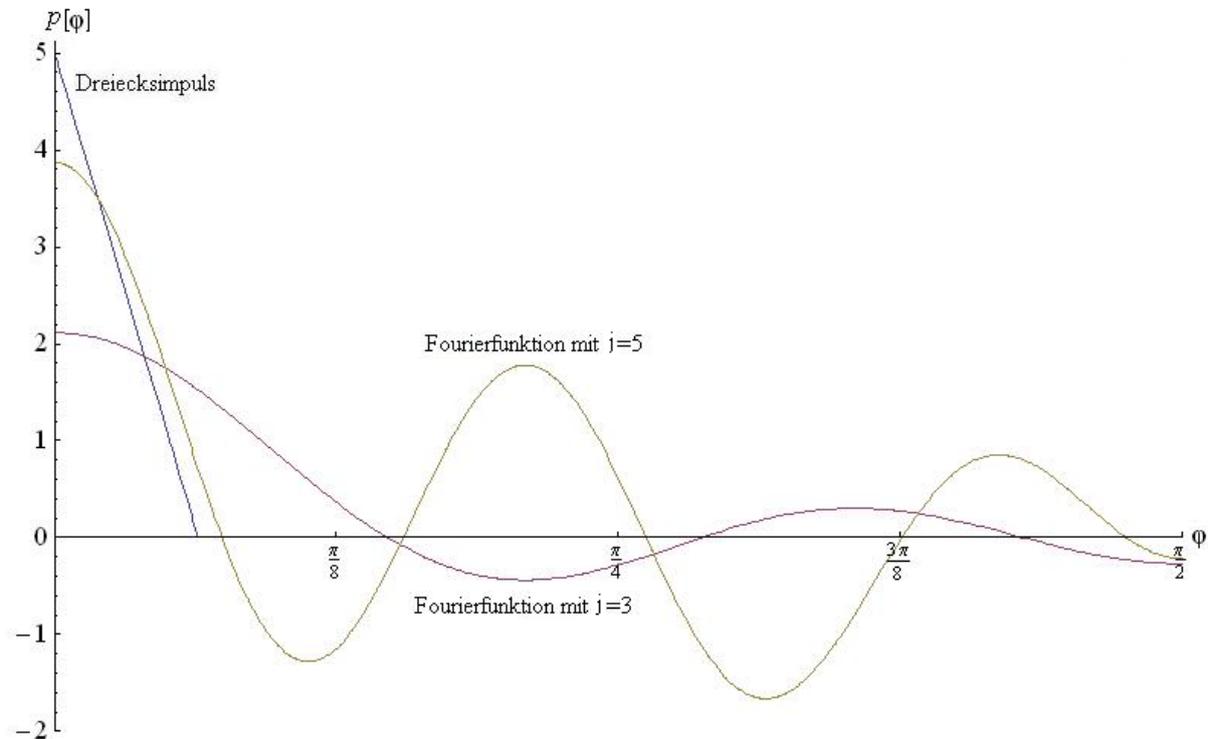


Abbildung 33: Genauigkeit der Fourier-Reihen von  $j=3$  und  $j=5$  mit  $\Delta\varphi = 0,2$  und  $\beta=0$

Aus diesem Grunde wurde die Fourier-Reihe mit  $j=3$  gewählt. Mit derselben Bedingung (3-19) aus den vorangehenden Kapiteln lässt sich nun aus  $p_1$  mit der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von  $\Delta\varphi$  darstellen. Es ist anzumerken, dass bei der inhomogenen linearen Verteil-Funktion  $\Delta\varphi$  in Abhängigkeit von  $p_1$  berechnet wird, hier ist es umgekehrt. Derselbe Weg konnte hier nicht eingeschlagen werden, da die Gleichung nach  $\Delta\varphi$  nicht algebraisch lösbar ist.

$$p_1 = \frac{1}{\Delta\varphi} \quad (3-56)$$

Eingesetzt in (3-54) ergibt das

$$\begin{aligned}
 p_{i,fou,2D} = & \frac{p_1 \Delta\varphi}{\sqrt{\pi}} + 2 \cos(2(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 & + 2 \cos(4(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 & + 2 \cos(6(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(3\Delta\varphi)^2}{18 \Delta\varphi}
 \end{aligned} \quad (3-57)$$

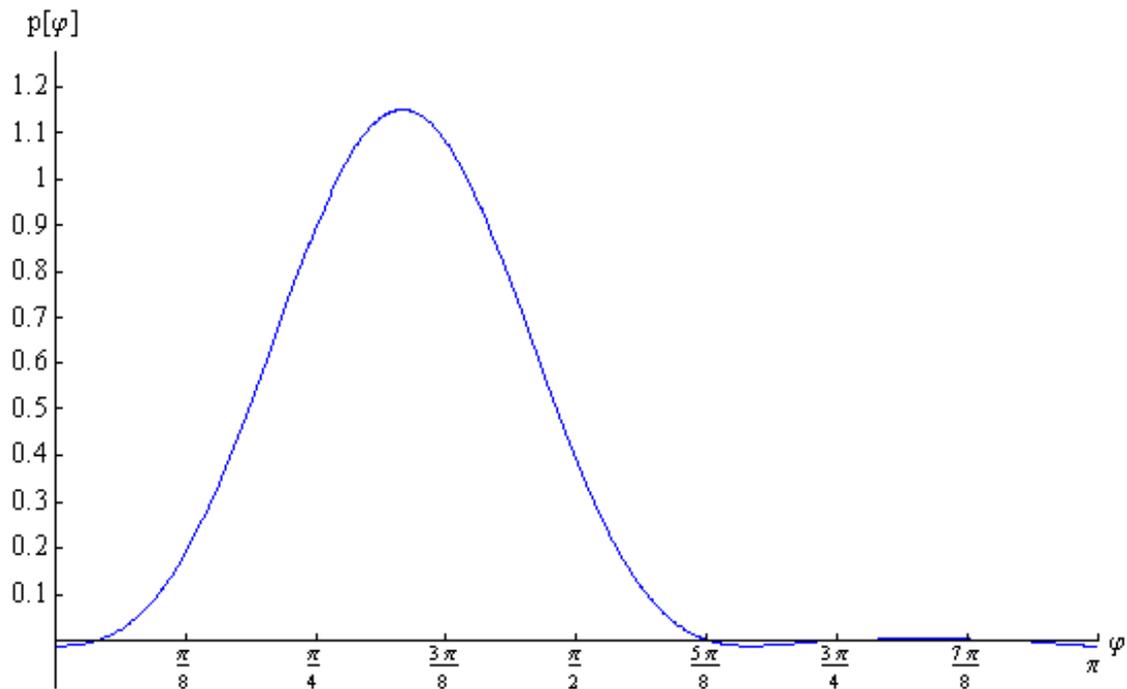


Abbildung 34: Beispiel einer Fourier-Reihe mit  $j=3$ ,  $\Delta\varphi = \pi/4$  und  $\beta=\pi/3$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D

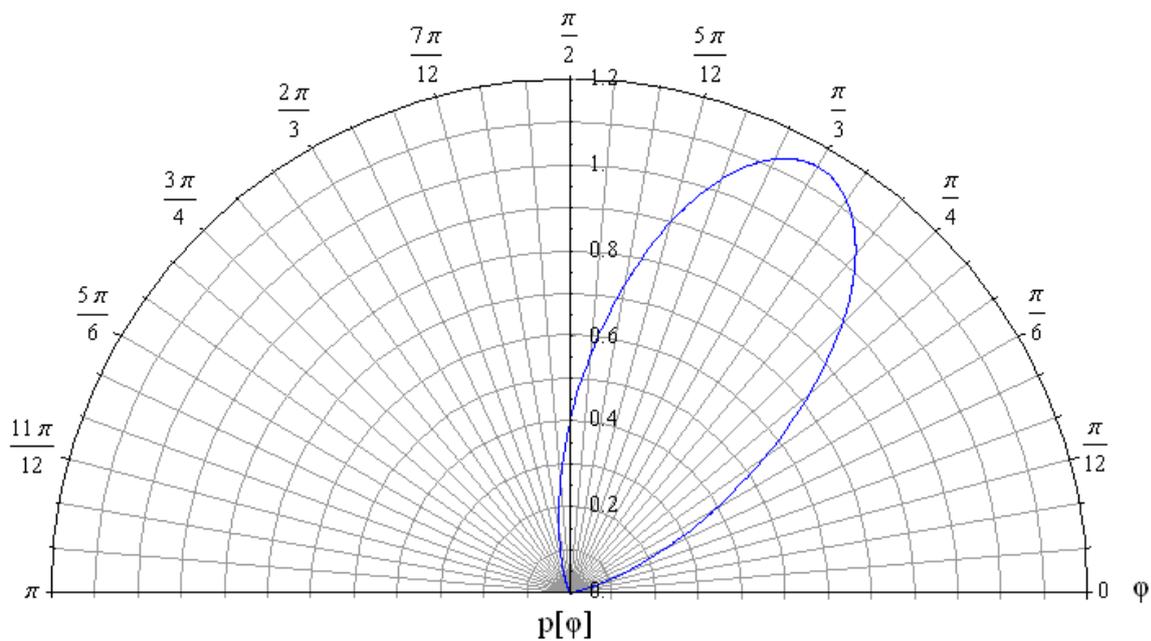


Abbildung 35: Beispiel einer Fourier-Reihe mit  $j=3$ ,  $\Delta\varphi = \pi/6$  und  $\beta=\pi/3$  in Polarkoordinaten in 2D

Somit wurde die Verteil-Funktion erstellt, welche in Abschnitt 4.5 der Arbeit ausgewertet wird. Die Funktion ist jetzt nur mehr von den beiden Winkeln ( $\beta$ ,  $\varphi$ ) und von der Bandbreite der auftretenden Faserorientierungen  $\Delta\varphi$  abhängig. Es konnten teilweise sehr gute Näherungen beobachtet werden (Abbildung 34), andere, wie in Abbildung 33, weichen stark vom ursprünglichen Dreiecksimpuls ab. Deshalb wird auf eine dreidimensionale Darstellung der linearen Verteil-Funktion mittels Fourier-Reihe verzichtet. Es wurde nur der inhomogene Fall grafisch dargestellt, der homogene Fall wird in Kapitel 4.5 veranschaulicht.

Kontrolliert wird die Funktion mit (3-19)

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{\pi} p_{i, fou, 2D}(\varphi) d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{p_1 \Delta\varphi}{\sqrt{\pi}} + 2 \cos(2(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 &\quad + 2 \cos(4(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\pi} \Delta\varphi} \\
 &\quad + 2 \cos(6(\varphi - \beta)) \frac{p_1 \sin(3\Delta\varphi)^2}{18 \Delta\varphi} d\varphi = 1
 \end{aligned} \tag{3-58}$$

Einzigste Bedingung für die Parametereingabe ist, dass  $\Delta\varphi$  größer als Null sein muss

$$0 < \Delta\varphi \tag{3-59}$$

Ein  $\Delta\varphi$  das gegen Null geht, sollte eine unidirektionale Orientierungsverteilung beschreiben. Hingegen sehr große Werte nähern die Funktion dem isotropen Zustand.

### 3.8 Allgemein gültige lineare Verteil-Funktion in 2D für homogene und inhomogene anisotrope Orientierungszustände

Mit dem Software-Programm „Mathematica“ konnte eine lineare Verteil-Funktion erstellt werden, welche sowohl den homogenen als auch inhomogenen Bereich abdeckt. Sie entspricht im inhomogenen Bereich der handgerechneten inhomogenen linearen Verteil-Funktion in 2D (Kapitel 3.6).

Dabei spielt der Befehl „UnitTriangle“ eine entscheidende Rolle. Dieser Befehl erstellt einen Dreieck-Impuls mit der Höhe  $p_1=1$  halber Breite  $\Delta\xi$  gleich 1 (Abbildung 36).

```
Plot[UnitTriangle[xi], {xi, -2, 2}, PlotRange -> Full]
```

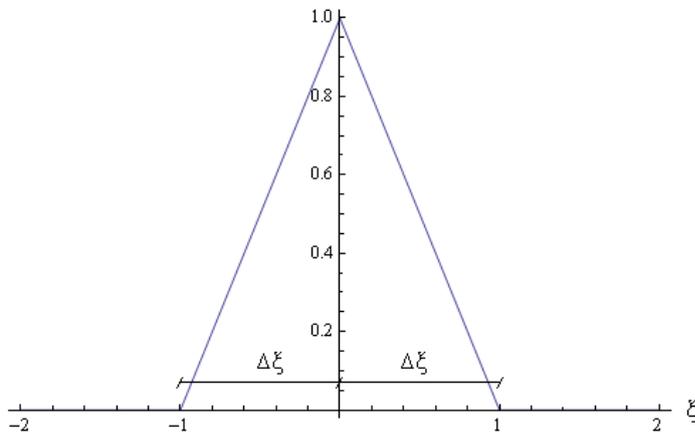


Abbildung 36: Befehl „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D

Der Befehl „PlotRange“ dient nur der grafischen Darstellung und ist bei der Herleitung der Formel unwichtig. Nun wird dieser Befehl so umgeformt, dass Bedingung (3-18) für einen Dreieck-Impuls mit Fläche  $A_{DI}=1$  eingehalten wird (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

$$A_{DI} = \frac{2\Delta\xi p_1}{2} = 1$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{1}{\Delta\xi} \quad (3-60)$$

```
Plot[1 / Δx * UnitTriangle[xi / Δx] / . Δx -> .5, {xi, -2, 2}, PlotRange -> Full]
```

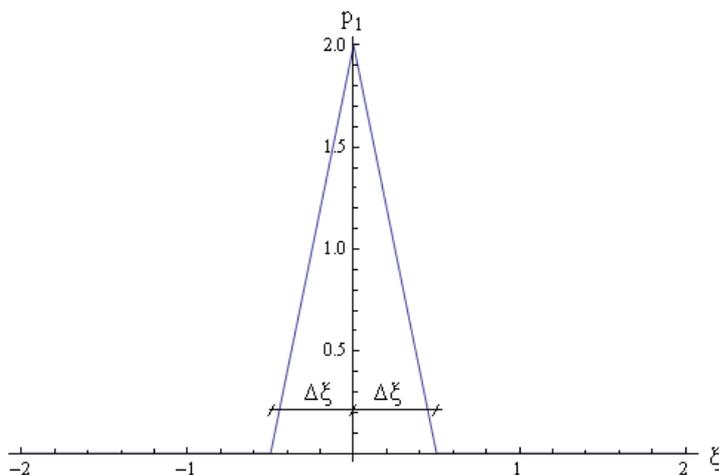


Abbildung 37: Veränderter Befehl „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D

Die gesuchte Verteil-Funktion beginnt aber bei  $\xi=0$  an der Hauptorientierungs-Achse „1“ und läuft bis  $\xi=\pi$ . Deshalb werden zwei Impulse benötigt. Der erste hat die Spitze in  $\xi=0$ , der zweite sein Maximum bei  $\xi=\pi$ . Da aber insgesamt die Fläche unter der Verteil-Funktion 1 ergeben muss, wird eine Konstante „Faktor2D“ eingeführt. Diese lässt sich wieder mit Bedingung (3-18) zu Faktor2D=1 berechnen. Die Verschiebung nach rechts des Dreieck-Impulses wird erreicht indem die gewünschte Verschiebung von  $\xi$  subtrahiert wird.

```
Faktor2D = 1;
Δxi = .5;
Show[Plot[1 / Δxi * Faktor2D * UnitTriangle[(xi - Pi) / Δxi], {xi, Pi / 2, Pi}],
Plot[1 / Δxi * Faktor2D * UnitTriangle[xi / Δxi], {xi, 0, Pi / 2}],
PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 2}}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

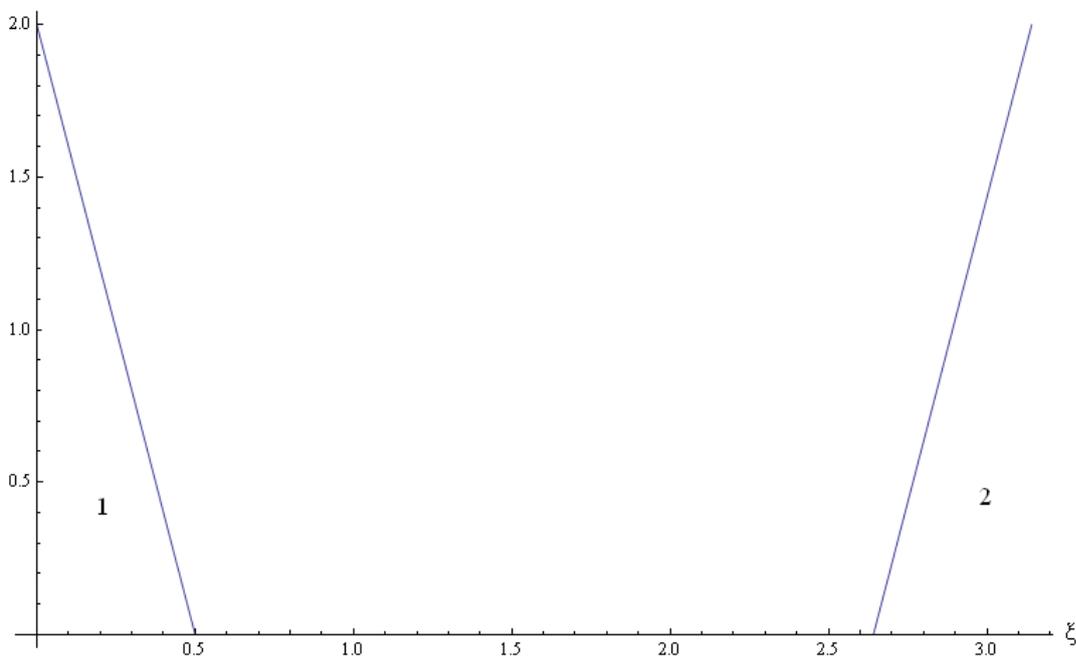


Abbildung 38: Auf  $\pi$  erweiterte Verteil-Funktion mit „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D

Somit lässt sich jede inhomogene Verteilung der Fasern mittels Dreieck-Impuls beschreiben solange  $\Delta\xi < \pi/2$  ist. Die fertige inhomogene Verteil-Funktion ist in Abbildung 39 und Abbildung 40 dargestellt.

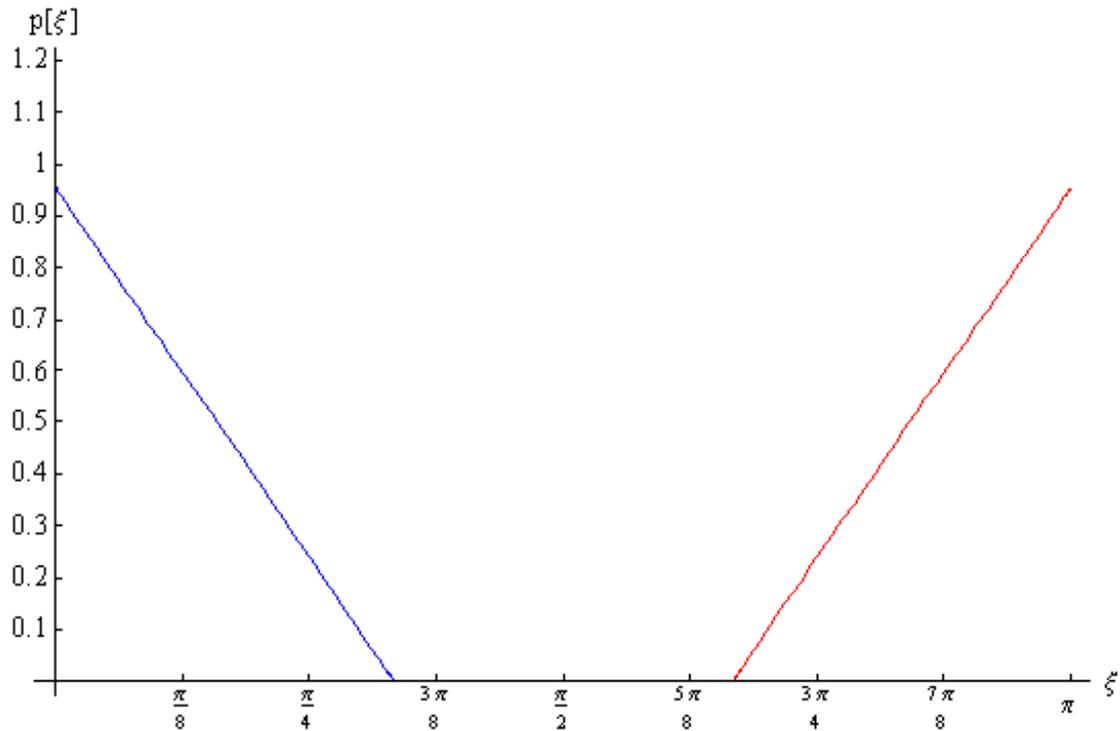


Abbildung 39: inhomogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = \pi/3$  in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

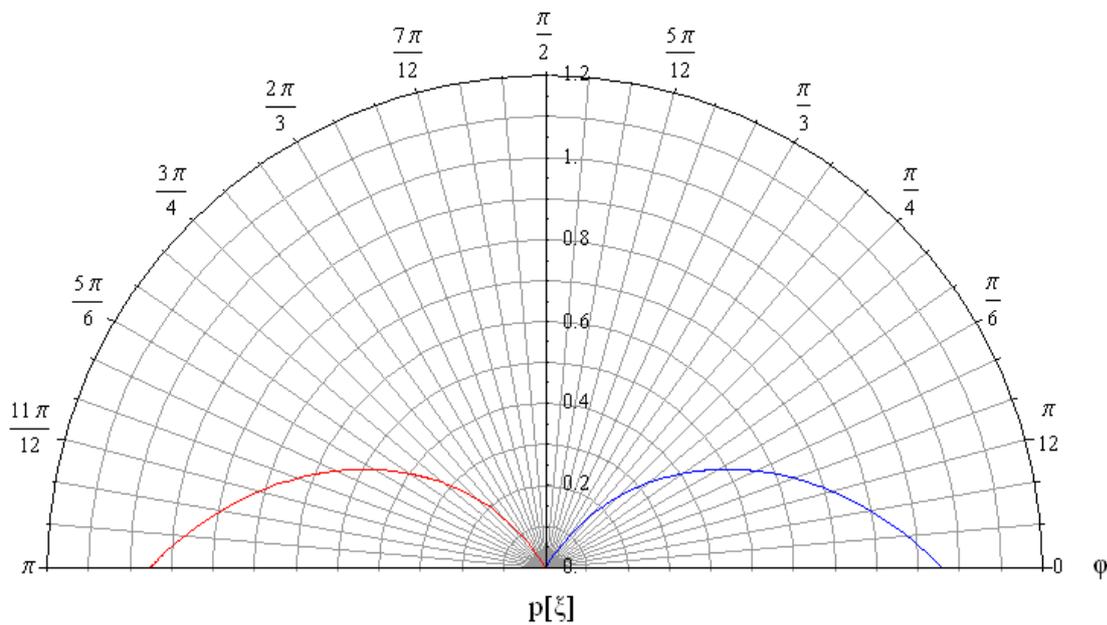


Abbildung 40: inhomogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = \pi/3$  in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

Sobald der Fall  $\Delta\xi \geq \pi/2$  eintritt tritt man in den homogenen Bereich. Dabei überschneiden sich die einzelnen Dreieck-Impulse. Dies wird verhindert indem die jeweiligen Impulse durch Intervalle begrenzt sind. Der erste läuft von  $\xi=0$  bis  $\xi=\pi/2$  und der zweite von  $\xi=\pi/2$  bis  $\xi=\pi$ .

```
Faktor2D = 0.5;
Δxi = 1.5 Pi / 2;
Show[Plot[Faktor2D * 1 / Δxi * UnitTriangle[(xi - Pi) / Δxi], {xi, Pi, Pi / 2}],
Plot[Faktor2D * 1 / Δxi * UnitTriangle[xi / Δxi], {xi, 0, Pi / 2}], PlotRange -> {{0, Pi}, {0, .4}},
AxesOrigin -> {0, 0}]
```

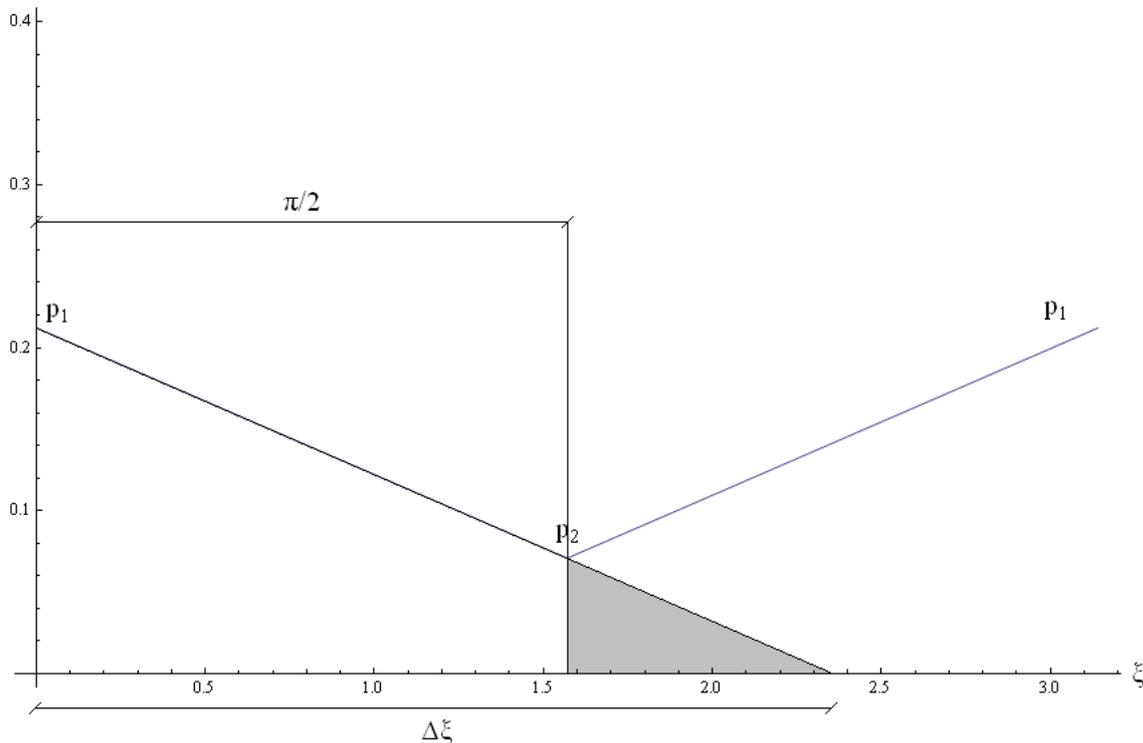


Abbildung 41: Berechnung der Fläche bei „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D

Zudem ist die Fläche unter beiden Impulsen aber nicht mehr gleich 1 und das widerspricht Bedingung (3-18) (Abbildung 41). Das grau gefärbte Dreieck muss vom großen subtrahiert werden. Die beiden Halbimpulse haben jeweils eine Fläche von 0,5.

$$\frac{p_1 \Delta\xi}{2} - \frac{p_2 \left( \Delta\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{2} = 0,5 \quad (3-61)$$

Über das Verhältnis der gleichen Dreiecke errechnet sich

$$\frac{p_1}{\Delta\xi} = \frac{p_2}{\Delta\xi - \frac{\pi}{2}}$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{p_1 \left( \Delta\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\Delta\xi} \quad (3-62)$$

Eingesetzt in (3-20) ergibt das für  $p_1$

$$p_1 = \frac{\Delta\xi}{\Delta\xi \pi - \frac{\pi^2}{4}} \quad (3-63)$$

Die notwendigen Mathematica-Befehle für den homogenen Fall werden in Abbildung 42 dargestellt

```
Faktor2D = 0.5;
Delta xi = 1.5 Pi / 2;
Show[Plot[Faktor2D * (Delta xi / (Delta xi * Pi - Pi^2 / 4)) * UnitTriangle[(xi - Pi) / Delta xi],
  {xi, Pi / 2, Pi}],
  Plot[Faktor2D * (Delta xi / (Delta xi * Pi - Pi^2 / 4)) * UnitTriangle[xi / Delta xi],
  {xi, 0, Pi / 2}], PlotRange -> {{0, Pi}, {0, .3}}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

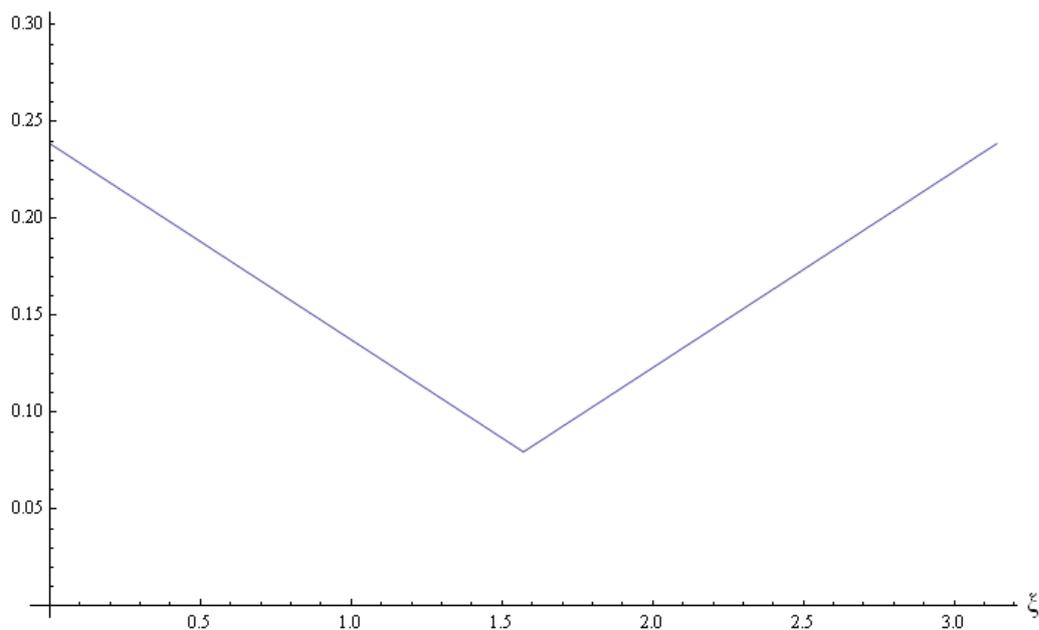


Abbildung 42: Homogene Verteil-Funktion mit „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D

Ein Beispiel für die homogene Verteilung kann man in Abbildung 43 und Abbildung 44 betrachten.

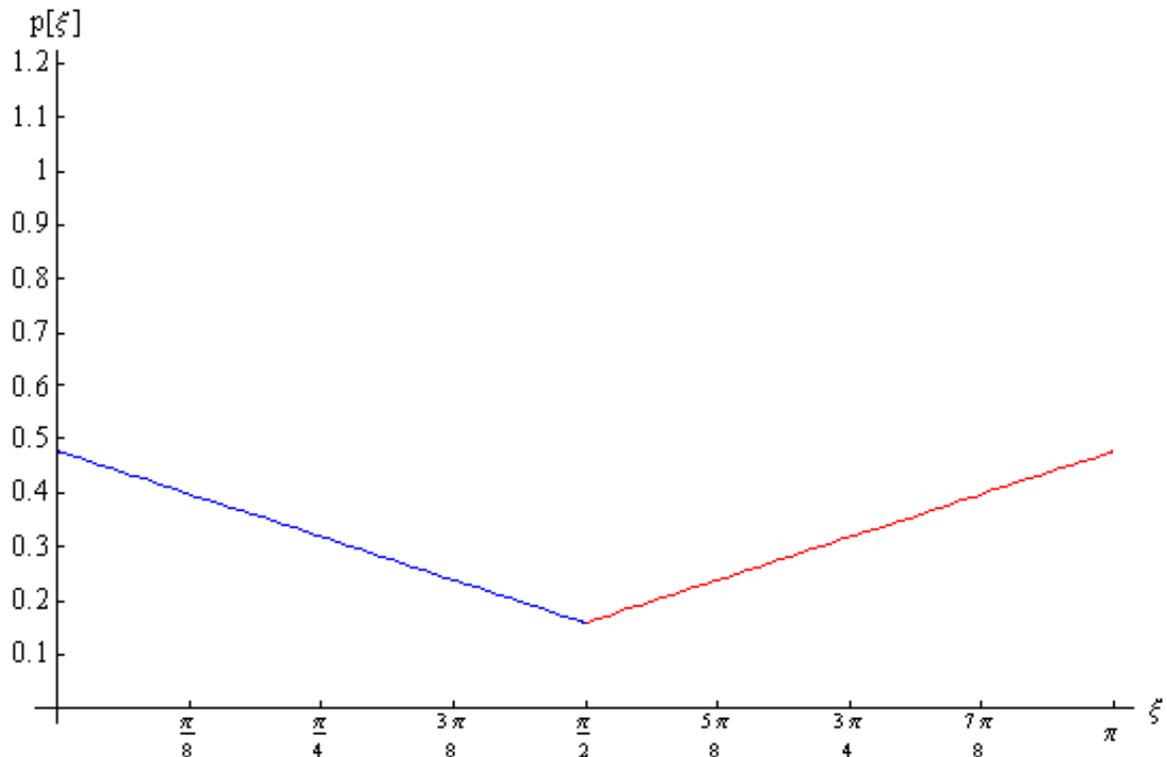


Abbildung 43: homogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = 3\pi/4$  in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

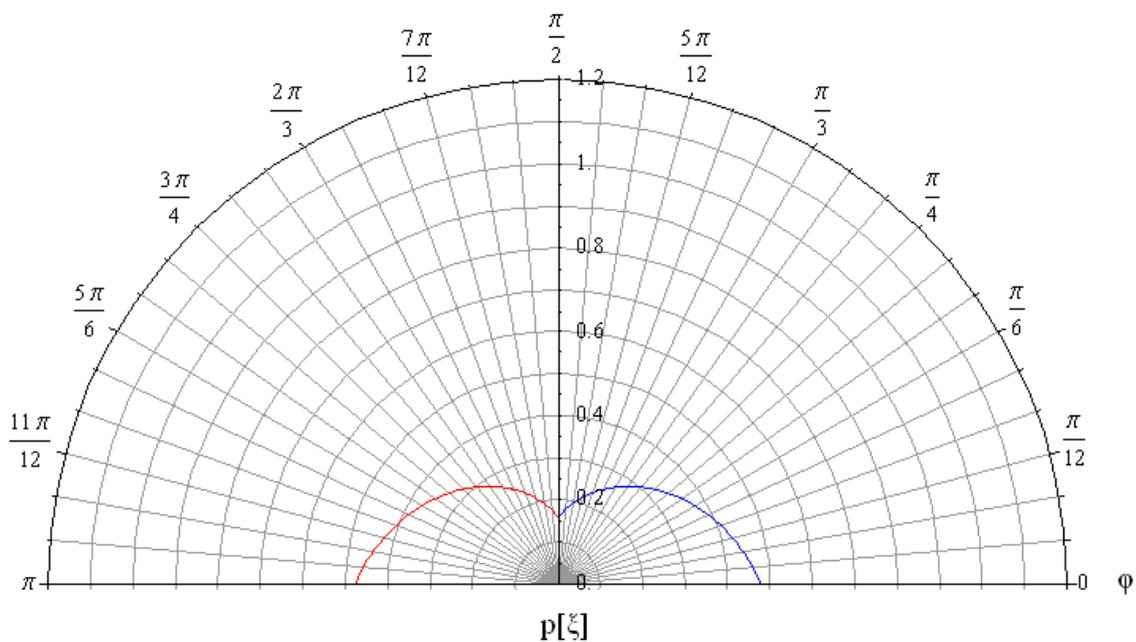


Abbildung 44: homogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = 3\pi/4$  in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D

Nun geht es darum den homogenen und inhomogenen Befehl in einem einzigen zu vereinen. Dabei hilft der Befehl „Piecewise“. Ein Beispiel dazu sieht man in Abbildung 45.

```
Piecewise[{{Funktion1, Bedingung}}, Funktion2] * X
```

```
Plot[Piecewise[{{x^2, x > 0}}, 1] * x, {x, -1, 1}]
```

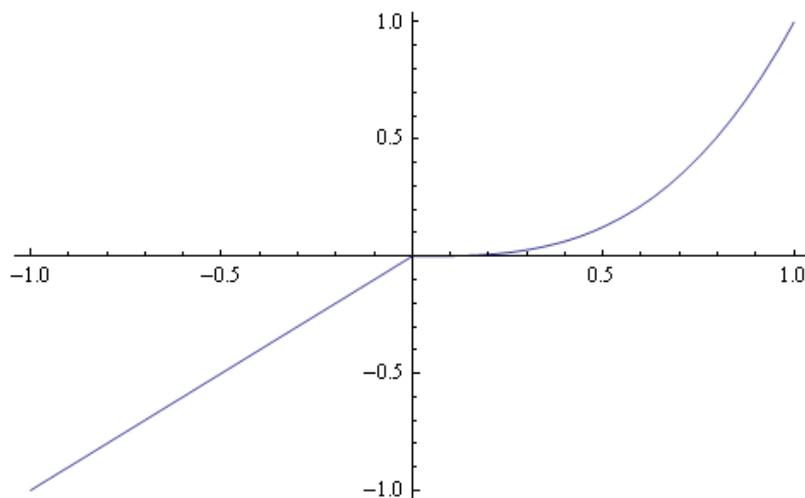


Abbildung 45: Befehl „Piecewise“ im Software-Programm „Mathematica“

Angepasst an die homogene und die inhomogene Funktionen mit der Bedingung  $\Delta\xi > \pi/2$  sind die Befehle für die jeweiligen Dreieck-Impulse in Abbildung 46 dargestellt

```
Faktor2D = 1;
```

```
P2D1 = Piecewise[{{Delta xi / (Delta xi * Pi - Pi^2 / 4), Delta xi > Pi / 2}}, 1 / Delta xi] *  
Faktor2D * UnitTriangle[xi / Delta xi]
```

$$\text{Faktor2D} \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta xi}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta xi} \quad \Delta xi > \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\Delta xi} \quad \text{True} \end{array} \right) \text{UnitTriangle} \left[ \frac{xi}{\Delta xi} \right]$$

```
P2D2 = Piecewise[{{Delta xi / (Delta xi * Pi - Pi^2 / 4), Delta xi > Pi / 2}}, 1 / Delta xi] *  
Faktor2D * UnitTriangle[(xi - Pi) / Delta xi]
```

$$\text{Faktor2D} \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta xi}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta xi} \quad \Delta xi > \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\Delta xi} \quad \text{True} \end{array} \right) \text{UnitTriangle} \left[ \frac{-\pi + xi}{\Delta xi} \right]$$

Abbildung 46: Befehl der linearen Verteil-Funktion im Software-Programm „Mathematica“

Bei dieser Verteil-Funktion wurde der Winkel  $\beta$  bislang vernachlässigt. Er fließt erst in Kapitel 4.8 in die Formel mit ein. Die Grenzen verhalten sich für  $\Delta\xi$  gleich wie beim Parameter der Fourier-Näherung. Einzige Bedingung ist, dass  $\Delta\xi$  größer als Null sein muss

$$0 < \Delta\xi \quad (3-64)$$

Ein  $\Delta\xi$  das gegen Null geht, beschreibt eine unidirektionale Orientierungsverteilung. Hingegen sehr große Werte nähern die Funktion dem isotropen Zustand.

### 3.9 Anisotrope homogene Verteil-Funktion in 3D (Cosinus zum Quadrat)

Aufbauend auf 3.5.3 wird eine homogene dreidimensionale Verteil-Funktion entwickelt. Die anderen homogenen Verteil-Funktionen waren im Software-Programm „Mathematica“ im dreidimensionalen Raum nicht lösbar.

Mit (3-37) ergibt sich ohne Berücksichtigung von  $\beta$  und  $\alpha$  die Formel für die dreidimensionale Verteil-Funktion im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes

$$\begin{aligned} p_{h,cosQ,3D}(\xi, \psi) &= (p_3 - p_{h,cosQ,3D}(\xi)) \cos^2(\psi) + p_{h,cosQ,3D}(\xi) \\ &= (p_3 - (p_1 - p_2) \cos^2(\xi) - p_2) \cos^2(\psi) + (p_1 - p_2) \cos^2(\xi) + p_2 \end{aligned} \quad (3-65)$$

Aus Gleichung (3-20) wird

$$p_3 = \frac{3}{2\pi} - p_1 - p_2 \quad (3-66)$$

berechnet. Eingesetzt in (3-65) lässt sich  $p(\xi, \psi)$  nun folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned} p_{E,cosQ}(\xi, \psi) &= p_2 + (p_1 - p_2) \cos^2 \xi \\ &\quad + \left( \frac{3}{2\pi} - p_1 - 2p_2 + (p_2 - p_1) \cos^2 \xi \right) \cos^2 \psi \end{aligned} \quad (3-67)$$

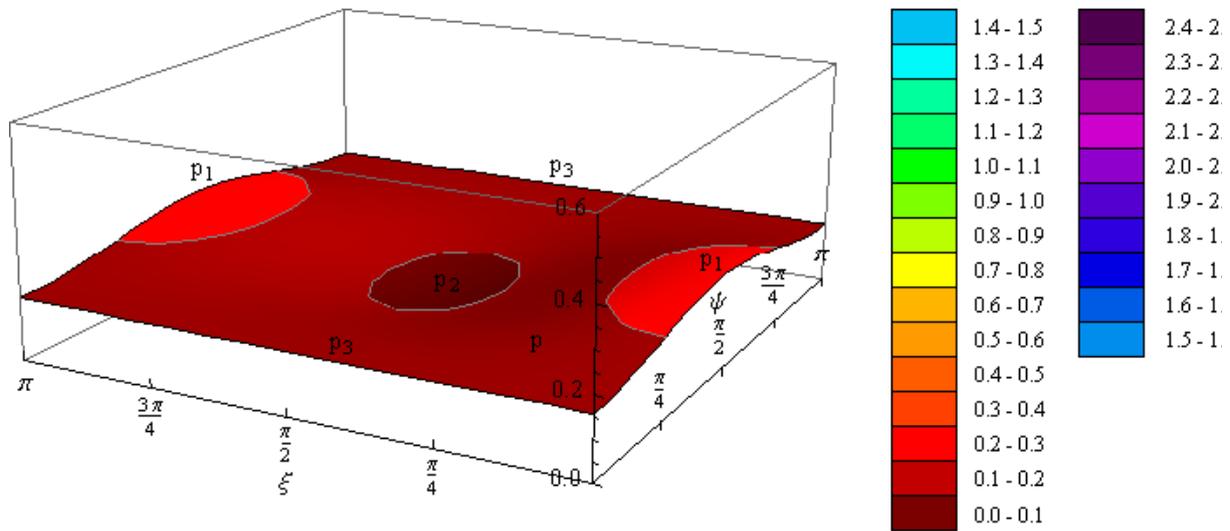


Abbildung 47: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1=3/(4\pi)$  und  $p_2=1/(4\pi)$

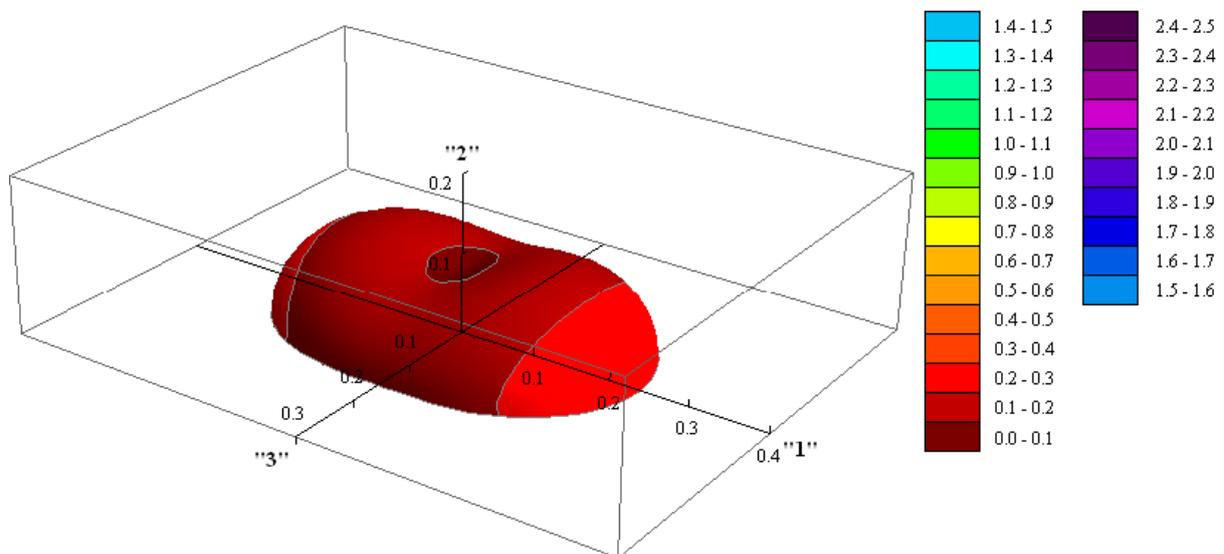


Abbildung 48: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten des Faserorientierungszustandes mit  $p_1=0,1$  und  $p_2=0,01$

Jetzt ist die Koordinatentransformation aus Kapitel 3.1.5 erforderlich. Im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes wurde die Verteil-Funktion definiert. Für die weitere Berechnung wird aber das Koordinatensystem der Blickrichtung benötigt.

Einsetzen von (3-13) und (3-14) in (3-67) ergibt

$$\begin{aligned}
 p_{E,cosQ}(\varphi, \theta, \beta, \alpha) &= \left( \frac{3}{2\pi} - (p_1 + 2p_2) \right) (\cos \alpha \cos \theta + \cos \varphi \sin \alpha \sin \theta)^2 + p_2 \\
 &\quad - (p_1 - p_2) [-1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \theta \\
 &\quad + 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos \theta \sin \alpha \sin \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha \sin^2 \theta \\
 &\quad + (\cos \theta \sin \alpha \sin \beta + (\cos \beta \sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi \sin \beta) \sin^2 \theta)]
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

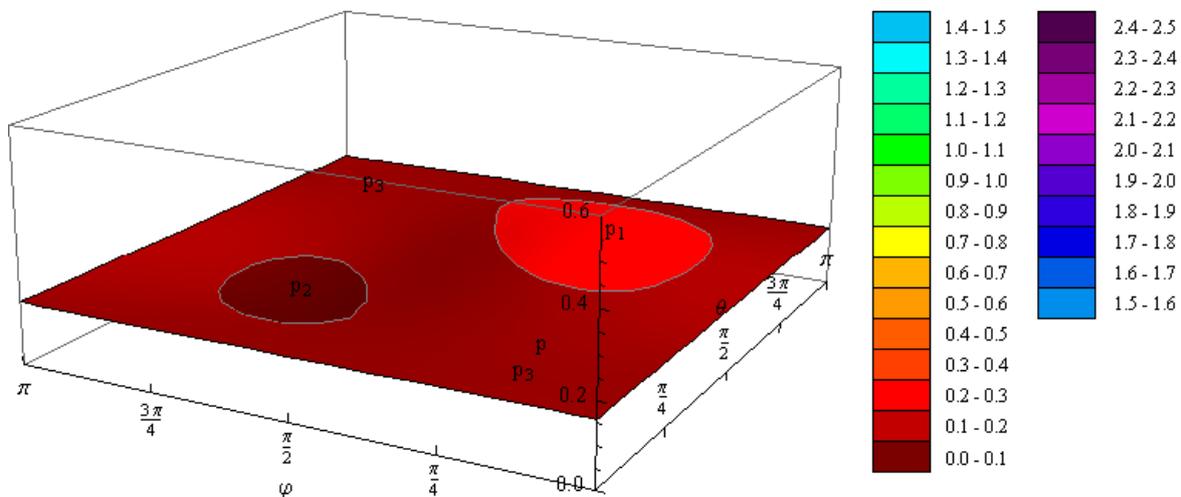


Abbildung 49: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1=3/(4\pi)$ ,  $p_2=1/(4\pi)$ ,  $\alpha=\pi/5$  und  $\beta=\pi/4$

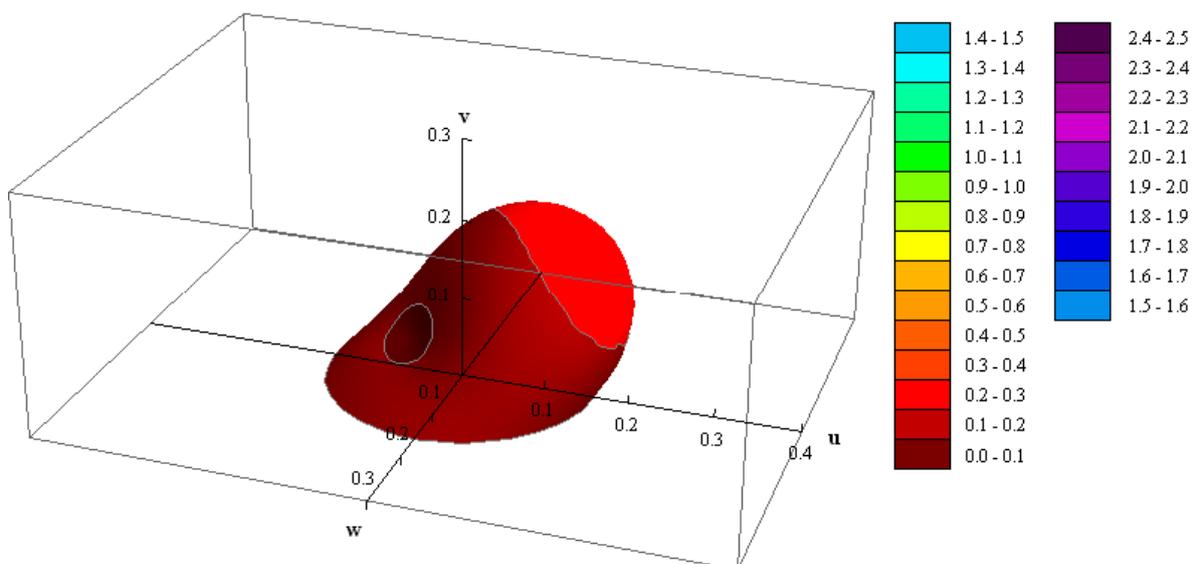


Abbildung 50: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $p_1=3/(4\pi)$ ,  $p_2=1/(4\pi)$ ,  $\alpha=\pi/5$  und  $\beta=\pi/4$

Dabei wäre es nicht zwingend notwendig, dass  $p_1 \geq p_2 \geq p_3$  ist, aber laut Definition ist  $p_1$  die Orientierungsrichtung mit den meisten Fasern. Alle drei Variablen sind positiv anzunehmen und sie werden je nachdem von oben oder unten von der isotropen Verteil-Funktion mit  $p=1/(2\pi)$  begrenzt. Der maximale anisotrope Fall tritt ein, wenn  $p_1=3/(2\pi)$  und  $p_2=0$  ist.  $p_3$  berechnet sich automatisch zu  $p_3=0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &\leq p_1 \leq \frac{3}{2\pi} \\ 0 &\leq p_2 \leq \frac{1}{2\pi} \\ 0 &\leq p_3 \leq \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{3-69}$$

Eine weitere Bedingung ist, dass für  $\psi=0$  in kartesischen Koordinaten ein konstanter Wert verläuft (siehe Kapitel 3.2.3). Dieser definiert die „3“-Achse und ist in Kugelkoordinaten ein Punkt (geografisch gesehen der Nordpol). In Abbildung 49 kann die Erfüllung dieser Bedingung beobachtet werden.

### 3.10 Anisotrope inhomogene und homogene lineare Verteil-Funktion in 3D

Mit denselben Befehlen „UnitTriangle“ und „Piecewise“ aus Kapitel 3.8 lässt sich im Software-Programm „Mathematica“ auch eine dreidimensionale Pyramiden-Verteil-Funktion erstellen. Im Unterschied zum 2D kommt jetzt Winkel  $\psi$  dazu. Auch entlang dieses Winkels wird ein Dreieck-Impuls mit dem Befehl „UnitTriangle“ erstellt und mit der bereits erstellten Formel für Winkel  $\xi$  multipliziert.

P3D1 = Faktor3D \* Piecewise[{{Δxi^2 / (Δxi \* Pi - Pi^2 / 4), Δxi > Pi / 2}}, 1] / Δxi \*  
 Piecewise[{{Δpsi^2 / (Δpsi \* Pi - Pi^2 / 4), Δpsi > Pi / 2}}, 1] / Δpsi \* UnitTriangle[xi / Δxi, (psi - Pi / 2) / Δpsi]

$$\text{Faktor3D} \left( \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta\psi^2}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta\psi} \quad \Delta\psi > \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{True} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta xi^2}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta xi} \quad \Delta xi > \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{True} \end{array} \right) \text{UnitTriangle} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} + \psi}{\Delta\psi}, \frac{xi}{\Delta xi} \right] \right)$$


---


$$\Delta\psi \Delta xi$$

P3D2 = Faktor3D \* Piecewise[{{Δxi^2 / (Δxi \* Pi - Pi^2 / 4), Δxi > Pi / 2}}, 1] / Δxi \*  
 Piecewise[{{Δpsi^2 / (Δpsi \* Pi - Pi^2 / 4), Δpsi > Pi / 2}}, 1] / Δpsi \* UnitTriangle[(xi - Pi) / Δxi, (psi - Pi / 2) / Δpsi]

$$\text{Faktor3D} \left( \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta\psi^2}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta\psi} \quad \Delta\psi > \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{True} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta xi^2}{-\frac{\pi^2}{4} + \pi \Delta xi} \quad \Delta xi > \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{True} \end{array} \right) \text{UnitTriangle} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} + \psi}{\Delta\psi}, \frac{-\pi + xi}{\Delta xi} \right] \right)$$


---


$$\Delta\psi \Delta xi$$

Abbildung 51: Befehl der linearen Verteil-Funktion in 3D im Software-Programm „Mathematica“

Die Konstante Faktor3D lässt sich mit Formel (3-20) zu

$$\left\{ \left\{ \text{Faktor3D} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} & 2 \Delta\psi = \pi \ \&\& \ \Delta xi > 0 \\ \frac{\pi (\pi - 4 \Delta\psi)}{4 (\pi - 2 (1 + \Delta\psi))} & 2 \Delta\psi > \pi \\ \frac{1}{4} \Delta\psi^2 \text{Csc} \left[ \frac{\Delta\psi}{2} \right]^2 & \text{True} \end{cases} \right\} \right\}$$

Abbildung 52: Faktor3D für die lineare Verteil-Funktion in 3D

berechnen.

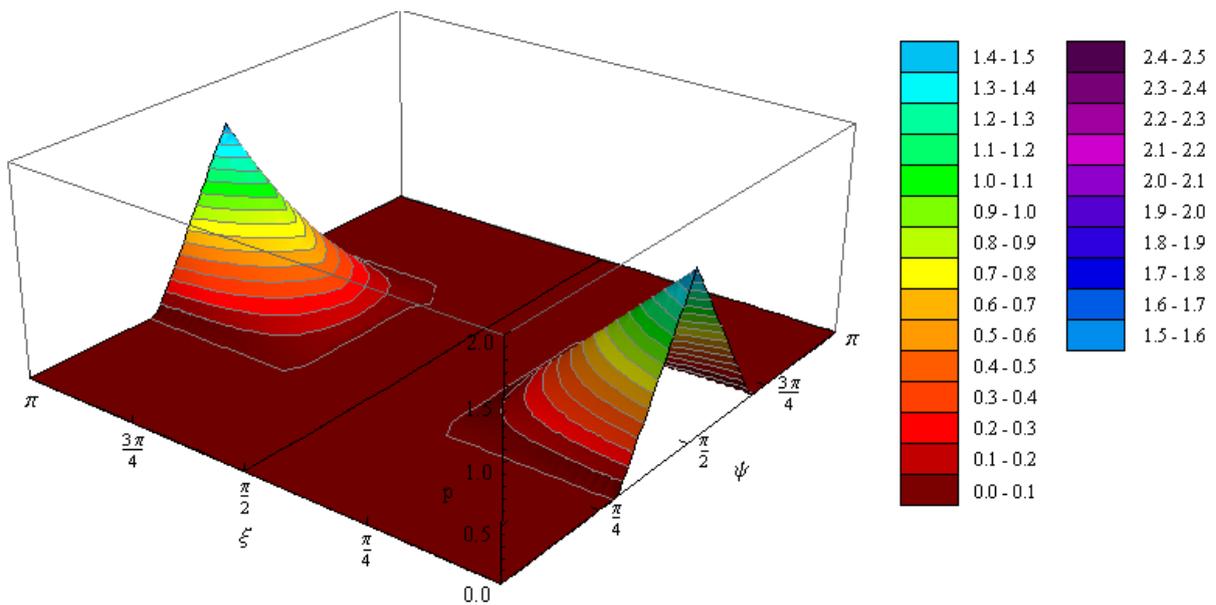


Abbildung 53: Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi=\pi/3$  und  $\Delta\psi=\pi/5$

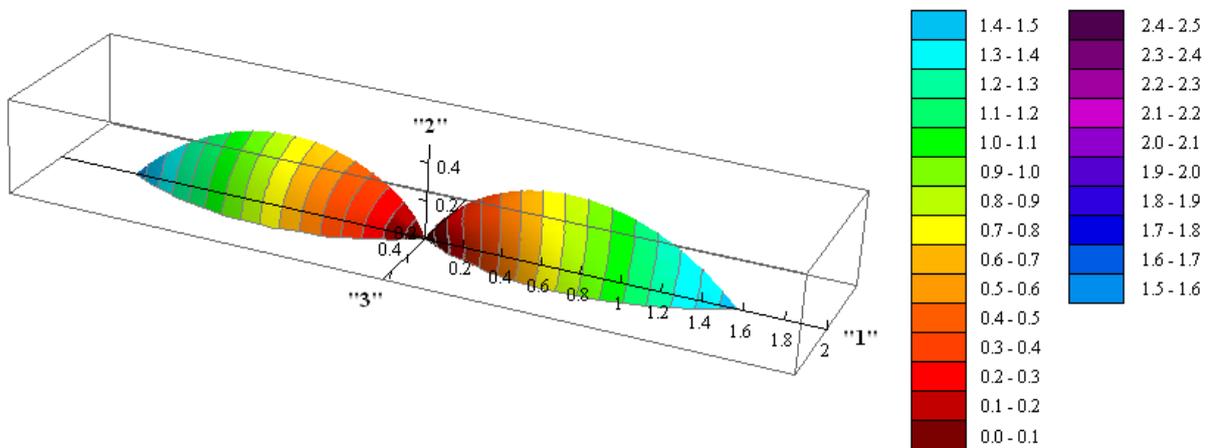


Abbildung 54: Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $\Delta\xi=\pi/3$  und  $\Delta\psi=\pi/4$

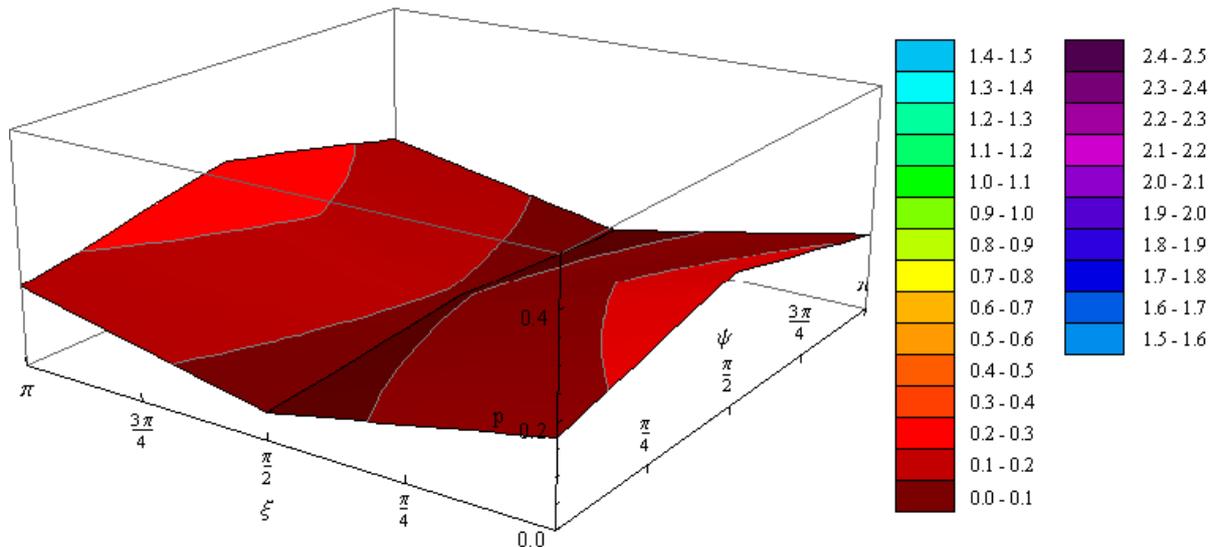


Abbildung 55: Anisotrope homogene lineare Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi=3\pi/4$  und  $\Delta\psi=4\pi/3$

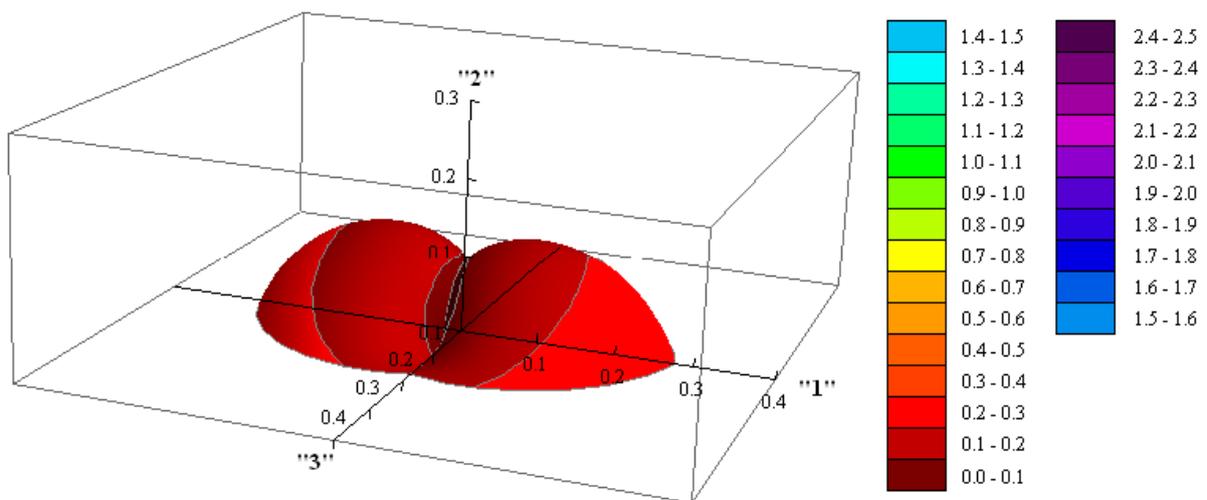


Abbildung 56: Anisotrope homogene lineare Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $\Delta\xi=3\pi/4$  und  $\Delta\psi=4\pi/3$

In Kugelkoordinaten ist  $\psi=0$  ein Punkt und sollte deshalb in kartesischen Koordinaten einen konstanten Wert haben (siehe Abbildung 9). Während für den inhomogenen Fall dies zutrifft (Abbildung 53), ist dies im homogenen Fall leider nicht so (Abbildung 55). Der Einfluss dieses Fehlers in dieser Verteil-Funktion wird in Kapitel 4.11 genauer beschrieben. Die Auswirkungen auf die Darstellung in Kugelkoordinaten kann in Abbildung 57 betrachtet werden. Es bildet sich ein Wertebereich entlang der „3“-Achse welcher den Werten von  $p(\xi, \psi=0)$  aus dem kartesischen Koordinatensystem entspricht. Der Fehler vergrößert sich bei sinkender Bandbreite von  $\Delta\xi$ .



## 4 Berechnung des Faserorientierungsbeiwertes

Dreidimensional ausgerichtete Fasern übertragen viel kleinere Lasten als eindimensional in Zugrichtung orientierte Fasern. Denn sie haben in Beanspruchungsrichtung die größte positive Einwirkung auf das Tragverhalten des Betons. Dies wird mit einem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  berücksichtigt [6].

Ein Teil der Faserwirkung im UHPC bezieht sich auf die Nachrisszugfestigkeit. Diese lässt sich mit der Formel

$$f_{ct} = \eta \frac{l_f}{d_f} \rho g \tau_{adh} \quad (4-1)$$

berechnen[4].  $l_f$  sei die Faserlänge,  $d_f$  der Faserdurchmesser,  $\eta$  der Faserorientierungsbeiwert,  $\rho$  der Volumengehalt der Fasern,  $g$  ist ein Beiwert welcher die erhöhte Reibung durch Umlenkkräfte durch die Abweichung zwischen Faserachse und Zugrichtung beachtet und  $\tau_{adh}$  ist die mittlere Verbundfestigkeit zwischen Faser und Matrix [4]. Es lässt sich leicht erkennen, dass der Faserorientierungsbeiwert einen Einfluss auf die Nachrisszugfestigkeit beiträgt.

$\eta_{\text{einz}}$  für die Einzelfaser ist nach Schönlin das Verhältnis der in Zugspannungsrichtung projizierten Faserlänge zur tatsächlichen Faserlänge [3].

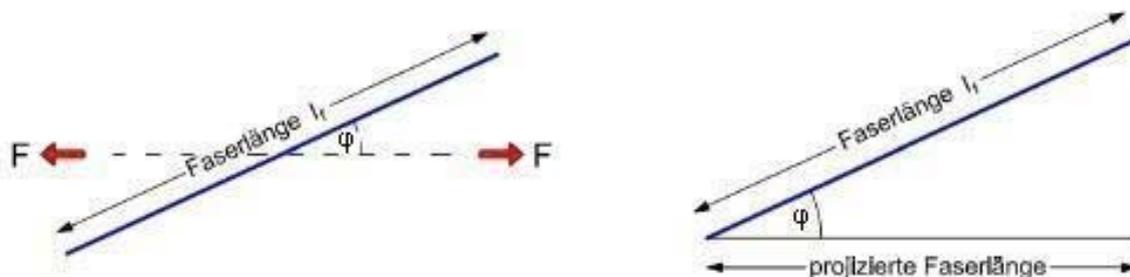


Abbildung 58: Faserorientierung der Einzelfaser [9]

Behloul hat aus Symmetriegründen nur die Richtungen bis  $\theta = \pi/2$  verwendet, aber in dieser Arbeit ist es notwendig die ganze Halbkugel zu betrachten, deshalb werden die Richtungen bis  $\theta = \pi$  und  $\varphi = \pi$  untersucht. Da der Cosinus im Winkelabschnitt von  $\pi/2$  bis  $\pi$  in den negativen Bereich übergeht und der Faserorientierungsbeiwert positiv ist, wird der Absolut-Betrag von  $\cos(\varphi)$  verwendet.

$$\eta_{\text{einz}}(\varphi) = |\cos \varphi_i| \quad (4-2)$$

Im eindimensionalen Fall für die Faser in Krafrichtung, also mit  $\varphi=0$ , errechnet sich der Wert für  $\eta_{\text{einz}}(\varphi) = \cos(0) = 1$ . Das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass diese Faser den Zugriss kreuzt, ist gleich 1. Der Faserorientierungsbeiwert kann nur Werte zwischen 0 und 1 einnehmen.

In Abbildung 60 wurden Probekörper aus Faserbeton mit verschiedenen Faserwinkeln zur Krafrichtung mittels eines 4-Punkte-Biegeversuch (Abbildung 59) belastet. Es zeigt, dass sich mit einem Winkel von  $90^\circ$  zur Beanspruchung am meisten Fasern an der Lastabtragung beteiligen[2].

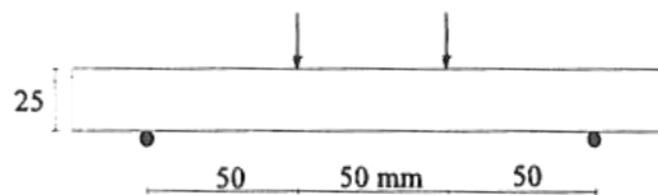


Abbildung 59: 4-Punkte-Biegeversuch[2]

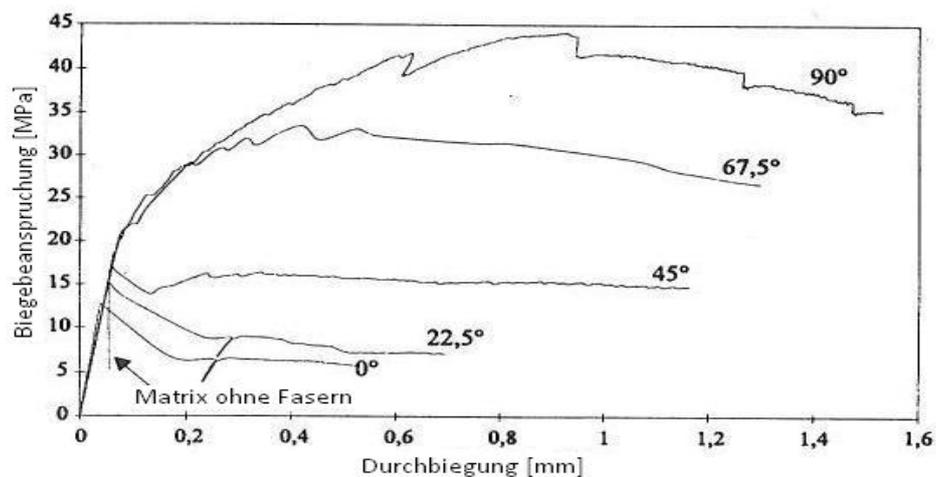


Abbildung 60: Probekörper aus Beton mit verschiedenen Faserwinkeln zur Krafrichtung [2]

#### 4.1 Herleitung des Faserorientierungsbeiwertes $\eta$ bei einem Fasergemenge mit isotroper Orientierung nach Behloul [2]

Es gibt verschiedene Ansätze, um den Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  zu definieren, wobei verschiedene Ergebnisse und Beiwerte errechnet wurden. Es wurde die Theorie für Fasergemenge nach Behloul [2] untersucht.

Ziel dieses Kapitels ist es, für einen isotropen Körper den Faserorientierungsbeiwert im zwei- und dreidimensionalen Raum zu berechnen.

Für die Einzelfaser im zweidimensionalen Raum gilt immer noch (4-2), wobei die Bezeichnung des Winkels  $\varphi$  in diesem Kapitel als  $\theta$  dargestellt wird. Der Absolut-Betrag fällt weg, da Behloul die Fasern nur bis  $\pi/2$  laufen lässt.

Wie in Abbildung 58 erkennbar, kann dieses Verhältnis auch als

$$\eta_{\text{einz}}(\theta) = \cos \theta_i = \frac{l_{\text{proj}}}{l_f} \quad (4-3)$$

angeschrieben werden.

Der Mittelwert der Projektionen von  $l_f$  auf die Zugspannungsrichtung (x-Achse) der riss-kreuzenden Fasern ist der lokale Faserorientierungsbeiwert  $\eta_x$ . x wird in diesem Kapitel auch als Betrachtungsrichtung bezeichnet.

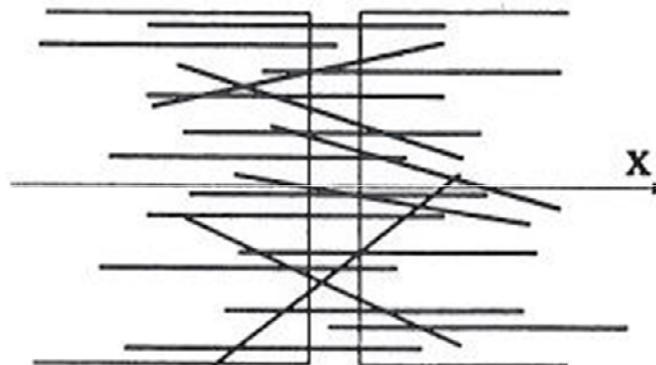


Abbildung 61: Fasern die einen Schnitt durchlaufen [2]

Man betrachte nun einen Probekörper aus UHPC (Abbildung 61). Die Anzahl der Fasern die eine Schnittfläche  $S$  durchdringen wird als  $n$  bezeichnet. Diese Variable ist ein Verhältnis der Fläche der Fasern im Schnitt ( $\rho S$  mit  $\rho$  als lokale Faserkonzentration und  $S$  der Schnittfläche des Probekörpers) und der Fläche einer Einzelfaser geschnitten senkrecht zu deren Achse ( $\pi \frac{d_f^2}{4}$ ). Sie wird mit  $\eta_x$  multipliziert, damit auch die Orientierung der Fasern berücksichtigt ist.

$$n = \eta_x \frac{\rho S}{\pi \frac{d_f^2}{4}} \quad (4-4)$$

$n$  und  $\eta_x$  sind derzeit noch unbekannt, deshalb wird eine zweite Gleichung benötigt.

Es ist  $N$  die Anzahl der Fasern in einem Körper der Länge  $L$  und  $S$  die vorhin erwähnte Schnittfläche. Die Orientierung der Fasern wird von zwei Winkeln  $\theta$  und  $\varphi$  bestimmt (Abbildung 62).  $p(\varphi, \theta)$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung der beiden Winkel,  $l_{\text{proj},x}$  die Projektion der Faser auf die  $x$ -Achse (senkrecht zur Schnittfläche) und  $f(l_{\text{proj},x})$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung der Fasern. Die Orientierungsmöglichkeiten der Fasern können mit einer Halbkugel beschrieben werden. Aus Symmetriegründen kann man die Winkel auf eine Achtelkugel reduzieren, die Integrationsintervalle kann man also als  $\varphi \in [0, \pi/2]$  und  $\theta \in [0, \pi/2]$  definieren.

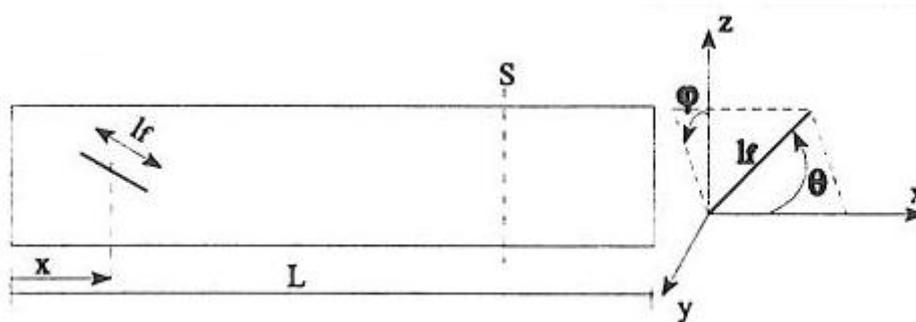


Abbildung 62: Orientierungswinkel einer Faser [2]

Wird eine homogene Faserverteilung angenommen ist die lokale Faserkonzentration  $\rho = \text{const.}$  und  $f(l_{\text{proj},x}) = 1/L$ . Die Wahrscheinlichkeit  $\text{Prob}(\varphi, \theta)$ , dass eine auf die  $x$ -Achse projizierte Faser bei gegebener Verteilung der Fasern  $p(\varphi, \theta)$  die Schnittfläche  $S$  durchdringt ist mit (4-3)

$$\text{Prob}(\varphi, \theta) = \frac{l_{\text{proj},x}}{L} = \frac{l_f \cos \theta}{L} \quad (4-5)$$

Behloul verwendet keinen Absolut-Betrag, da bei  $\varphi \in [0, \pi/2]$  und  $\theta \in [0, \pi/2]$  keine negativen Werte auftreten können.

Damit  $n$ , die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Fasern die  $S$  durchlaufen, berechnet werden kann, wird die Wahrscheinlichkeit  $\text{Prob}(\varphi, \theta)$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung der beiden Winkel  $p(\varphi, \theta)$  und der Faseranzahl im Volumen  $N$  multipliziert und über beide Winkel von 0 bis  $\pi/2$  integriert.

Der statistische Erwartungswert für die Anzahl der Fasern welche die Schnittfläche  $S$  durchkreuzen ist dann

$$E(n) = N \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi, \theta) \frac{l_f}{L} \cos \theta \, d\varphi d\theta \quad (4-6)$$

Die Faseranzahl berechnet sich demnach aus

$$N = \frac{V_{f,ges}}{V_{f,einz}} = \frac{\rho V_{Körp}}{V_{f,einz}} = \frac{\rho S L}{\pi \frac{d_f^2}{4} l_f} \quad (4-7)$$

Dabei sind  $V_{Körp}$  das Volumen des Körpers,  $V_{f,ges}$  das Volumen der Fasern und  $V_{f,einz}$  das Volumen der Einzelfaser ist. Eingesetzt in (4-6)

$$E(n) = \frac{\rho S}{\pi \frac{d_f^2}{4}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi, \theta) \cos \theta \, d\varphi d\theta \quad (4-8)$$

Der statistische Erwartungswert  $E(n)$  ist ein Mittelwert, welcher sich  $n$  nähert und wird in diesem Fall mit  $n$  gleichgesetzt. Deshalb ergibt sich durch einsetzen von (4-8) in (4-4)

$$\eta_x = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi, \theta) \cos \theta \, d\varphi d\theta \quad (4-9)$$

Für den isotropen Fall gilt laut Behloul für die Verteil-Funktion

$$p(\varphi, \theta) = \frac{2}{\pi} \sin \theta \quad (4-10)$$

Aus (4-10) mit den entsprechenden Projektionen auf die y-Achse und die z-Achse sind die Faserorientierungsbeiwerte dementsprechend

$$\eta_y = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi, \theta) \sin \theta \sin \varphi \, d\varphi d\theta \quad (4-11)$$

$$\eta_z = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi, \theta) \sin \theta \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (4-12)$$

Durch Einsetzen von (4-10) in die 3 Gleichungen für den Faserorientierungsbeiwert ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_x &= 0,5 \\ \eta_y &= 0,5 \\ \eta_z &= 0,5 \end{aligned}$$

Der Mittelwert des Faserorientierungsbeiwert im dreidimensionalen Raum und vorausgesetzter Isotropie und Homogenität beträgt in alle Richtungen 0,5.

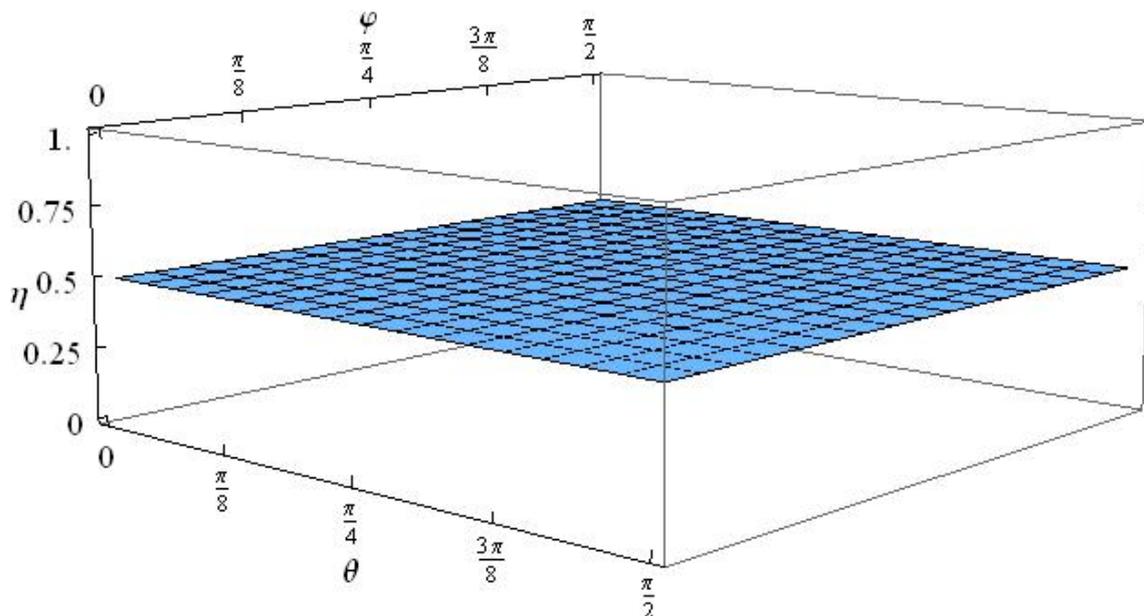


Abbildung 63: Faserorientierungsbeiwert im isotropen Fall 3D

Im zweidimensionalen Fall fällt Winkel  $\varphi$  weg. Der Faserorientierungsbeiwert wird dementsprechend zu

$$\eta_x = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \cos \theta d\theta \quad (4-13)$$

$$\eta_z = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} p(\theta) \sin \theta \, d\theta \quad (4-14)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung des Winkels  $\theta$  ist

$$p(\theta) = \frac{2}{\pi} \quad (4-15)$$

Setzt man  $p(\theta)$  in (4-13) und (4-14) ein ergibt sich für den Faserorientierungsbeiwert im zweidimensionalen Raum

$$\begin{aligned} \eta_x &= 2/\pi \\ \eta_z &= 2/\pi \end{aligned}$$

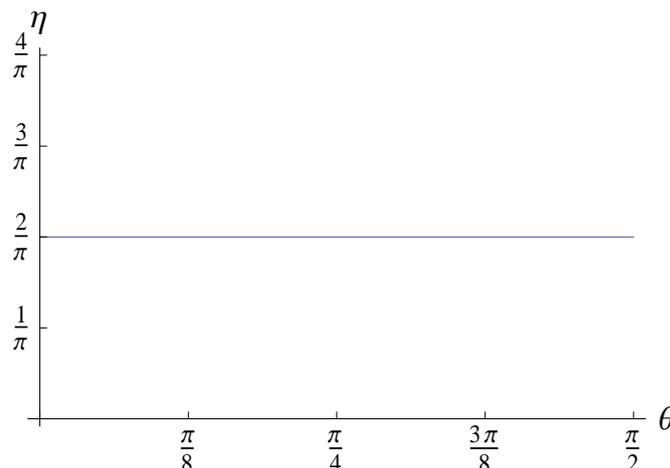


Abbildung 64: Faserorientierungsbeiwert im isotropen Fall 2D

## 4.2 Definition des Faserorientierungsbeiwertes $\eta$

Im vorangehenden Kapitel wurde der Faserorientierungsbeiwert durch Behloul mathematisch hergeleitet. Jede Auftretenswahrscheinlichkeit einer Faser, beschrieben durch die Verteilungsfunktionen, wird mit dem Einzelfaserorientierungsbeiwert multipliziert und dann summiert man die Werte über alle möglichen Orientierungsrichtungen. Nun wird versucht seine Ergebnisse auf das in dieser Arbeit verwendete Koordinatensystem anzupassen.

Allgemein kann man für den zweidimensionalen Fall sagen

$$\eta_{,2D} = \int_{\varphi=0}^{\pi} p(\varphi) \eta_{einz,2D} d\varphi \quad (4-16)$$

mit

$$\eta_{einz,2D} = |\cos \varphi| \quad (4-17)$$

Um den Absolut-Betrag zu berücksichtigen, wird im Bereich von  $\pi/2$  bis  $\pi$  bei den handgerechneten 2D-Beispielen mit  $(-\cos(\varphi))$  multipliziert, da die Cosinus-Kurve ab  $\pi/2$  in den negativen Bereich übergeht.

In 3D gilt, mit „w“ als untersuchte Blickrichtungs-Achse, unter Berücksichtigung des Faktors für die Koordinatentransformation (siehe Formel (3-21)).

$$\eta_{,3D} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} p(\varphi, \theta) \sin \theta \eta_{einz,w,3D} d\varphi d\theta \quad (4-18)$$

und

$$\eta_{einz,3D} = |\cos \theta| \quad (4-19)$$

Dabei wird bewusst diese Achse gewählt, da sich der Einzelfaserorientierungsbeiwert in diesem Fall auf eine trigonometrische Funktion reduziert, während für die anderen beiden Achsen laut Koordinatentransformation zwei trigonometrische Funktionen benötigt werden.

### 4.3 Faserorientierungsbeiwert bei homogenen Verteil-Funktionen in 2D

Die Homogenität bedeutet, wie schon erwähnt, dass es keine Richtung  $\theta$  oder  $\varphi$  (bzw.  $\xi$  oder  $\psi$ ) gibt, in die keine Fasern orientiert sind. Ausgenommen wird der Grenzfall wo erstmals in eine Richtung keine Fasern auftreten. Dieser wird in den folgenden Kapiteln auch grafisch dargestellt.

### 4.3.1 Faserorientierungsbeiwert bei linearer homogener Verteil-Funktion in 2D

Nun werden die Faserorientierungsbeiwerte der in Kapitel 3.5.1 erstellten Verteil-Funktion berechnet. Die Verteil-Funktion ist im Koordinatensystem der lokalen Blickrichtung dargestellt (Abbildung 17), so wie auch der Einzelfaserorientierungsbeiwert der sich somit auf eine beliebige Blickrichtung  $u'$  bezieht. Die Verteil-Funktion und der Einzelfaserorientierungsbeiwert werden multipliziert und über ein Integral mit den bestimmten Grenzen ( $\varphi=0$  bis  $\varphi=\pi$ ) aufsummiert.

In Intervalle aufgeteilt wegen der Unstetigkeitsstellen von (4-2) und der Verteil-Funktion selber lassen sich mit (4-16) die Faserorientierungsbeiwerte für den homogenen linearen Fall in 2D wie folgt berechnen.

$$\eta_{h,lin,2D} = \int_0^{\pi} p(\varphi) |\cos \varphi| d\varphi = \eta_{h,lin,2D,1} + \eta_{h,lin,2D,2} + \eta_{h,lin,2D,3} + \eta_{h,lin,2D,4} =$$

$$\begin{aligned} \eta_{h,lin,2D,1} &= \int_0^{\beta} \left[ \left( \frac{4}{\pi^2} \beta + p_1 - \frac{4}{\pi} p_1 \beta \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \varphi \right] \cos \varphi d\varphi = \\ &= p_1 \sin \beta + \frac{4}{\pi} p_1 \cos \beta - \frac{4}{\pi^2} \cos \beta - \frac{4}{\pi} p_1 + \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{lh,lin,2D,2} &= \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left[ p_1 - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) (\varphi - \beta) \right] \cos \varphi d\varphi = \\ &= -p_1 + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} p_1 \beta - \frac{4}{\pi^2} \beta - p_1 \sin \beta + \frac{4}{\pi} p_1 \cos \beta - \frac{4}{\pi^2} \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{h,lin,2D,3} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \left[ p_1 - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) - \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] (-\cos \varphi) d\varphi \\ &= -\frac{4}{\pi} p_1 \sin \beta + p_1 \cos \beta + \frac{4}{\pi^2} \sin \beta - \frac{2}{\pi} \cos \beta + \frac{4}{\pi} p_1 \beta - \frac{4}{\pi^2} \beta \\ &\quad - p_1 + \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{h,lin,2D,4} &= \int_{\frac{\pi}{2}+\beta}^{\pi} \left[ \left( \frac{2}{\pi} - p_1 \right) + \frac{4}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \left( \varphi - \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \right) \right] (-\cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} p_1 - \frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi} \cos \beta - p_1 \cos \beta - \frac{4}{\pi} p_1 \sin \beta + \frac{4}{\pi^2} \sin \beta\end{aligned}$$

Aufsummieren der einzelnen Intervalle ergibt die gesuchte Bestimmungsgleichung für den Faserorientierungsbeiwert in einer beliebigen Richtung „u‘“, die durch  $\beta$  definiert wird.

$$\begin{aligned}\eta_{h,lin,2D} &= \eta_{h,lin,2D,1} + \eta_{h,lin,2D,2} + \eta_{h,lin,2D,3} + \eta_{h,lin,2D,4} \\ &= \frac{8}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) (\cos \beta - \sin \beta + \beta) - 2 p_1 + \frac{4}{\pi}\end{aligned}\quad (4-20)$$

$p_1$  ist ein freier Parameter der linearen Verteil-Funktion, und zwar ist er die Orientierung in die die meisten Fasern gerichtet sind.

Zur Veranschaulichung der gefundenen Gleichung wurden jeweils eine Darstellung in kartesischen und eine in Polarkoordinaten gewählt. Der Winkel  $\beta$  darf in dieser Verteil-Funktion maximal einen Wert von  $\beta=\pi/2$  haben, da sonst ein weiterer Intervall berücksichtigt werden muss. Denn die Funktion ist nur bis zu  $p_0=p_2$  definiert.

Hierfür wurden verschiedene Werte für  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in (4-20) eingesetzt und die Ergebnisse grafisch dargestellt:

- $p_1 = \frac{1}{\pi}$  ist der isotrope Fall
- $p_1 = \frac{1,5}{\pi}$  ist ein gewählter Wert
- $p_1 = \frac{2}{\pi}$  ist der maximale anisotrope homogene Fall, wo erstmals keine Fasern in Hauptorientierungsrichtung  $\eta_2$  gerichtet sind

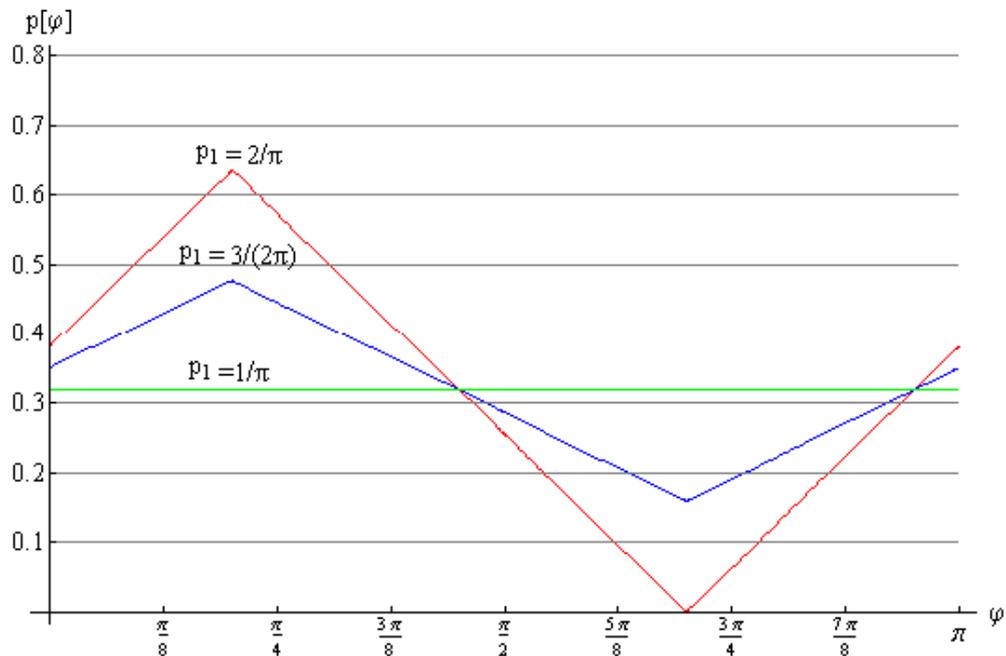


Abbildung 65: lineare Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in kartesischen Koordinaten 2D

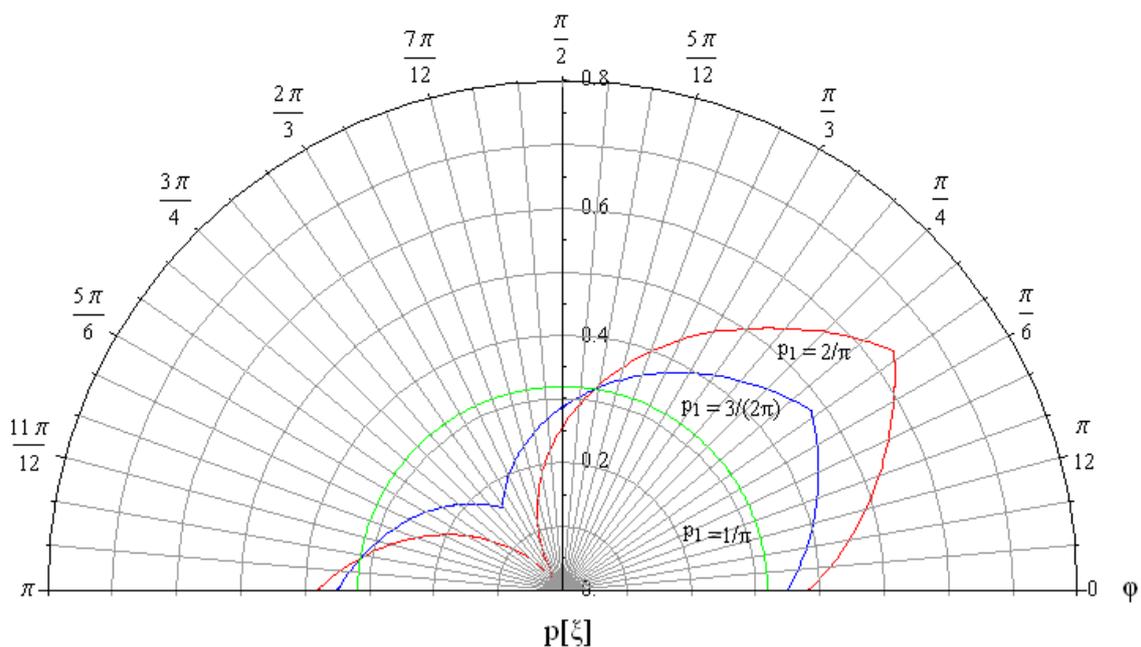


Abbildung 66: lineare Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in Polarkoordinaten 2D

Dreht man das Koordinatensystem in die Hauptrichtungen, so wie in Abbildung 67, kann bei  $\beta=0$  der Faserorientierungsbeiwert in Hauptrichtung 1 abgelesen oder durch die For-

mel (4-20) bei gegebenem  $\rho_1$  berechnet werden. Der Faserorientierungsbeiwert in Haupt-  
richtung 2 liegt in diesem Fall bei  $\beta = \pi/2$ .

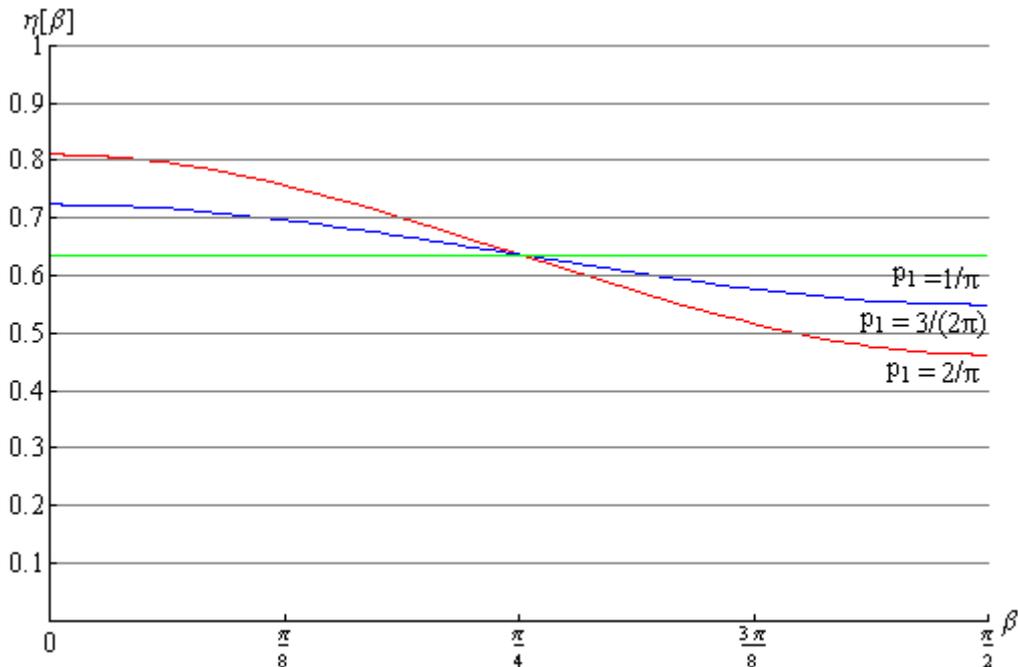


Abbildung 67: Verschiedene  $\eta(\rho_1)$  im Vergleich in kartesischen Koordinaten für lineare Verteil-Funktion

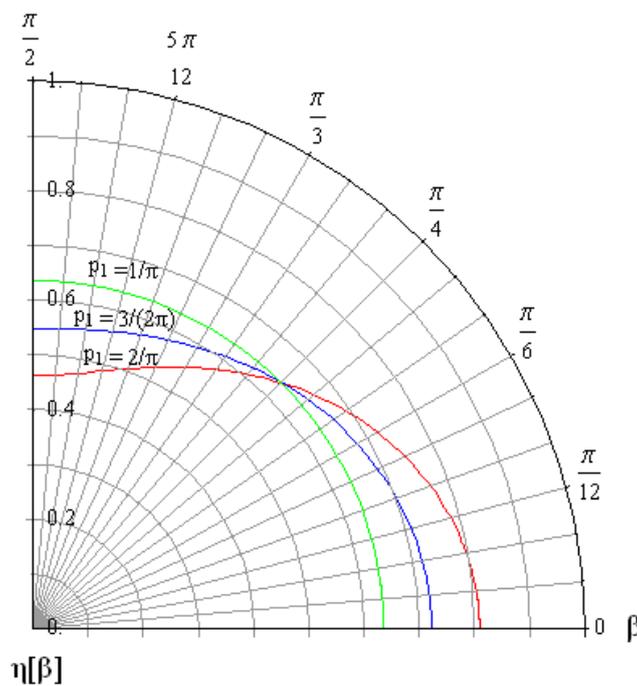


Abbildung 68: Verschiedene  $\eta(\rho_1)$  im Vergleich in Polar-Koordinaten für lineare Verteil-Funktion

Abschließend wird  $\eta$  in Abhängigkeit von  $p_1$  und  $\beta$  in Abbildung 69 dargestellt

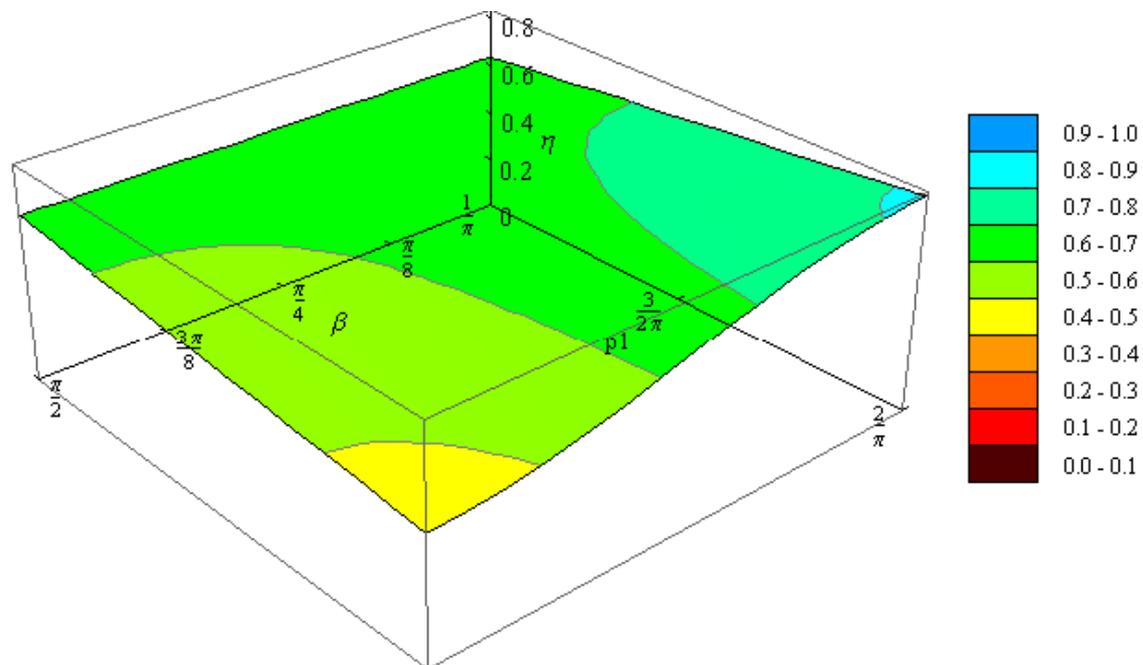


Abbildung 69:  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $p_1$  in kartesischen Koordinaten für die lineare homogene Verteil-Funktion in 2D

Damit bekommt man einen guten Überblick über alle möglichen  $\eta$  bei Verwendung einer linear veränderlichen homogenen Orientierungsverteilung. Alle möglichen Faserorientierungsbeiwerte sind auf den Bereich zwischen 0,461 und 0,811 begrenzt.

$$0,461 \leq \eta_{h,lin,2D} \leq 0,811$$

#### 4.3.2 Faserorientierungsbeiwert der Cosinus-Verteil-Funktion in 2D

In diesem Kapitel werden die Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Verteil-Funktion aus Kapitel 3.5.2 ausgewertet. Die Verteil-Funktion ist wiederum im Koordinatensystem der lokalen Blickrichtung dargestellt (Abbildung 20), so wie auch der Einzelfaserorientierungsbeiwert welcher sich auf eine beliebige Blickrichtung  $u'$  bezieht. Die Verteil-Funktion und der Einzelfaserorientierungsbeiwert werden multipliziert und über ein Integral mit den bestimmten Grenzen des Richtungswinkels  $\varphi$  ( $\varphi=0$  bis  $\varphi=\pi$ ) aufsummiert.

Nach dem Schema von Kapitel 4.3 wird aus (4-16) mit der Cosinus-Verteil-Funktion

$$\eta_{h,cos,2D} = \int_0^{\pi} p_{h,cos,2D}(\varphi) |\cos \varphi| d\varphi = \eta_{h,cos,2D,1} + \eta_{h,cos,2D,2}$$

$$\begin{aligned} \eta_{h,cos,2D,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2(\varphi - \beta)) + \frac{1}{\pi} \right] \cos \varphi d\varphi = \\ &= \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} + \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \sin(2\beta) \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{h,cos,2D,2} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\varphi) (-\cos \varphi) d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2(\varphi - \beta)) + \frac{1}{\pi} \right] (-\cos \varphi) d\varphi = \\ &= - \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \sin(2\beta) \frac{2}{3} + \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren der beiden Intervalle lautet die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} \eta_{h,cos,2D} &= \eta_{h,cos,2D,1} + \eta_{h,cos,2D,2} \\ &= \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} + \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \sin(2\beta) \frac{2}{3} \\ &\quad - \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \sin(2\beta) \frac{2}{3} + \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \\ &= \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \end{aligned} \tag{4-21}$$

Sie gilt für eine beliebige Richtung  $u'$  welche durch  $\beta$  definiert ist.

Es wurden wieder der isotrope, der maximale anisotrope homogene und ein Fall dazwischen ausgewertet.

- $p_1 = \frac{1}{\pi}$  ist der isotrope Fall
- $p_1 = \frac{1,5}{\pi}$  ist ein gewählter Wert
- $p_1 = \frac{2}{\pi}$  ist der maximale anisotrope homogene Fall, wo erstmals keine Fasern in Hauptorientierungsrichtung  $\eta_2$  gerichtet sind

Die Ergebnisse mit verschiedenen  $p_1$  und wiederum  $\beta = \pi/5$  sehen dann folgendermaßen aus

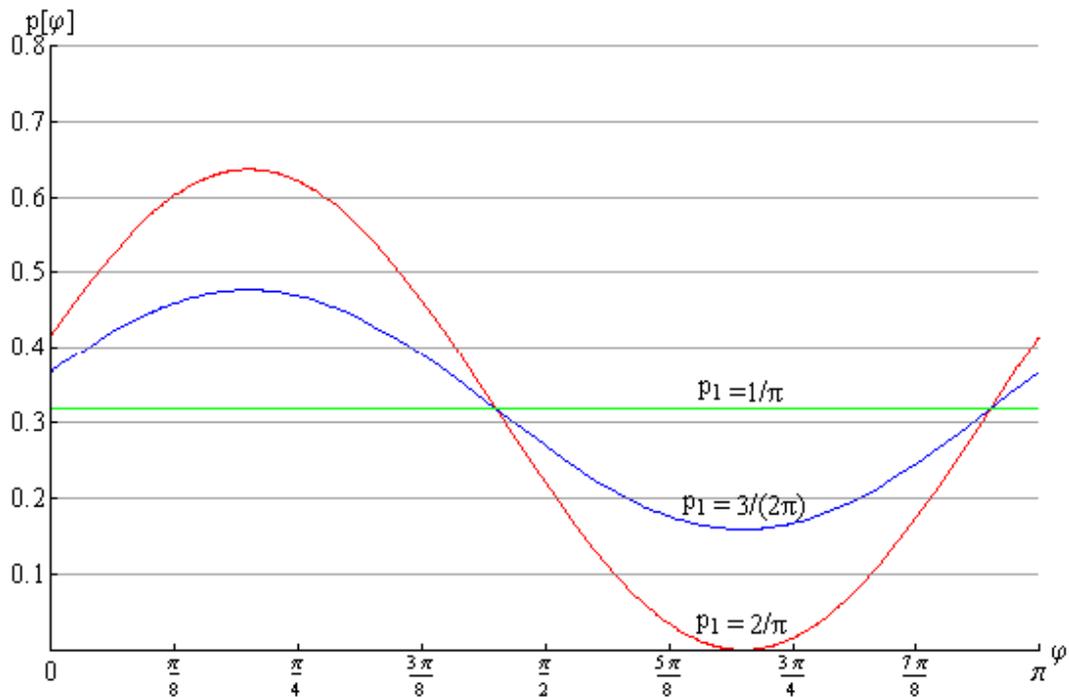


Abbildung 70: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in kartesischen Koordinaten 2

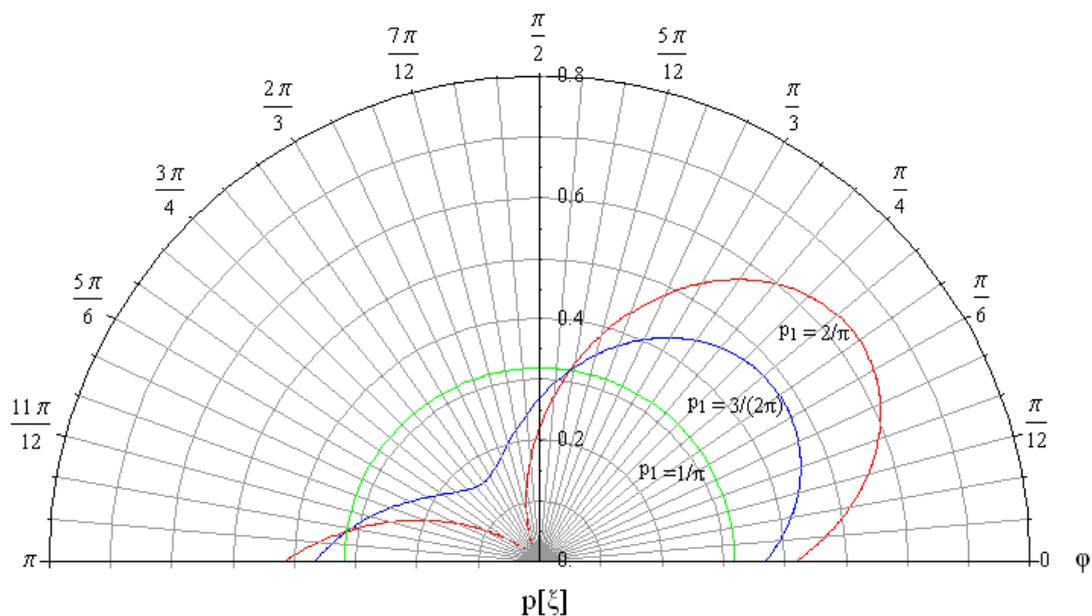


Abbildung 71: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in Polarkoordina-

Durch Drehung des Koordinatensystems in das Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes ergibt sich für die Faserorientierungsbeiwerte

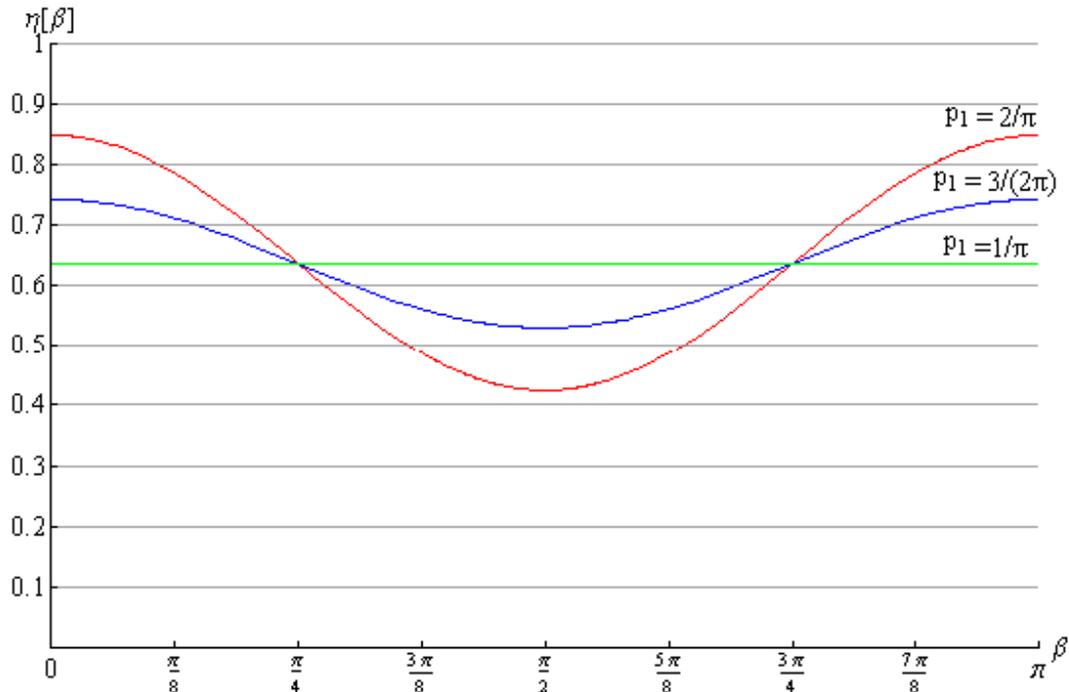


Abbildung 72: Verschiedene  $\eta(p_1)$  im Vergleich in kartesischen Koordinaten für die Cosinus-Verteil-Funktion 2D

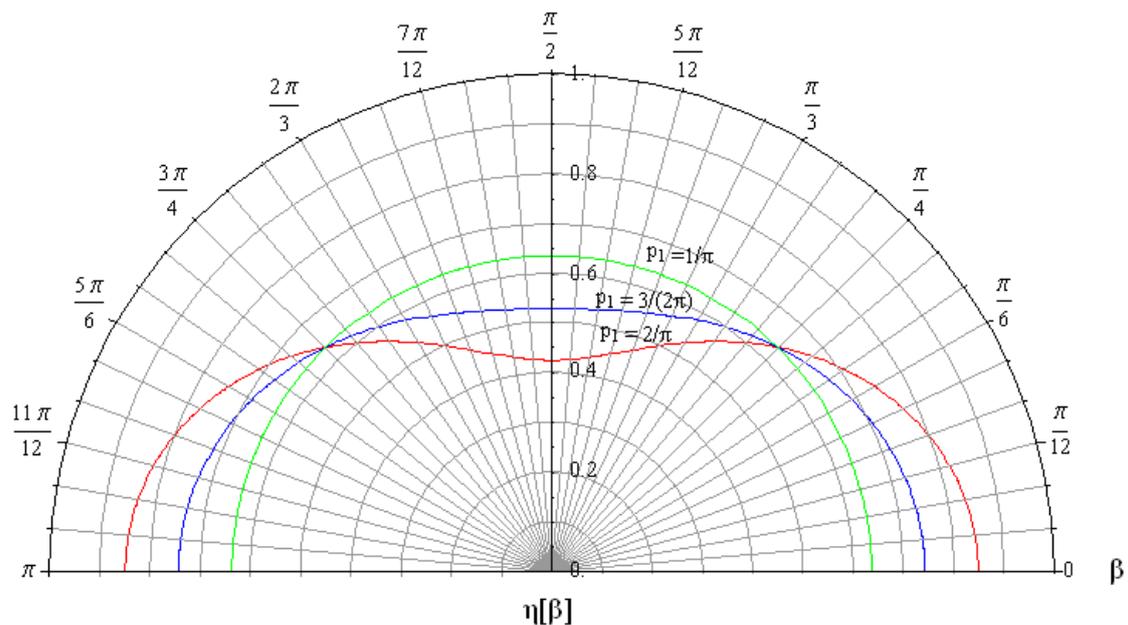


Abbildung 73: Verschiedene  $\eta(p_1)$  im Vergleich in Polar-Koordinaten für die Cosinus-Verteil-Funktion 2D

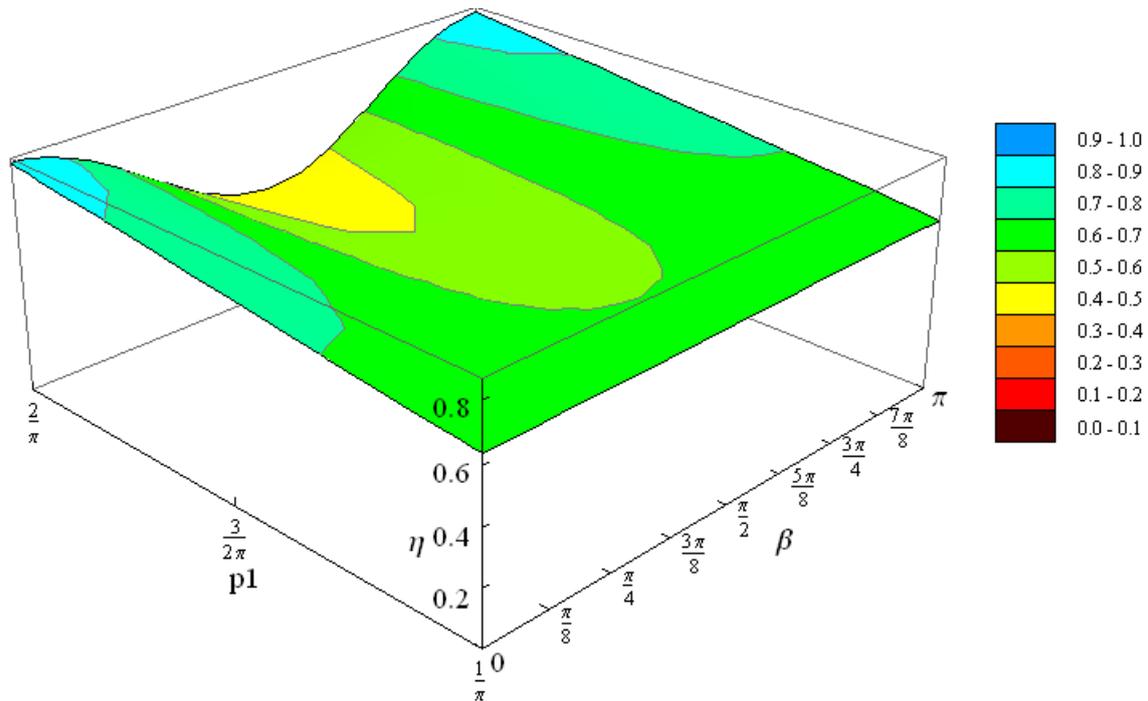


Abbildung 74:  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $p_1$  in kartesischen Koordinaten für die homogene Cosinus-Verteil-Funktion in 2D

Für  $p_1=1/\pi$  tritt der isotrope Fall ein, entlang von  $\beta$  ändert sich der Faserorientierungsbeiwert nicht, das heißt für alle Richtungen ist  $\eta=2/\pi=0,637$ .

Die Bandbreite für  $\eta$  bei homogener Orientierung ist bei Verwendung der Cosinus-Verteil-Funktion größer als bei der linearen Verteil-Funktion. Sie beginnt bei  $\eta=0,424$  und geht bis  $\eta=0,849$ .

$$0,424 \leq \eta_{h,cos,2D} \leq 0,849$$

#### 4.3.3 Vergleich und Annäherung der homogenen Cosinus-Verteil-Funktion und homogenen lineare Verteil-Funktion in 2D

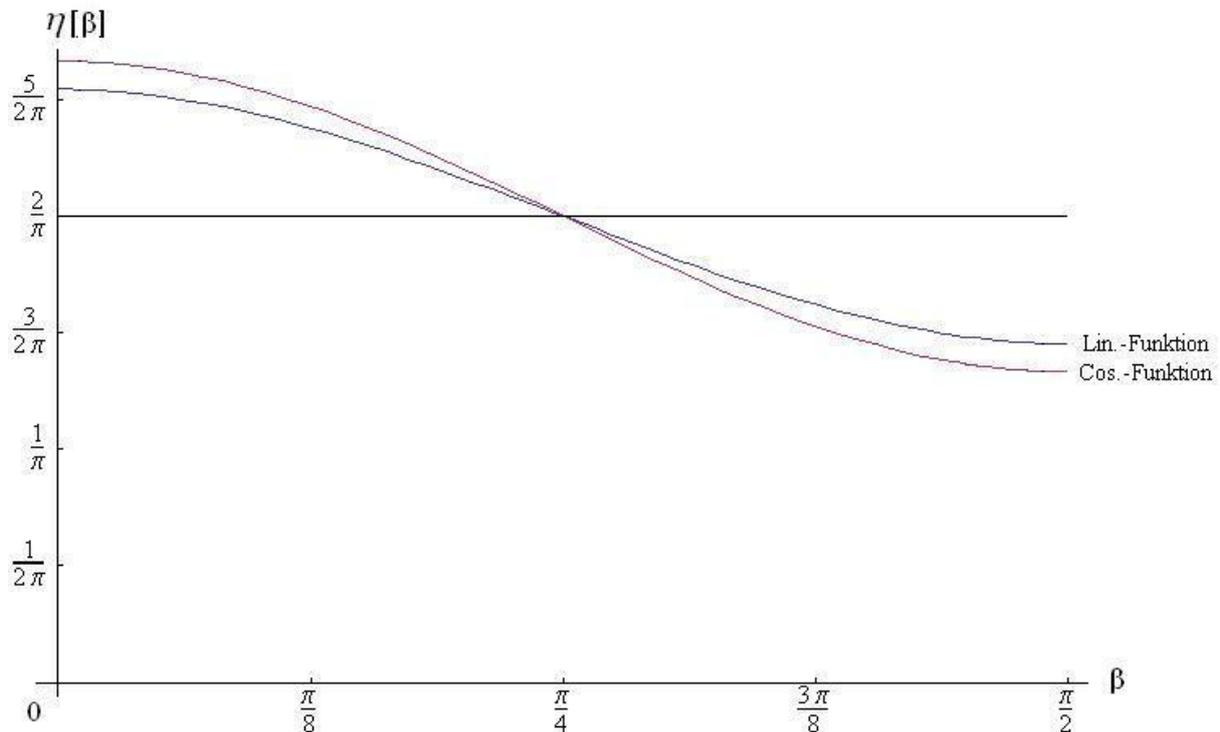


Abbildung 75: Vergleich Faserorientierungsbeiwert Cosinus-Verteil-Funktion und lineare Verteil-Funktion

Da die lineare Verteil-Funktion aufgrund der Unstetigkeitsstellen schon in 2D sehr aufwendig ist, wird versucht über eine Konstante  $k$  eine Annäherung an die Lösung der Cosinus-Verteil-Funktion zu finden. Diese berücksichtigt die Differenz des Faserorientierungsbeiwertes zwischen den beiden Verteil-Funktionen entlang von Richtungswinkel  $\beta$  bei gleichem  $p_1$ . Die beiden Verteil-Funktionen sind sich in der Lösung qualitativ sehr ähnlich.

$$\eta_{h,lin,gen,2D} = \left[ \eta_{h,cos,2D} - \frac{2}{\pi} \right] k + \frac{2}{\pi} \quad (4-22)$$

Der Winkel  $\beta$  kann beliebig gewählt werden, denn  $\beta$  bedeutet im kartesischen Koordinatensystem nur eine Verschiebung entlang der Achse von  $\varphi$  (Abbildung 15 und Abbildung 16) und er muss für beide Verteil-Funktionen denselben Wert haben. In diesem Fall wird einfachheitshalber  $\beta = 0$  angenommen. Aus (4-20) und (4-21) ergibt sich

$$\eta_{h,lin,gen,2D}(\beta = 0) = \frac{8}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) - 2 p_1 + \frac{4}{\pi} \quad (4-23)$$

$$\eta_{h,cos,2D}(\beta = 0) = \frac{2}{3} p_1 + \frac{4}{3\pi} \quad (4-24)$$

Jetzt wird (4-22) nach k aufgelöst

$$k = \frac{\eta_{h,lin,gen,2D}(\beta = 0) - \frac{2}{\pi}}{\eta_{h,cos,2D}(\beta = 0) - \frac{2}{\pi}} \quad (4-25)$$

und durch Einsetzen der beiden Formeln (4-23) und (4-24) errechnet sich für k

$$k = \frac{\frac{8}{\pi} \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) - 2 p_1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}}{\frac{2}{3} p_1 + \frac{4}{3\pi}} = \frac{12 p_1 - \frac{12}{\pi} - 3 \pi p_1 + 3}{\pi p_1 - 1} = \frac{12}{\pi} - 3 \quad (4-26)$$

Daraus folgt für (4-22) die Näherungslösung für den linearen Ansatz

$$\begin{aligned} \eta_{h,lin,gen,2D} &= \left[ \eta_{h,cos,2D} - \frac{2}{\pi} \right] k + \frac{2}{\pi} \\ &= \left[ \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right] \left( \frac{12}{\pi} - 3 \right) + \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{12}{\pi} - 3 \right) \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) + \frac{2}{\pi} \\ &= \left( \frac{8}{\pi} - 2 \right) \left( p_1 - \frac{1}{\pi} \right) \cos(2\beta) + \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad (4-27)$$

Die Genauigkeit des Wertes wird in Abbildung 76 dargestellt. Es besteht nur ein mit freiem Auge kaum erkennbarer Unterschied zwischen den beiden Kurven.

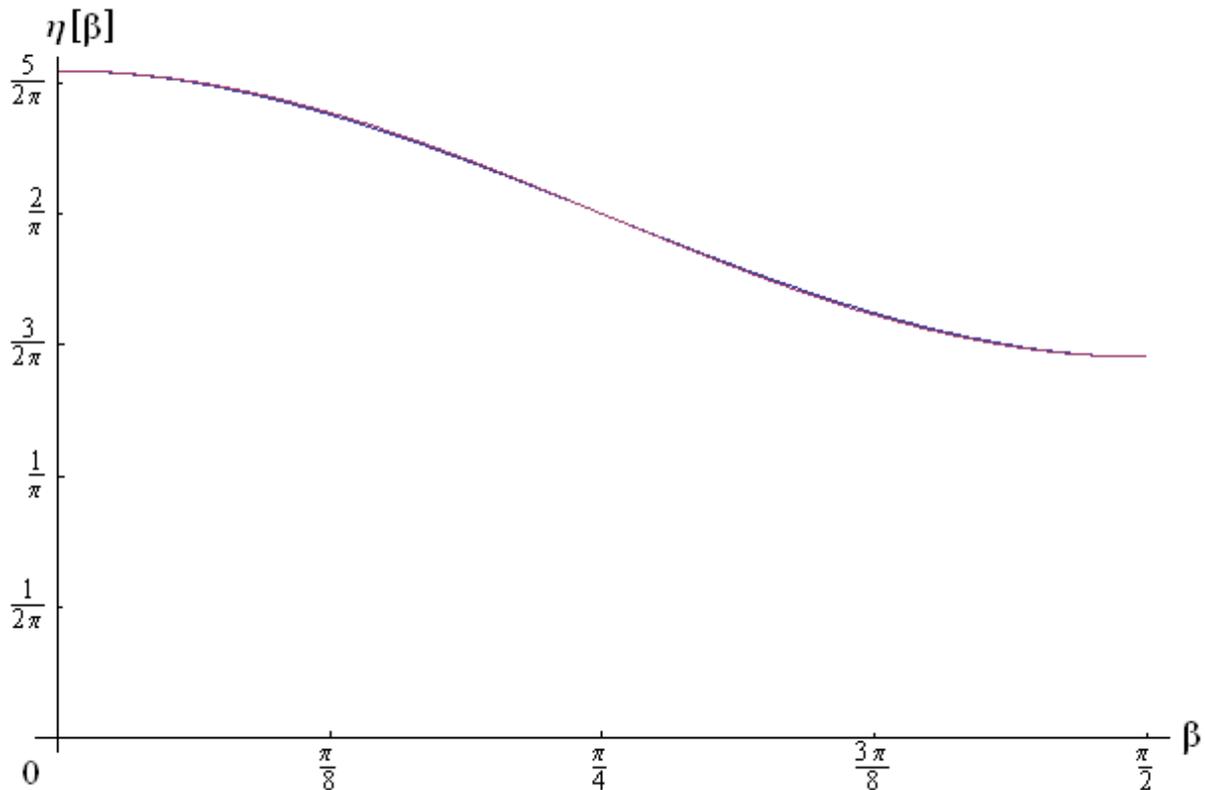


Abbildung 76: Vergleich  $\eta_{h,lin,gen,2D}$  mit  $\eta_{h,cos,2D}$

#### 4.3.4 Faserorientierungsbeiwert der Cosinus-Quadrat-Funktion

Nun wird der Faserorientierungsbeiwert für die Cosinus-Quadrat-Funktion mit Hilfe des Programmes „Mathematica“ ausgewertet. Erneut wird über den Richtungswinkel  $\varphi$  mit den Integrationsgrenzen 0 und  $\pi$  im lokalen Blickrichtungskordinatensystem gerechnet (Abbildung 24).

Durch Einsetzen von (3-40) in (4-16) berechnet sich die Formel für die Faserorientierungsbeiwerte

$$\eta_{h,cosQ,2D} = \int_0^{\pi} \left( \left( \frac{2}{\pi} - p_2 \right) \cos^2(\beta - \varphi) + p_2 \right) |\cos \varphi| d\varphi = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\pi} - p_2 \right) \cos(2\beta) \quad (4-28)$$

Wie in den vorhergehenden Kapiteln werden drei Verteil-Funktionen grafisch ausgewertet

- $p_2 = \frac{1}{\pi}$  ist der isotrope Fall
- $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  ist ein gewählter Wert
- $p_2 = 0$  ist der maximale anisotrope homogene Fall, wo erstmals keine Fasern in Hauptorientierungsrichtung  $\eta_2$  gerichtet sind

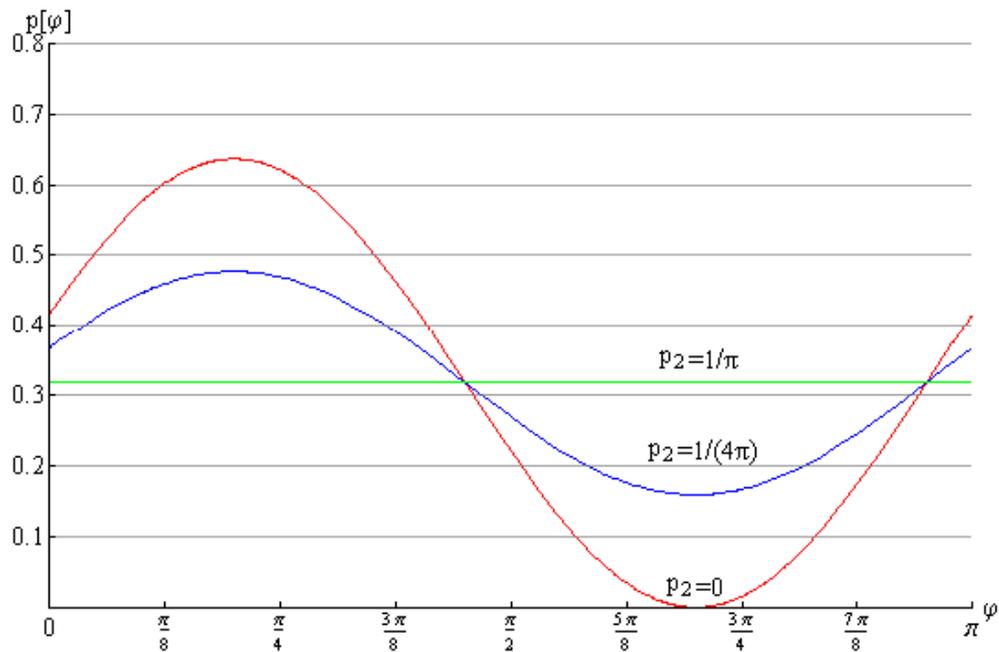


Abbildung 77: Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_2$  mit  $\beta = \pi/5$

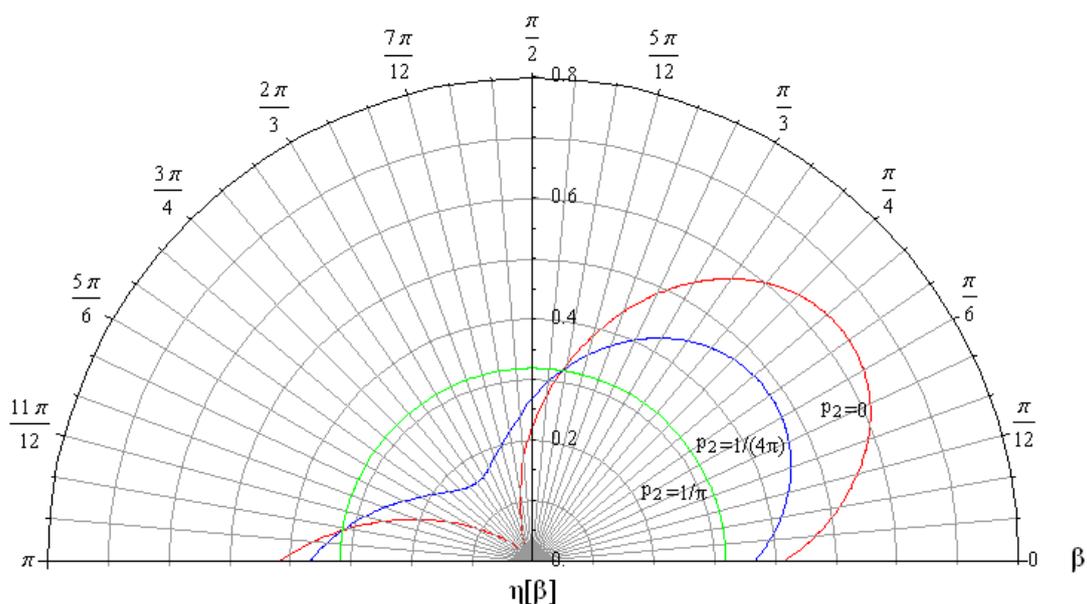


Abbildung 78: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_2$  mit  $\beta = \pi/5$

Durch Drehen des Koordinatensystems in die Hauptrichtungen erhält man für die Faserorientierungsbeiwerte

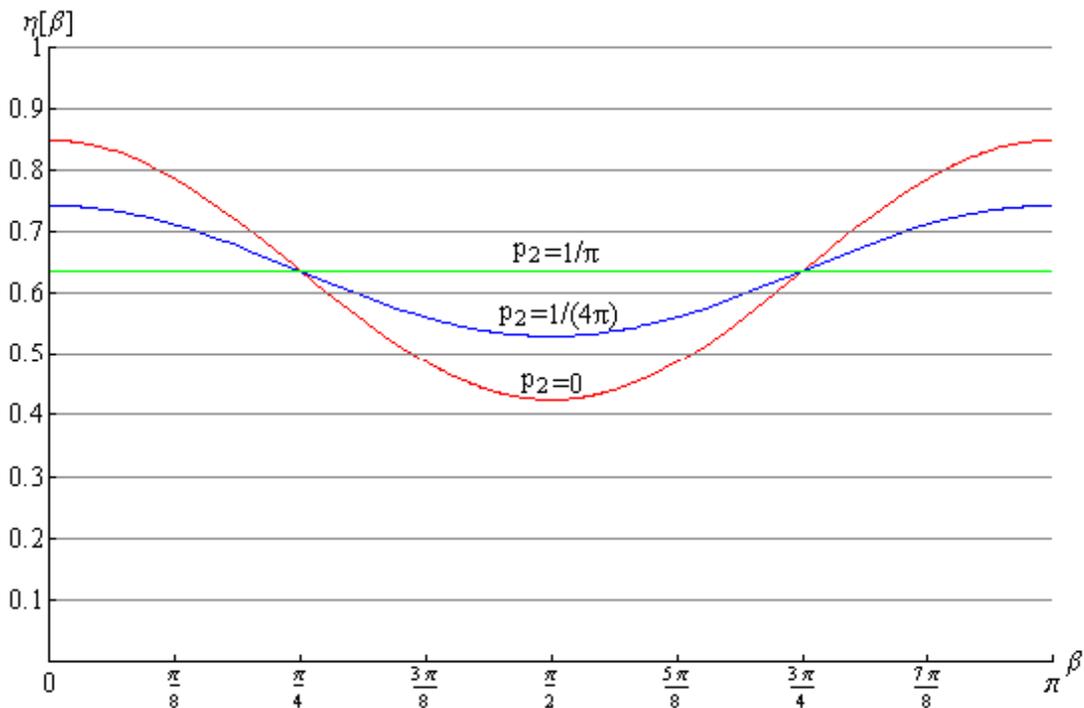


Abbildung 79: Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_2$  in kartesischen Koordinaten in 2D

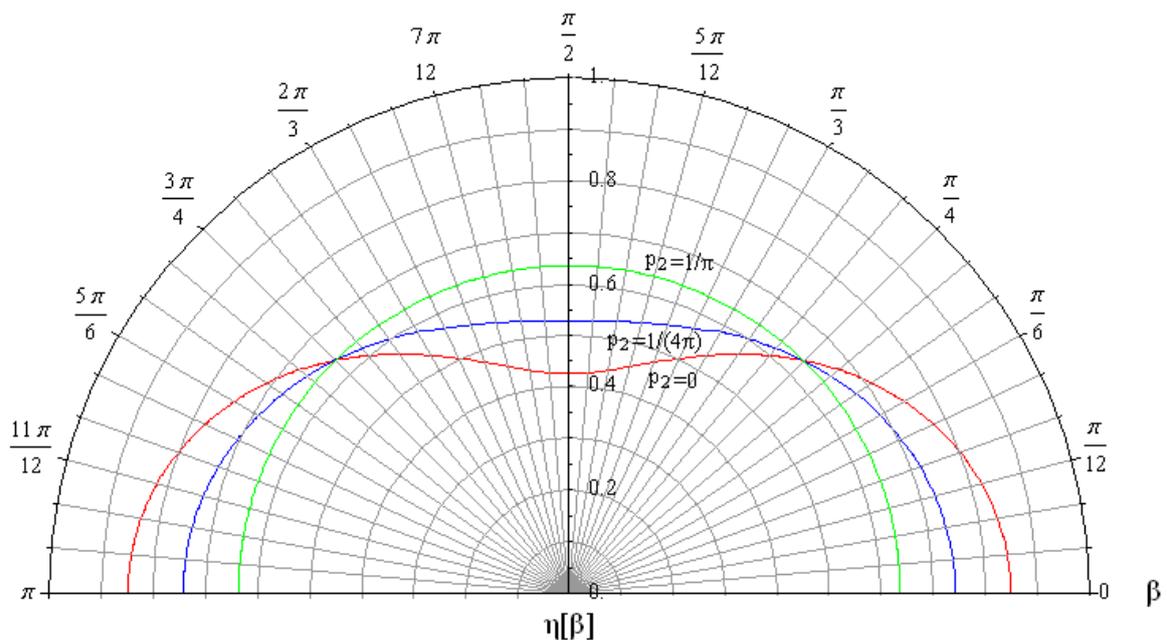


Abbildung 80: Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_2$  in Polarkoordinaten in 2D

Alle Faserorientierungsbeiwerte in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $p_2$  sind in Abbildung 81 dargestellt. Mit  $p_2=1/\pi$  tritt der isotrope Fall ein, mit  $p_2=2/\pi$  der maximale homogene anisotrope Fall.

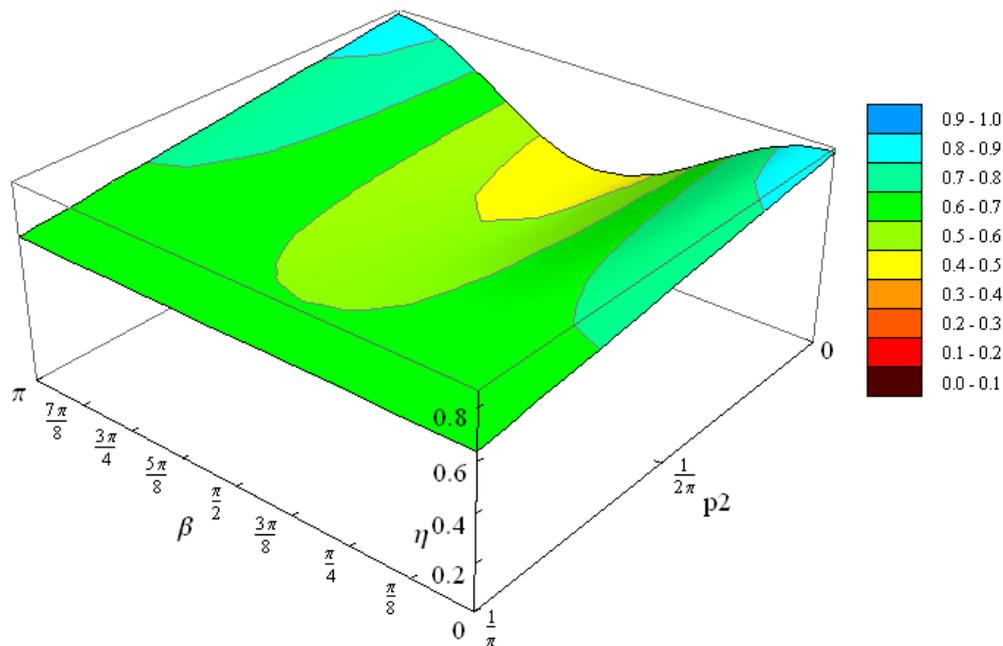


Abbildung 81: Verschiedene Faserorientierungsbeiwerte in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $p_2$  der Cosinus-Quadrat-Funktion in 2D

Abbildung 74 und Abbildung 81 sind bei korrekter Parametereingabe ( $p_1$  bzw.  $p_2$ ) entlang von Richtungswinkel  $\beta$  wie erwartet identisch, da es sich ja um eine umgeformte Version der Cosinus-Verteil-Funktion handelt. Die Bandbreite für  $\eta$  ergibt sich dementsprechend zu

$$0,424 \leq \eta_{h,cosQ,2D} \leq 0,849$$

Somit stehen drei geschlossene Lösungen zur Verfügung, wobei zwei davon bei Beachtung der Parametereingaben ident sind. Die lineare Verteil-Funktion hat im Unterschied zu den Cosinus-Verteil-Funktionen klar erkennbare Unstetigkeitsstellen und eine kleinere Bandbreite der Faserorientierungsbeiwerte. Welche Ansätze den in realen Fasergemengen vorhandenen Orientierungszustand am besten beschreiben muss über experimentelle Untersuchungen herausgefunden werden. Untersuchungen dieser Art werden in der Diplomarbeit von Trummer [11] zeitgleich zu dieser Arbeit gemacht.

#### 4.4 Faserorientierungsbeiwerte des handgerechneten Dreieck-Impulses in 2D

Nun wird eine inhomogene Verteil-Funktion mit dem Einzelfaserorientierungsbeiwert multipliziert und durch Integration aufsummiert. Auch die Faserorientierungsbeiwerte des handgerechneten Dreieck-Impulses werden über den Rotationswinkel  $\varphi$  im Koordinatensystem der Blickrichtung berechnet. Bei der inhomogenen Verteil-Funktion besteht das Problem, dass die Integration über Bereiche aufgrund der Unstetigkeitsstellen von (4-2) und der Verteil-Funktion für ein vorher bekanntes  $\beta$  erfolgt. In Abbildung 82 wird dieser Sachverhalt verdeutlicht.

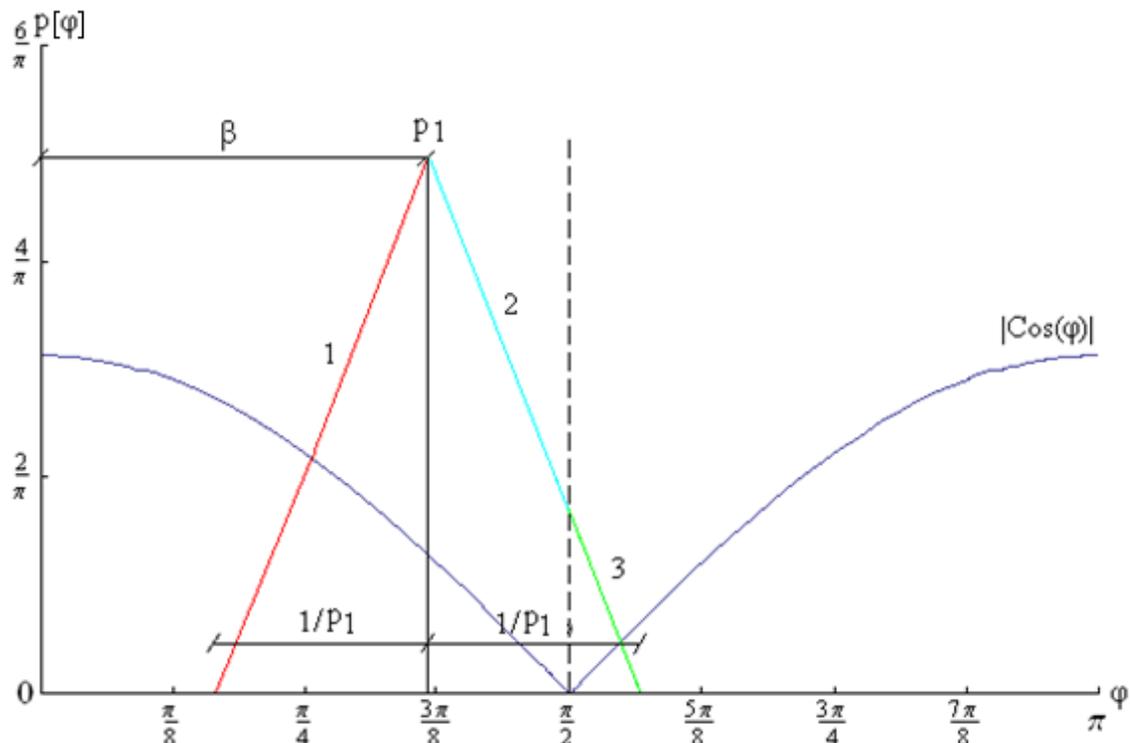


Abbildung 82: Beispiel für verschiedene Integrationsbereiche für die Berechnung des Faserorientierungsbeiwertes mit inhomogener linearer Verteil-Funktion

Das heißt, je nachdem welchen Wert für  $\beta$  angenommen wird, rechnet man mit einer anderen Formel.

Es werden vier Bereiche unterschieden:

A:  $0 < \beta < \pi/2 - 1/p_1$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i,lin,2D,A} &= \int_{\beta-1/p_1}^{\beta} (p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\alpha}^{\beta+1/p_1} (p_1 + p_1^2\beta - p_1^2\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \\
 &= p_1^2 \cos \beta - p_1^2 \cos\left(\beta - \frac{1}{p_1}\right) + p_1 \sin \beta + p_1^2 \cos \beta \\
 &\quad - p_1^2 \cos\left(\beta + \frac{1}{p_1}\right) - p_1 \sin \beta = 2p_1^2 \cos \beta \left(1 - \cos \frac{1}{p_1}\right)
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

B:  $\pi/2 - 1/p_1 < \beta < \pi/2$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i,lin,2D,B} &= \int_{\beta-1/p_1}^{\beta} (p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\pi/2}^{\beta} (p_1 + p_1^2\beta - p_1^2\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\pi/2}^{\beta+1/p_1} (p_1 + p_1^2\beta - p_1^2\varphi) (-\cos \varphi) \, d\varphi \\
 &= p_1^2 \cos \beta - p_1^2 \cos\left(\beta - \frac{1}{p_1}\right) + p_1 \sin \beta + p_1 + p_1^2\beta - \frac{p_1^2\pi}{2} \\
 &\quad + p_1^2 \cos \beta - p_1 \sin \beta + p_1 + p_1^2\beta - \frac{p_1^2\pi}{2} + p_1^2 \cos\left(\beta + \frac{1}{p_1}\right) \\
 &= 2p_1 + 2p_1^2\beta - p_1^2\pi + 2p_1^2 \cos \beta - 2p_1^2 \sin \beta \sin\left(\frac{1}{p_1}\right)
 \end{aligned} \tag{4-30}$$

C:  $\pi/2 < \beta < \pi/2 + 1/p_1$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i,lin,2D,C} &= \int_{\beta-1/p_1}^{\pi/2} (p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\beta}^{\pi/2} (p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi)(-\cos \varphi) \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\alpha}^{\beta+1/p_1} (p_1 + p_1^2\beta - p_1^2\varphi)(-\cos \varphi) \, d\varphi \\
 &= p_1 - p_1^2\beta + \frac{p_1^2\pi}{2} - p_1^2 \cos\left(\beta + \frac{1}{p_1}\right) + p_1 - p_1^2\beta + \frac{p_1^2\pi}{2} \\
 &\quad - p_1^2 \cos \beta - p_1 \sin \beta - p_1^2 \cos \beta + p_1^2 \cos\left(\beta + \frac{1}{p_1}\right) + p_1 \sin \beta \\
 &= 2p_1 - 2p_1^2\beta + p_1^2\pi - 2p_1^2 \cos \beta - 2p_1^2 \sin \beta \sin\left(\frac{1}{p_1}\right)
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

D:  $\pi/2 + 1/p_1 < \beta < \pi$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i,lin,2D,D} &= \int_{\beta-1/p_1}^{\beta} (p_1 - p_1^2\beta + p_1^2\varphi)(-\cos \varphi) \, d\varphi \\
 &\quad + \int_{\alpha}^{\beta+1/p_1} (p_1 + p_1^2\beta - p_1^2\varphi)(-\cos \varphi) \, d\varphi \\
 &= -p_1^2 \cos \beta + p_1^2 \cos\left(\beta - \frac{1}{p_1}\right) - p_1 \sin \beta - p_1^2 \cos \beta \\
 &\quad + p_1^2 \cos\left(\beta + \frac{1}{p_1}\right) + p_1 \sin \beta = 2p_1^2 \cos \beta \left(\cos \frac{1}{p_1} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

In Abbildung 83 sind die verschiedenen Bereiche mit einer Annahme von  $p_1 = 8/\pi$  grafisch dargestellt.

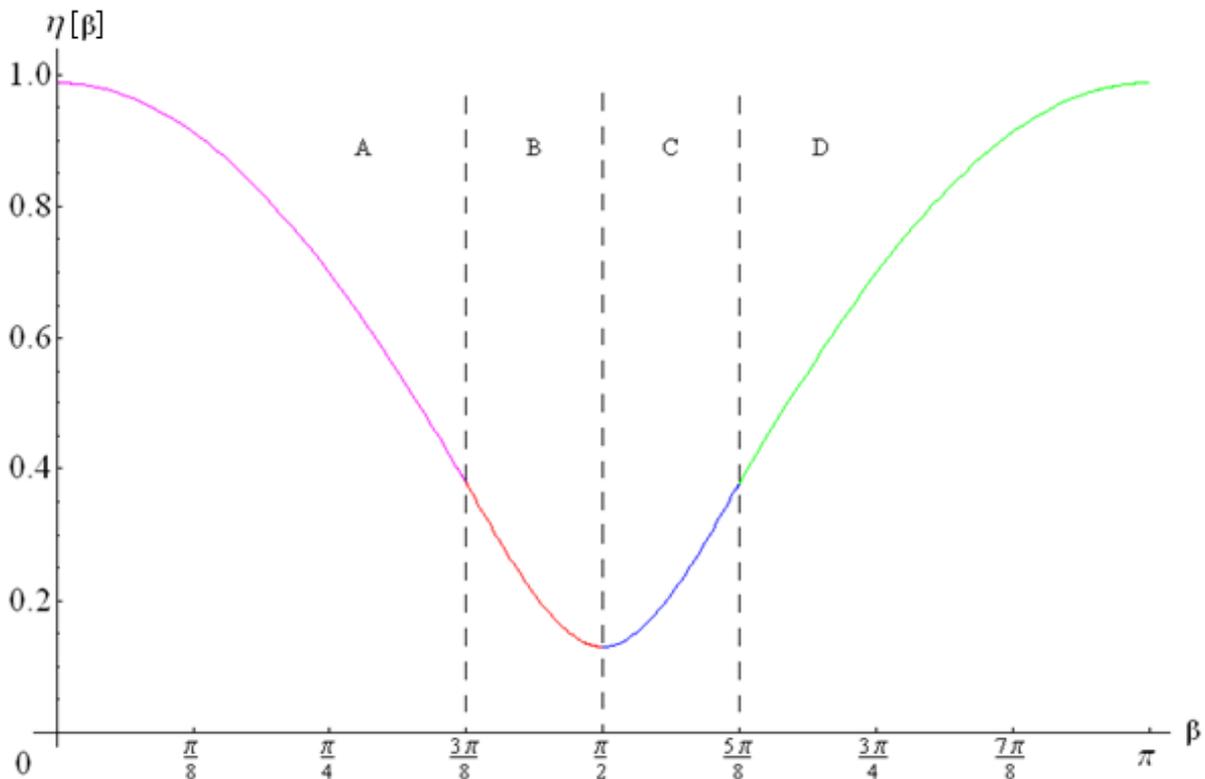


Abbildung 83:  $\eta(\beta)$  mit den verschiedenen Bereichen in 2D mit  $p_1=8/\pi$

In Abbildung 86 und Abbildung 87 wurde  $\eta(\beta)$  für verschiedene  $p_1$  aus Abbildung 84 und Abbildung 85 ausgewertet. In einem nahezu uniaxialen Zustand, also je höher der Wert von  $p_1$  ist, umso mehr nähern sich  $\eta(\beta = 0)$  und  $\eta(\beta = \pi)$  dem Wert 1. Hingegen bei  $\eta(\beta = \pi/2)$  und einem  $p_1$  welches gegen  $\infty$  läuft geht der Wert gegen 0, das heißt es durchkreuzen kaum mehr Fasern den Riss.

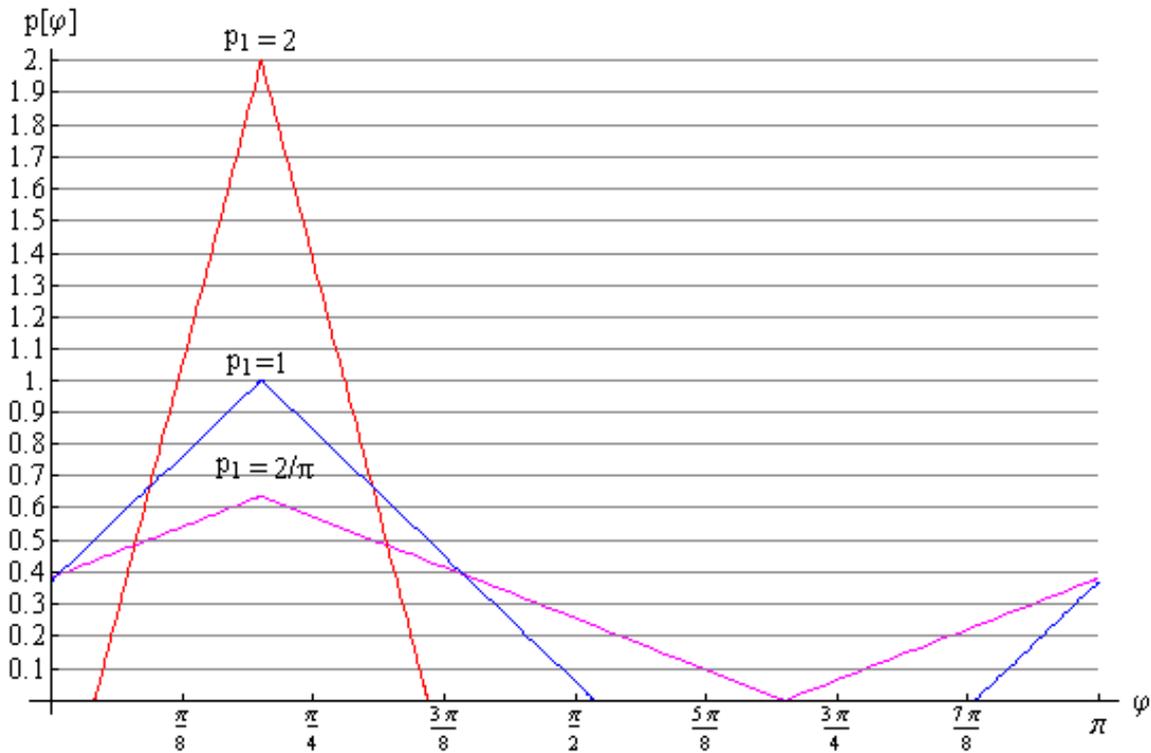


Abbildung 84: Inhomogene Verteil-Funktionen des Dreieck-Impulses für verschiedene  $p_1$  in kartesischen Koordinaten 2D

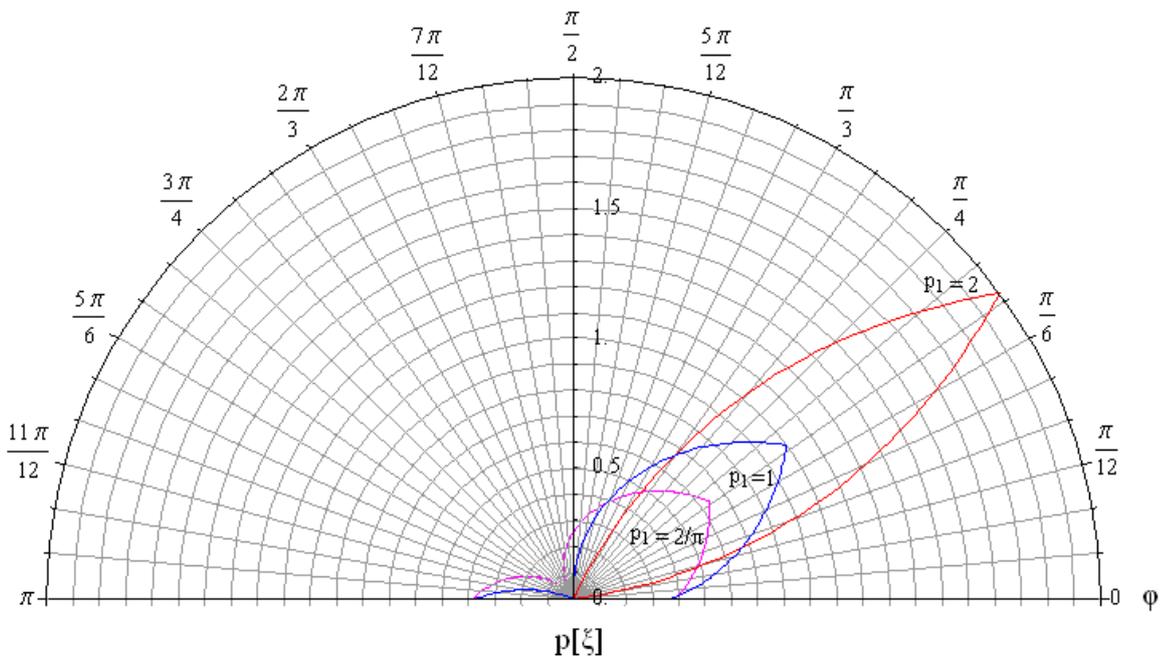


Abbildung 85: Inhomogene Verteil-Funktionen des Dreieck-Impulses für verschiedene  $p_1$  in Polarkoordinaten 2D

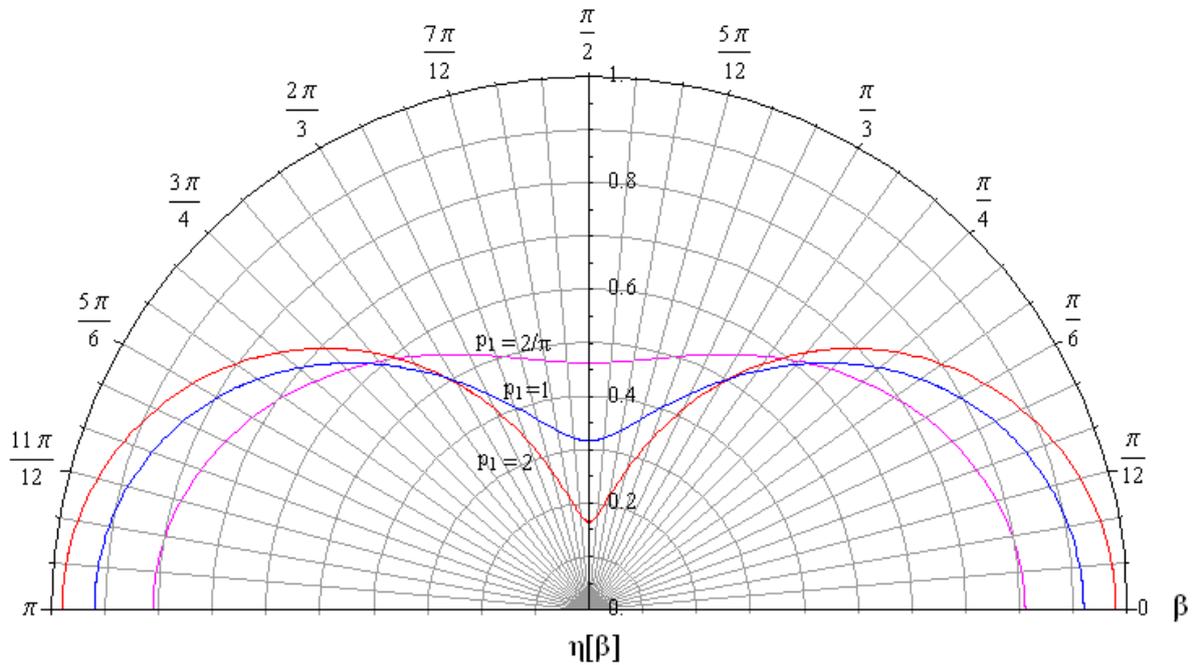


Abbildung 87: Faserorientierungsbeiwerte bei Dreieck-Impuls-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  in Polarkoordinaten 2D

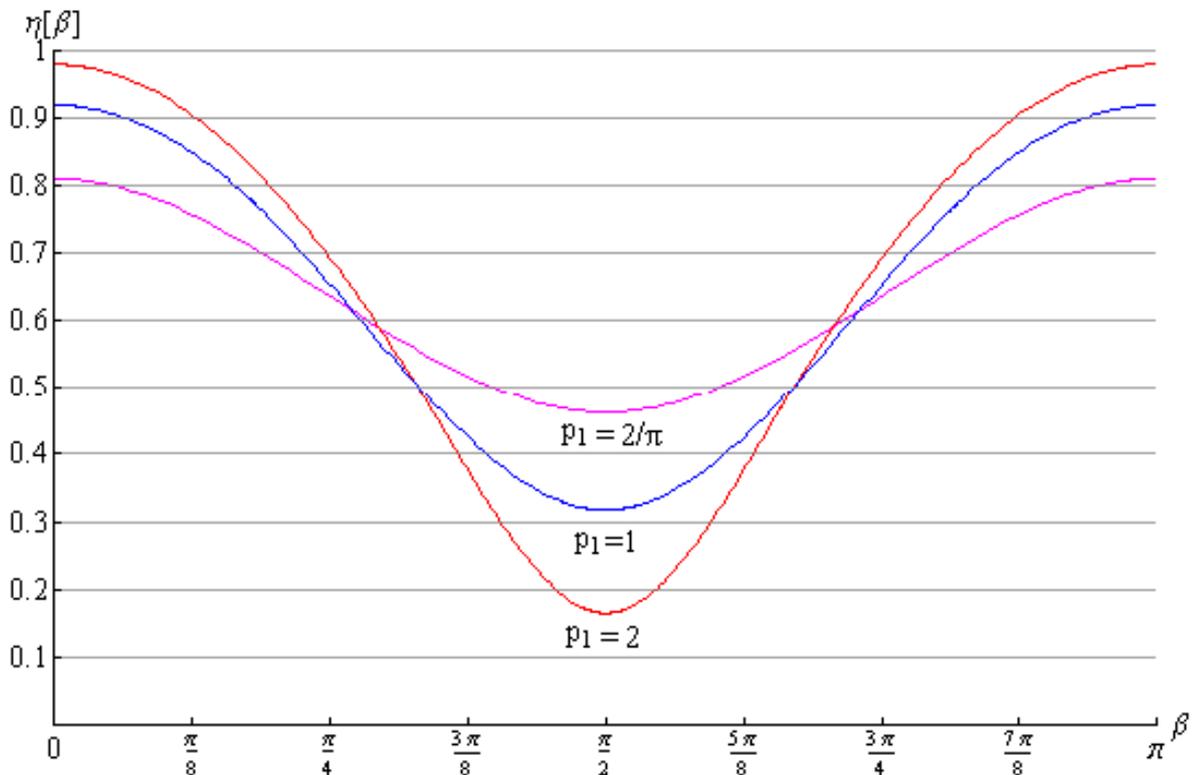


Abbildung 86: Faserorientierungsbeiwerte bei Dreieck-Impuls-Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  in kartesischen Koordinaten 2D

Eine kontinuierliche Darstellung von  $\eta$  in Abhängigkeit von  $p_1$  und  $\beta$  findet man in Abbildung 88. Diese schließt mit dem hinteren Ende ( $p_1=2/\pi$ ) direkt an Abbildung 69 an.

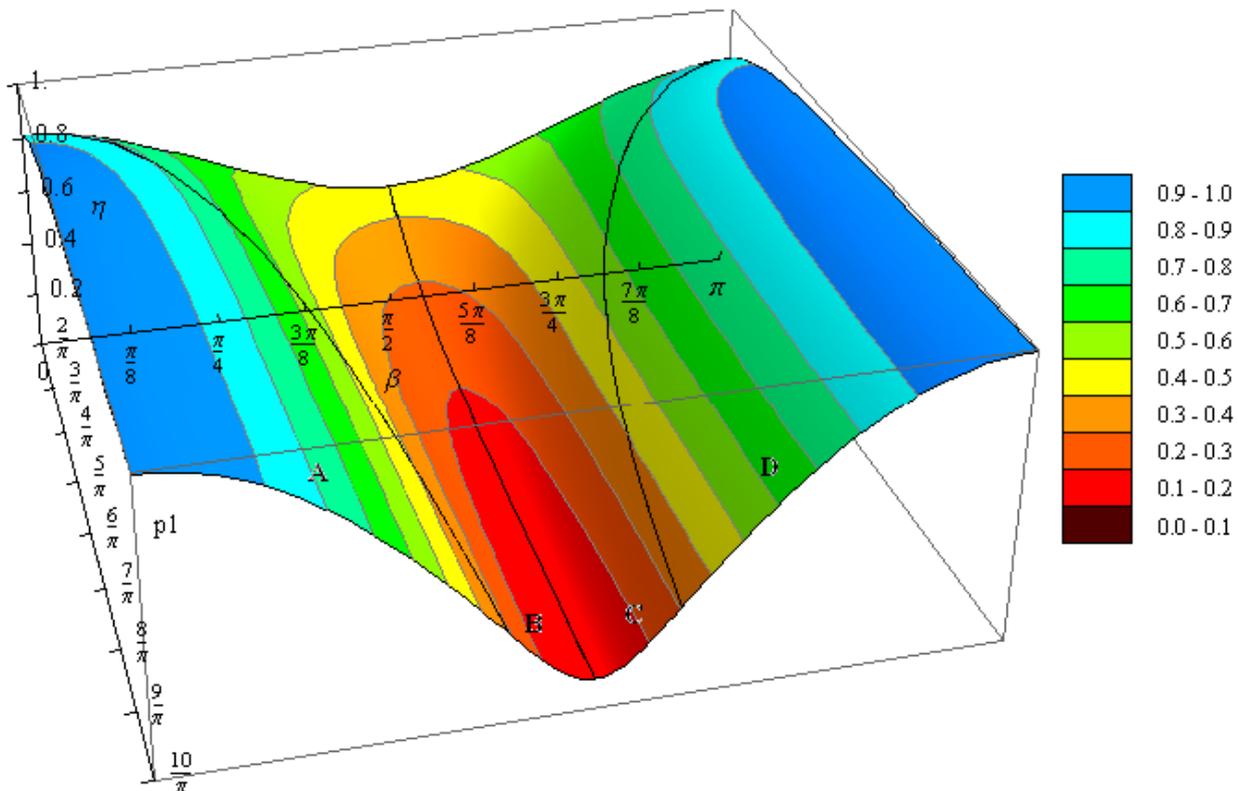


Abbildung 88: Inhomogener Faserorientierungsbeiwert des Dreieck-Impulses in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $p_1$ .

Theoretisch sind, wie schon erwähnt, bei einer Verteil-Funktion mit Parameter  $p_1 \rightarrow \infty$  Faserorientierungsbeiwerte zwischen 0 und 1 möglich.

$$0 \leq \eta_{i,lin,2D} \leq 1$$

#### 4.5 Faserorientierungsbeiwerte der Fourier-Reihe in 2D

Jetzt geht es darum, die Faserorientierungsbeiwerte der in Kapitel 3.7 behandelten Verteil-Funktion zu berechnen. Dies geschieht, indem die einzelnen Glieder der Fourier-Reihe mit dem Faserorientierungsbeiwert der Einzelfaser multipliziert und durch ein Integral aufsummiert werden (siehe Kapitel 4.1). Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} \eta_{fou,2D}(\beta, \Delta\varphi, \varphi) &= \int_0^{\pi} p(\varphi) |\cos\varphi| d\varphi \\ &= \frac{1}{315 \pi \Delta\varphi^2} 2[315 \Delta\varphi^2 + 210 \cos(2\beta) \sin(\Delta\varphi)^2 \\ &\quad - 42 \cos(4\beta) \cos(\Delta\varphi)^2 \sin(\Delta\varphi)^2 + 2 \cos(6\beta) \sin(3\Delta\varphi)^2] \end{aligned} \quad (4-33)$$

Die zur grafischen Auswertung verwendeten Verteil-Funktionen sind in Abbildung 89 und Abbildung 90 dargestellt

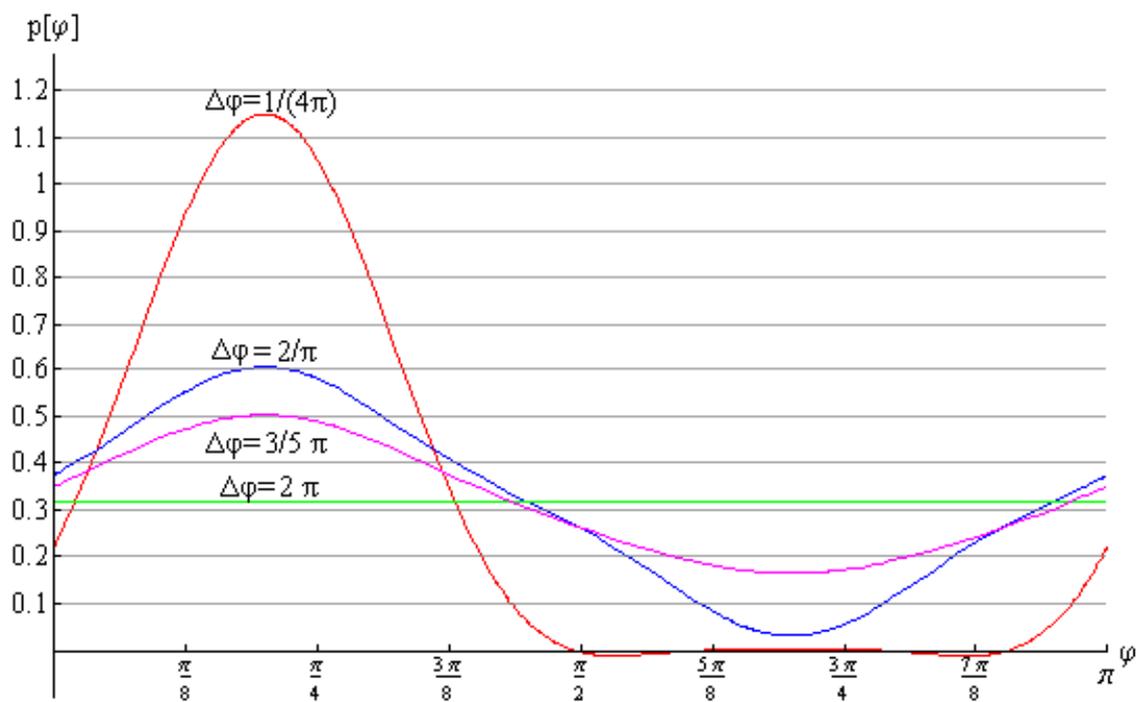


Abbildung 89: Fourier-Funktionen  $p(\varphi)$  in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\varphi$  in kartesischen Koordinaten

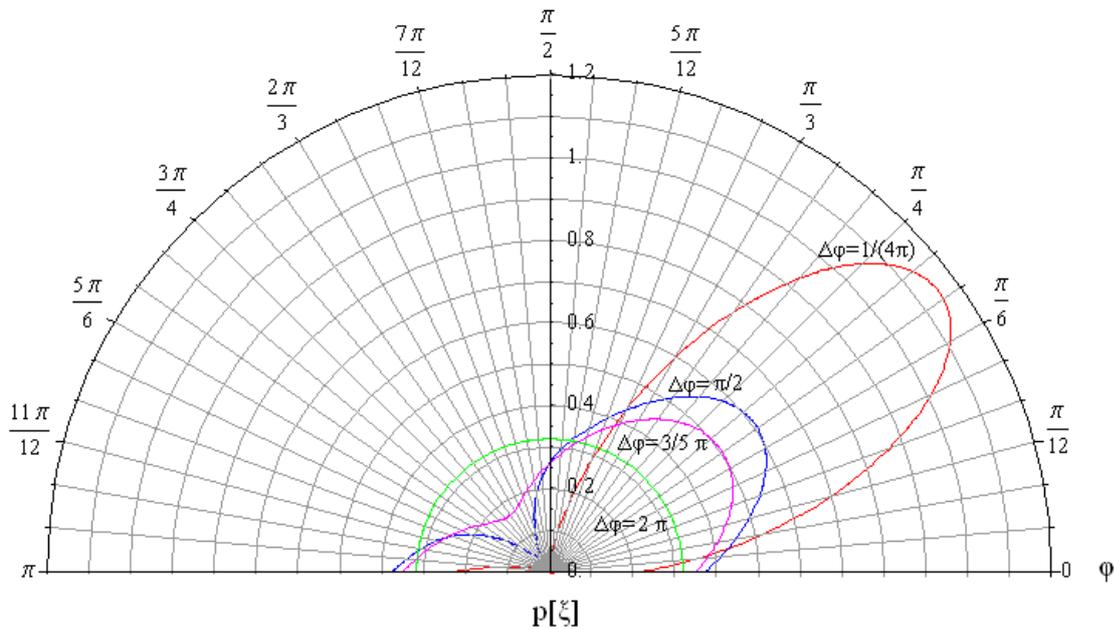


Abbildung 90: Fourier-Funktionen  $p(\varphi)$  in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\varphi$  in Polarkoordinaten

Dreht man das Koordinatensystem in die Hauptrichtungen, kann bei  $\beta=0$  der Faserorientierungsbeiwert in Hauptrichtung 1 abgelesen oder durch die Formel (4-33) bei gegebenem  $\Delta\varphi$  berechnet werden. In Abbildung 91 und Abbildung 92 werden die Faserorientierungsbeiwerte in Abhängigkeit von  $\beta$  mit verschiedenen Werten für  $\Delta\varphi$  betrachtet.

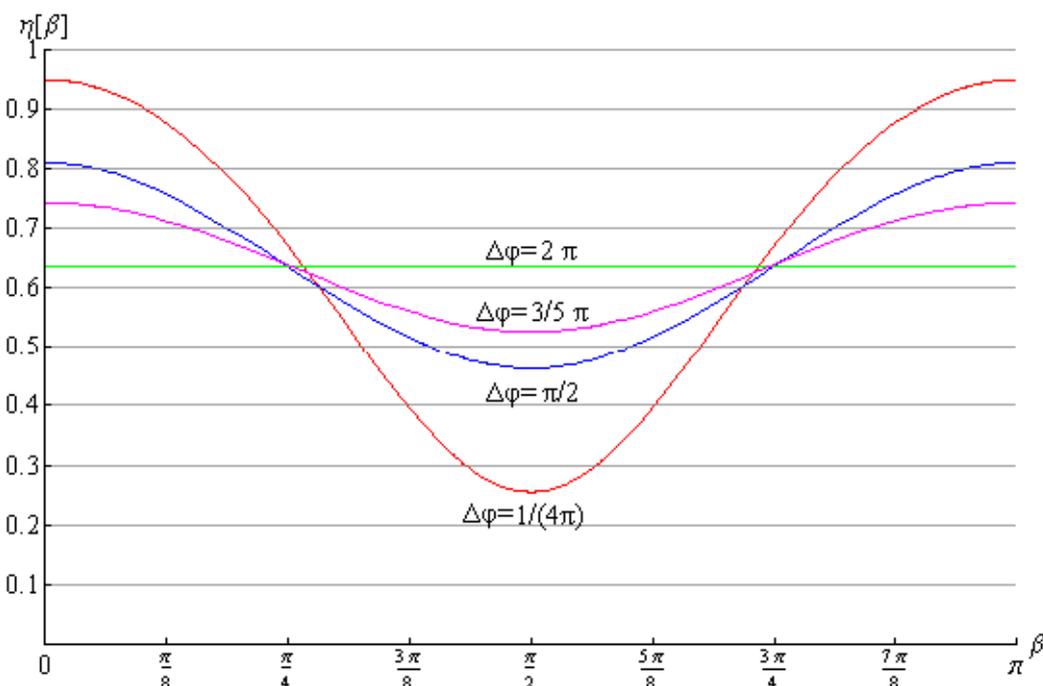


Abbildung 91: Fourier-Funktionen  $p(\varphi)$  in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\varphi$  in kartesischen Koordinaten

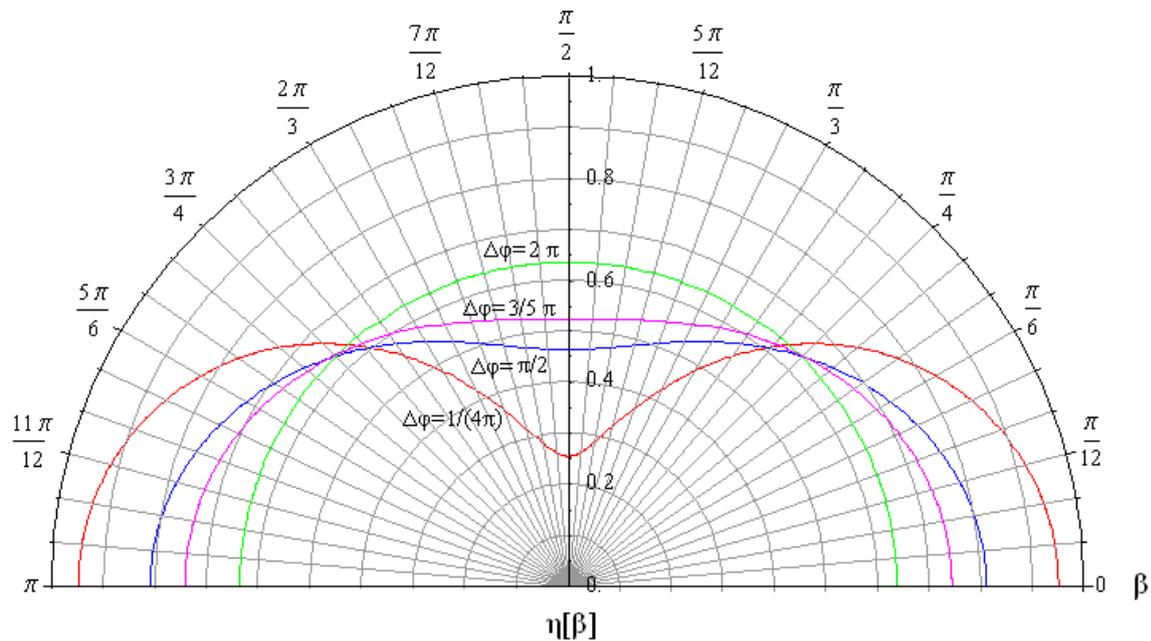


Abbildung 92: Faserorientierungsbeiwert  $\eta(\beta)$  der Fourier-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\varphi$  in Polarkoordinaten

Wiederum wird  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\Delta\varphi$  und  $\beta$  grafisch dargestellt.

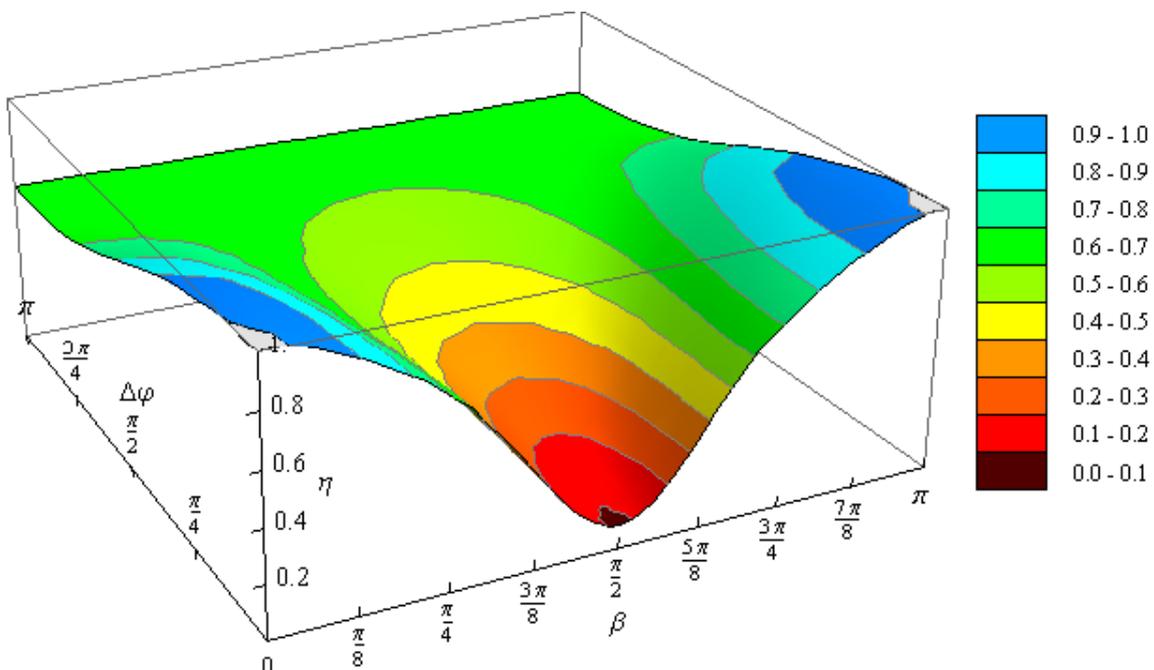


Abbildung 93: Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\Delta\varphi$  und  $\beta$  für die Fourier-Verteil-Funktion in 2D unter Berücksichtigung der ersten drei Glieder

Eigentlich darf  $\eta(\beta)$  nicht einen Wert über 1 haben sondern sollte sich diesem, falls die Hauptorientierungsrichtung der Blick-Richtung entspricht ( $\beta = 0$ ), bei einem sehr kleinem  $\Delta\varphi$  nähern. Durch die Ungenauigkeit der Fourier-Reihe kann es aber sein, dass sich der Faserorientierungsbeiwert bei Extremwerten von  $\Delta\varphi$  knapp außerhalb dieses Bereiches befindet (Abbildung 93, weißer Bereich bei sehr kleinem  $\Delta\varphi$  und  $\beta=0$  und  $\beta=\pi$ ). Der Fehler ist im Vergleich zu den Faserorientierungsbeiwerten der inhomogenen linearen Verteil-Funktion (Dreieck-Impuls Abbildung 88) ziemlich groß.

$$0 \lesssim \eta_{fou,2D} \lesssim 1$$

#### 4.6 Vergleich der inhomogenen Verteil-Funktionen der Fourier-Reihe und des handgerechneten Dreieck-Impulses

Die Abweichung der Fourier-Reihe vom Dreieck-Impuls wird zum Vergleich grafisch dargestellt und erläutert.

Wie in Kapitel 3.7 schon erwähnt, werden verschiedene Eingaben für die Darstellung der beiden Varianten benötigt. Dabei ist der Zusammenhang der einzugebenden Parameter  $p_1$  bzw.  $\Delta\varphi$  in beiden Fällen derselbe

$$p_1 = \frac{1}{\Delta\varphi}$$

Im Grenzfall zur homogenen Verteilung (Abbildung 94) sind noch keine Unterschiede zwischen den Lösungen der beiden Funktionen zu erkennen.

Die Betrachtung von Abbildung 95 zeigt aber, dass bei stark inhomogenen Verhältnissen (zB.  $p_1=50/\pi$ ) allem in den Bereichen der Hauptorientierungsrichtung 1 ( $\beta = 0$ ) und Hauptorientierungsrichtung 2 ( $\beta = \pi/2$ ) größere Abweichungen vorhanden sind. Der Türkis gefärbte Dreieck-Impuls nähert sich in Richtung 2 dem Wert 0 und in Richtung 1 dem Wert 1, was auch den Erwartungen entspricht.

Doch die Fourier-Funktion geht bei  $\beta = \pi/2$  nicht gegen 0 und übersteigt den Wert 1 bei  $\beta = 0$  sogar geringfügig, was eigentlich nicht sein dürfte. Dies ist mit der Ungenauigkeit der Fourier-Reihe zu erklären, da diese mit nur drei Gliedern eine grobe Näherung des Dreieck-Impulses ist.

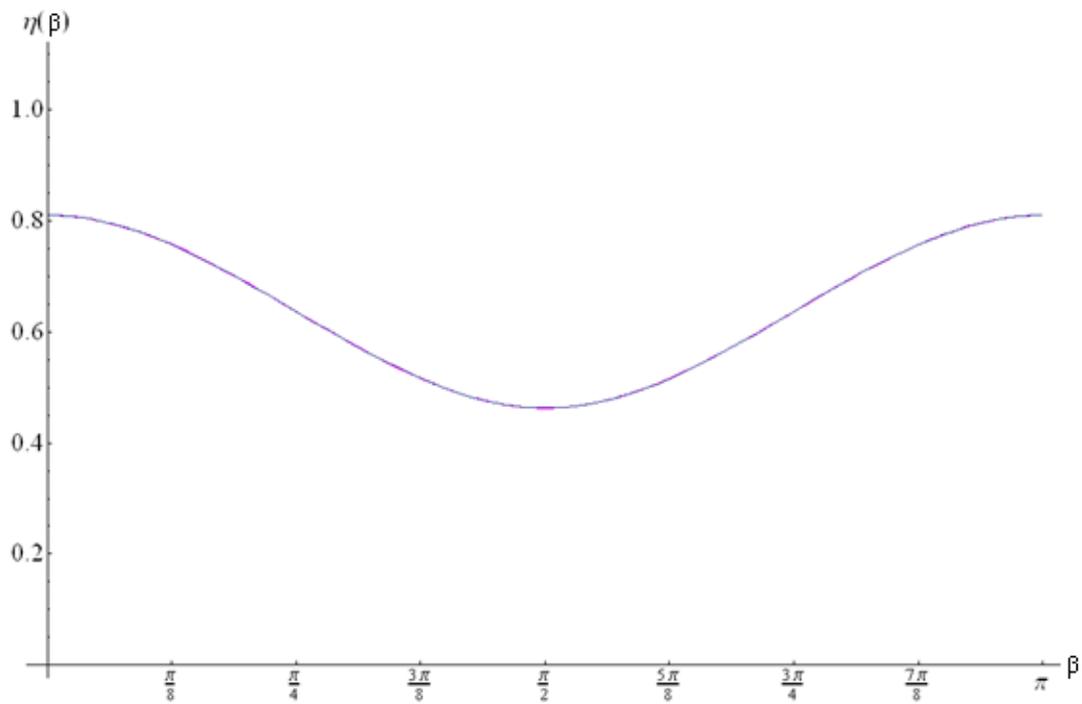


Abbildung 94: Vergleich Dreieck-Impuls mit Fourier-Reihe mit  $p_1=2/\pi$  ( $\Delta\varphi = \pi/2$ )

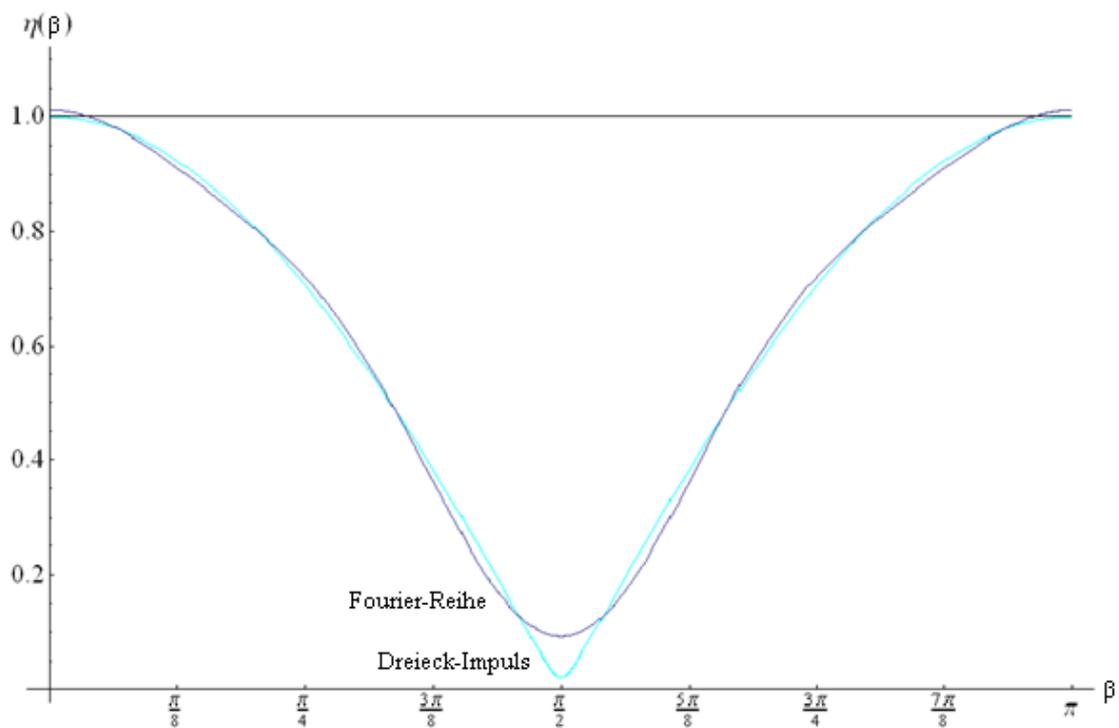


Abbildung 95: Vergleich Dreieck-Impuls mit Fourier-Reihe mit  $p_1=50/\pi$  ( $\Delta\varphi = \pi/50$ )

Das überschätzen von  $\eta_2$  bringt im Falle einer Bemessung Ergebnisse auf der unsicheren Seite. Deshalb ist die Fourier-Reihe mit drei Gliedern für die Berechnung der Faserorientierungsbeiwerte nicht geeignet und wird für die dreidimensionalen Verteil-Funktionen nicht in Betracht gezogen.

#### 4.7 Darstellung der Ergebnisse für den Faserorientierungsbeiwert des inhomogenen Dreieck-Impulses und der homogenen genäherten linearen Verteil-Funktion in 2D

Nun werden die Faserorientierungsbeiwerte der an die Cosinus-Funktion genäherten linearen homogenen Verteil-Funktion (4-27) und der inhomogenen Verteil-Funktion ((4-29),(4-30),(4-31),(4-32)) verglichen und zusammen grafisch dargestellt.

Es ist anzumerken, dass die beiden Funktionen zwar in den Punkten  $\beta = 0$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\beta = 3\pi/4$ ,  $\beta = \pi/2$  und  $\beta = \pi$  übereinstimmen, aber in den restlichen Teilen kaum erkennbare Abweichungen aufweisen (siehe Abbildung 96). Da die Unterschiede minimal sind, werden sie nicht weiter berücksichtigt.

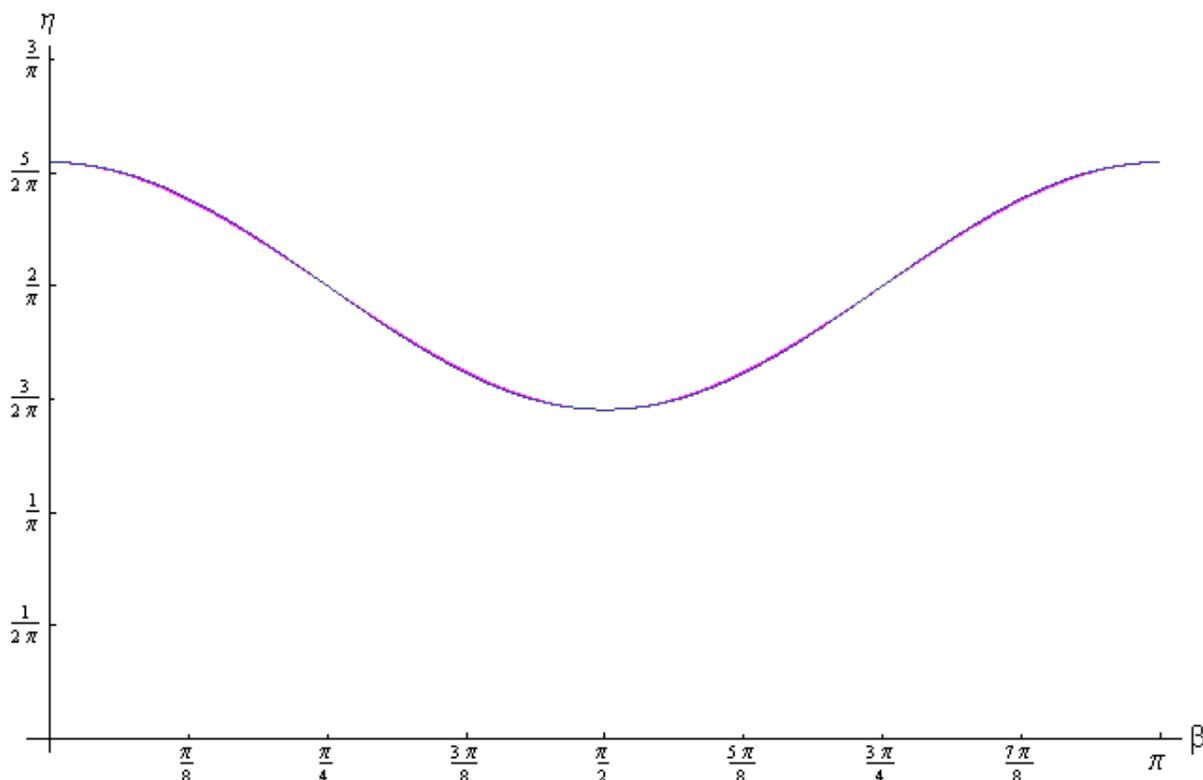


Abbildung 96: Vergleich inhomogene Funktion und genäherte homogene Funktion mit  $\rho_1=2/\pi$  in 2D

Der Faserorientierungsbeiwert  $\eta(\beta, p_1)$  für den zweidimensionalen Fall sieht mit den vorher genannten Verteil-Funktionen dann folgendermaßen aus.

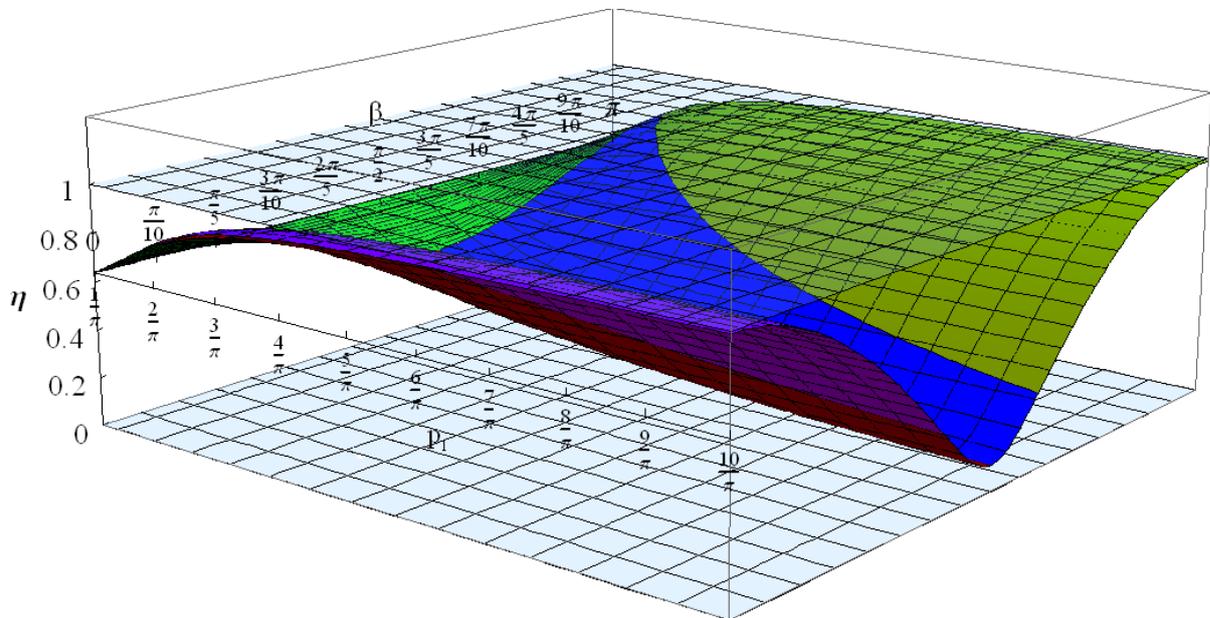


Abbildung 97: Faserorientierungsbeiwert  $\eta(\beta, p_1)$  für 2D im homogenen und inhomogenen Fall

Dabei sind die Bereiche folgendermaßen eingefärbt:

Grün: homogener Anteil (4-27)

Pink: inhomogener Anteil A (4-29)

Rot: inhomogener Anteil B (4-30)

Blau: inhomogener Anteil C (4-31)

Gelb: inhomogener Anteil D (4-32)

$p_1$  könnte noch bis ins unendliche gehen, zur Veranschaulichung reicht es aber das Diagramm nur bis  $p_1=10/\pi$  laufen zu lassen.

Die beiden Hauptorientierungsrichtungen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  werden in Abbildung 98 dargestellt. Sie entsprechen den Schnitten von Abbildung 96 bei  $\beta=0$  und  $\beta=\pi/2$

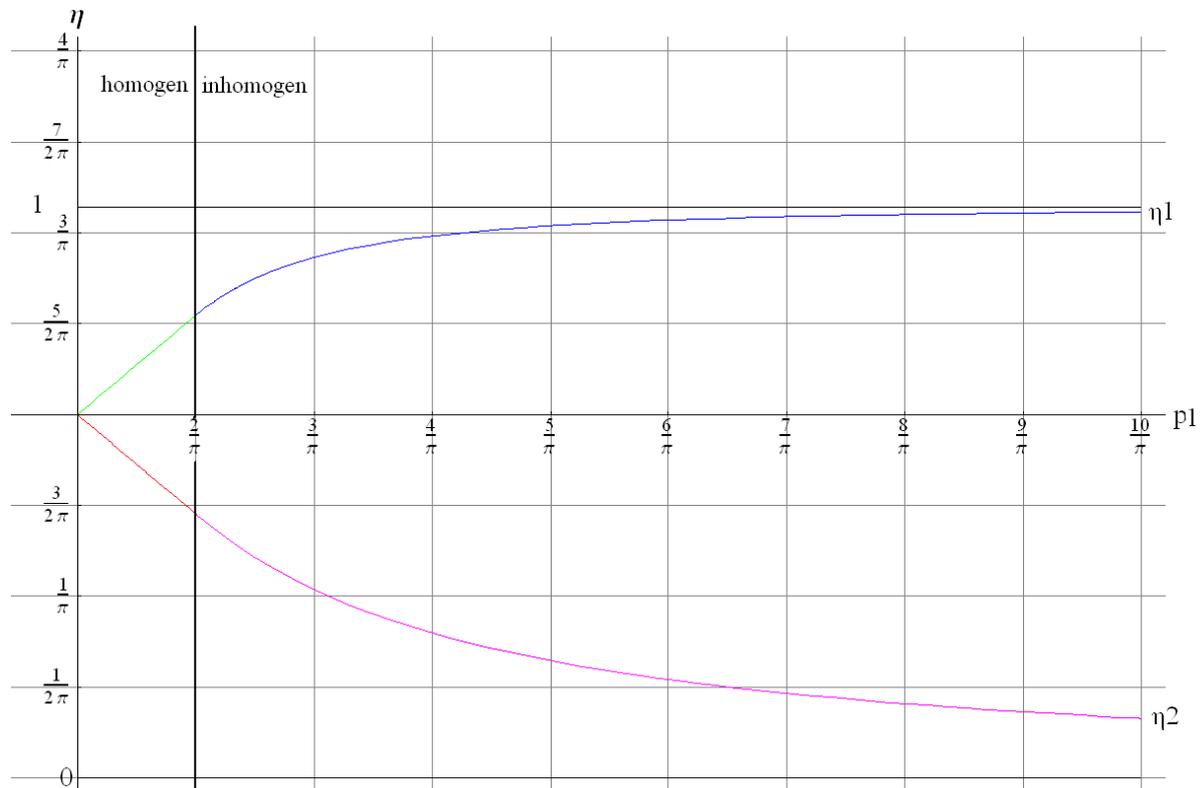


Abbildung 98: Hauptorientierungsrichtungen homogen und inhomogen in 2D

Im homogenen Bereich sind die beiden Faserorientierungsbeiwerte symmetrisch zur x-Achse, während sie im inhomogenen Teil unterschiedlich verlaufen.  $\eta_1$  geht bei hohem  $p_1$  gegen 1, während  $\eta_2$  erst viel später gegen 0 läuft.

#### 4.8 Faserorientierungsbeiwert der anisotropen inhomogenen bzw. homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D

Wie in Kapitel 3.8 schon erwähnt, gibt es im Programm „Mathematica“ einen Befehl (UnitTriangle), der eine lineare Verteil-Funktion erstellt die den homogenen und inhomogenen Bereich der Faserorientierung abdeckt.

Jedoch hat „Mathematica“ mit der „UnitTriangle-Funktion“ Schwierigkeiten bei der Berechnung des Faserorientierungsbeiwertes im Koordinatensystem der Blickrichtung. Deshalb wird in diesem Fall der Faserorientierungsbeiwert der Einzelfaser in das Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes verschoben.

Aus (4-2) und (3-7) wird jetzt

$$\eta_{einz,2D} = |\cos \varphi| = |\cos(\xi + \beta)| \quad (4-34)$$

Dementsprechend ändert sich die Formel des Faserorientierungsbeiwertes mit (4-16) zu

$$\eta_{lin,2D} = \int_{\xi=0}^{\pi} p(\xi) \eta_{einz,2D} d\xi \quad (4-35)$$

Das berechnete Integral kann in Abbildung 99 betrachtet werden.

$$\left[ \begin{array}{l}
 \frac{4}{\pi^2} \\
 \frac{4 \cos[\beta] + 2(-2 + \pi) \sin[\beta]}{\pi^2} \\
 - \frac{\cos[\beta] + \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 - \frac{1}{\Delta x^2} (2\beta - \pi - 2\Delta x + \cos[\beta] + \cos[\beta - \Delta x] + \Delta x \sin[\beta]) \\
 - \frac{\cos[\beta] - \cos[\beta - \Delta x] + \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 \frac{\cos[\beta] - \cos[\beta - \Delta x] + \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 \frac{1}{2\pi^2 \Delta x^2} (\pi^2 (-2\beta + \pi) + 2\pi^2 \Delta x + 8(-\beta + \pi)\Delta x^2 - 2\pi^2 \cos[\beta] - 2\Delta x(\pi^2 + 4\Delta x)\sin[\beta]) \\
 \frac{2(\pi - 2(1 + \Delta x))}{\pi(\pi - 4\Delta x)} \\
 \frac{2(\pi - 2(1 + \Delta x)) \cos[\beta] - 4(-1 + \Delta x) \sin[\beta]}{\pi(\pi - 4\Delta x)} \\
 - \frac{4(-2\beta + \pi + 2\Delta x) + 2(2\pi - 2\Delta x) \cos[\beta] + 4(1 + \Delta x) \sin[\beta]}{\pi(\pi - 4\Delta x)}
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \beta = \pi \ \&\& \ 2\Delta x = \pi \\
 2\Delta x = \pi \ \&\& \ 2\beta \leq \pi \\
 \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \ \&\& \\
 2\beta = \pi + 2\Delta x \ \&\& \ 2\Delta x < \pi \\
 \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \ \&\& \\
 2\beta < \pi + 2\Delta x \ \&\& \ 2\Delta x < \pi \\
 \Delta x > 0 \ \&\& \ 2\Delta x < \pi \ \&\& \\
 (\beta = \pi \ || \ (2\beta > \pi + 2\Delta x \ \&\& \ 2\beta > \pi \ \&\& \ \beta \leq \pi)) \\
 2\beta \leq \pi \ \&\& \ 0 < \Delta x < \frac{\pi}{2} \\
 \text{True} \\
 \beta = \pi \\
 2\beta \leq \pi \\
 \text{True}
 \end{array}$$

+

$$\left[ \begin{array}{l}
 \frac{4}{\pi^2} \\
 \frac{-4 \cos[\beta] + 2(-2 + \pi) \sin[\beta]}{\pi^2} \\
 \frac{\cos[\beta] - \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 \frac{1}{\pi(\pi - 4\Delta x)} (-2(2 + \pi - 2\Delta x) \cos[\beta] + 4(-2\beta + \pi - 2\Delta x + (1 + \Delta x) \sin[\beta])) \\
 - \frac{\cos[\beta] + \cos[\beta + \Delta x] + \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 \frac{1}{\Delta x^2} (2\beta - \pi + 2\Delta x + \cos[\beta] + \cos[\beta + \Delta x] - \Delta x \sin[\beta]) \\
 - \frac{\cos[\beta] + \cos[\beta + \Delta x] + \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2} \\
 \frac{2(\pi - 2(1 + \Delta x))}{\pi(\pi - 4\Delta x)} \\
 \frac{(4 - 2\pi + 4\Delta x) \cos[\beta] - 4(-1 + \Delta x) \sin[\beta]}{\pi(\pi - 4\Delta x)} \\
 \frac{4\beta}{\pi^2} + \frac{\beta}{\Delta x^2} - \frac{\pi}{2\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta x} - \frac{4 \sin[\beta]}{\pi^2} + \frac{\cos[\beta] - \Delta x \sin[\beta]}{\Delta x^2}
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 2\Delta x = \pi \ \&\& \ \beta = 0 \\
 2\Delta x = \pi \ \&\& \ \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \\
 2\Delta x < \pi \ \&\& \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \ \&\& \ 2(\beta + \Delta x) = \pi \\
 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \ \&\& \ 2\Delta x > \pi \\
 \Delta x > 0 \ \&\& \ 2\Delta x < \pi \ \&\& \\
 (\beta = 0 \ || \ (2\beta < \pi \ \&\& \ 2(\beta + \Delta x) < \pi)) \\
 2\Delta x < \pi \ \&\& \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \ \&\& \ 2(\beta + \Delta x) > \pi \\
 0 < \Delta x < \frac{\pi}{2} \ \&\& \ \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \\
 \beta = 0 \ \&\& \ 2\Delta x > \pi \\
 2\beta \geq \pi \ \&\& \ 2\Delta x > \pi \\
 \text{True}
 \end{array}$$

Abbildung 99: Ausdruck des Faserorientierungsbeiwertes für „UnitTriangle“ in 2D

Vier ausgewählte Verteilungen wurden genauer untersucht und grafisch ausgewertet

- $\Delta\xi = \frac{\pi}{3}$  ist ein inhomogener Fall
- $\Delta\xi = \frac{3\pi}{2}$  ist ein homogener Fall
- $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$  ist der Grenzfall zwischen homogener und inhomogener Verteilungen
- $\Delta\xi = 5\pi$  ist ein nahezu isotroper Fall

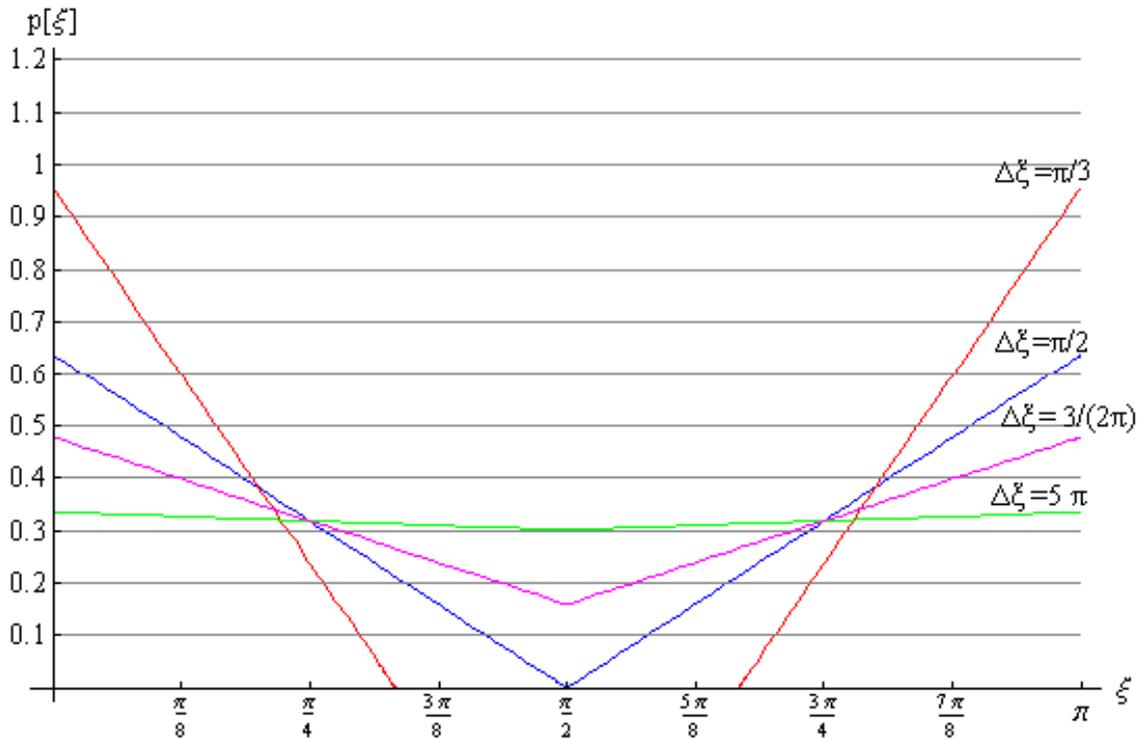


Abbildung 100: UnitTriangle-Funktionen  $p(\xi)$  in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\xi$  in kartesischen Koordinaten

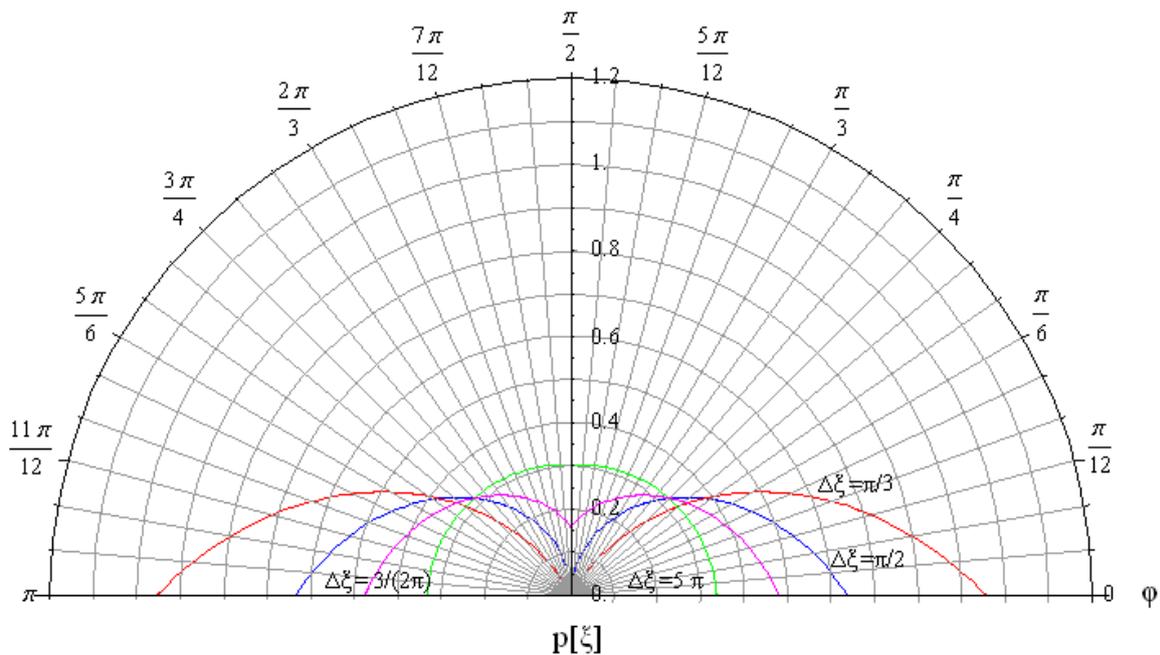


Abbildung 101: UnitTriangle-Funktionen  $p(\xi)$  in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\xi$  in Polarkoordinaten

Dieses Mal ist das Koordinatensystem schon in die Hauptrichtungen gedreht.

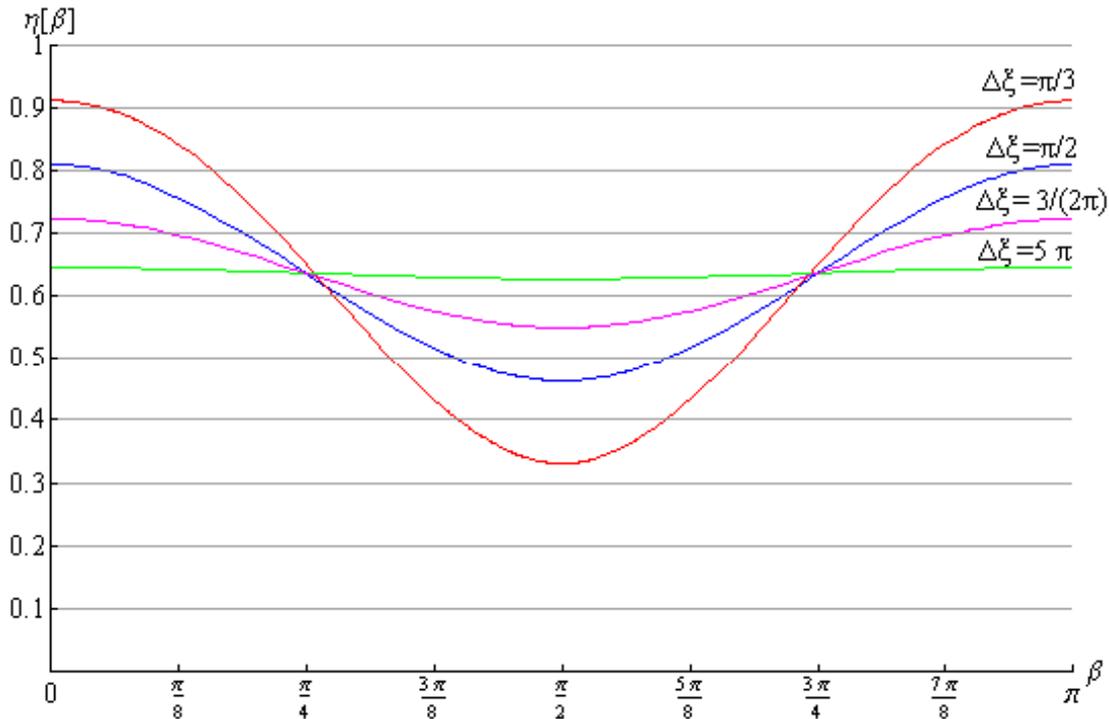


Abbildung 102: Faserorientierungsbeiwert  $\eta(\beta)$  der UnitTriangle-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\xi$

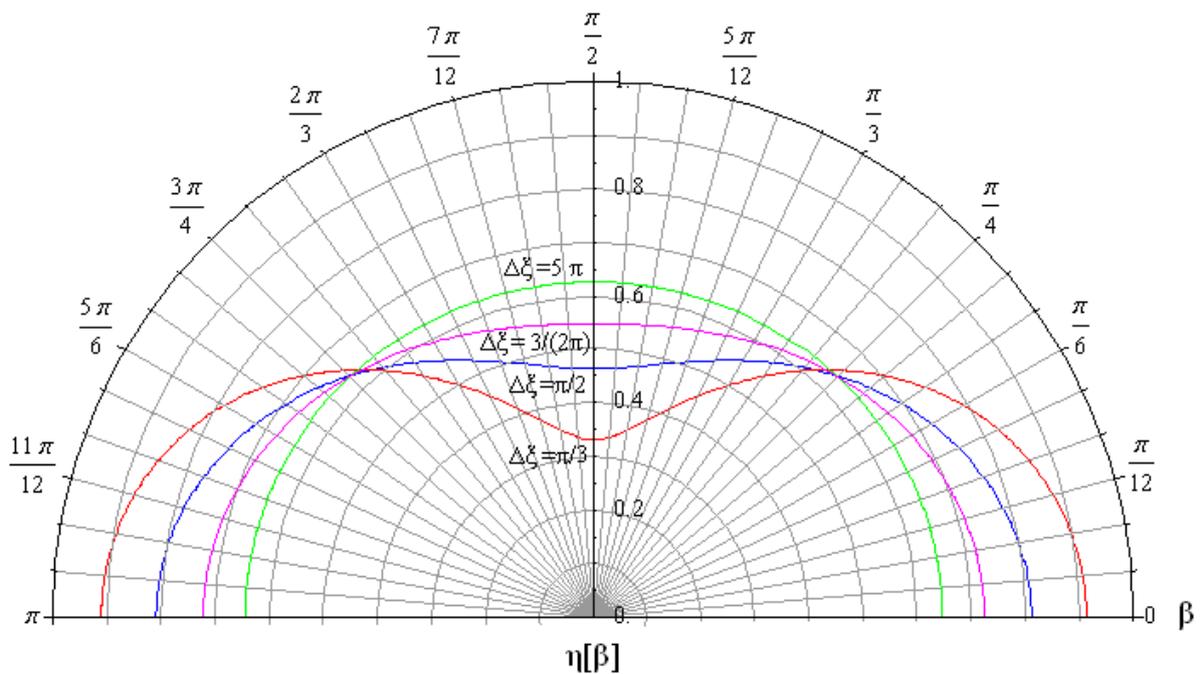


Abbildung 103: Faserorientierungsbeiwert  $\eta(\beta)$  der UnitTriangle-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten  $\Delta\xi$

Jetzt wird noch  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\Delta\xi$  dargestellt. Die weißen Streifen werden den verschiedenen Unterteilungen von  $\eta$  zugeschrieben (Abbildung 104). Ab einer Bandbreite von  $\Delta\xi = \pi$  geht die Funktion in den nahezu isotropen Bereich über.

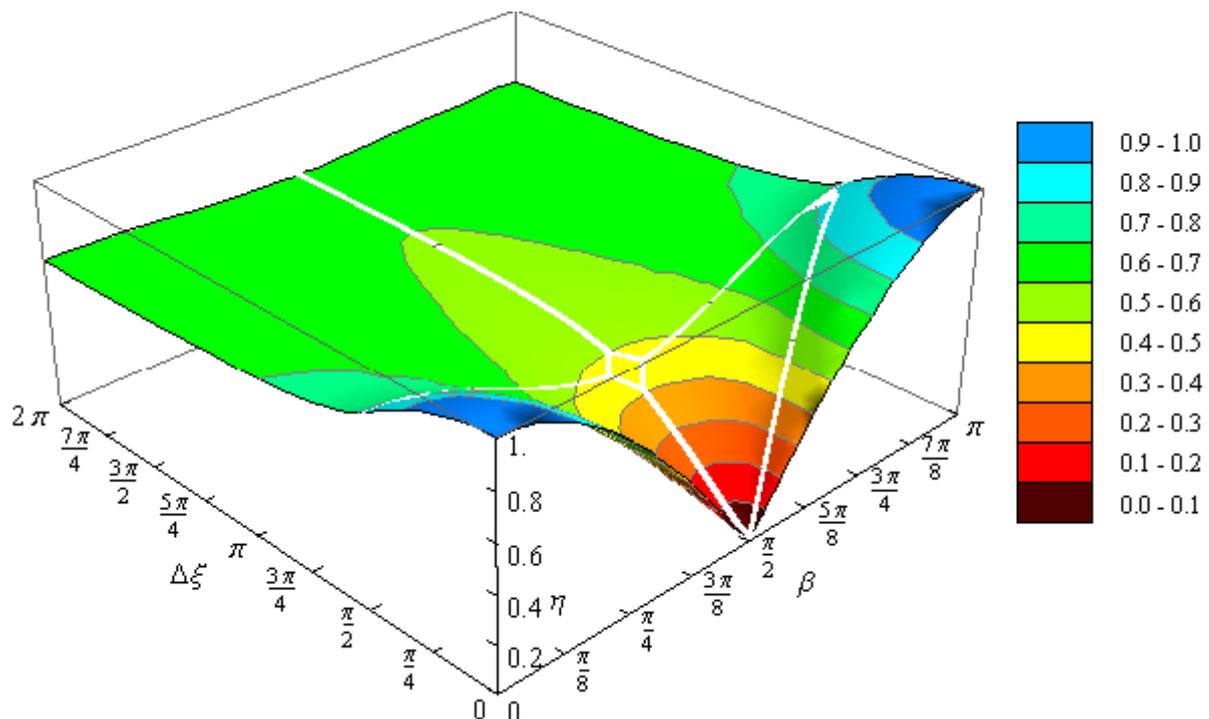


Abbildung 104: Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\Delta\xi$  der UnitTriangle-Funktion in 2D

Abschließend ist in Abbildung 105 noch der Faserorientierungsbeiwert für die beiden Hauptrichtungen 1 und 2 sowie des isotropen Falles dargestellt. Es lässt sich leicht erkennen, dass je größer die Bandbreite  $\Delta\xi$ , umso weiter nähern sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  dem isotropen Faserorientierungsbeiwert. Im Gegensatz zu Abbildung 98 sieht man jetzt durch den Parameterwechsel von  $p_1$  zu  $\Delta\xi$  auch den uniaxialen Fall bei  $\Delta\xi=0$ . Besonders auffällig ist das unterschiedliche Verhalten von  $\eta_1$  und  $\eta_2$  im inhomogenen Bereich, wie in Abbildung 98.

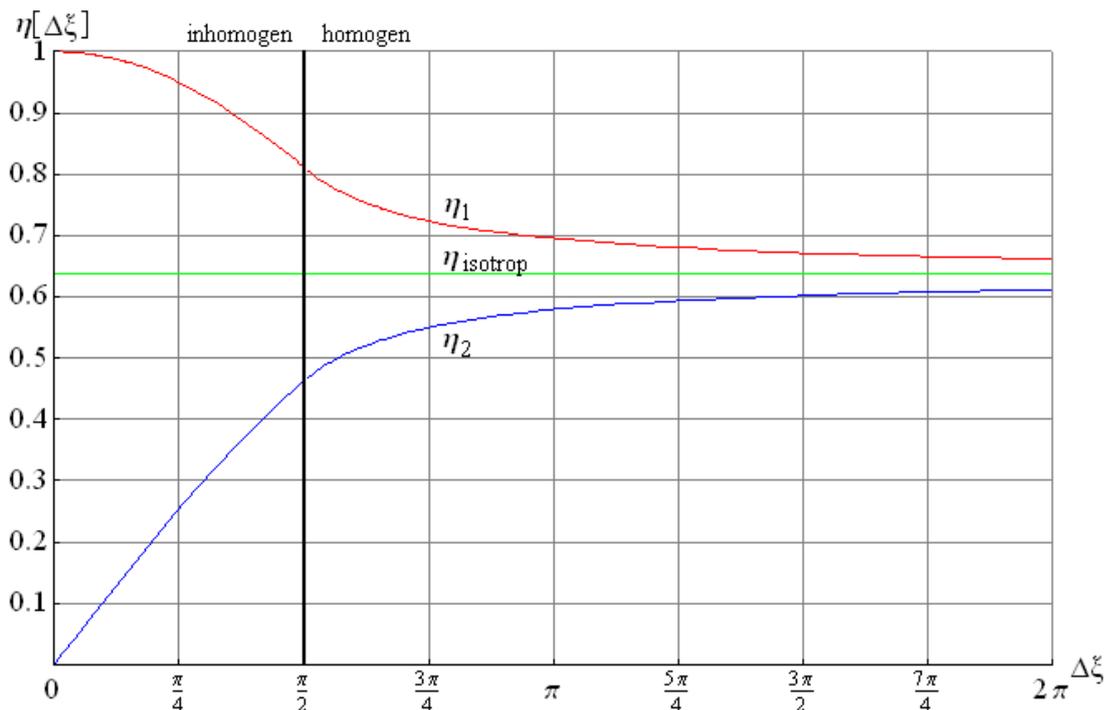


Abbildung 105: Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\Delta\xi$  der UnitTriangle-Funktion in 2D

Im uniaxialen Fall ist die Bandbreite von  $\eta$  in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\Delta\xi$  wiederum zwischen 0 und 1.

$$0 \leq \eta_{lin,2D} \leq 1$$

#### 4.9 Faserorientierungsbeiwert der homogenen anisotropen Cosinus-Quadrat-Funktion in 3D

Die zweidimensionalen Fälle sind somit abgeschlossen und jetzt werden die ausgewerteten dreidimensionalen Verteil-Funktionen untersucht. Die homogene Cosinus-Quadrat-Funktion wird mit den Richtungswinkeln  $\varphi$  und  $\theta$  integriert. Die Grenzen gehen jeweils von 0 bis  $\pi$ . Anders als im zweidimensionalen Fall werden die Faserorientierungsbeiwerte im Bezug auf die  $w$ -Achse des lokalen Blickrichtungskordinatensystem berechnet. Dies geschieht, weil der Einzelfaserorientierungsbeiwert zur  $w$ -Achse mit (4-19) angegeben werden kann.  $\eta_{Einzel}$  in Bezug auf die  $u$ - oder  $w$ -Achse wäre komplizierter.

In Kapitel 3.9 wurde die Verteil-Funktion (3-68) erstellt. Diese wird in (4-18) eingesetzt und mit dem Programm „Mathematica“ berechnet.

$$\begin{aligned}\eta_{h,\cos Q,3D} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} p_{h,\cos Q,3D}(\varphi, \theta, \beta, \alpha) \sin \theta |\cos \theta| d\varphi d\theta & (4-36) \\ &= \frac{1}{16} [9 - \pi (p_1 + p_2) - 3(-1 + \pi (p_1 + p_2)) \cos(2\alpha) \\ &\quad + 2\pi (p_1 - p_2) \cos(2\beta) \sin^2 \alpha]\end{aligned}$$

Wie in den vorangehenden Kapiteln werden nun interessante Variationen der homogenen anisotropen Cosinus-Quadrat-Verteilung ausgesucht und grafisch ausgewertet. Zuerst erfolgt eine Darstellung im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes, dann im Koordinatensystem der Blickrichtung und schlussendlich der Faserorientierungsbeiwert in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\alpha$ . Dazu ist eine Eingabe von  $p_1$  und  $p_2$  erforderlich,  $p_3$  wird aufgrund der Bedingung (3-22) automatisch berechnet. Untersucht wurden:

- Der isotrope Fall
- Ein allgemeiner Fall
- Grenzfall 1 zum inhomogenen Bereich: in  $p_2$  sind keine Fasern orientiert ( $\psi=\pi/2$ ,  $\xi= \pi /2$ )
- Grenzfall 2 zum inhomogenen Bereich: in Richtung von  $p_2$  ( $\psi= \pi /2$ ,  $\xi= \pi /2$ ) und  $p_3$  ( $\psi=0$ ,  $\xi$ =beliebig) sind keine Fasern orientiert

#### 4.9.1 Isotroper Fall

$$p_1 = \frac{1}{2\pi} \quad p_2 = \frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{1}{2\pi}$$

Im isotropen Fall ist  $p$  eine Konstante, deshalb gibt es auch keinen Unterschied zwischen dem Koordinatensystem der Blickrichtung und dem Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes. Das heißt, die Achsen "1", "2", "3" und  $u, v, w$  fallen zusammen.

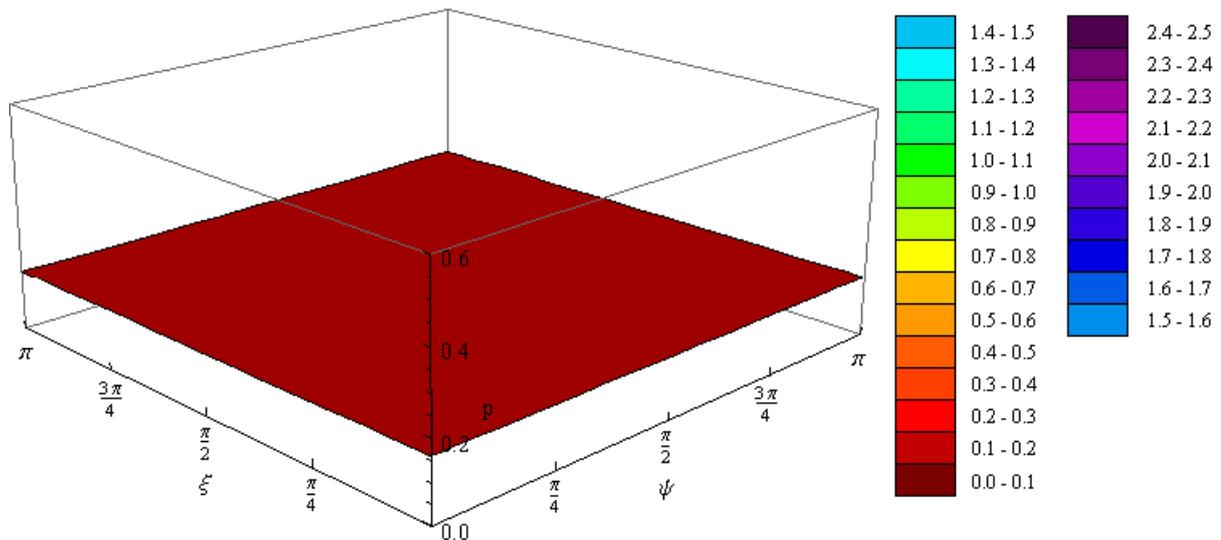


Abbildung 106: isotroper Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

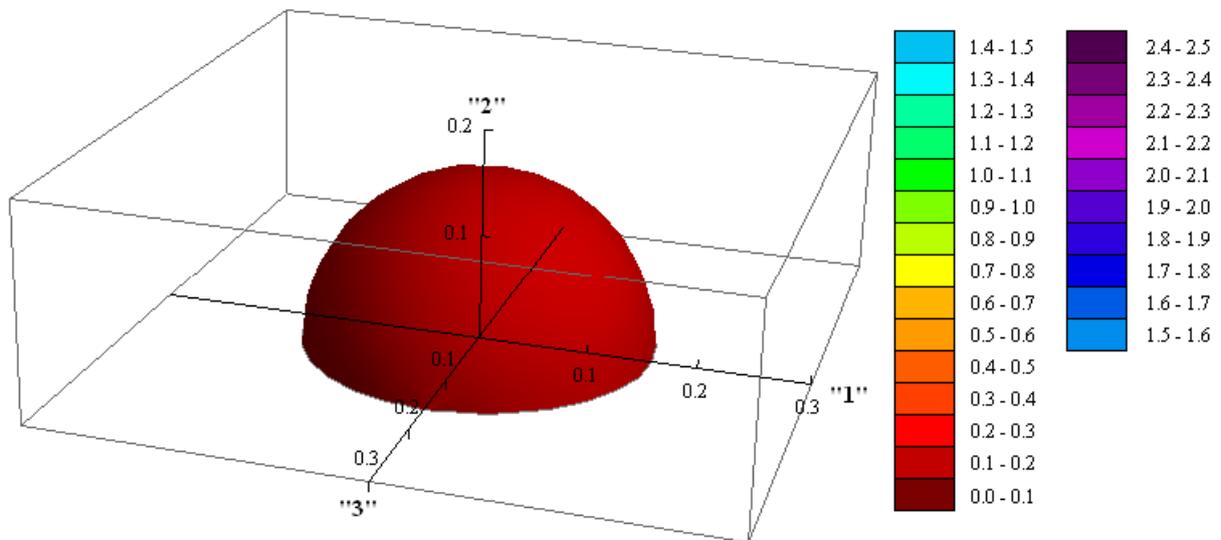


Abbildung 107: isotroper Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im Kugelkoordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

Der berechnete Faserorientierungsbeiwert muss im isotropen Fall für alle Richtungen gleich sein.

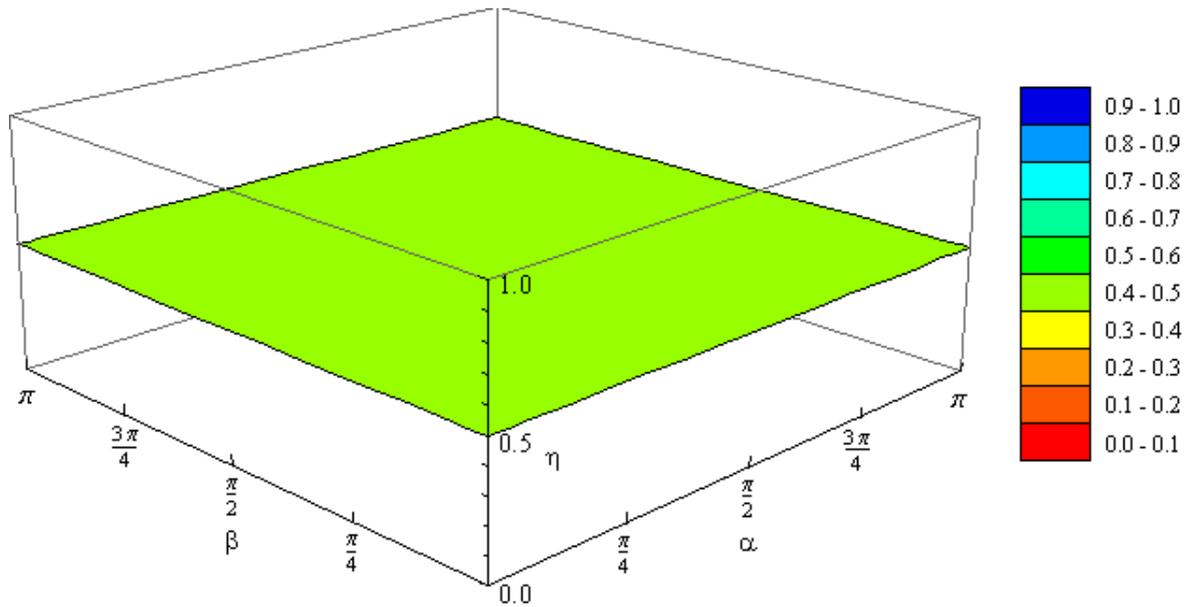


Abbildung 108: Faserorientierungsbeiwerte im isotropen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

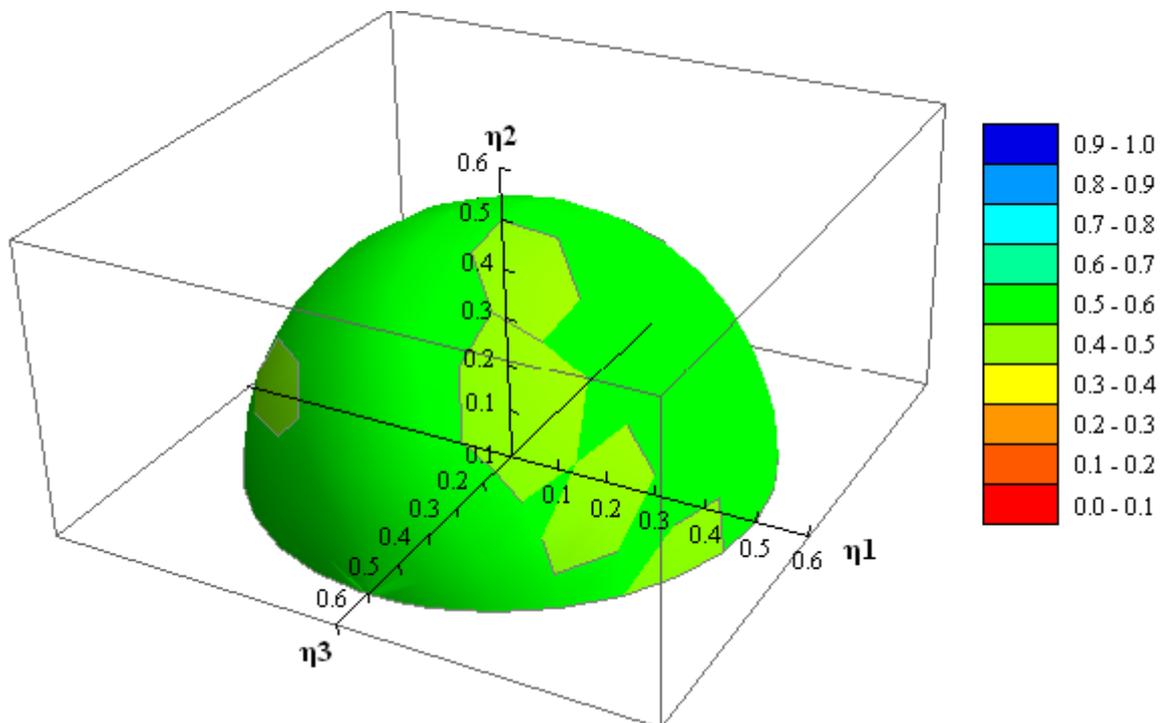


Abbildung 109: Faserorientierungsbeiwerte im isotropen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{2\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

Die heller gefärbten Flecken in Abbildung 109 sind eine Ungenauigkeit des Programmes und sollen nicht beachtet werden. Im isotropen Fall gilt für die drei Hauptrichtungen, und eigentlich alle anderen auch:

$$\eta_1=0,5$$

$$\eta_2=0,5$$

$$\eta_3=0,5$$

#### 4.9.2 Ein allgemeiner Fall

$$p_1 = \frac{3}{4\pi} \quad p_2 = \frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{1}{4\pi}$$

Der allgemeine Fall wurde beliebig gewählt, das heißt Bedingung war nur dass  $p_1 \geq p_2 \geq p_3$  und alle drei Parameter positiv sind.

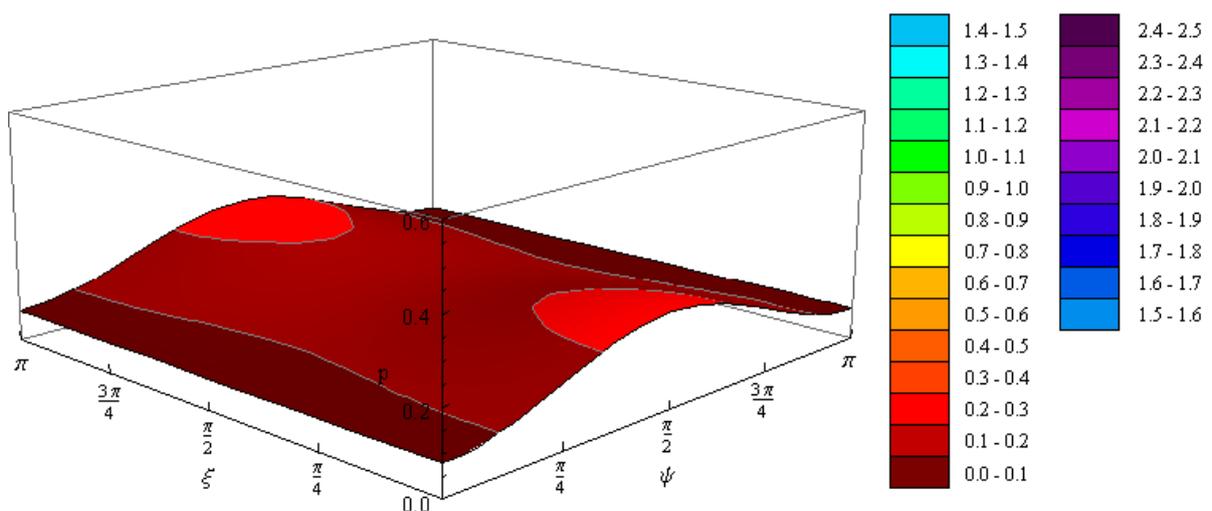


Abbildung 110: allgemeiner Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1 = \frac{3}{4\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{4\pi}$

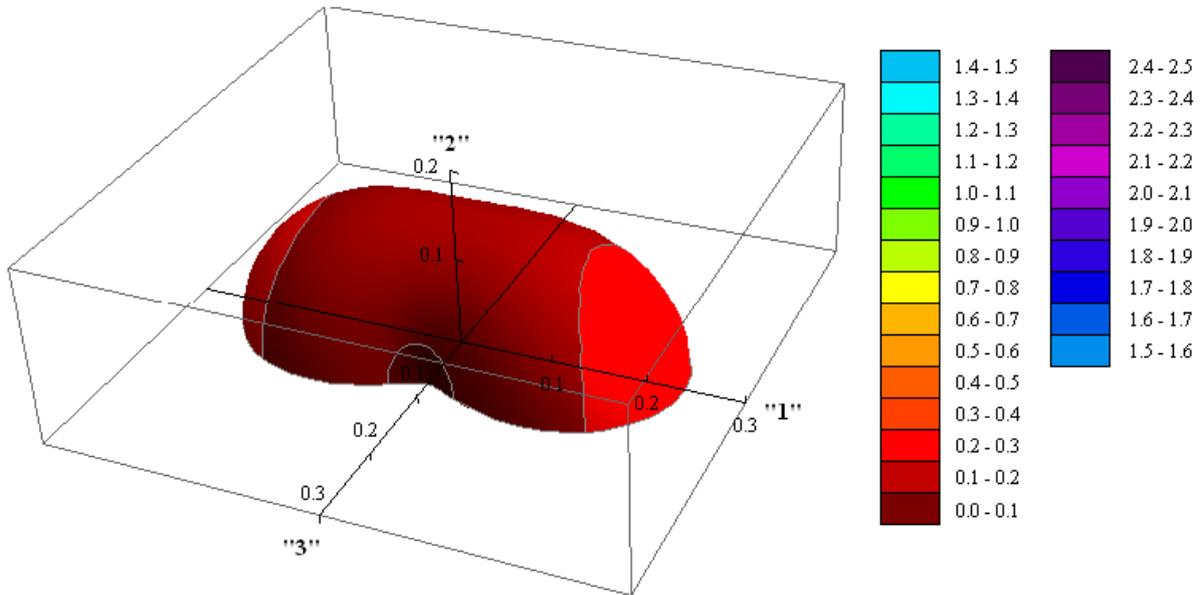


Abbildung 111: allgemeiner Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{4\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{4\pi}$

In diesem allgemeinen Fall ist der Faserorientierungsbeiwert nur für  $\eta_2$  ( $\beta=\pi/2$ ,  $\alpha=\pi/2$ ) = 0.5, da  $p_2$  mit  $\frac{1}{2\pi}$  angegeben wurde.  $p_3$  ( $\psi=0$ ) ist kleiner, dementsprechend liegt auch der Faserorientierungsbeiwert unter 0.5 und bei  $p_1$  ( $\xi=0$ ,  $\psi=\pi/2$ ) mit dem höchsten Wert ist der Beiwert mit  $\eta_1$  ( $\beta=0$ ,  $\alpha=\pi/2$ ) am größten (siehe Abbildung 112 und Abbildung 113).

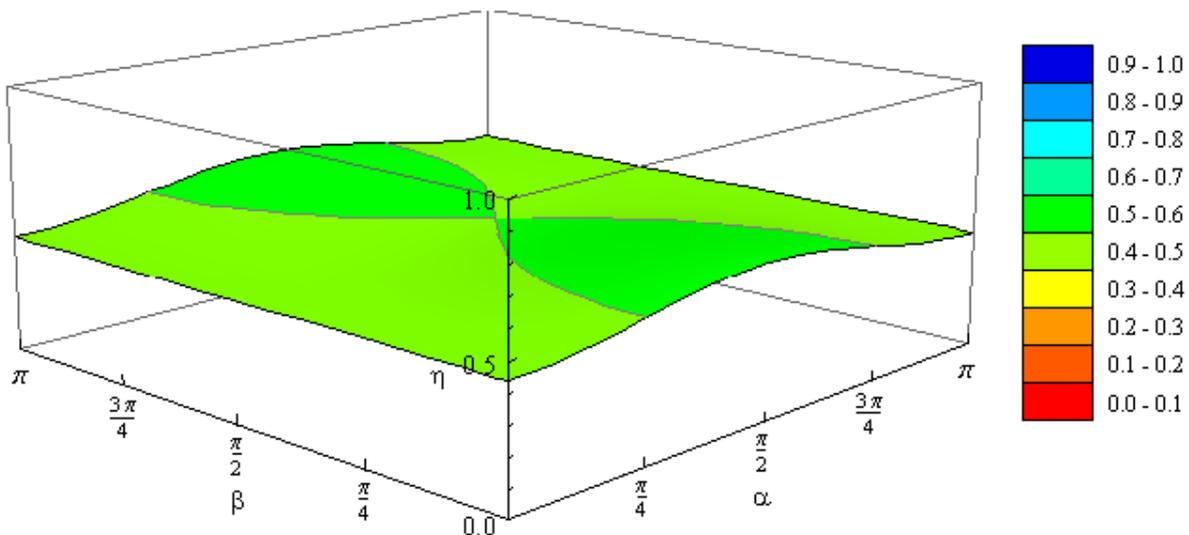


Abbildung 112: Faserorientierungsbeiwerte im allgemeinen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{4\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{4\pi}$

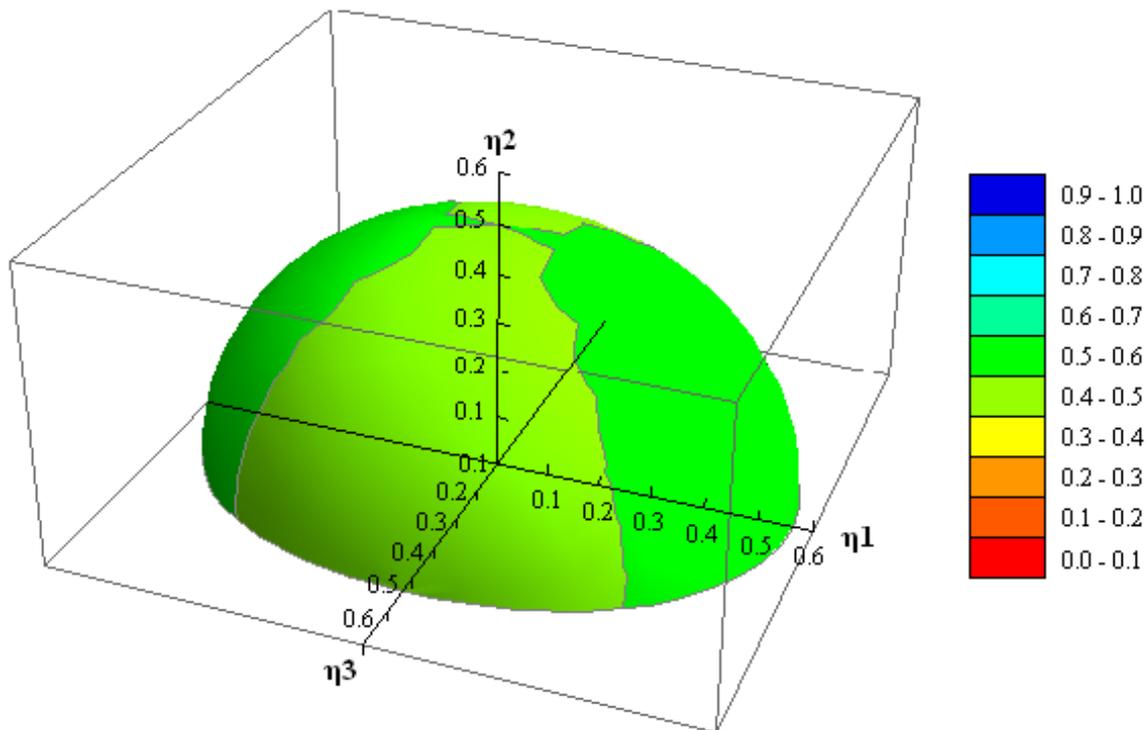


Abbildung 113: Faserorientierungsbeiwerte im allgemeinen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{4\pi}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2\pi}$  und  $p_3 = \frac{1}{4\pi}$

Die Faserorientierungsbeiwerte in den Hauptrichtungen sind also mit der gegebenen allgemeinen Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion

$$\eta_1=0,563$$

$$\eta_2=0,5$$

$$\eta_3=0,438$$

#### 4.9.3 Grenzfall 1

$$p_1 = \frac{1}{\pi} \quad p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{1}{2\pi}$$

Wie man in Abbildung 114 sehen kann, gibt es nur bei  $p_2$  ( $\xi=\pi/2$ ,  $\psi=\pi/2$ ) einen Punkt in dem  $p=0$  ist.

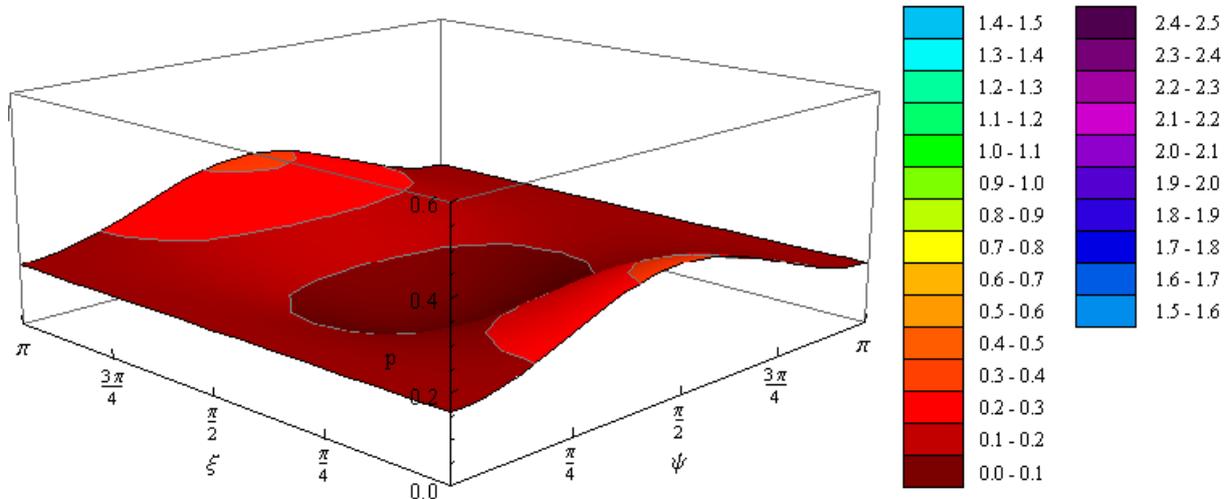


Abbildung 114: Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

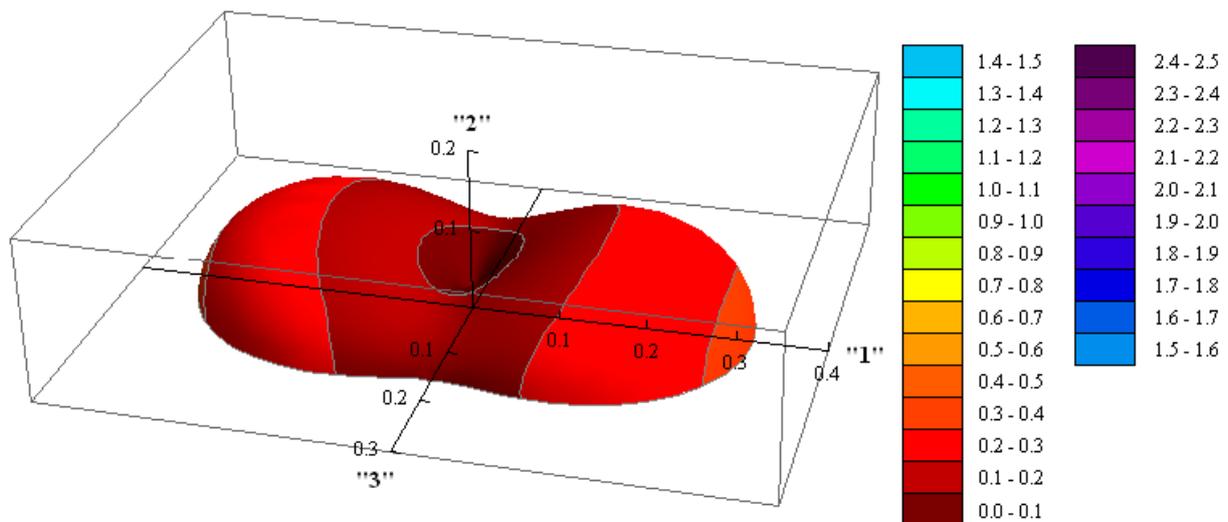


Abbildung 115: Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

Dies wirkt sich auch auf die Faserorientierungsbeiwerte aus (Abbildung 116 und Abbildung 117). Es ist ersichtlich, dass sich  $\eta_2$  in einem Wertebereich zwischen 0,3 und 0,4 befindet. Die Anisotropie ist nicht nur in der Verteil-Funktion des Grenzfall 1 im Bezug zum allgemeinen behandelten Fall deutlicher, sondern auch die Bandbreite der Faserorientierungsbeiwerte ist etwas größer. Für  $p_3$  ( $\psi=0$ ) ist der Faserorientierungsbeiwert isotrop ( $\eta_3$ ).

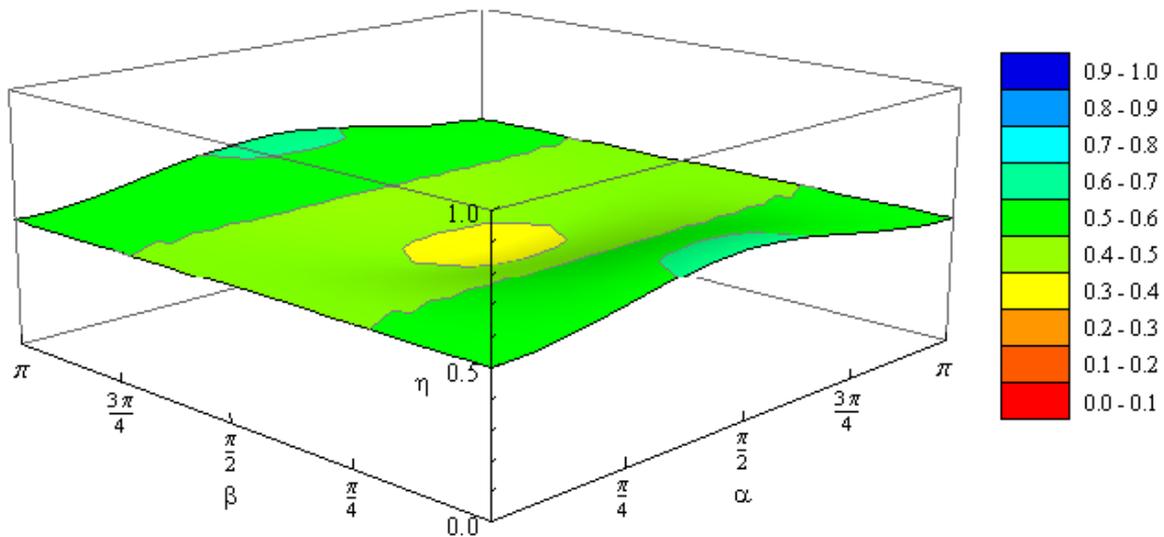


Abbildung 116: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

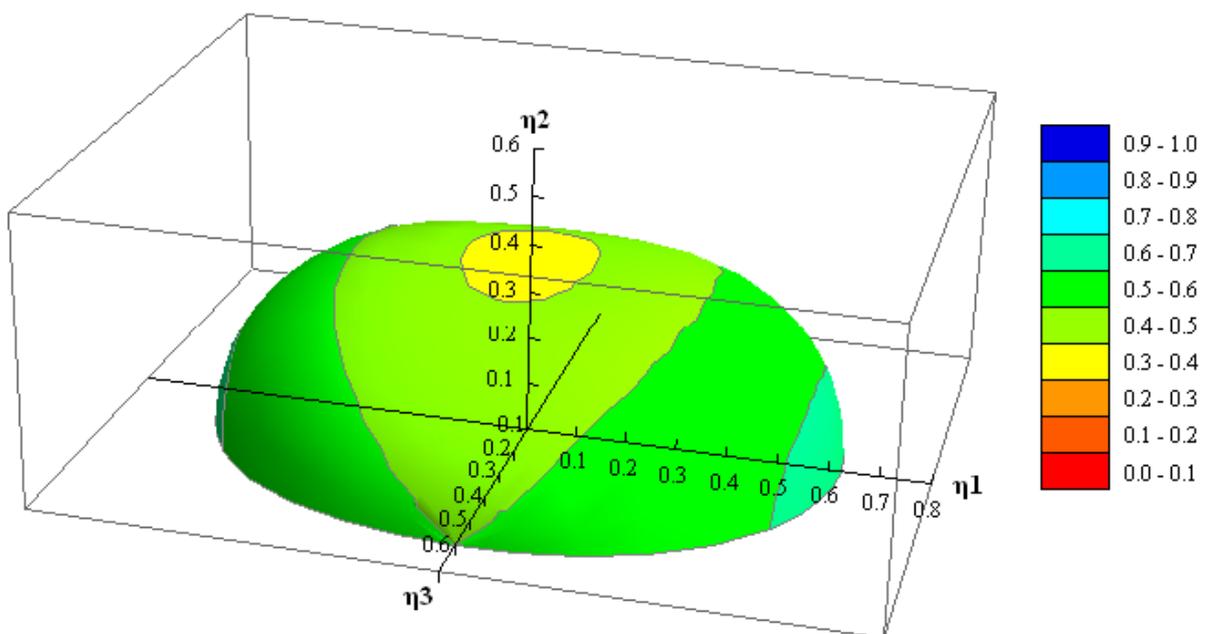


Abbildung 117: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{1}{\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = \frac{1}{2\pi}$

Im Grenzfall 1 berechnen sich die Faserorientierungsbeiwerte in den Hauptrichtungen zu

$$\eta_1=0,625$$

$$\eta_2=0,375$$

$$\eta_3=0,5$$

#### 4.9.4 Grenzfall 2

$$p_1 = \frac{3}{2\pi} \quad p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0$$

Hier haben wir das größte  $p_1$  für die Cosinus-Quadrat-Funktion, denn  $p_2$  und  $p_3$  haben ihren kleinsten möglichen Wert, sie sind gleich Null.

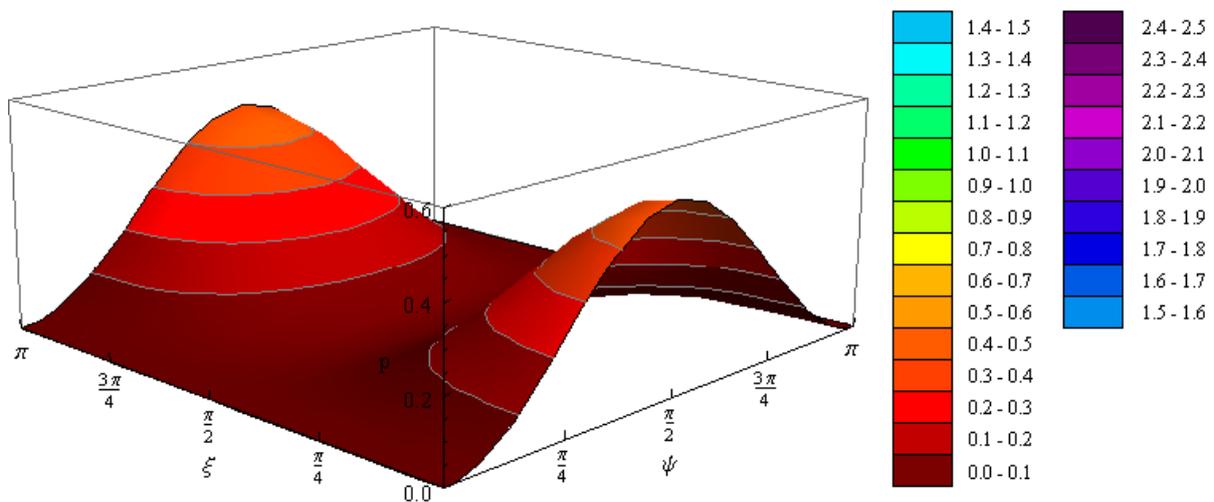


Abbildung 118: Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{2\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$

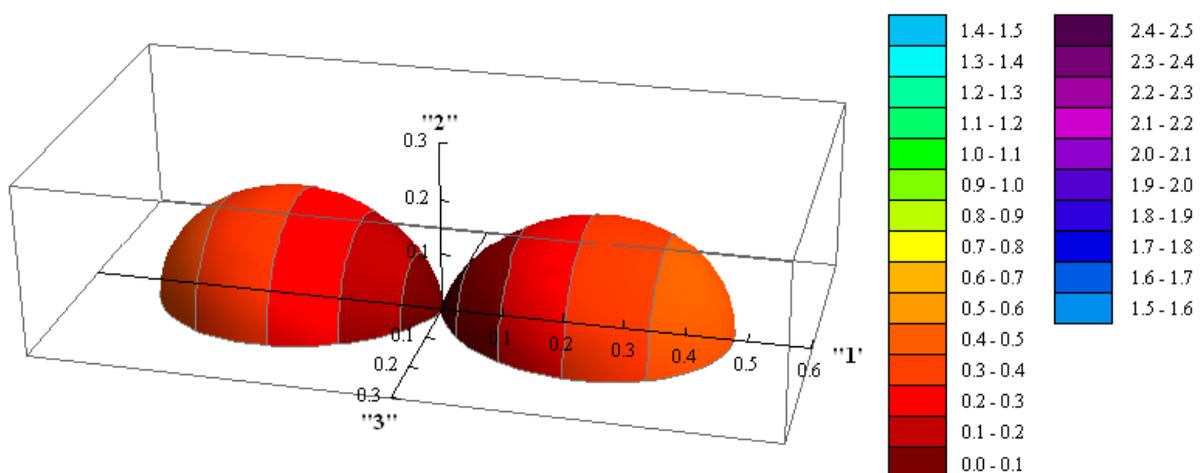


Abbildung 119: Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion im Kugelkoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{2\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$

Für die Faserorientierungsbeiwerte ergibt sich

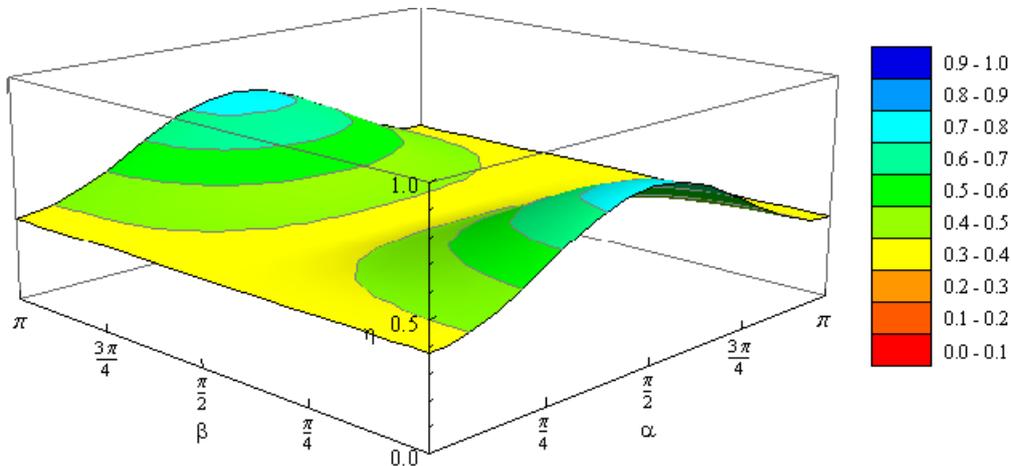


Abbildung 120: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{2\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$

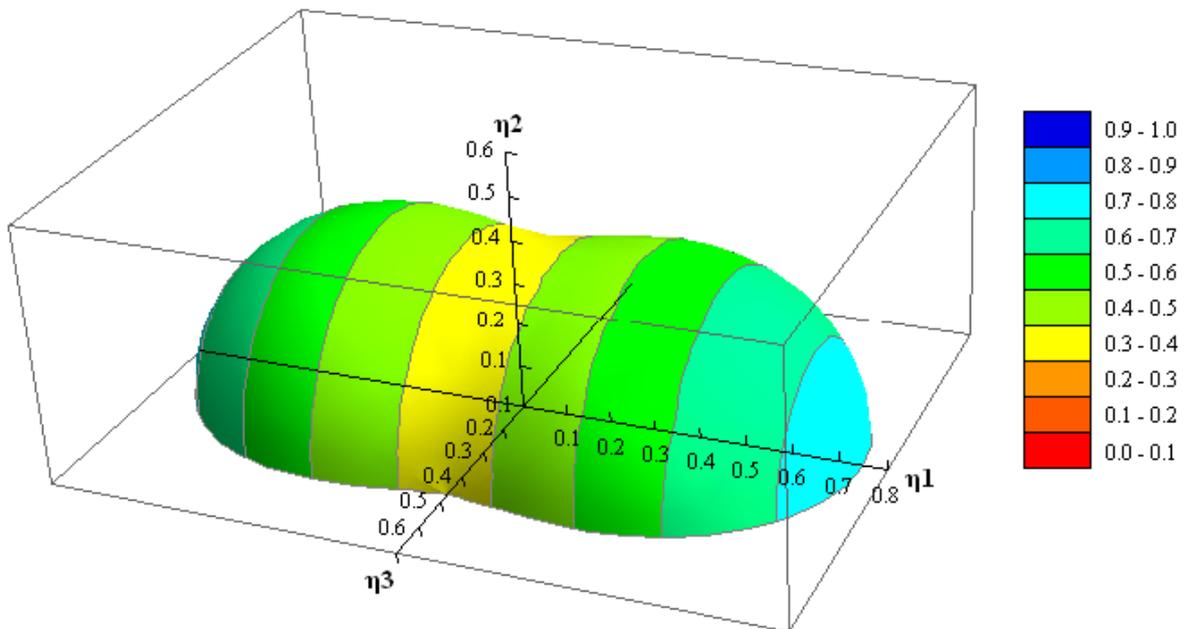


Abbildung 121: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = \frac{3}{2\pi}$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$

In Abbildung 120 und Abbildung 121 fällt sofort der Faserorientierungsbeiwert  $\eta_1$  ( $\beta=0$ ,  $\alpha=\pi/2$ ) auf. Dies ist der maximal erreichbare Wert mit der Cosinus-Quadrat-Funktion und des-

halb obere Grenze für die Bandbreite des Faserorientierungsbeiwertes, während in  $\eta_2$  und  $\eta_3$  die untere Grenze erreicht ist.

$$\eta_1=0,750$$

$$\eta_2=0,375$$

$$\eta_3=0,375$$

Also kann für die Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion die Bandbreite des Faserorientierungsbeiwertes mit diesem Grenzfall bestimmt werden

$$0,375 \leq \eta_{h, \cos Q, 3D} \leq 0,750$$

#### 4.10 Faserorientierungsbeiwert der linearen Verteil-Funktion in 3D

Im Gegensatz zur Cosinus-Quadrat-Funktion in 3D wird hier wie in Kapitel 4.8 der Einzelfaserorientierungsbeiwert  $\eta_{\text{einz}}$  ins Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes transformiert und vereinfacht. Die Verteil-Funktion ist nämlich im Koordinatensystem der lokalen Blickrichtung zu kompliziert und nicht lösbar. Deshalb wird hier der umgekehrte Weg eingeschlagen.

$$\eta_{\text{einz}, 3D} = |\cos \theta| = |\cos(\alpha) \cos(\psi) - \cos(\beta + \xi) \sin \alpha \sin \psi| \quad (4-37)$$

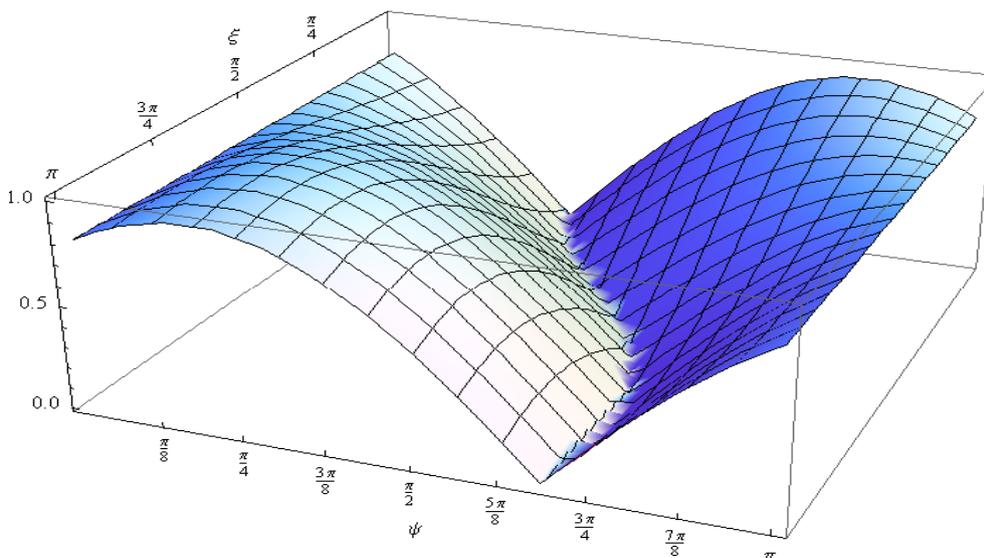


Abbildung 122: Transformierter Einzelfaserorientierungsbeiwert mit  $\beta=\pi/6$  und  $\alpha=\pi/5$  in 3D

Leider gelingt es dem Programm Mathematica den Faserorientierungsbeiwert nicht zu berechnen, da es zu viele mögliche Unstetigkeitsstellen bei  $\eta_{\text{einz}}$  gibt. Deshalb wird eine genäherte Funktion mittels einer Fourier-Reihe erstellt. Mit dem Ansatz (3-51) ergeben sich folgende Terme der Fourier-Reihe im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{7\pi}$$

$$a_1 = 48 \frac{\cos^2(\theta)}{7\pi}$$

$$a_2 = -160 \frac{\cos^4(\theta)}{21\pi}$$

$$a_3 = 128 \frac{\cos^6(\theta)}{35\pi}$$

$$\eta_{\text{einz,gen,3D}}(\theta) = \frac{2}{7\pi} + 48 \frac{\cos^2(\theta)}{7\pi} - 160 \frac{\cos^4(\theta)}{21\pi} + 128 \frac{\cos^6(\theta)}{35\pi} \quad (4-38)$$

Diese hat keine Unstetigkeitsstellen und die Berechnung erfolgt ohne größere Probleme.

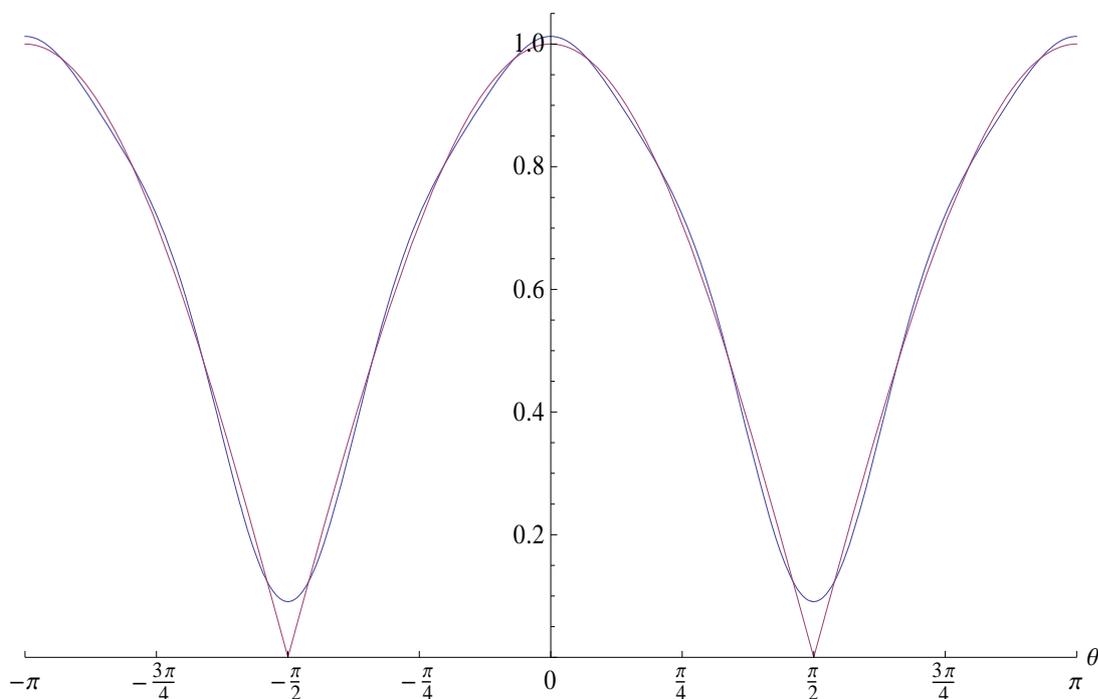


Abbildung 123: Genäherter und exakter Einzelfaserorientierungsbeiwert in Blickrichtungskoordinaten in 2D

Wie in Abbildung 123 erkennbar gibt es Abweichungen bei  $\theta=\pi/2$ . Dieser Fehler ist in Abbildung 124 als Differenz beider Funktionen dargestellt, nachdem der genäherte Einzelfaserorientierungsbeiwert ebenso wie vorhin der exakte Einzelfaserorientierungsbeiwert einer Koordinatentransformation unterzogen wurde.

$$\begin{aligned}
 \eta_{\text{einz,gen,3D}}(\xi, \psi, \beta, \alpha) &= \frac{2}{7\pi} + 48 \frac{\cos^2(\cos(\alpha) \cos(\psi) - \cos(\beta + \xi) \sin \alpha \sin \psi)}{7\pi} \\
 &- 160 \frac{\cos^4(\cos(\alpha) \cos(\psi) - \cos(\beta + \xi) \sin \alpha \sin \psi)}{21\pi} \\
 &+ 128 \frac{\cos^6(\cos(\alpha) \cos(\psi) - \cos(\beta + \xi) \sin \alpha \sin \psi)}{35\pi}
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

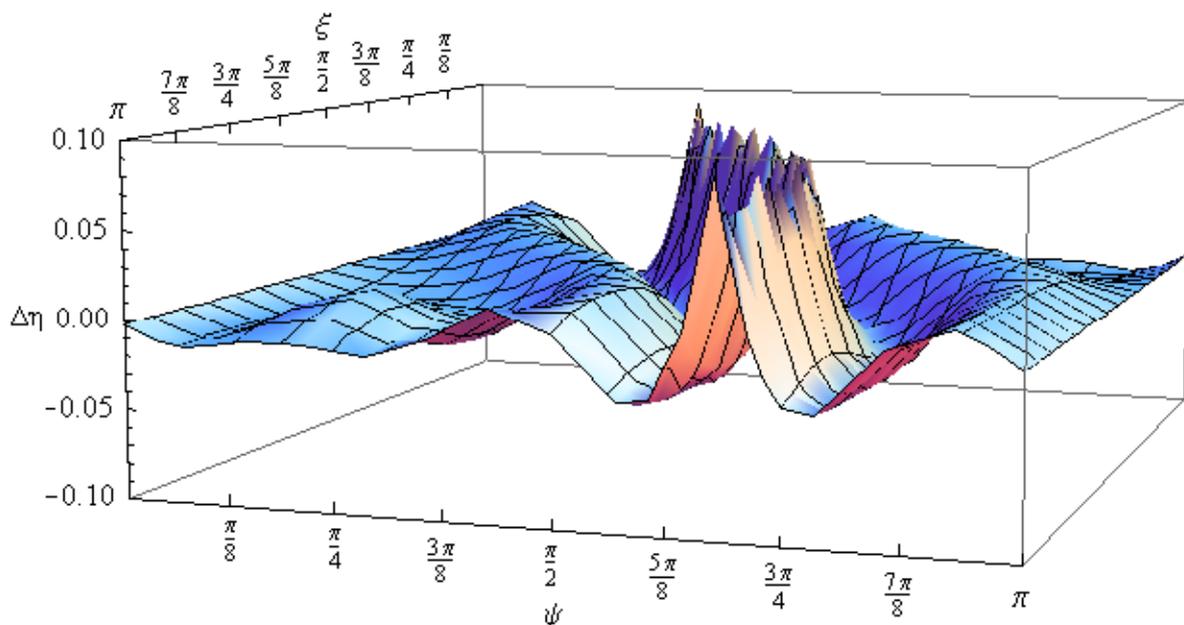


Abbildung 124: Differenz des genäherten und exakten Einzelfaserorientierungsbeiwertes im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D

Werden die jeweiligen Einzelfaserorientierungsbeiwerte mit der Verteil-Funktion und Korrekturfaktor  $\sin(\psi)$  multipliziert, so wie es in der weiteren Berechnung der Fall ist, und anschließend voneinander subtrahiert geht der Fehler gegen 0.

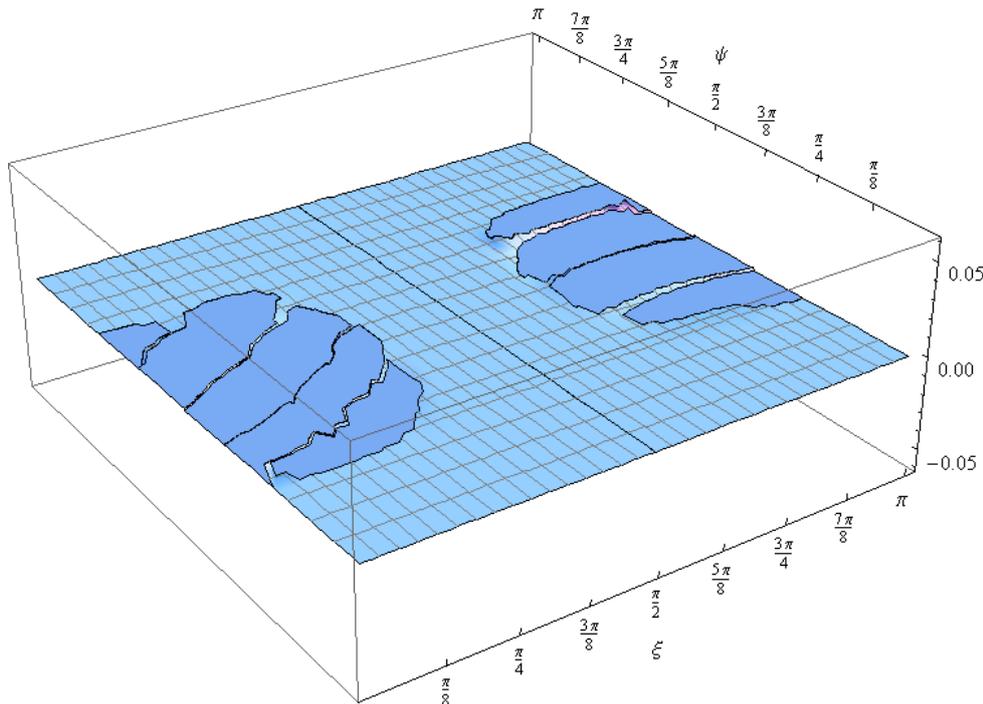


Abbildung 125: Differenz der Multiplikationen von Verteil-Funktion, Faktor  $\sin(\psi)$  und dem genäherten bzw. exakten Einzelfaserorientierungsbeiwertes im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D

Deshalb kann der genäherte Einzelfaserorientierungsbeiwert für die weitere Berechnung verwendet werden. Der Faserorientierungsbeiwert lässt sich also mit der Verteil-Funktion  $p_{lin,3D}$  aus Abbildung 51 über das Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes wie folgt berechnen

$$\eta_{lin,3D} = \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\xi=0}^{\pi} p_{lin,3D}(\xi, \psi, \beta, \alpha) \sin \psi \eta_{einz,gen,3D} d\xi d\psi \quad (4-40)$$

Die Bestimmungsgleichung für den Faserorientierungsbeiwert ist zwei Seiten lang und deshalb hier nicht angeführt. Sie ist der beiliegenden DVD zu entnehmen.

Wie im vorherigen Kapitel werden nun interessante Variationen ausgesucht und grafisch ausgewertet. Zuerst erfolgt eine Darstellung im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes und dann die der Faserorientierungsbeiwerte in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\alpha$ . Dazu ist eine Eingabe von  $\Delta\xi$  und  $\Delta\psi$  erforderlich, aus denen bei Bedarf die Spitze  $p_1$  ausgerechnet werden kann.  $\alpha$  und  $\beta$  sind in der linearen Verteil-Funktion in 3D Bestandteil des Einzelfaserorientierungsbeiwertes. Der isotrope Fall wurde schon im vorangehenden Kapitel behandelt und wir deshalb jetzt nicht mehr beachten.

Untersucht wurden:

- Ein allgemeiner inhomogener Fall
- Ein allgemeiner homogener Fall
- Grenzfall 1 zum inhomogenen Bereich: in Punkt  $p_2$ , in den keine Fasern orientiert sind ( $\psi=\pi/2, \xi=\pi/2$ )
- Grenzfall 2 zum inhomogenen Bereich: in  $\psi = \frac{\pi}{2}$  sind keine Fasern orientiert

#### 4.10.1 Allgemeiner inhomogener Fall

$$\Delta\xi = \frac{\pi}{3} \quad \Delta\psi = \frac{\pi}{5} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1,571$$

In diesem Fall gibt es entlang von beiden Richtungswinkeln  $\xi$  und  $\psi$  Bereiche in die keine Fasern orientiert sind. Der unidirektionale Fall wird theoretisch erreicht, wenn  $\Delta\xi$  und  $\Delta\psi$  gegen Null gehen.

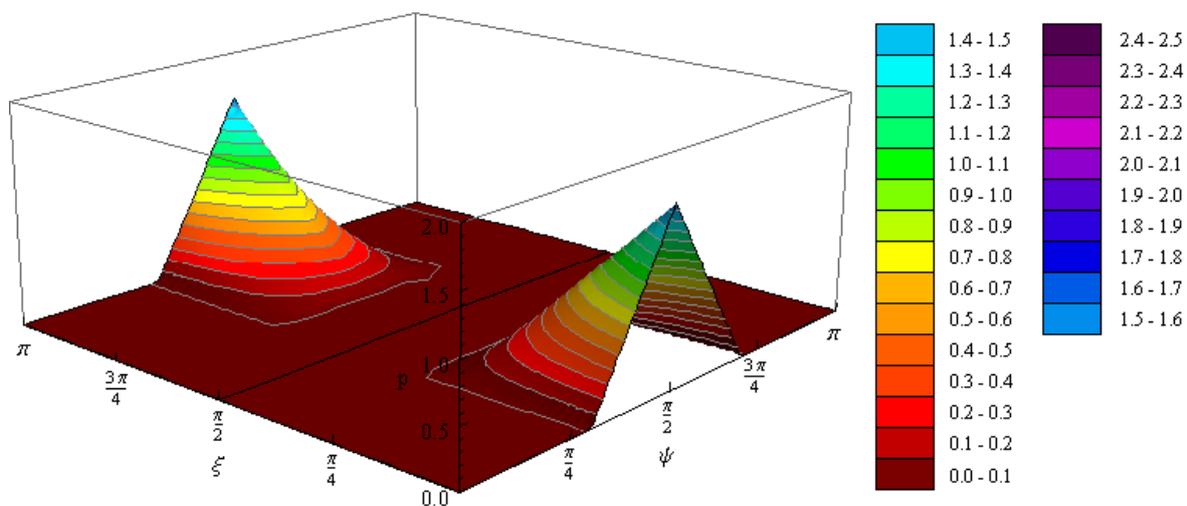


Abbildung 126: inhomogener Fall der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{5}$  und  $p_1 = 1,571$

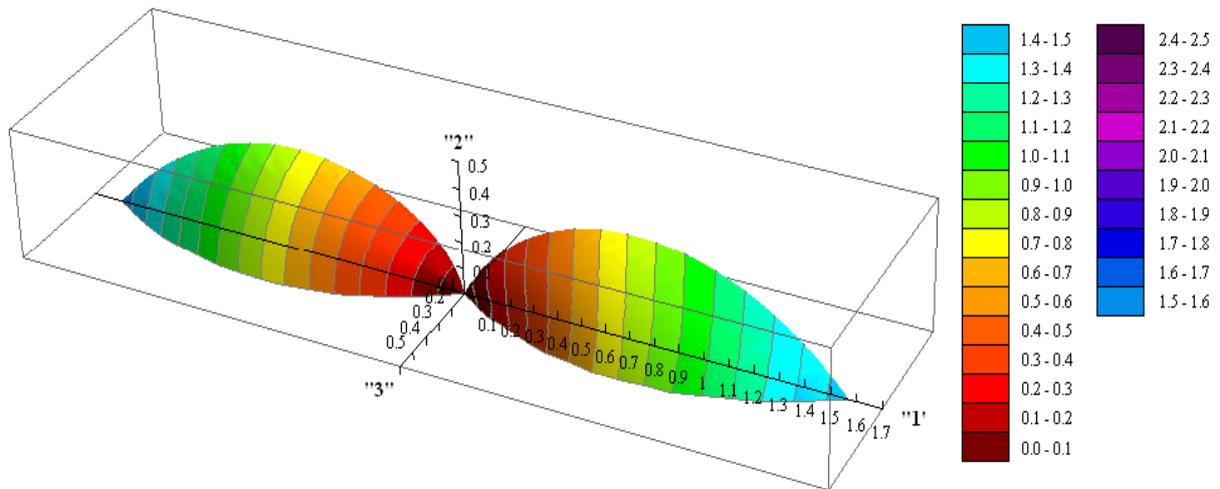


Abbildung 127: inhomogener Fall der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{5}$  und  $p_1 = 1,571$

Leicht erkennbar erneut die erwarteten hohen Werte im Bereich der Hauptrichtung 1 ( $\eta_1 \alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ). Obwohl  $p_2$  und  $p_3$  in der Verteil-Funktion gleich Null sind, gibt es Unterschiede beim Faserorientierungsbeiwert in den Richtungen 2 und 3 (siehe Abbildung 128 und Abbildung 129). Dies ist auf die verschiedenen Bandbreiten von  $\Delta\xi$  und  $\Delta\psi$  zurückzuführen.

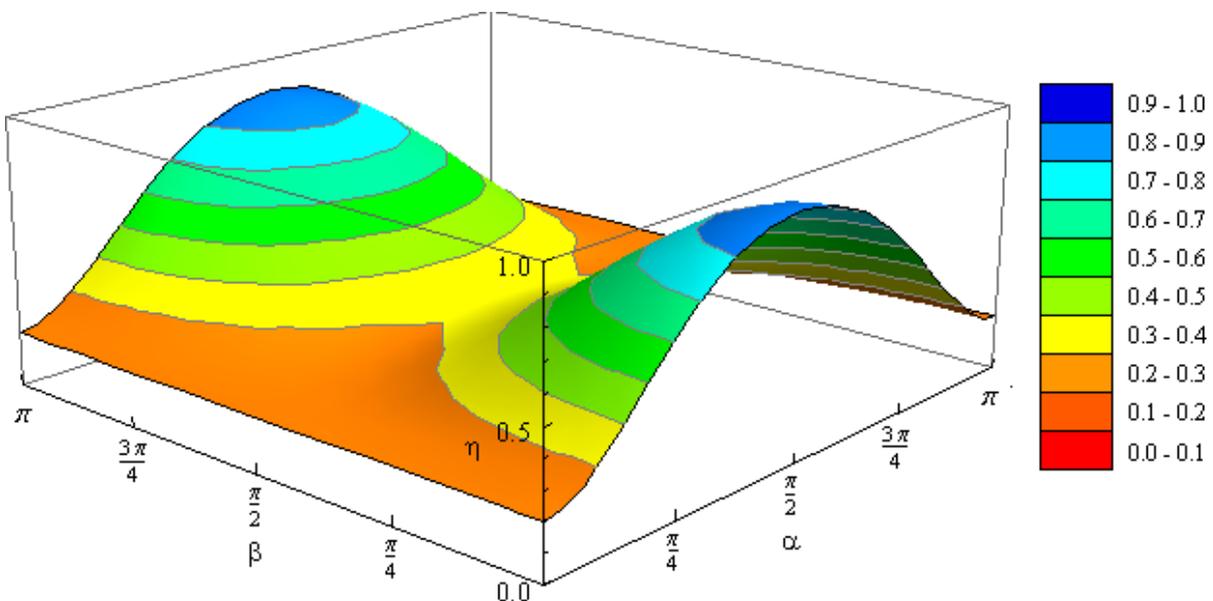


Abbildung 128: Faserorientierungsbeiwerte im inhomogenen Fall der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{5}$  und  $p_1 = 1,571$

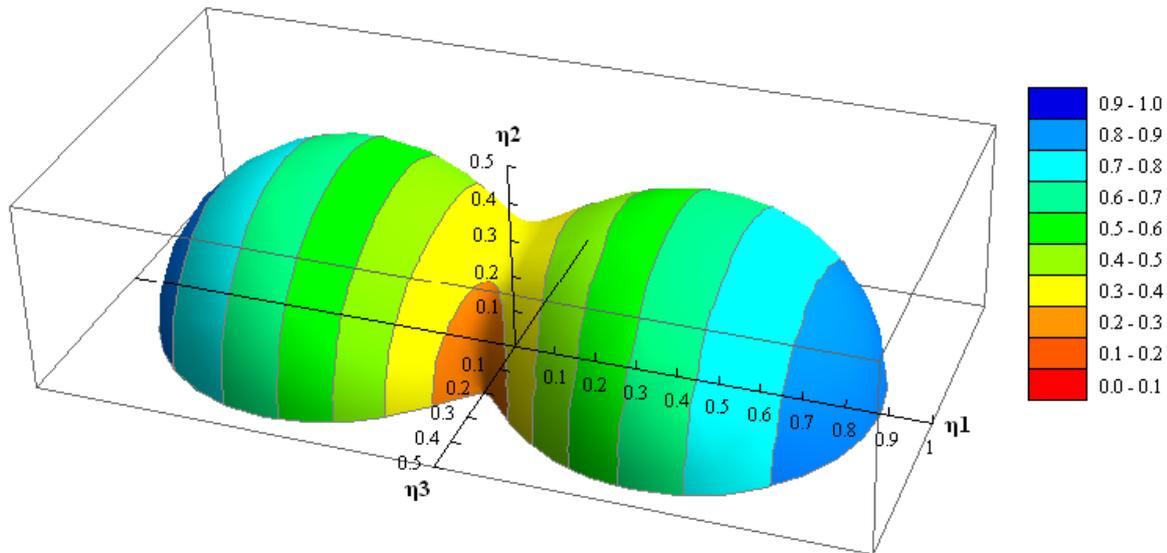


Abbildung 129: Faserorientierungsbeiwerte im inhomogenen Fall der linearen Verteil-Funktion im Kugelkoordinatensystem in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{5}$  und  $p_1 = 1,571$

Die berechneten Faserorientierungsbeiwerte in den 3 Hauptrichtungen sind:

$$\eta_1 = 0,881$$

$$\eta_2 = 0,322$$

$$\eta_3 = 0,375$$

Es werden kleinere Werte erreicht als die Bandbreite des Faserorientierungsbeiwertes der homogenen Cosinus-Quadrat-Funktion es zulässt. Denn wie vorhin angeführt ist theoretisch ein unidirektionaler Fall möglich. Deshalb ist die mögliche Bandbreite der linearen dreidimensionalen Verteil-Funktion

$$0 \leq \eta_{lin,3D} \leq 1$$

Realistischer sind Werte zwischen 0,2 und 0,9.

#### 4.10.2 Allgemeiner homogener Fall

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{3} \quad \Delta\psi = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0,336$$

Dieser Fall sollte ziemlich ähnliche Ergebnisse bezüglich der Faserorientierungsbeiwerte liefern wie mit der Cosinus-Quadrat-Funktion. Zu erkennen ist aber in Abbildung 130, dass der Wert  $p_3$  entlang der  $\xi$ -Achse nicht konstant ist.

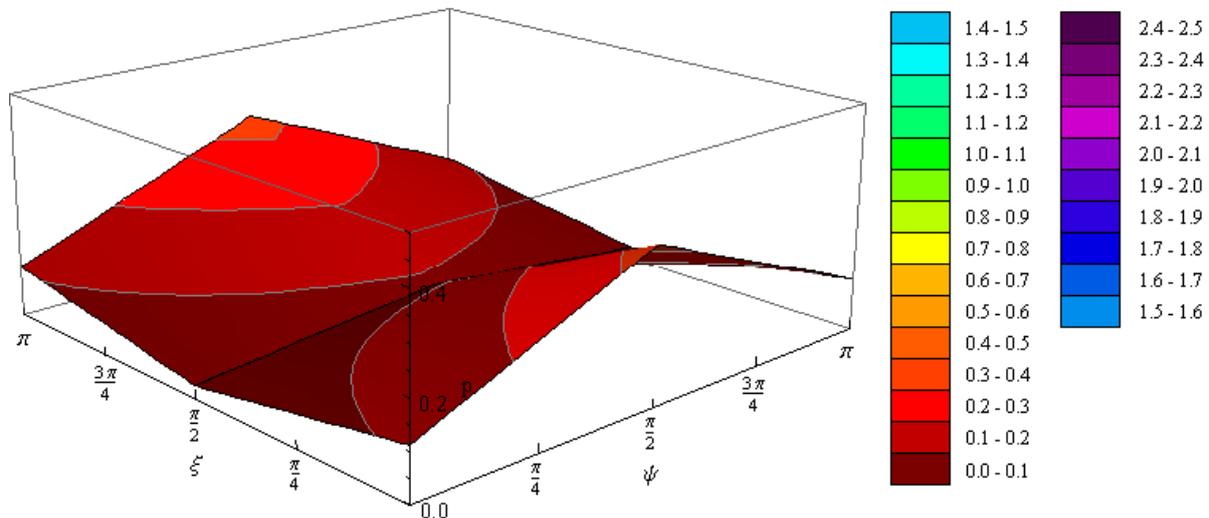


Abbildung 130: homogener Fall der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{4}$  und  $p_1 = 0,336$

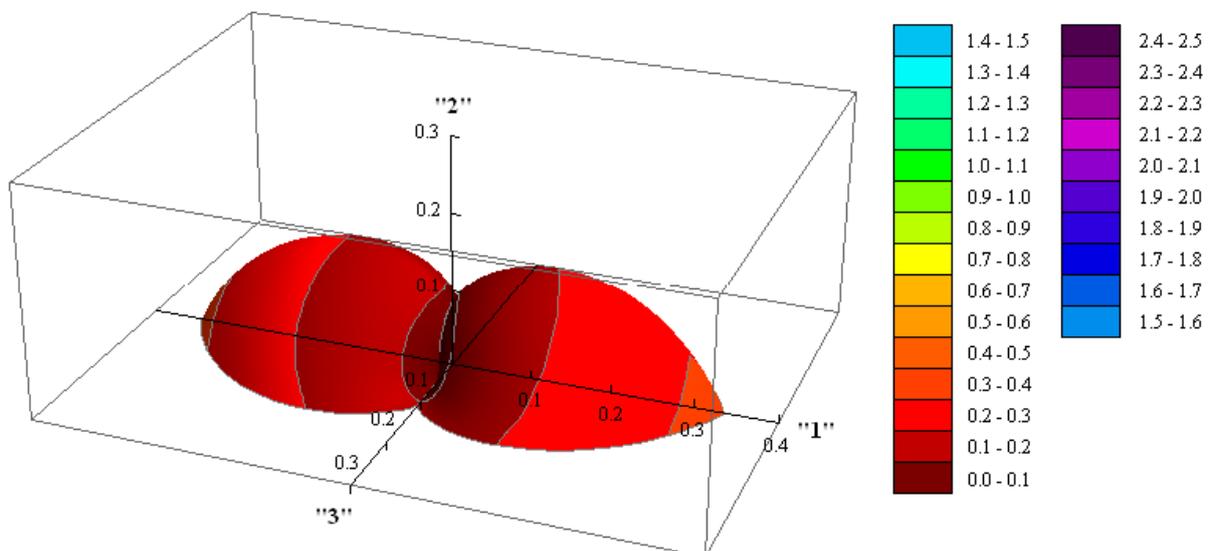


Abbildung 131: homogener Fall der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{4}$  und  $p_1 = 0,336$

Auf diesen Fehler wurde vorher schon aufmerksam gemacht und die Auswirkungen auf die Faserorientierungsbeiwerte werden in Kapitel 4.11 untersucht.

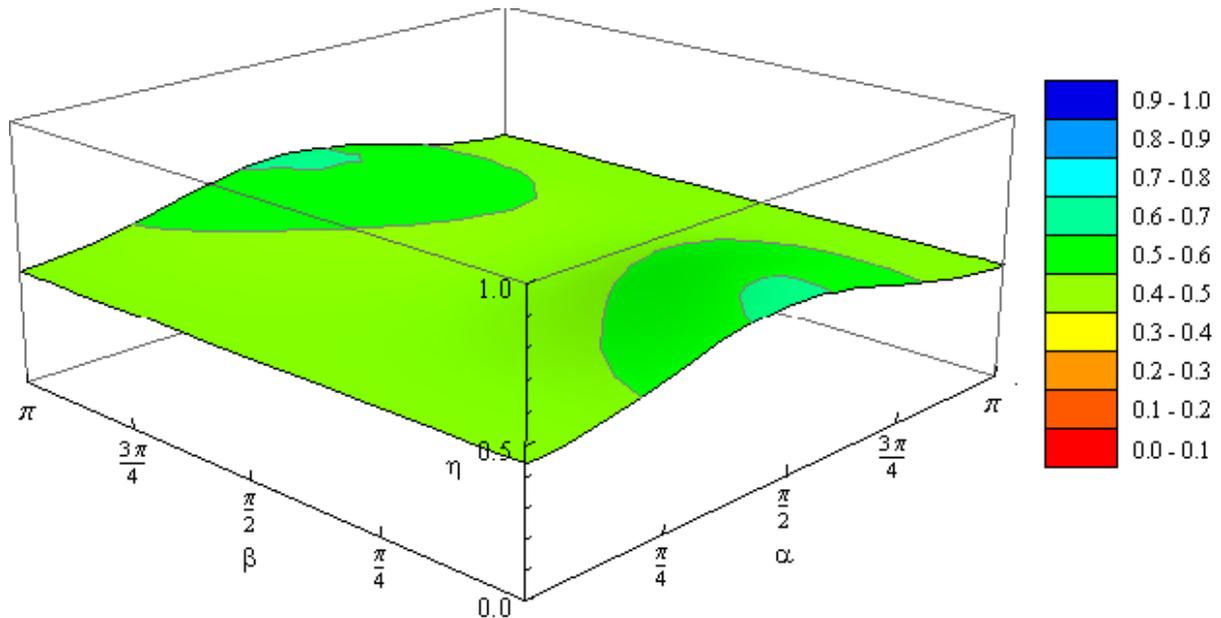


Abbildung 132: Faserorientierungsbeiwerte im homogenen Fall der linearen Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{4}$  und  $p_1 = 0,336$

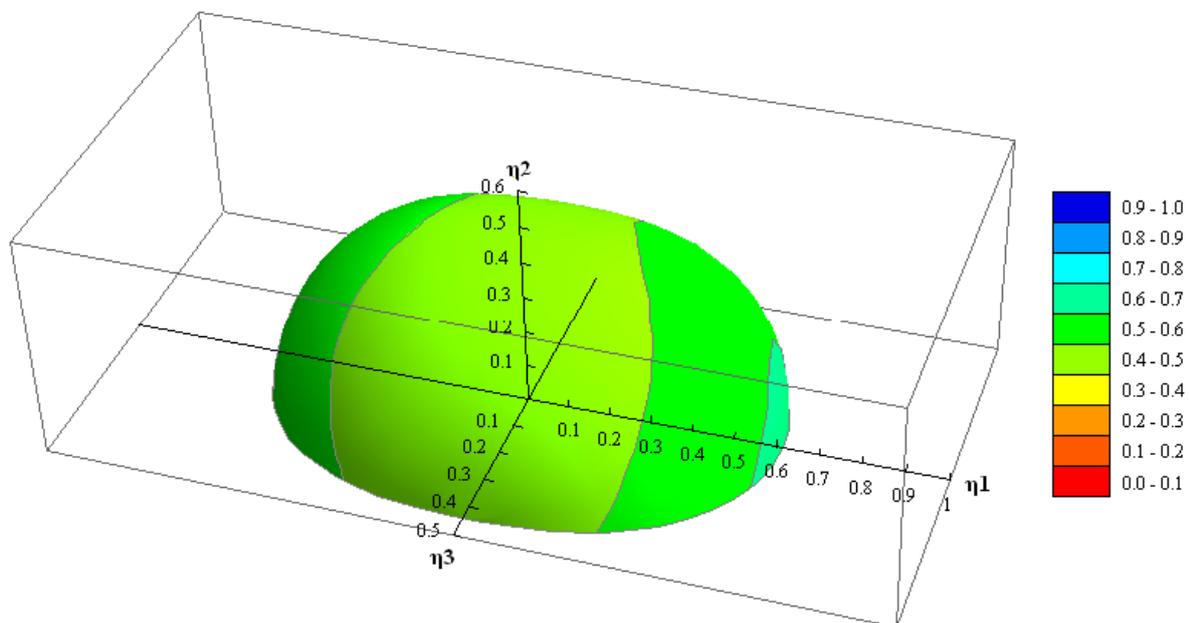


Abbildung 133: Faserorientierungsbeiwerte im homogenen Fall der linearen Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{4}$  und  $p_1 = 0,336$

Die Faserorientierungsbeiwerte in den Hauptrichtungen sind:

$$\eta_1 = 0,614$$

$$\eta_2 = 0,443$$

$$\eta_3 = 0,440$$

### 4.10.3 Grenzfall 1

$$\Delta\xi = \frac{\pi}{2} \quad \Delta\psi = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0,362$$

Es ist sofort ersichtlich, dass in diesem Fall im Gegensatz zu Abbildung 114 entlang von  $\xi = \pi/2$  alle Nullstellen sind und nicht nur bei  $p_2$ . Dies ist auf die fehlenden konstanten Wert  $p_3$  zurückzuführen.

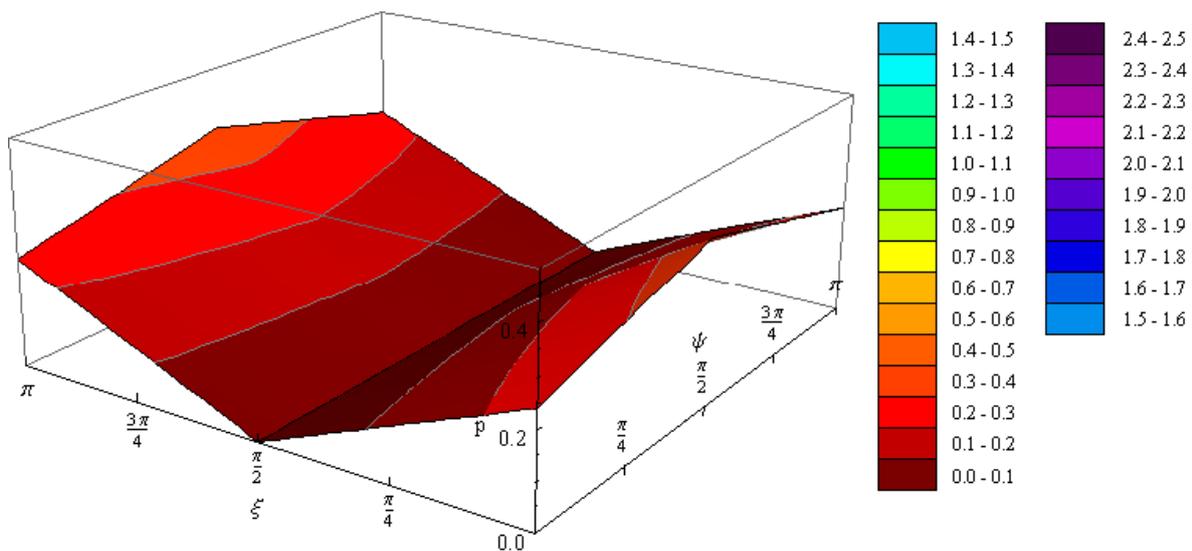


Abbildung 134: Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,362$

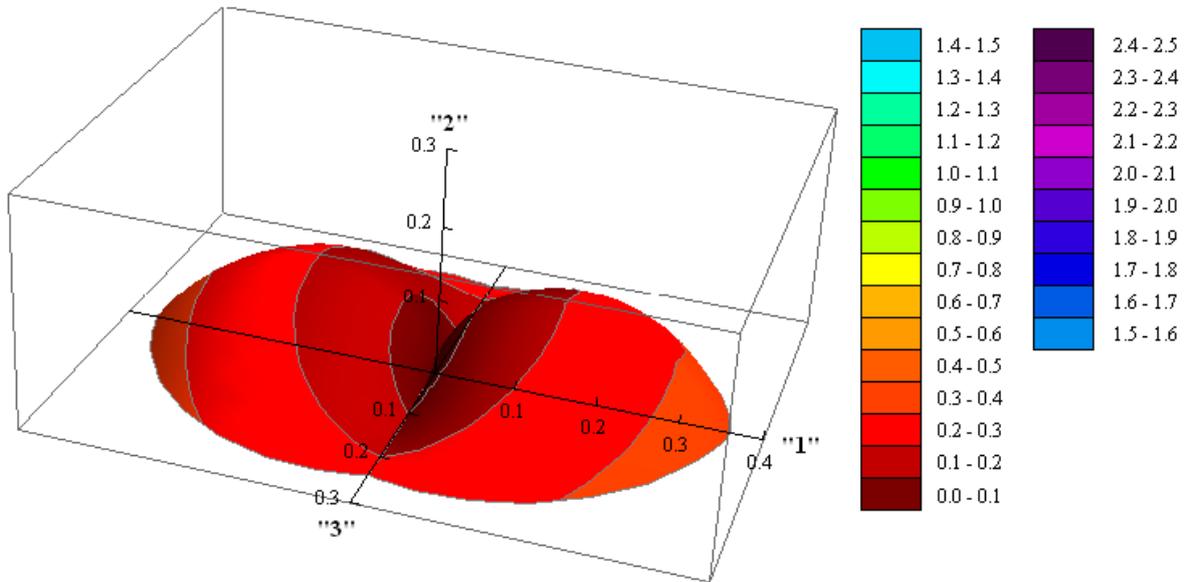


Abbildung 135: Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,362$

Hingegen Abbildung 120 und Abbildung 136 sehen ziemlich ähnlich aus.

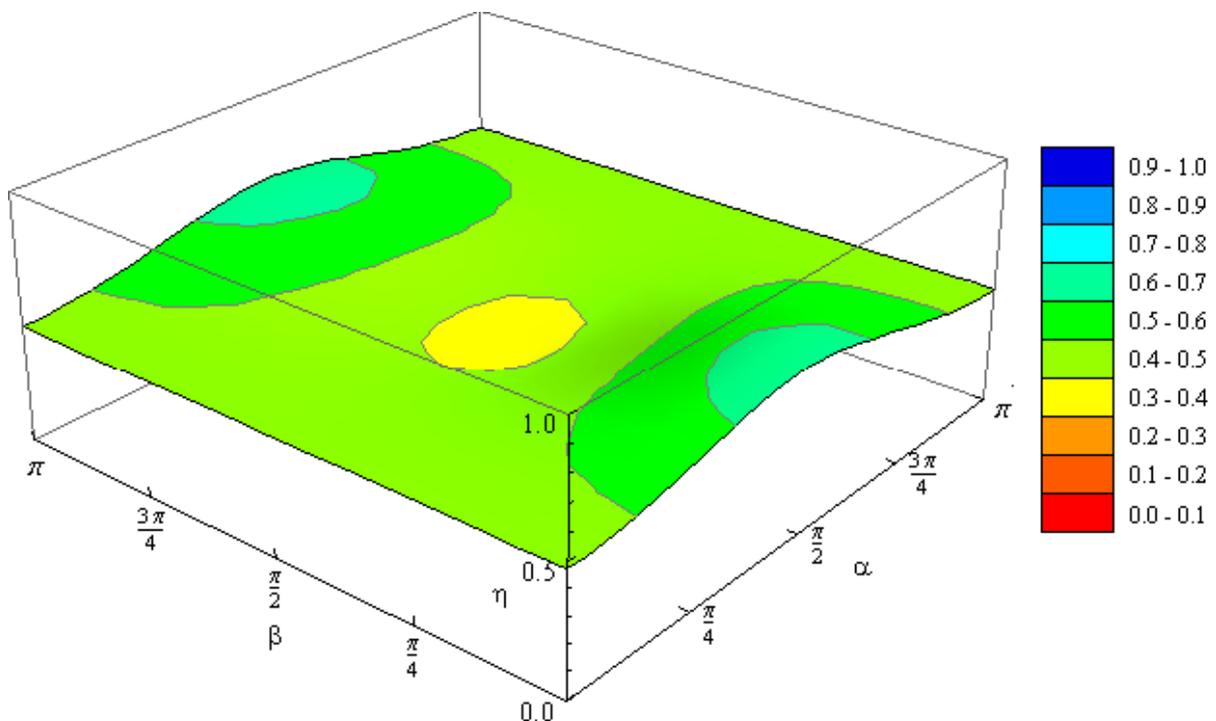


Abbildung 136: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,362$

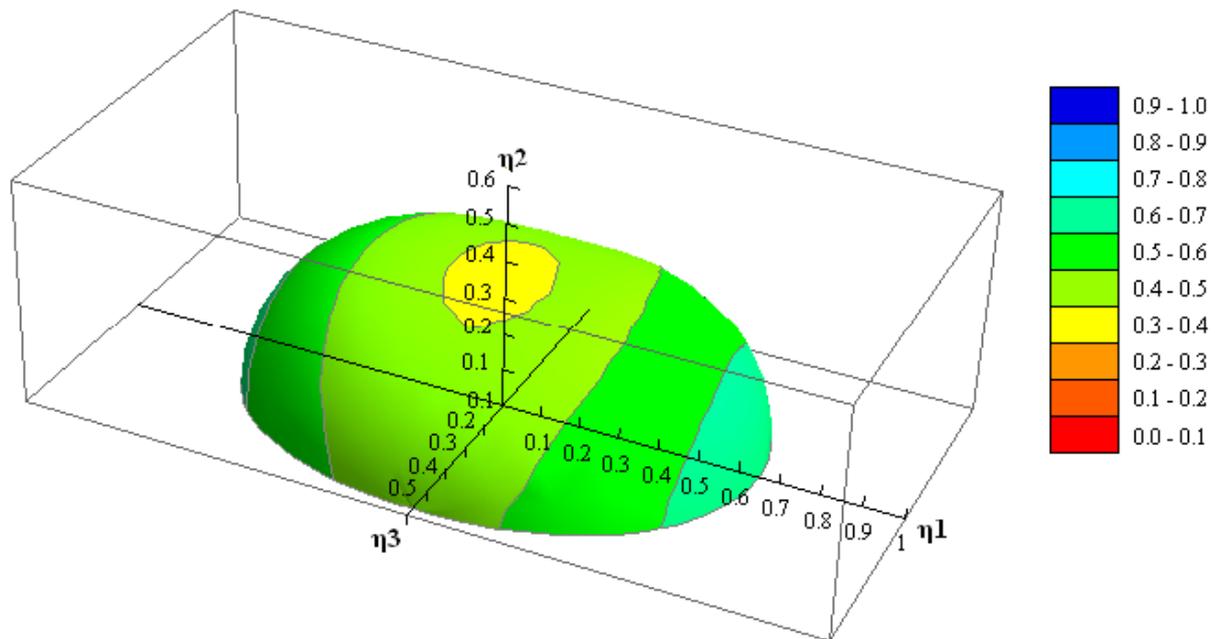


Abbildung 137: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{3\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,362$

Die Werte für den Faserorientierungsbeiwert in den Hauptrichtungen werden erneut berechnet:

$$\eta_1 = 0,650$$

$$\eta_2 = 0,374$$

$$\eta_3 = 0,474$$

Die Bandbreite der Faserorientierungsbeiwerte ist im Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion ist um etwa 0,05 größer als im Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion.

#### 4.10.4 Grenzfall 2

$$\Delta\xi = \frac{\pi}{2} \quad \Delta\psi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0,500$$

Für  $\Delta\psi \leq \frac{\pi}{2}$  ist entlang der  $\xi$ -Achse der Wert von  $p_3$  gleich 0, das heißt der vorhin genannte Fehler hat keinen Einfluss mehr in der Berechnung.

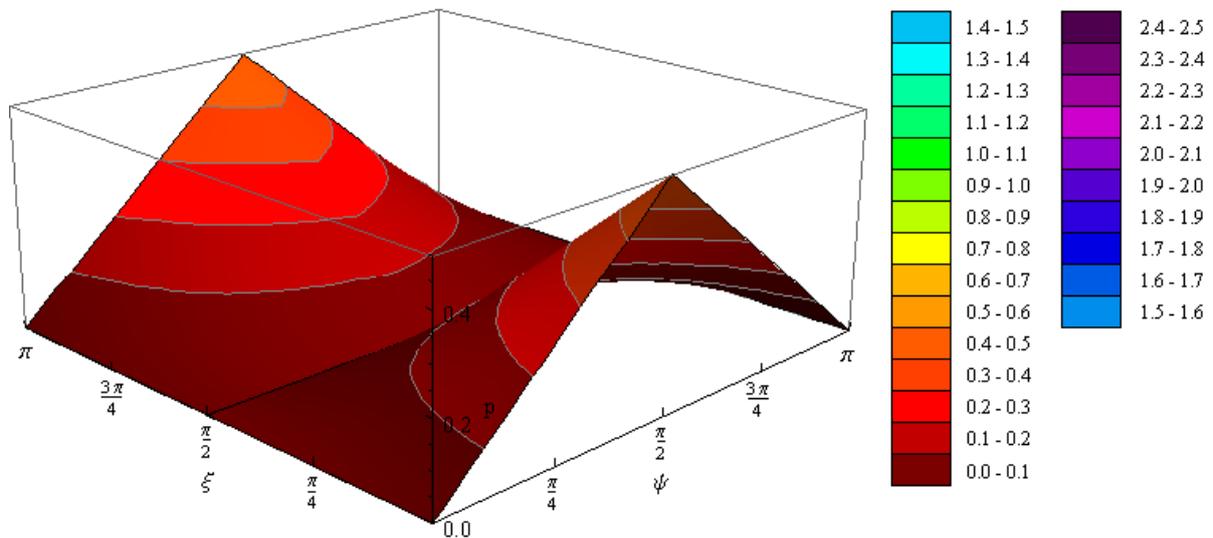


Abbildung 138: Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,500$

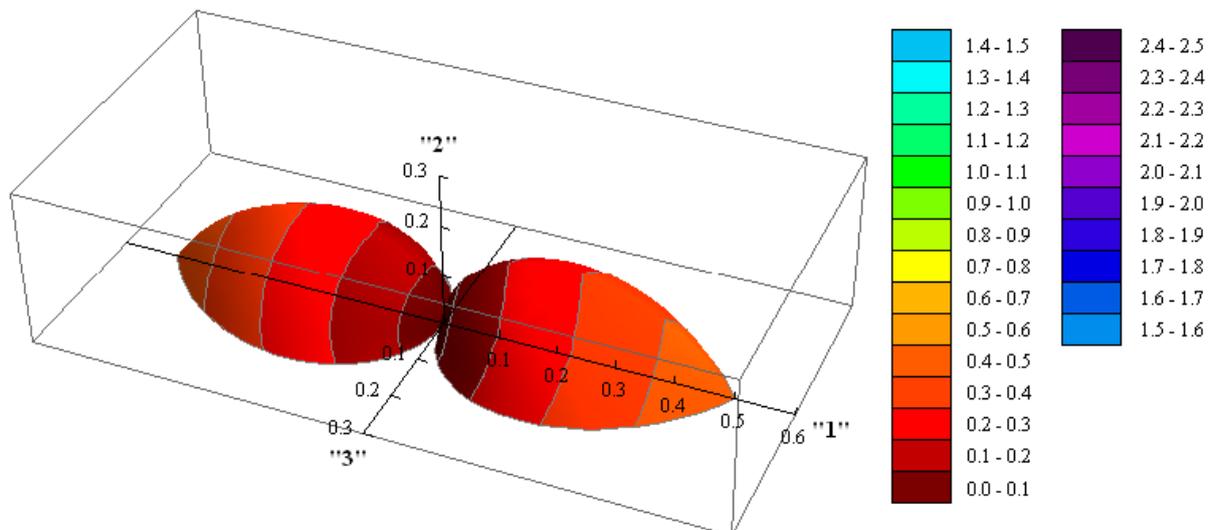


Abbildung 139: Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,500$

Faserorientierungsbeiwert  $\eta_3$  ( $\alpha=0$ ) ist etwas kleiner als  $\eta_2$  ( $\alpha=\pi/2$   $\beta=\pi/2$ ), aus demselben Grund wie vorhin im Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion, nämlich der verschiedenen Bandbreiten  $\Delta\xi$  und  $\Delta\psi$ .

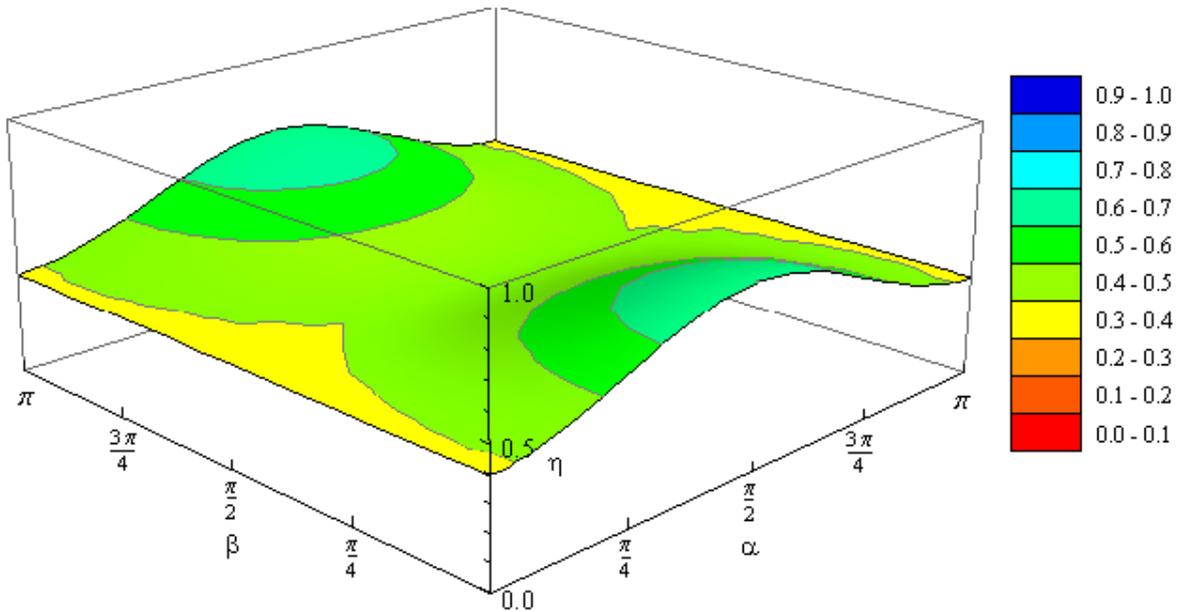


Abbildung 140: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall2 der linearen Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,500$

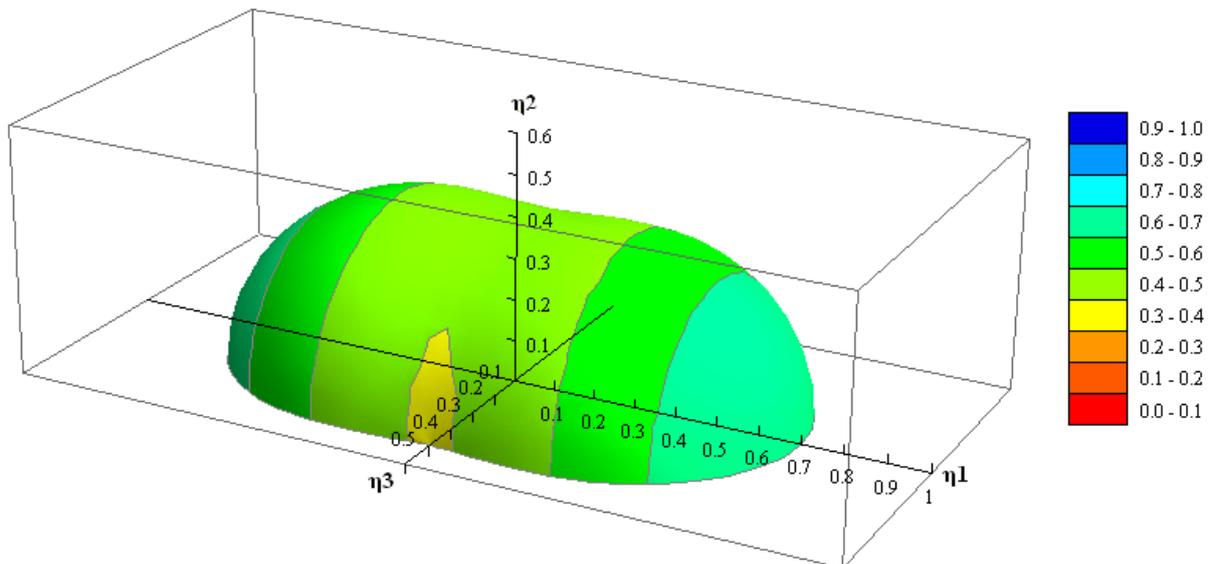


Abbildung 141: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$  und  $p_1 = 0,500$

Die Faserorientierungsbeiwerte in den drei Hauptrichtungen berechnen sich zu

$$\eta_1 = 0,701$$

$$\eta_2 = 0,402$$

$$\eta_3 = 0,393$$

Dabei ist interessanterweise auch für  $\eta_3$  ein konstanter Wert entlang des Richtungswinkels  $\beta$ , zumindest bis zu den ersten fünf Kommastellen. Dies obwohl  $p_3$  entlang des Richtungswinkels  $\xi$  nicht konstant ist.

#### 4.11 Vergleich lineare und Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion in 3D

In den vorangegangenen Kapiteln wurde schon mehrmals erwähnt, dass die lineare Verteil-Funktion in 3D im homogenen Bereich nicht ganz korrekt ist. In diesem Kapitel wird die Auswirkung dieses Fehlers untersucht. Dazu werden zwei Verteil-Funktionen mit gleichen Randbedingungen ausgewählt und miteinander verglichen.

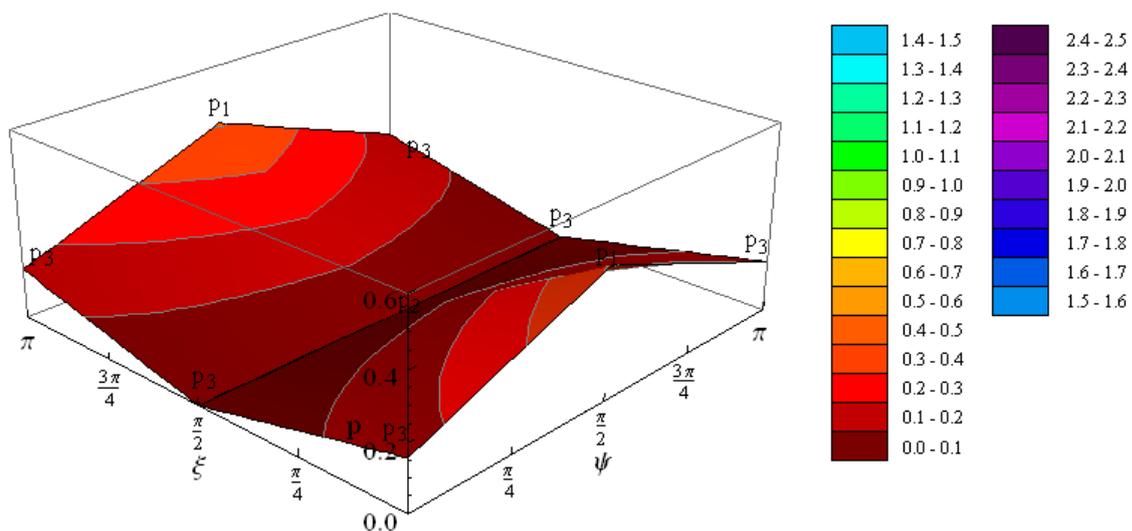


Abbildung 142: lineare Verteil-Funktion in 3D

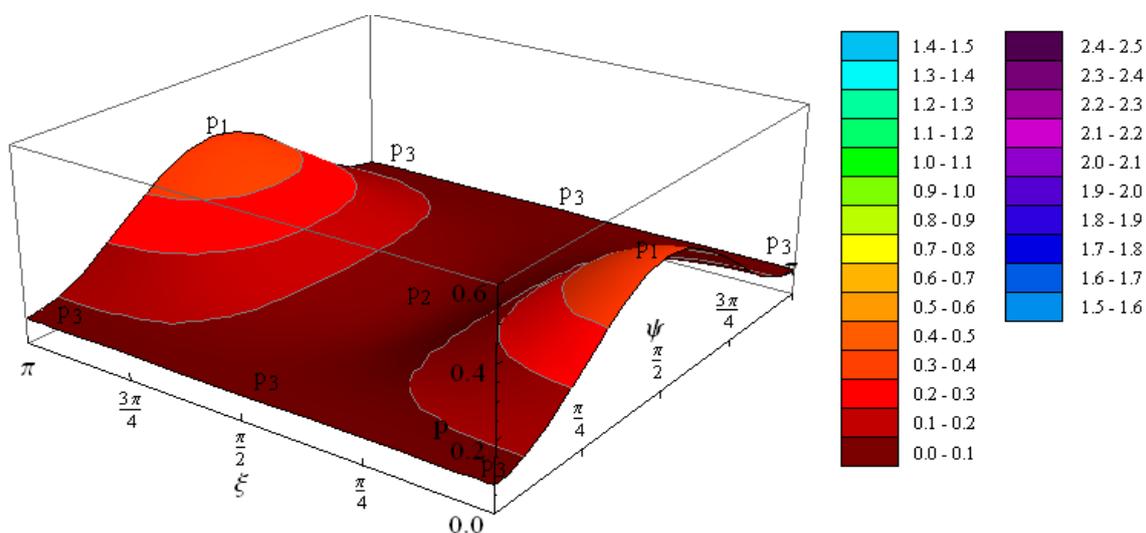


Abbildung 143: Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion in 3D

Da die lineare Verteil-Funktion eigentlich durch die Bandbreiten definiert ist, werden  $\Delta\xi$  und  $\Delta\psi$  durch Iteration so gewählt, dass sie der Cosinus-Quadrat-Funktion mit  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  möglichst ähnlich ist. Für  $p_3$  der Cosinus-Quadrat-Funktion wird der Mittelwert vom  $p_3$  der linearen Verteil-Funktion gebildet.

$$\begin{aligned} \text{Cosinus-Quadrat-Funktion: } p_1 &= \frac{5}{4\pi} & p_2 &= 0 & \Rightarrow & p_3 &= \frac{1}{4\pi} \\ \text{Lineare Verteil-Funktion: } \Delta\xi &= \frac{\pi}{2} & \Delta\psi &= 0,818 & \Rightarrow & p_1 &= 0,409, \quad p_2 = 0, \quad 0 \leq p_3 \leq \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen den beiden Verteil-Funktionen beträgt maximal 0,1 und ist in Abbildung 144 dargestellt.

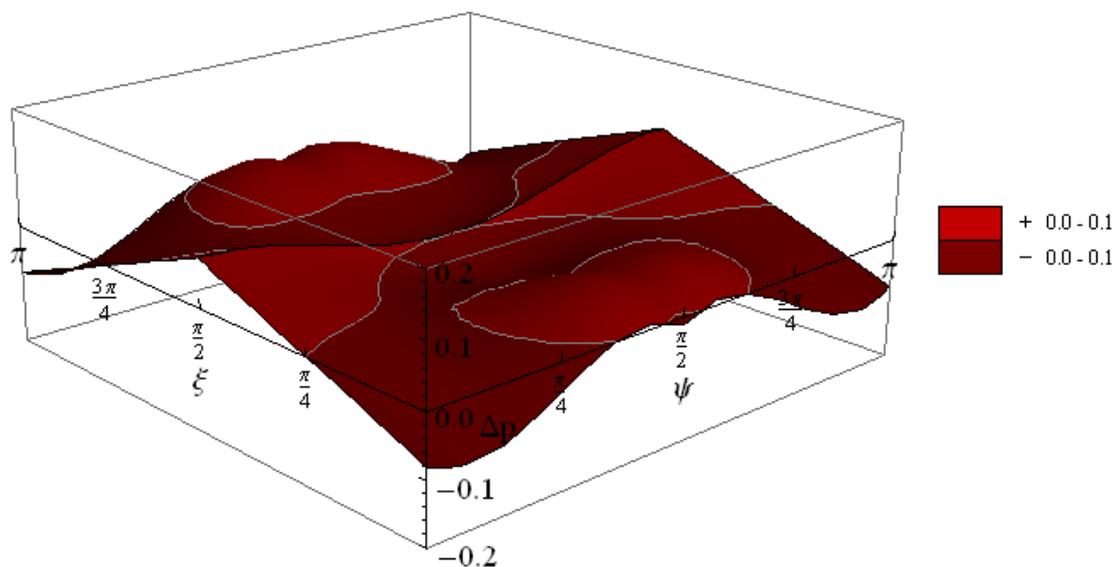


Abbildung 144: Differenz der linearen und der Cosinus-Quadrat-Funktion

Die prozentuellen Abweichungen des Faserorientierungsbeiwertes der linearen Verteil-Funktion von der Cosinus-Quadrat-Funktion sind in Abbildung 145 zu erkennen. Die maximale Abweichung beträgt  $\mp 7\%$ .

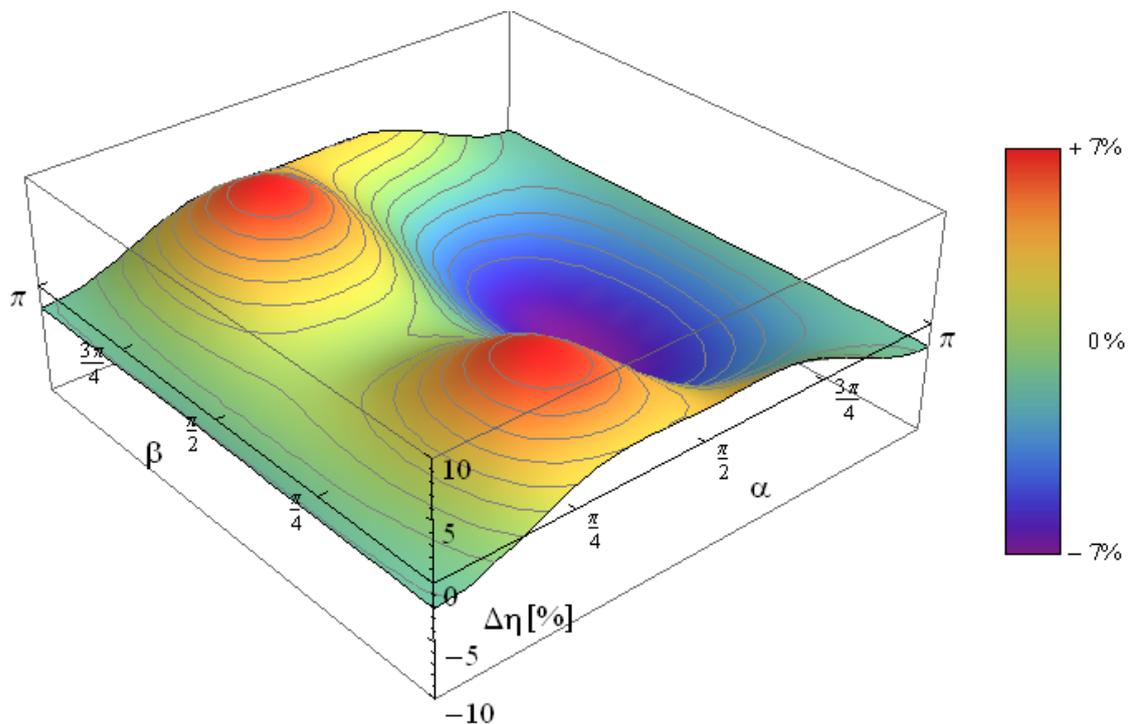


Abbildung 145: Abweichung der linearen zur CosinusQuadrat-Funktion

Um die Aussagekraft dieser Abweichungen zu erkennen, da es sich unabhängig vom sich ändernden  $p_3$  um zwei verschiedene Verteil-Funktionen handelt, werden noch jeweils eine Verteil-Funktion der Cosinus-Quadrat- und der linearen Verteil-Funktion mit  $p_3 = 0$  untersucht.

$$\text{Cosinus-Quadrat-Funktion: } p_1 = \frac{3}{2\pi} \quad p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0$$

$$\text{Lineare Verteil-Funktion: } \Delta\xi = \frac{\pi}{2} \quad \Delta\psi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0$$

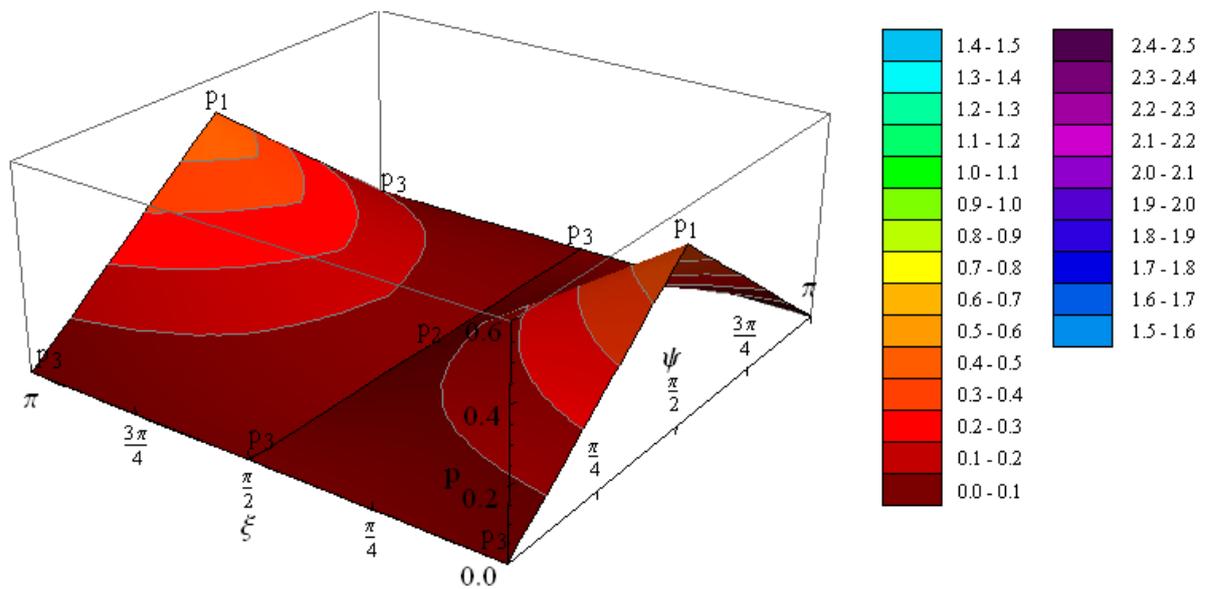


Abbildung 146: lineare Verteil-Funktion in 3D

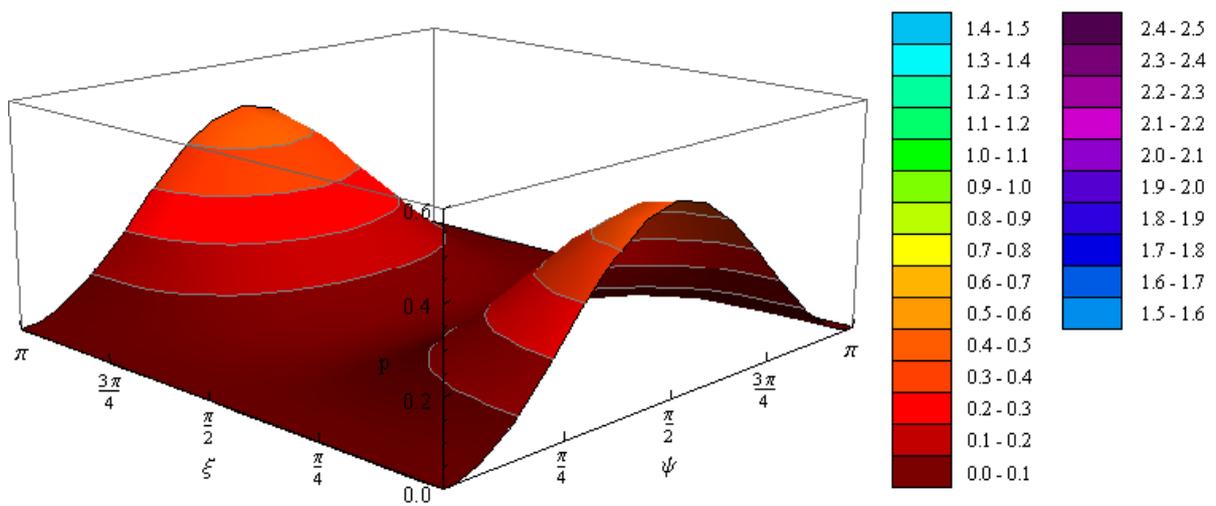


Abbildung 147: CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 3D

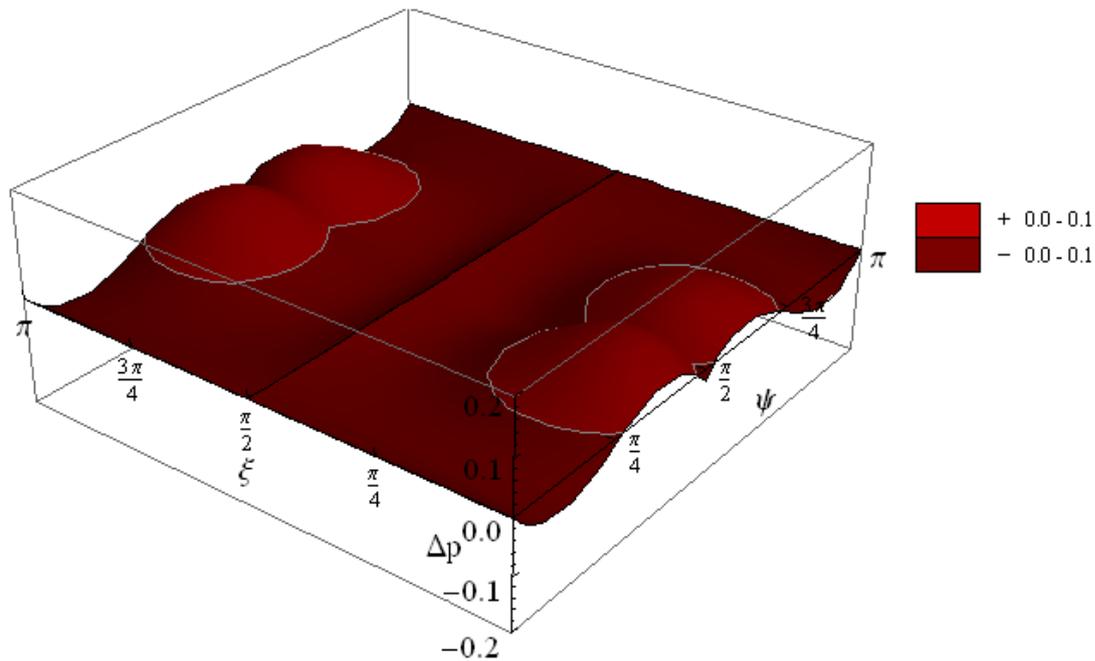


Abbildung 148: Differenz der linearen und der CosinusQuadrat-Funktion

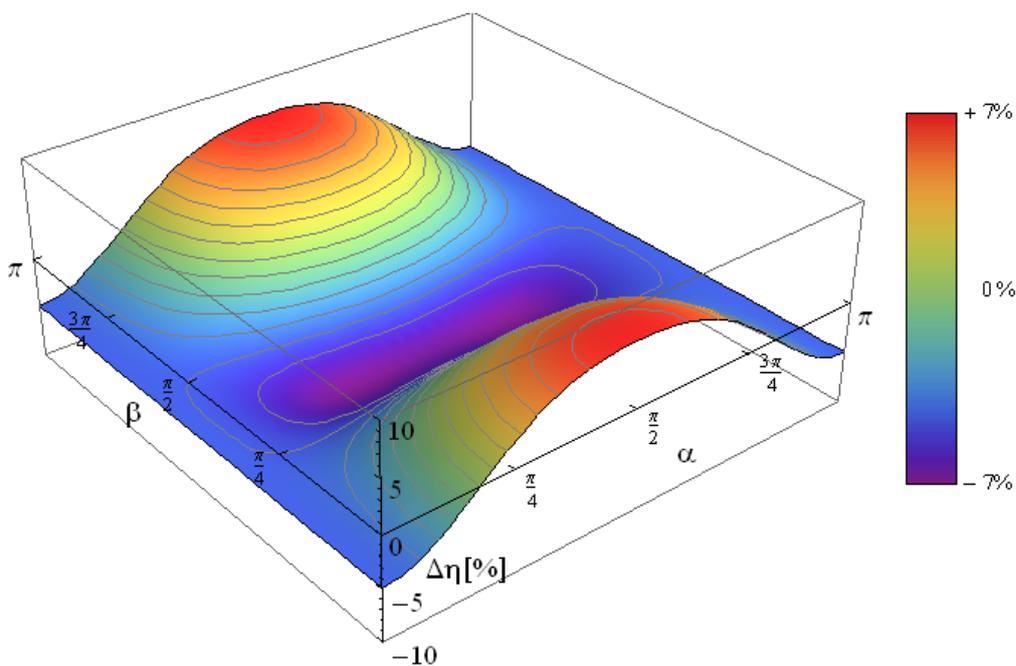


Abbildung 149: Abweichung der linearen zur CosinusQuadrat-Funktion

Auch in Abbildung 149 gibt es größere Abweichungen von  $\mp 7\%$  zwischen der linearen Verteil-Funktion und der Cosinus-Quadrat-Funktion, sie sind aber analog zu den Unterschieden in 2D zwischen der linearen und der Cosinus-Verteil-Funktion.

## 4.12 Sonstige Verteil-Funktionen in 3D

Es hat sich als schwierig herausgestellt, passende Verteil-Funktionen zur Berechnung des Faserorientierungsbeiwertes zu finden, besonders im dreidimensionalen Raum. Die Übertragung vom 2D ins 3D ist nicht für jede Verteil-Funktion möglich. Verschiedene Versuche wie zB. eine Funktion mit  $\text{Cos}^n$  sind bei der Integration gescheitert. Grund waren vor allem die Unstetigkeitsstellen des Einzelfaserorientierungsbeiwertes und der linearen Verteil-Funktionen, obwohl einfache Rechenmodelle als Grundlage dienten. Die sich verändernden Integrationsgrenzen durch die Koordinatentransformation haben das Programm „Mathematica“ überfordert. Eine weitere Idee für eine inhomogene Verteil-Funktion in 3D war  $p_2$  einen Wert unter 0 zu geben und nur den positiven Bereich zu integrieren. Die Grenzen waren aber wiederum für das Programm zu aufwendig. Die Verteil-Funktionen konnten auch als Exponentialfunktionen geschrieben werden, es ergaben sich aber keine nennenswerten Vorteile. Vorsicht war vor allem beim Vereinfachen der Zwischenlösung gefordert. Aus irgendeinem Grund konnte das Programm den Befehl  $\text{Cos}(2x)$  nicht integrieren.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Am Labor für konstruktiven Ingenieurbau wurde im Zuge des Projektes „Fibre Scan“ ein auf magnetischer Induktion basierendes Verfahren entwickelt, welches es ermöglicht, anhand der ferromagnetischen Eigenschaft der Stahlfasern auf deren Orientierung im Beton zu schließen. Bis jetzt wurden fast ausschließlich isotrope Orientierungs-Verteilungen in der Praxis angewendet. Beruhend auf geometrischen und statistischen Grundlagen war es Ziel dieser Arbeit, die Herleitung der mathematischen Zusammenhänge von Hauptorientierungsrichtungen in anisotropen Orientierungszuständen und die darauffolgende Berechnung der Bestimmungsgleichung für Faserorientierungsbeiwerte in alle möglichen Richtungen.

Dazu waren zwei Koordinatensysteme nötig, das Koordinatensystem der lokalen Blickrichtung  $(u,v,w)$  mit den Richtungswinkeln  $\varphi$  und  $\theta$  und das Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes  $(1,2,3)$  mit den Richtungswinkeln  $\xi$  und  $\psi$ . Ein drittes Koordinatensystem, das der Prüfkörpers  $(x,y,z)$ , ist zwar angeführt aber für die Berechnung selber nicht von Bedeutung.

Bedingung für die Orientierungs-Verteilungen ist, dass die Auftretenswahrscheinlichkeit 100%, also 1 ist.

Im zweidimensionalen Raum konnten drei verschiedene homogene Verteil-Funktionen erarbeitet werden. Dabei sind die Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion und die Cosinus-Verteil-Funktion bis auf die Eingabeparameter identisch. Erstere wurde als Aufbau für den dreidimensionalen Raum entwickelt, da das Softwareprogramm „Mathematica“ Probleme beim Integrieren der Funktion  $\cos(2x)$  hat. Die lineare homogene Verteil-Funktion wurde mit der Hand berechnet, für den weiteren Gebrauch wurde sie aber mit dem Befehl „UnitTriangle“ im Programm „Mathematica“, welcher einen Dreieck-Impuls simuliert, ersetzt. Mit diesem Befehl konnte auch der inhomogene Bereich abgedeckt werden, während die handgerechnete, inhomogene lineare Verteil-Funktion zu kompliziert für eine praktische Verwendung im 3D ist. Auch dessen Näherung durch eine Fourier-Funktion mit drei Gliedern lieferte keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Es gab zu viele Abweichungen bezüglich der Ausgangs-Verteil-Funktion, in diesem Fall dem Dreieck-Impuls.

Der Faserorientierungsbeiwert im zweidimensionalen Raum wurde berechnet, indem der Einzelfaserorientierungsbeiwert im Bezug zur projizierten u-Achse ( $u'$ ) mit der zu untersuchenden Verteil-Funktion multipliziert und über ein Integral aufsummiert wurde.

Die Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Quadrat-Funktion haben eine größere Bandbreite als die der homogenen linearen Verteil-Funktion. Für die homogenen Fälle ist im 2D also maximal ein Wert von 0,849 und einen minimalen Wert von 0,424 möglich. Anders sieht es in den inhomogenen Fällen aus. Dort erweitert sich die Bandbreite auf die Grenzen 0 und 1. Dies sind aber theoretische Werte und eigentlich nur bei uniaxialer Orientierungsrichtung erreichbar, bei einem  $p_1$  das gegen  $\infty$  geht bzw. einem  $\Delta\xi$  ( $\Delta\varphi$ ) das sich dem Wert 0 nähert. Die Faserorientierungsbeiwerte der inhomogenen linearen Verteil-Funktion mittels Dreieck-Impuls sind wie erwartet ident mit den Faserorientierungsbeiwerten des inhomogenen Bereiches der allgemeinen linearen Verteil-Funktion die mit dem Mathematica-Befehl „UnitTriangle“ erstellt wurde. Der homogene Bereich der allgemeinen linearen Verteil-Funktion deckt sich ebenso mit den Faserorientierungsbeiwerten der homogenen linearen Verteil-Funktion. Eine nicht verwertbare Bestimmungsgleichung für den Faserorientierungsbeiwert lieferte die

an den Dreieck-Impuls genäherte Fourier-Reihe mit drei Gliedern. Im Bereich von  $\eta_2$  sind die Werte bei kleiner Bandbreite von  $\Delta\varphi$  um einiges größer als bei der Ausgangs-Verteil-Funktion. Das Überschätzen von  $\eta_2$  bringt im Falle einer Bemessung Ergebnisse auf der unsicheren Seite. Deshalb war die Fourier-Reihe mit drei Gliedern für die Berechnung der Faserorientierungsbeiwerte nicht geeignet und wurde für die dreidimensionalen Verteil-Funktionen nicht in Betracht gezogen.

Im dreidimensionalen Bereich war es weitaus komplizierter passende und lösbare Verteil-Funktionen auszuarbeiten. Dazu kam die Einführung des Faktors  $\sin(\psi)$  ( $\sin\theta$ ), welcher die Änderung des Volumenelements bei der Koordinatentransformation von kartesischen in Kugelkoordinaten berücksichtigt. Einzig mit dem Befehl „UnitTriangle“ im Softwareprogramm „Mathematica“ konnten brauchbare Ergebnisse für eine inhomogene bzw. homogene lineare Verteil-Funktion in 3D erzielt werden, ausgenommen der Cosinus-Quadrat-Funktion für den homogenen Bereich. Ein Vorteil war, dass bei diesen beiden Verteil-Funktionen sich die Integrationsgrenzen nach der Koordinatentransformation nicht verändert haben. Nur beinhaltet die lineare Verteil-Funktion im homogenen Bereich einen Fehler in Hauptorientierungsrichtung 3. Diese Hauptrichtung wird in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes als eine Gerade bei  $\psi=0$  und in Kugelkoordinaten als Punkt abgebildet (geografischer Nordpol). In der Verteil-Funktion ist es aber keine Konstante sondern bei  $\psi=0$  variieren die Werte für  $p_3$ , der Faserorientierung in Hauptrichtung 3. Der Fehler vergrößert sich bei sinkender Bandbreite von  $\Delta\xi$ .

Der Faserorientierungsbeiwert im dreidimensionalen Raum wurde berechnet, indem der Einzelfaserorientierungsbeiwert im Bezug zur w-Achse mit der zu untersuchenden Verteil-Funktion multipliziert und über ein Integral aufsummiert wurde. Dabei ist bewusst diese Achse gewählt worden, da sich der Einzelfaserorientierungsbeiwert in diesem Fall auf eine einzige trigonometrische Funktion reduziert, während für die anderen beiden Achsen laut Koordinatentransformation zwei trigonometrische Funktionen benötigt worden wären. Durch diese einfachere Variante konnten überhaupt erst Ergebnisse erzielt werden, mit der linearen Verteil-Funktion auch nur dann, wenn der Einzelfaserorientierungsbeiwert  $|\cos(x)|$  mit einer Fourier-Funktion genähert wurde. Dabei ist Vorsicht geboten, denn im Bereich von  $\beta=\pi/2$  weicht die genäherte Funktion stärker von der Ursprünglichen ab als in anderen Bereichen. Untersuchungen haben aber ergeben, dass sich dieser Fehler kaum auf die Faserorientierungsbeiwerte auswirkt. Im Unterschied zur homogenen Cosinus-Quadrat-Funktion erfolgte die Integration zur Bestimmungsgleichung im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes, da die lineare Verteil-Funktion durch eine Koordinatentransformation in die lokale Blickrichtung für eine Berechnung der Faserorientierungsbeiwerte mit dem Programm „Mathematica“ nicht gelöst werden kann.

Wie schon erwähnt wurden in dieser Arbeit sowohl homogene, als auch inhomogene Orientierungszustände im dreidimensionalen Raum behandelt. Eigentlich werden beide Bereiche von der linearen Verteil-Funktion in 3D abgedeckt, jedoch sollte der Fehler in der homogenen Darstellung als zu groß empfunden werden, kann man auf die Cosinus-Quadrat-Funktion ausweichen. Diese hat den Vorteil, dass die Formel für den Faserorientierungsbeiwert in 3D relativ kurz ist, während die der linearen Verteil-Funktion zwei bis drei Seiten lang ist und deshalb hauptsächlich über das Programm „Mathematica“ verwendet werden kann. Auch die Eingabe der Werte für die Verteil-Funktionen ist verschieden. Bei der linearen Verteil-Funktion in 3D werden die Bandbreiten benötigt, während in der Cosinus-Quadrat-Funktion zwei der drei Orientierungswahrscheinlichkeiten ( $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ) anzugeben sind.

Allgemein kann zur dreidimensionalen Darstellung gesagt werden, dass sich wie erwartet in der Hauptorientierungsrichtung in die die meisten Fasern orientiert sind hohe Faserorientierungsbeiwerte errechnet haben. Die Bandbreite dieser ist bei der Cosinus-Quadrat-Funktion im Grenzfall zum inhomogenen Bereich um 0,05 größer als bei linearen Verteil-Funktion mit gleichen Parametereinstellungen. Theoretisch, bei uniaxialer Orientierung, könnten wie im 2D auch im inhomogenen Bereich der linearen Verteil-Funktion Werte von 0 bis 1 erzielt werden. Realistischer sind Werte zwischen 0,2 und 0,9.

In dieser Arbeit wurden mathematisch handelbare Lösungen erarbeitet, wobei jetzt aber noch untersucht werden muss, welche dieser Lösungen die Natur am besten beschreiben. Untersuchungen dieser Art werden in der Diplomarbeit von Trummer [11] zeitgleich zu dieser Arbeit gemacht. Für komplizierte Lösungsgleichungen können eventuell noch einfache Näherungen gefunden werden.

## 6 Indexnotation

Notation	Beschreibung	Einheit
$\lambda_f$	Faserschlankheit	-
$d_f$	Faserdurchmesser	mm
$l_f$	Faserlänge	mm
$l_{proj}$	Projektion der Faserlänge auf die Krafrichtung	mm
$d_{max}$	Größtkorndurchmesser	mm
x	Achse in Längsrichtung des Probekörpers	-
y	Achse in Breitenrichtung des Probekörpers	-
z	Achse in Höhenrichtung des Probekörpers	-
1	1. Hauptorientierungsrichtung	-
2	2. Hauptorientierungsrichtung	-
3	3. Hauptorientierungsrichtung	-
u	1. lokale Blickrichtung	-
v	2. lokale Blickrichtung	-
w	3. lokale Blickrichtung	-
u'	Projektion der 1. Blickrichtung u auf Ebene 1	-
$\eta_1$	Faserorientierungsbeiwert der Hauptorientierungsrichtung 1	-
$\eta_2$	Faserorientierungsbeiwert der Hauptorientierungsrichtung 2	-
$\eta_3$	Faserorientierungsbeiwert der Hauptorientierungsrichtung 3	-
$\xi$	Azimet-Winkel im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes	rad
$\psi$	Zenit-Winkel im Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes	rad
$\varphi$	Azimet-Winkel im Koordinatensystem der Blickrichtung	rad
$\theta$	Zenit-Winkel im Koordinatensystem der Blickrichtung	rad
$\beta$	Azimet-Winkel zwischen Faserorientierung und lokaler Blickrichtung	rad
$\alpha$	Zenit-Winkel zwischen Faserorientierung und lokaler Blickrichtung	rad
$p_1$	Faserorientierung in Hauptorientierungsrichtung 1	-
$p_2$	Faserorientierung in Hauptorientierungsrichtung 2	-
$p_3$	Faserorientierung in Hauptorientierungsrichtung 3	-
$p_0$	Faserorientierung in Blickrichtung u'	-
$\Delta\varphi$	Bandbreite der Faserorientierung entlang von Winkel $\varphi$	rad
$\Delta\theta$	Bandbreite der Faserorientierung entlang von Winkel $\theta$	rad

$\Delta\xi$	Bandbreite der Faserorientierung entlang von Winkel $\xi$	rad
$\Delta\psi$	Bandbreite der Faserorientierung entlang von Winkel $\psi$	rad
P	Auftretenswahrscheinlichkeit	-
$\Omega$	Grundmenge	-
$\rho_{h,lin,2D}$	Homogene lineare Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{h,cos,2D}$	Homogene Cosinus-Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{h,cosQ,2D}$	CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{i,lin,2D}$	Inhomogene lineare Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{fou,2D}$	Mit Fourier-Reihe genäherte lineare Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{lin,2D}$	Lineare Verteil-Funktion in 2D	-
$\rho_{h,cosQ,3D}$	Homogene CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 3D	-
$\rho_{lin,3D}$	Lineare Verteil-Funktion in 3D	-
j	Laufvariable ganzer Zahlen zur Bestimmung der Glieder der Fourier-Reihe	-
$a_0, a_j, b_j$	Glieder der Fourier-Reihe	-
$A_{DI}$	Fläche des Dreieckes vom Dreieck-Impuls	-
s	Steigung der Geraden der linearen Verteil-Funktionen	-
a	Amplitude der Cosinus-Funktion	-
m	Mittelwert der Cosinus-Funktion	-
$\omega$	Frequenz	-
T	Periodendauer	-
q	Theoretischer Wert bei $\varphi=0$ von $\rho_{i,lin,2D,1}$	-
t	Theoretischer Wert bei $\varphi=0$ von $\rho_{i,lin,2D,2}$	-
$\eta_{einz,2D}$	Einzelfaserorientierungsbeiwert im zweidimensionalen Raum	-
$\eta_{einz,3D}$	Einzelfaserorientierungsbeiwert im dreidimensionalen Raum	-
$\eta_{einz,gen,3D}$	Durch Fourier-Reihe genäherter Einzelfaserorientierungsbeiwert in 3D	-
$\eta_{h,lin,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{h,cos,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der homogenen Cosinus-Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{h,cosQ,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{i,lin,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der inhomogenen linearen Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{fou,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der mit Fourier-Reihe genäherten linearen Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{lin,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der linearen Verteil-Funktion in 2D	-

$\eta_{h,cosQ,3D}$	Faserorientierungsbeiwert der homogenen CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 3D	-
$\eta_{lin,3D}$	Faserorientierungsbeiwert der linearen Verteil-Funktion in 3D	-
$\eta_{h,lin,gen,2D}$	Faserorientierungsbeiwert der durch die Cosinus-Verteil-Funktion genäherten homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D	-
$\eta_{lin,\alpha}$	Faserorientierungsbeiwert lineare Verteil-Funktion	-
$\eta_{cos,\alpha}$	Faserorientierungsbeiwert Cosinus-Verteil-Funktion	-
$\eta_{lin,app,\alpha}$	genäherter Faserorientierungsbeiwert von linearer und Cosinus-funktion	-
$\eta_{2D}$	Allgemeiner Faserorientierungsbeiwert in 2D	-
$\eta_{3D}$	Allgemeiner Faserorientierungsbeiwert in 3D	-
$\Delta\rho$	Differenz zwischen den Verteil-Funktionen	-
$\Delta\eta$	Differenz der Faserorientierungsbeiwerte verschiedener Verteil-Funktionen	-
$\eta_x$	Faserorientierungsbeiwert entlang der x-Achse	-
$\eta_y$	Faserorientierungsbeiwert entlang der y-Achse	-
$\eta_z$	Faserorientierungsbeiwert entlang der z-Achse	-
$E(n)$	Statistischer Erwartungswert	-
$\rho$	Lokale Faserkonzentration	-
$V_{f,ges}$	Volumen der Fasern im Körper	-
$V_{f,einz}$	Volumen der Einzelfaser	-
$L$	Länge des Körpers	mm
$N$	Anzahl der Fasern im gesamten Volumen	-
$n$	Anzahl der Fasern in der Schnittfläche	-
$S$	Schnittfläche durch den Körper	mm <sup>2</sup>
$k$	Näherungskonstante von linearer Funktion auf Cosinus-Funktion	-

## 7 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:Spannungs-Dehnungslinie UHPC mit und ohne Fasern [10] .....	11
Abbildung 2: Verschiedene Faserarten: l.o. Stahlfasern, r.o. Polypropylen-Fasern, l.u. Kohlenstofffasergewebe, r.u. Glasfasern [5] .....	12
Abbildung 3:Dreidimensionale, zweidimensionale und eindimensionale Faserorientierung in Beton [6] .....	14
Abbildung 4: Richtungswinkel des Koordinatensystems des Faserorientierungszustandes..	16
Abbildung 5: Richtungswinkel des lokalen Blickrichtungskordinatensystem .....	17
Abbildung 6: Darstellung in Kugelkoordinaten .....	18
Abbildung 7: Darstellung in Kugelkoordinaten .....	18
Abbildung 8: Darstellung in Kugelkoordinaten .....	19
Abbildung 9:Darstellende Beschreibung Faktors $\sin(\psi)$ .....	24
Abbildung 10: Verlauf von $\rho(\varphi)$ im isotropen Fall 2D .....	26
Abbildung 11: Verlauf von $\rho(\theta, \varphi)$ im isotropen Fall 3D.....	26
Abbildung 12: Definition der Winkel und Achsen in 2D .....	27
Abbildung 13: Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten der Faserorientierung in 2D .....	28
Abbildung 14: Verteil-Funktion in Polarkoordinaten der Faserorientierung in 2D .....	28
Abbildung 15: Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D.....	29
Abbildung 16: Verteil-Funktion in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D .....	29
Abbildung 17: Beispiel einer homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D mit Annahme $\beta=\pi/3$ in kartesischen Koordinaten 2D .....	30
Abbildung 18: Beispiel einer homogenen linearen Verteil-Funktion in 2D mit Annahme $\beta=\pi/3$ in Polarkoordinaten 2D.....	31
Abbildung 19:Bestimmung der Parameter der linearen Verteil-Funktion .....	31
Abbildung 20:Beispiel einer Cosinus-Verteil-Funktion mit $\beta=\pi/5$ in kartesischen Koordinaten in 2D.....	34
Abbildung 21: Beispiel einer Cosinus-Verteil-Funktion mit $\beta=\pi/5$ in Polarkoordinaten in 2D .....	35
Abbildung 22: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D .....	37
Abbildung 23: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D.....	38

Abbildung 24: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat mit gewähltem  $\beta=\pi/5$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 39

Abbildung 25: beliebige homogene Verteil-Funktion CosinusQuadrat mit gewähltem  $\beta=\pi/5$  in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 39

Abbildung 26: beliebig gewählte homogene Verteil-Funktionen im Vergleich in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 40

Abbildung 27: beliebig gewählte homogene Verteil-Funktionen im Vergleich in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 41

Abbildung 28: inhomogene Verteil-Funktion mittels Dreieck-Impuls mit gewähltem  $\beta=\pi/3$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 42

Abbildung 29: inhomogene Verteil-Funktion mittels Dreieck-Impuls mit gewähltem  $\beta=\pi/3$  in Polarkoordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 42

Abbildung 30: Festlegung der Parameter der inhomogenen Verteil-Funktion ..... 43

Abbildung 31: Vergleich Dreieckimpuls mit Fourier-Reihe 2D ..... 47

Abbildung 32: Genauigkeit der Fourier-Reihen von  $j=3$  und  $j=5$  mit  $\Delta\varphi =0,5$  und  $\beta=0$ ..... 48

Abbildung 33: Genauigkeit der Fourier-Reihen von  $j=3$  und  $j=5$  mit  $\Delta\varphi =0,2$  und  $\beta=0$ ..... 49

Abbildung 34: Beispiel einer Fourier-Reihe mit  $j=3$ ,  $\Delta\varphi =\pi/4$  und  $\beta=\pi/3$  in kartesischen Koordinaten der Blickrichtung in 2D ..... 50

Abbildung 35: Beispiel einer Fourier-Reihe mit  $j=3$ ,  $\Delta\varphi =\pi/6$  und  $\beta=\pi/3$  in Polarkoordinaten in 2D ..... 50

Abbildung 36: Befehl „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D ..... 52

Abbildung 37: Umgeschriebener Befehl „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D ..... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

Abbildung 38: Auf  $\pi$  erweiterte Verteil-Funktion mit „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D ..... 53

Abbildung 39: inhomogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = \pi/3$  in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D..... 54

Abbildung 40: inhomogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = \pi/3$  in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D..... 54

Abbildung 41: Berechnung der Fläche bei „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D ..... 55

Abbildung 42: Homogene Verteil-Funktion mit „UnitTriangle“ im Software-Programm „Mathematica“ 2D ..... 56

Abbildung 43: homogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = 3\pi/4$  in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D..... 57

Abbildung 44: homogene Verteil-Funktion mit  $\Delta\xi = 3\pi/4$  in Polarkoordinaten des Faserorientierungszustandes in 2D.....57

Abbildung 45: Befehl „Piecewise“ im Software-Programm „Mathematica“ .....58

Abbildung 46: Befehl der linearen Verteil-Funktion im Software-Programm „Mathematica“ ..58

Abbildung 47: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1=3/(4\pi)$  und  $p_2=1/(4\pi)$ .....60

Abbildung 48: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten des Faserorientierungszustandes mit  $p_1=0,1$  und  $p_2=0,01$  .....60

Abbildung 49: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1=3/(4\pi)$ ,  $p_2=1/(4\pi)$ ,  $\alpha=\pi/5$  und  $\beta=\pi/4$ .....61

Abbildung 50: Anisotrope homogene Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $p_1=3/(4\pi)$ ,  $p_2=1/(4\pi)$ ,  $\alpha=\pi/5$  und  $\beta=\pi/4$  .....61

Abbildung 51: Befehl der linearen Verteil-Funktion in 3D im Software-Programm „Mathematica“ .....63

Abbildung 52: Faktor3D für die lineare Verteil-Funktion in 3D .....63

Abbildung 53: Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi=\pi/3$  und  $\Delta\psi=\pi/5$  .....64

Abbildung 54: Anisotrope inhomogene lineare Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $\Delta\xi=\pi/3$  und  $\Delta\psi=\pi/4$  .....64

Abbildung 55: Anisotrope homogene lineare Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi=3\pi/4$  und  $\Delta\psi=4\pi/3$ .....65

Abbildung 56: Anisotrope homogene lineare Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $\Delta\xi=3\pi/4$  und  $\Delta\psi=4\pi/3$  .....65

Abbildung 57: Anisotrope homogene lineare Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten mit  $\Delta\xi=3\pi/4$  und  $\Delta\psi=4\pi/3$ : Ausschnitt Achsenzentrum.....66

Abbildung 58: Faserorientierung der Einzelfaser [9] .....67

Abbildung 59: 4-Punkte-Biegeversuch[2] .....68

Abbildung 60: Probekörper aus Beton mit verschiedenen Faserwinkeln zur Krafrichtung [2] .....68

Abbildung 61: Fasern die einen Schnitt durchlaufen [2].....69

Abbildung 62: Orientierungswinkel einer Faser [2].....70

Abbildung 63: Faserorientierungsbeiwert im isotropen Fall 3D .....72

Abbildung 64: Faserorientierungsbeiwert im isotropen Fall 2D.....73

Abbildung 65: lineare Verteil-Funktionen für verschiedene  $p_1$  mit  $\beta = \pi/5$  in kartesischen Koordinaten 2D .....77

Abbildung 66: lineare Verteil-Funktionen für verschiedene $p_1$ mit $\beta = \pi/5$ in Polarkoordinaten 2D.....	77
Abbildung 67: Verschiedene $\eta(p_1)$ im Vergleich in kartesischen Koordinaten für lineare Verteil-Funktion .....	78
Abbildung 68: Verschiedene $\eta(p_1)$ im Vergleich in Polar-Koordinaten für lineare Verteil-Funktion.....	78
Abbildung 69: $\eta$ in Abhängigkeit von $\beta$ und $p_1$ in kartesischen Koordinaten für die lineare homogene Verteil-Funktion in 2D.....	79
Abbildung 70: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_1$ mit $\beta = \pi/5$ in kartesischen Koordinaten 2.....	81
Abbildung 71: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_1$ mit $\beta = \pi/5$ in Polarkoordinaten 2D.....	81
Abbildung 72: Verschiedene $\eta(p_1)$ im Vergleich in kartesischen Koordinaten für die Cosinus-Verteil-Funktion 2D.....	82
Abbildung 73: Verschiedene $\eta(p_1)$ im Vergleich in Polar-Koordinaten für die Cosinus-Verteil-Funktion 2D.....	82
Abbildung 74: $\eta$ in Abhängigkeit von $\beta$ und $p_1$ in kartesischen Koordinaten für die homogene Cosinus-Verteil-Funktion in 2D.....	83
Abbildung 75: Vergleich Faserorientierungsbeiwert Cosinus-Verteil-Funktion und lineare Verteil-Funktion .....	84
Abbildung 76: Vergleich $\eta_{h, lin, gen, 2D}$ mit $\eta_{h, cos, 2D}$ .....	86
Abbildung 77: Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_2$ mit $\beta = \pi/5$ .....	87
Abbildung 78: Cosinus-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_2$ mit $\beta = \pi/5$ .....	87
Abbildung 79: Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_2$ in kartesischen Koordinaten in 2D.....	88
Abbildung 80: Faserorientierungsbeiwerte der Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_2$ in Polarkoordinaten in 2D .....	88
Abbildung 81: Verschiedene Faserorientierungsbeiwerte in Abhängigkeit von $\beta$ und $p_2$ der Cosinus-Quadrat-Funktion in 2D.....	89
Abbildung 82: Beispiel für verschiedene Integrationsbereiche für die Berechnung des Faserorientierungsbeiwertes mit inhomogener linearer Verteil-Funktion.....	90
Abbildung 83: $\eta(\beta)$ mit den verschiedenen Bereichen in 2D mit $p_1=8/\pi$ .....	93
Abbildung 84: Inhomogene Verteil-Funktionen des Dreieck-Impulses für verschiedene $p_1$ in kartesischen Koordinaten 2D .....	94
Abbildung 85: Inhomogene Verteil-Funktionen des Dreieck-Impulses für verschiedene $p_1$ in Polarkoordinaten 2D.....	94

Abbildung 86: Faserorientierungsbeiwerte bei Dreieck-Impuls-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_1$ in kartesischen Koordinaten 2D.....	95
Abbildung 87: Faserorientierungsbeiwerte bei Dreieck-Impuls-Verteil-Funktionen für verschiedene $p_1$ in Polarkoordinaten 2D .....	95
Abbildung 88: Inhomogener Faserorientierungsbeiwert des Dreieck-Impulses in Abhängigkeit von $\beta$ und $p_1$ . .....	96
Abbildung 89: Fourier-Funktionen $p(\varphi)$ in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\varphi$ in kartesischen Koordinaten.....	97
Abbildung 90: Fourier-Funktionen $p(\varphi)$ in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\varphi$ in Polarkoordinaten .....	98
Abbildung 91: Fourier-Funktionen $p(\varphi)$ in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\varphi$ in kartesischen Koordinaten.....	98
Abbildung 92: Faserorientierungsbeiwert $\eta(\beta)$ der Fourier-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\varphi$ in Polarkoordinaten .....	99
Abbildung 92: Faserorientierungsbeiwert $\eta$ in Abhängigkeit von $\Delta\varphi$ und $\beta$ für die Fourier-Verteil-Funktion in 2D unter Berücksichtigung der ersten drei Glieder .....	99
Abbildung 93: Vergleich Dreieck-Impuls mit Fourier-Reihe mit $p_1=2/\pi$ ( $\Delta\varphi = \pi/2$ ) .....	101
Abbildung 94: Vergleich Dreieck-Impuls mit Fourier-Reihe mit $p_1=50/\pi$ ( $\Delta\varphi = \pi/50$ ).....	101
Abbildung 95: Vergleich inhomogene Funktion und genäherte homogene Funktion mit $p_1=2/\pi$ in 2D .....	102
Abbildung 96: Faserorientierungsbeiwert $\eta(\beta, p_1)$ für 2D im homogenen und inhomogenen Fall.....	103
Abbildung 97: Hauptorientierungsrichtungen homogen und inhomogen in 2D .....	104
Abbildung 98: Ausdruck des Faserorientierungsbeiwertes für „UnitTriangle“ in 2D.....	106
Abbildung 99: UnitTriangle-Funktionen $p(\xi)$ in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\xi$ in kartesischen Koordinaten.....	107
Abbildung 100: UnitTriangle-Funktionen $p(\xi)$ in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\xi$ in Polarkoordinaten .....	107
Abbildung 101: Faserorientierungsbeiwert $\eta(\beta)$ der UnitTriangle-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\xi$ .....	108
Abbildung 102: Faserorientierungsbeiwert $\eta(\beta)$ der UnitTriangle-Funktion in 2D mit unterschiedlichen Bandbreiten $\Delta\xi$ .....	108
Abbildung 103: Faserorientierungsbeiwert $\eta$ in Abhängigkeit von $\beta$ und $\Delta\xi$ der UnitTriangle-Funktion in 2D .....	109
Abbildung 104: Faserorientierungsbeiwert $\eta$ in Abhängigkeit von $\beta$ und $\Delta\xi$ der UnitTriangle-Funktion in 2D .....	110

Abbildung 105: isotroper Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1= 12\pi$ ,  $p_2= 12\pi$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 112

Abbildung 106: isotroper Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1= 12\pi$ ,  $p_2= 12\pi$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 112

Abbildung 107: Faserorientierungsbeiwerte im isotropen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1= 12\pi$ ,  $p_2= 12\pi$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 113

Abbildung 108: Faserorientierungsbeiwerte im isotropen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1= 12\pi$ ,  $p_2= 12\pi$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 113

Abbildung 109: allgemeiner Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes 3D mit  $p_1 = 34\pi$ ,  $p_2 = 12\pi$  und  $p_3 = 14\pi$  ..... 114

Abbildung 110: allgemeiner Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = 34\pi$ ,  $p_2 = 12\pi$  und  $p_3 = 14\pi$  ..... 115

Abbildung 111: Faserorientierungsbeiwerte im allgemeinen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = 34\pi$ ,  $p_2 = 12\pi$  und  $p_3 = 14\pi$  ..... 115

Abbildung 112: Faserorientierungsbeiwerte im allgemeinen Fall der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = 34\pi$ ,  $p_2 = 12\pi$  und  $p_3 = 14\pi$  ..... 116

Abbildung 113: Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = 1\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 117

Abbildung 114: Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = 1\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 117

Abbildung 115: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = 1\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 118

Abbildung 116: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = 1\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 12\pi$  ..... 118

Abbildung 117: Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion im kartesischen Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = 32\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$  ..... 119

Abbildung 118: Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $p_1 = 32\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$  ..... 119

Abbildung 119: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $p_1 = 32\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$  ..... 120

Abbildung 120: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der Cosinus-Quadrat-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $p_1 = 32\pi$ ,  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$  ..... 120

Abbildung 121: Transformierter Einzelfaserorientierungsbeiwert mit  $\beta=\pi/6$  und  $\alpha=\pi/5$  in 3D  
..... Fehler! Textmarke nicht definiert.

Abbildung 122: Genäherter und exakter Einzelfaserorientierungsbeiwert in  
Blickrichtungskoordinaten in 2D ..... 122

Abbildung 123: Differenz des genäherten und exakten Einzelfaserorientierungsbeiwertes im  
Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D ..... 123

Abbildung 124: Differenz der Multiplikationen von Verteil-Funktion, Faktor  $\sin(\psi)$  und dem  
genäherten bzw. exakten Einzelfaserorientierungsbeiwertes im Koordinatensystem des  
Faserorientierungszustandes in 3D..... 124

Abbildung 125: inhomogener Fall der linearen Verteil-Funktion im kartesischen  
Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 3$ ,  $\Delta\psi= \pi 5$  und  $p_1 =$   
1,571 ..... 125

Abbildung 126: inhomogener Fall der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem  
des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 3$ ,  $\Delta\psi= \pi 5$  und  $p_1 = 1,571$  ..... 126

Abbildung 127: Faserorientierungsbeiwerte im inhomogenen Fall der linearen Verteil-  
Funktion im kartesischen Koordinatensystem in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 3$ ,  $\Delta\psi= \pi 5$  und  $p_1 = 1,571$  .... 126

Abbildung 128: Faserorientierungsbeiwerte im inhomogenen Fall der linearen Verteil-  
Funktion im Kugelkoordinatensystem in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 3$ ,  $\Delta\psi= \pi 5$  und  $p_1 = 1,571$ ..... 127

Abbildung 129: homogener Fall der linearen Verteil-Funktion im kartesischen  
Koordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= 2\pi 3$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 4$  und  $p_1 =$   
0,336 ..... 128

Abbildung 130: homogener Fall der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem  
des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= 2\pi 3$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 4$  und  $p_1 = 0,336$  ..... 128

Abbildung 131: Faserorientierungsbeiwerte im homogenen Fall der linearen Verteil-Funktion  
in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi= 2\pi 3$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 4$  und  $p_1 = 0,336$  ..... 129

Abbildung 132: Faserorientierungsbeiwerte im homogenen Fall der linearen Verteil-Funktion  
in Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi= 2\pi 3$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 4$  und  $p_1 = 0,336$ ..... 129

Abbildung 133: Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem  
des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 2$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 2$  und  $p_1 = 0,362$  ..... 130

Abbildung 134: Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des  
Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 2$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 2$  und  $p_1 = 0,362$  ..... 131

Abbildung 135: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion in  
kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 2$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 2$  und  $p_1 = 0,362$  ..... 131

Abbildung 136: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 1 der linearen Verteil-Funktion in  
Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 2$ ,  $\Delta\psi= 3\pi 2$  und  $p_1 = 0,362$ ..... 132

Abbildung 137: Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion im kartesischen Koordinatensystem  
des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi= \pi 2$ ,  $\Delta\psi= \pi 2$  und  $p_1 = 0,500$  ..... 133

Abbildung 138: Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion im KugelKoordinatensystem des Faserorientierungszustandes in 3D mit  $\Delta\xi = \pi/2$ ,  $\Delta\psi = \pi/2$  und  $p_1 = 0,500$  ..... 133

Abbildung 139: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall2 der linearen Verteil-Funktion in kartesischen Koordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \pi/2$ ,  $\Delta\psi = \pi/2$  und  $p_1 = 0,500$  ..... 134

Abbildung 140: Faserorientierungsbeiwerte im Grenzfall 2 der linearen Verteil-Funktion in Kugelkoordinaten in 3D mit  $\Delta\xi = \pi/2$ ,  $\Delta\psi = \pi/2$  und  $p_1 = 0,500$ ..... 134

Abbildung 141: lineare Verteil-Funktion in 3D ..... 135

Abbildung 142: Cosinus-Quadrat-Verteil-Funktion in 3D .. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

Abbildung 143: Differenz der linearen und der Cosinus-Quadrat-Funktion..... 136

Abbildung 144: Abweichung der linearen zur CosinusQuadrat-Funktion..... 137

Abbildung 145: lineare Verteil-Funktion in 3D ..... 138

Abbildung 146: CosinusQuadrat-Verteil-Funktion in 3D..... 138

Abbildung 147: Differenz der linearen und der CosinusQuadrat-Funktion..... 139

Abbildung 148: Abweichung der linearen zur CosinusQuadrat-Funktion..... 139

## 8 Literaturverzeichnis

- [1] Freytag Bernhard, Sparowitz Lutz, Linder Josef, Heinzle Günter, Reichel Michael, Juhart Joachim, Santner Gerhard, Antrag: Zerstörungsfreie Methode zur Feststellung der richtungsabhängigen Zugtrageigenschaften. Graz, 2009.
- [2] Behloul Mouloud, Dissertation: Analyse et modelisation du comportement d'un materiau a matrice cimentaire fibree a ultra hautes performances. E.N.S. Cachan, 1996
- [3] Schönlin Klaus: Ermittlung der Orientierung, Menge und Verteilung der Fasern in faserbewehrtem Beton. Beton- und Stahlbetonbau, WilhelmErnst & Sohn Verlag für Architektur und techn. Wissenschaften, Heft 6, 1988
- [4] Lüftenegger Markus, Diplomarbeit: Ermittlung der Stahlfaserorientierung an scheibenartigen Bauteilen aus ultrahochfestem Beton und des Einflusses unterschiedlicher Herstellungsmethoden. Graz, 2007
- [5] Rümmelin Andreas, Diplomarbeit: Entwicklung, Bemessung, Konstruktion und Anwendung von ultrahochfesten Betonen. Stuttgart, Fachhochschule Stuttgart - Hochschule für Technik, 2005
- [6] Bergmeister Konrad, Fingerloos Frank, Wörner Johann-Dietrich: Beton-Kalender 2011: Schwerpunkte- Energie, Faserbeton. Berlin, Ernst & Sohn, 2011
- [7] Holschemacher Klaus, Klug Yvette, Wörner Johann-Dietrich, Bergmeister Konrad: Beton Kalender 2006. Turmbauwerke – Industriebauten. 95. Jahrgang, Berlin : Ernst & Sohn, 2006
- [8] Leutbecher Torsten: Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasernbewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC) : Schriftenreihe Baustoffe undMassivbau. Heft 9. Kassel : kassel university press GmbH, 2008
- [9] Breyer Christoph, Diplomarbeit: Faserverteilung im ultrahochfesten Beton. Graz, 2008
- [10] Schmidt M.: Sachstandbericht Ultrahochfester Beton. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb). Heft 561. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 2007
- [11] Trummer Michael, Diplomarbeit: Experimentelle Analyse von Faserorientierungszuständen mittels räumlich kombinierter Schnittbildauswertung. Graz, 2013