

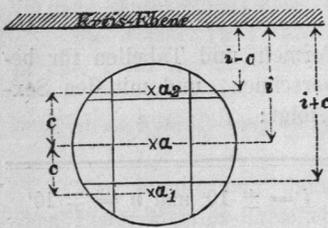
### § 48. Indirecte Bestimmung der Fernrohrneigung und der Spiegelneigung.

Aehnlich wie früher beim Sextanten (§ 37. S. 191) benutzen wir auch beim Spiegel-Prismenkreis die Messungsdifferenzen  $d$ , welche sich ergeben, wenn man die Bilder in der Mitte, unten oder oben, im Gesichtsfeld zur Deckung bringt, um daraus die Fernrohrneigung  $i$  und die Spiegelneigung  $n$  rückwärts zu berechnen.

Während beim Sextanten der Erfolg ein ungünstiger war, nämlich mittlere Fehler von  $\pm 38'$  und  $\pm 34'$  bzw. von  $i$  und  $n$ , ((15) § 37. S. 194) lässt sich beim Spiegel-Prismenkreis von vorn herein ein besseres Resultat erwarten, weil hier die Untersuchung auf  $\frac{3}{4}$  des Kreisumfangs ausgedehnt werden kann, während sie beim Sextanten auf  $\frac{1}{6}$  des Kreises beschränkt war.

Die Anordnung der Messungen und die Bezeichnungen sind im Wesentlichen wie früher beim Sextanten (Fig. 1. S. 192). Fig. 1. zeigt den Anblick des Gesichtsfeldes,  $\alpha$  ist die Mitte des Gesichtsfeldes,  $\alpha_2$  liegt über dem Oberfaden, etwa im Abstand von 1 Faden-dicke,  $\alpha_1$  entsprechend unten. Die Messungsergebnisse, Mittel aus je 15 Einstellungen (vom Indexfehler befreit) sind folgende:

Fig. 1.  
Gesichtsfeld des Fernrohrs.



Nummer	$\alpha_1$ unten	$\alpha$ mitten	$\alpha_2$ oben	$\alpha_1 - \alpha$ $= d_1$	$\alpha_2 - \alpha$ $= d_2$	$d_1 + d_2$
1.	28° 29' 33"	28° 29' 42"	28° 30' 3"	- 9"	+ 21"	+ 12"
2.	65 48 15	65 48 55	65 49 41	- 40	+ 46	+ 6
3.	93 30 57	93 31 28	93 32 34	- 31	+ 1' 6	+ 35
4.	109 3 22	109 4 10	109 5 52	- 48	+ 1 42	+ 54
5.	119 37 18	119 37 54	119 39 53	- 36	+ 1 59	+ 1' 23
6.	132 0 7	132 0 58	132 3 44	- 51	+ 2 46	+ 1 55
7.	204 1 15	203 59 0	203 52 21	+ 2' 15	- 6 39	- 4 24
8.	240 16 5	240 15 15	240 12 55	+ 50	- 2 20	- 1 30
9.	278 32 13	278 31 45	278 30 37	+ 28	- 1 8	- 0 40

Es wurde auch ein Versuch gemacht, mit Benutzung des Ocular-Prismas, einen Winkel  $\alpha$  von nahezu  $180^\circ$  ( $178^\circ 38'$ ) in allen 3 Theilen des Gesichtsfeldes zu messen, es war aber ganz unmöglich, die Coincidenz der Bilder an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes zu Stande zu bringen.

Nach (23) § 47. S. 242 besteht die Gleichung:

$$\alpha - \alpha' = n^2 (\dots) + i^2 \tan \frac{\alpha}{2} - 2in \tan \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \quad (2)$$

Der Coefficient (...) des ersten Gliedes kommt nicht weiter in Betracht. Die Anwendung auf  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in Fig. 1. gibt:

$$\alpha_1 - \alpha' = n^2 (\dots) + (i+c)^2 \tan \frac{\alpha}{2} - 2n(i+c) \tan \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \quad (3)$$

$$\alpha_2 - \alpha' = n^2 (\dots) + (i-c)^2 \tan \frac{\alpha}{2} - 2n(i-c) \tan \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \quad (4)$$

Die Vergleichung mit (2) gibt:

$$\alpha_1 - \alpha = d_1 = c^2 \tan \frac{\alpha}{2} + 2ic \tan \frac{\alpha}{2} - 2nc \tan \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \quad (5)$$

$$\alpha_2 - \alpha = d_2 = c^2 \tan \frac{\alpha}{2} - 2ic \tan \frac{\alpha}{2} + 2nc \tan \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \quad (6)$$

Die Constante  $c$  wurde ebenso bestimmt, wie beim Sextanten bei (1) § 37. S. 192 angegeben ist, nämlich:

$$c = 36' \quad (7)$$

Ogleich diese directe Bestimmung von  $c$  ganz sicher und einfach ist, berechnen wir doch, ehe wir weiter gehen, auch  $c$  mittelbar aus den Messungen (1) selbst, weil die Stellen von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in der Nähe der Fäden nur durch Schätzung bestimmt waren, wobei im Vergleich mit der nachherigen einmaligen Messung von  $c$  eine in constantem Sinn wirkende Differenz nicht unmöglich ist. Wenn man (5) und (6) addirt, so erhält man:

$$d_1 + d_2 = 2c^2 \tan \frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

oder 
$$d_1 + d_2 = \frac{120}{c'} c^2 \tan \frac{\alpha}{2} = [\log = 8.54291] \tan \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

wenn  $d_1$  und  $d_2$  in Secunden und  $c$  in Minuten gerechnet wird. Wendet man die Gleichung (9) auf die 9 Fälle der Tabelle (1) an, und löst jedesmal nach  $c$  auf, so erhält man folgende 9 Werthe  $c$ :

$$c = 37' \quad 16' \quad 31' \quad 33' \quad 37' \quad 38' \quad 40' \quad 39' \quad 36'$$

das einfache Mittel gibt 34' nahezu wie (7). Würde man den Werthen, welche aus grösseren  $d_1 + d_2$  berechnet sind, welche also relativ sicherer bestimmt sind, mehr Gewicht geben, so würde das Mittel  $c$  etwas grösser. Wir behalten nach dieser befriedigenden Uebereinstimmung den ursprünglichen Werth  $c = 36'$  nach (7) bei. Der constante Winkel  $\beta$  wurde = 71° 20' gefunden (vgl. S. 235).

Indem die Rechnung ganz dem Muster von § 37. S. 193 folgt, haben wir aus (5) und (6) die Fehlergleichungen:

$$v_1 = + ai - bn + l_1 \tag{10}$$

$$v_2 = - ai + bn + l_2 \tag{11}$$

wo  $a$   $b$  und  $l$  folgende Bedeutungen haben:

$$a = 2c \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{120}{\rho'} c \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = [\log = 0.09921] \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

$$b = 2c \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) = [\log = 0.09921] \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left( \beta + \frac{\alpha}{4} \right) \tag{13}$$

$$l_1 = D - d_1 \quad l_2 = D - d_2$$

$$\text{wo } D = c^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 60 \frac{c^2}{\rho'} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = [\log = 1.95448] \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

Hiernach ist Folgendes berechnet, und es sind sofort auch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler  $v$  zugefügt:

Nummer	$a$	$b$	$D$	beobachtet		ausgeglichen						
				$d_1$	$d_2$	$l_1$	$l_2$	$d_1$	$d_2$	$v_1$	$v_2$	
1 <sub>1</sub> u. 1 <sub>2</sub>	+ 0,32	+ 0,06	+ 6"	- 9"	+ 21"	+ 15"	- 15"	- 7"	+ 18"	+ 2"	- 3"	
2 <sub>1</sub> „ 2 <sub>2</sub>	+ 0,81	+ 0,03	+ 15	- 40	+ 46	+ 55	- 31	- 17	+ 46	+ 23	0	
3 <sub>1</sub> „ 3 <sub>2</sub>	+ 1,34	- 0,12	+ 24	- 31	+ 66	+ 55	- 42	- 29	+ 77	+ 2	+ 11	
4 <sub>1</sub> „ 4 <sub>2</sub>	+ 1,76	- 0,30	+ 32	- 48	+ 102	+ 80	- 70	- 39	+ 103	+ 9	+ 1	
5 <sub>1</sub> „ 5 <sub>2</sub>	+ 2,16	- 0,48	+ 39	- 36	+ 119	+ 75	- 80	- 49	+ 126	- 13	+ 7	
6 <sub>1</sub> „ 6 <sub>2</sub>	+ 2,82	- 0,83	+ 51	- 51	+ 166	+ 102	- 115	- 65	+ 166	- 6	0	
7 <sub>1</sub> „ 7 <sub>2</sub>	- 5,92	+ 5,02	- 106	+ 135	- 399	- 241	+ 293	+ 152	- 365	+ 17	+ 34	
8 <sub>1</sub> „ 8 <sub>2</sub>	- 2,16	+ 2,87	- 39	+ 50	- 140	- 89	+ 101	+ 61	- 139	+ 11	+ 1	
9 <sub>1</sub> „ 9 <sub>2</sub>	- 1,08	+ 2,41	- 19	+ 28	- 68	- 47	+ 49	+ 36	- 75	+ 8	- 7	
											(v v) = 2683	

Zur Bildung der Normalgleichungen empfahl es sich, die  $l$  in Einheiten von 100'' zu nehmen, also in der ersten Gruppe  $l_1 = + 0,15$ ,  $l_2 = - 0,15$  etc., damit wurden die Normalgleichungen:

$$+ 118,30 i + 84,44 n + 50,95 = 0$$

$$+ 85,08 n + 37,64 = 0$$

$$22,28 = [U]$$

Die Auflösung gab:

$$i = (- 0,394 \pm 0,022) 100 = - 39' \pm 2' \tag{15}$$

$$n = (- 0,051 \pm 0,026) 100 = - 5' \pm 3' \tag{16}$$

$$[U \cdot 2] = (0,268) 100^2 = 2680 \text{ hinreichend} = (v v) = 2683$$

mittlerer Fehler einer Bestimmung von  $d$ :

$$m_1 = \sqrt{\frac{2680}{18-2}} = \pm 13'' \tag{17}$$

Diese Resultate sind offenbar ganz befriedigend, die mittleren Fehler  $\pm 2'$  und  $\pm 3'$  sind nicht grösser, als man sie auch bei directen Be-

stimmungen erhalten haben würde, und die indirecten Bestimmungen haben den grossen Vorzug, dass sie ganz genau der Handhabung des Instruments bei wirklichen Messungen angepasst sind. Dass der mittlere Fehler eines einzelnen beobachteten  $d$  immer noch  $= \pm 13''$  ist, obgleich jedes solches  $d$ , wie Eingangs berichtet ist, das Mittel aus 15 Einstellungen ist, kann nicht verwundern, denn diese Einstellungen, mit Schätzung der Höhenlage, ein wenig unter oder über einem Faden, werden, — namentlich wenn  $\alpha$  in die Nähe von  $180^\circ$  kommt, — durch kleine Verschiedenheiten der Höhe bereits empfindlich getroffen.

Die nun als definitiv anzunehmenden Neigungen

$$i = -39' \pm 2' \quad n = -5' \pm 3' \quad (18)$$

stimmen ziemlich mit den früher mitgetheilten directen Bestimmungen (s. § 34. (3) S. 177 und (4) S. 179):

$$i = -32' \text{ und } n = -8' \quad (19)$$

Dabei ist nicht sicher, ob das Instrument in beiden Fällen (die Bestimmung (18) ist im September 1883, (19) im Juli 1884 gemacht), genügend gleich war.

Man kann nun mit den Werthen (18) nach der Formel (25) § 47. S. 242 und mit den Coefficienten der Tabelle § 47. S. 243 eine Correctionstabelle für unser Instrument berechnen (die Coefficienten von § 47. S. 243 gelten zunächst für  $\beta = 70^\circ$ , während unser Instrument  $\beta = 71^\circ 20'$  hat, doch macht dieser Unterschied wenig aus). Die so gefundenen Hauptwerthe sind:

$\alpha = 30^\circ$	$90^\circ$	$170^\circ$	$190^\circ$	$270^\circ$	$320^\circ$
$\alpha - \alpha' = +7''$	$+27''$	$+5'46''$	$-5'58''$	$-39''$	$-21''$

### § 49. Prismatischer Fehler des (grossen) Spiegels des Spiegel-Prismenkreises.

Der prismatische Spiegelfehler wirkt ähnlich wie beim Sextanten (§ 38. S. 297). Die Unsymmetrie des Prismas wirkt constant und geht in den Indexfehler ein, wie früher beim Sextanten der Fehler des kleinen Spiegels; wir lassen daher das Prisma sofort ausser Betracht und haben nun nach Fig 1. für planparallelen Spiegel:

$$\alpha = 2\beta - 2\gamma \quad (1)$$

für prismatischen Spiegel:

$$\alpha' = 2\beta - (\gamma + \gamma') \quad (2)$$

$$\alpha - \alpha' = \gamma' - \gamma \quad (3)$$

Nach (6) § 38. S. 196 ist:

Fig. 1.  
Prismatischer Fehler  $\delta$  des grossen Spiegels.

